

**ANALIZA PRIGUŠENJA KONSTRUKCIJE TIPa LJUSKE OD LEGURE TITANA U  
POREĐENJU SA KONSTRUKCIJOM OD LEGURE ALUMINIJUMA**

**ANALYSIS OF STRUCTURAL DAMPING OF TITANIUM ALLOY SHELL STRUCTURES AS  
COMPARED WITH THAT OF ALUMINIUM ALLOY STRUCTURES**

Originalni naučni rad / Original scientific paper

UDK /UDC: 620.1:669.295

Rad primljen / Paper received: 30.9.2009.

Adresa autora / Author's address:

<sup>1</sup>) „Prva petoletka - R&D“, Trstenik

<sup>2</sup>) Innovation Centre, Faculty of Mechanical Engineering,  
University of Belgrade [asedmak@mas.bg.ac.rs](mailto:asedmak@mas.bg.ac.rs)

**Ključne reči**

- titan
- dinamička analiza
- sopstvena frekvencija
- prigušenje konstrukcije

*Izvod*

*U ovom radu se razmatra mehaničko ponašanje konstrukcije od legure titana sa aspekta određivanja osnovnih dinamičkih karakteristika.*

*Analiziran je numerički model za konstrukcije legure titana tipa ljuske (osnovni konačni element ima 20 stepeni slobode), sa ekvivalentnom savojnom krutošću u osnovnoj ravni kretanja, prvenstveno sa aspekta prigušenja konstrukcije.*

*Dobijeni rezultati pokazuju da je prigušenje konstrukcije kod razmatranog modela legure titana nešto manje u odnosu na prigušenje kod modela zasnovanih na drugim analiziranim materijalima sa različitim specifičnim modulom elastičnosti kao i kod konstrukcija sa različitim bezdimenzionim koeficijentom prigušenja.*

*Rezultati su prikazani tabelarno i grafički.*

**UVOD**

Pošto se vazduhoplovno tehničke konstrukcije tipa ljuske (oplate, nosači, protivpožarne ploče) pretežno dimenzionišu prema matrici krutosti, najvažniji zadatak je uneti najveći specifični modul elastičnosti materijala radi dobijanja više sopstvenih frekvencija u datoj konstrukciji ekvivalentne krutosti.

S druge strane, za ciljano dinamičko ponašanje konstrukcije, neophodno je odrediti adekvatno prigušenje date konstrukcije. Stoga, izabrani materijali moraju ispuniti najbolji odnos ( $a/m$ ) kao uslov za postizanje date objektivne funkcije.

Legure aluminijuma i titana su posebno značajne kod kojih se razmatra veliki specifični modul elastičnosti i visoke vrednosti mehaničkih osobina sa porastom temperature.

Prigušenje konstrukcije je takođe važno kao jedna od promenljivih u analizama dinamičkih struktura.

Rezultati proračuna modela konstrukcije legure Ti su upoređeni sa rezultatima dobijenim na modelu konstrukcije na bazi legure Al, koje se široko upotrebljavaju u vazduhoplovstvu.

**Keywords**

- titanium
- dynamic analysis
- natural frequency
- structural damping

*Abstract*

*This paper considers mechanical behaviour of a titanium structure with regards to the determination of basic dynamic properties.*

*A numerical example is analysed for titanium shell structural models (the basic finite element has 20 degrees of freedom), with the equivalent bending stiffness in the basic plane of motion, primarily with regards to structural damping.*

*The obtained results show that structural damping of the considered titanium model is somewhat lower than that of the damping of models based on other analysed materials with different specific modulus of elasticity and in structures with a different nondimensional coefficient of structural damping.*

*Results are presented in tabular and graphical form.*

**INTRODUCTION**

Since aero-technical shell structures (skins, fairings, firewalls) are usually dimensioned according to stiffness matrix the most important objective will be to include maximum specific modulus of elasticity of material to provide more natural frequencies of the considered structures of equivalent stiffness.

On the other hand, for target dynamic behaviour of structures it is necessary to determine the adequate structural damping. Therefore, the chosen materials must satisfy the best ratio ( $a/m$ ) conditions for obtaining the usual objective function.

Aluminium and titanium alloys are particularly significant taking into consideration the high specific modulus of elasticity and high mechanical properties with increasing temperature.

Structural damping is also important as one of the variables in dynamic structural analyses.

The results of calculations of the Ti alloy structural model will be compared to results of the model based on Al alloy, widely applied in aeronautics.

Ova razmatranja se odnose na osnovnu dinamičku analizu generalisane strukture na bazi metode konačnih elemenata, upotrebom ravnih elemenata tipa ljuski sa određenim stepenima slobode. Osnovni parametri (sopstvene frekvencije, modovi oscilovanja i prigušenja konstrukcije) se određuju iz osnovnih jednačina teorije elastičnosti i dinamičke analize sa izraženim karakteristikama inercije, prigušenja konstrukcije i krutosti konstrukcije.

TEORIJSKI ASPEKTI DYNAMIČKE STRUKTURALNE ANALIZE

Dinamički modeli strukturalne analize se zasnivaju na odgovarajućim statičkim modelima, na prihvaćenom broju i obliku konačnih elemenata i utvrđenim matricama inercije, prigušenju konstrukcije i krutosti konačnih elemenata.

U ovom slučaju će se koristiti ravan element tipa ljuske sa 20 stepeni slobode.

Ljuska je geometrijski određena ako su funkcije srednje površine i debljina ljuske u svakoj tački elementa definisani.

Počev od ove definicije, uslova ravnoteže, Hukovog zakon za vezu napona i deformacije materijala, oblika elemenata, sl. 1, moguće je postaviti osnovne jednačine teorije elastičnosti za ljuske, jedn. (1) i (2).

Iz ovih izraza i principa osnovnih definicija metode konačnih elemenata (MKE), prema /1, 2/, može se odrediti matrica krutosti – elemenata. Izrazi za matricu inercije – kao i za matricu prigušenja konstrukcije – će se uzeti iz literature, /2/.

These considerations concern the basic dynamic analysis of the generalised structure based on finite element method using flat shell elements with degrees of freedom. The basic parameters (natural frequencies, modes of oscillations and structural damping) will be determined from basic equations of the theory of elasticity and dynamic analysis which expressed characteristics of inertia, structural damping and stiffness of structures.

THEORETICAL ASPECTS OF DYNAMIC STRUCTURAL ANALYSIS

The dynamic models for structural analysis are based on corresponding static models, on the accepted number and shape of finite elements and determined matrices of inertia, structural damping and stiffness of finite elements.

In this case a flat shell element with 20 degrees of freedom will be used.

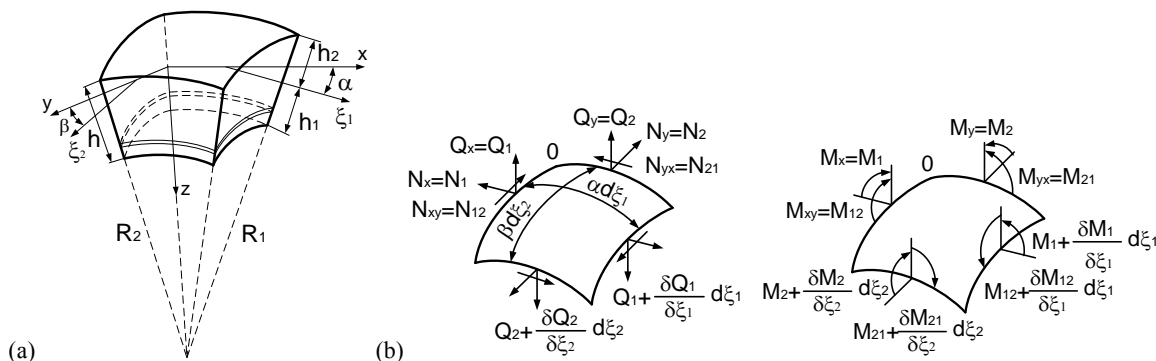
The shell's geometry is determined if the functions of the middle surface and shell thickness in every point of the element are defined.

Starting from this definition, equilibrium conditions, Hooke's law between stress and strain of the material, element shape, Fig. 1, it is possible to set up basic equations of the theory of elasticity for shells, Eqs. (1) and (2).

From these equations and principles of basic definitions of the finite element method (FEM), from /1, 2/, the stiffness matrix – of the element can be obtained. The expression for the matrix of inertia – and the matrix of structural damping – will be taken over from /2/.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ Q_x \\ M_x \\ M_{xy} \end{Bmatrix}^T = \int_{-h_1}^{h_2} \{\sigma^*\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \tag{1}$$

$$\begin{Bmatrix} N_y \\ N_{yx} \\ Q_y \\ N_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix}^T = \int_{-h_1}^{h_2} \{\sigma^{**}\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \tag{2}$$



Slika 1. Ravan element ljuske: a) geometrijski parametri, b) elementarne sile u srednjoj ravni ljuske  
 Figure 1. Flat shell element: a) geometric parameters, b) elementary forces in middle plane of shell.

Ako je vektor sila u čvorovima privremena funkcija –  $\{F(t)\}$ , strukturalna analiza se zasniva na jedn. (3), koje se dobija kao rezultat ekvivalentnih radova spoljnog opterećenja duž virtualnih pomeranja, /1, 3/.

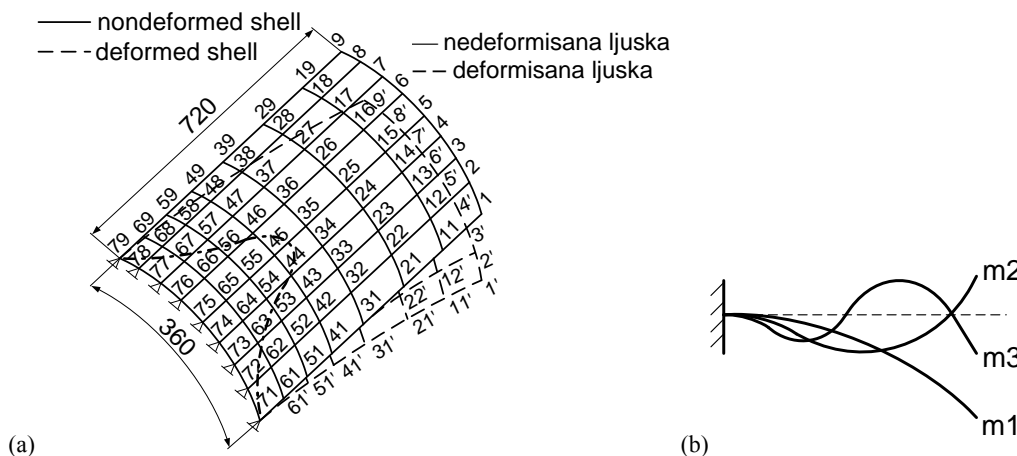
$$[m]_k \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta)_k + [b]_k \frac{\partial}{\partial t}(s)_k + [K]_k (\delta)_k = (F(t))_k \tag{3}$$

Principi za sastavljanje globalne matrice inercije –  $[M]$ , prigušenja konstrukcije –  $[B]$  i krutosti –  $[K]$ , za numeričku identifikaciju strukturalnog sistema, sl. 2, se formulišu prema literaturi /1, 2/. Nakon toga, konačna jednačina za prinudne oscilacije diskretizovane strukture dobija se kao

$$[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta) + [B] \frac{\partial}{\partial t}(\delta) + [K](s) = \{F(t)\} \tag{4}$$

If the vector of nodal forces is a temporal function –  $\{F(t)\}$ , structural analysis is based on Eq. (3), which is the result of equivalent works of external loading with virtual displacements, /1, 3/.

The principles for assembling global matrices of inertia –  $[M]$ , structural damping –  $[B]$ , and stiffness –  $[K]$ , for numerical identification of structural system, Fig. 2, will be set up according to /1, 2/. After that, the final equation for forced oscillations of the discretised structure can be obtained as



Slika 2. Numerička identifikacija strukturalnog sistema: a) strukturalni model, b) modus oscilacija  
Figure 2. Numerical identification of the structural system: a) structural model, b) modus of oscillations.

Matrice inercije i krutosti se izračunavaju bez ikakvih poteškoća, ali određivanje matrice prigušenja konstrukcije se često javlja kao problem, jer se ne može definisati opšti izraz za određivanje koeficijenta prigušenja za različite oblike konstrukcija i različite materijale. Potrebna su eksperimentalna istraživanja za određivanje prigušenja sličnih modela, /2/.

The matrices of inertia and stiffness are calculated without any difficulties, but determination of the structural damping matrix usually appears as a problem, because the general expression for determination of damping coefficient of different shapes of structures and different materials can not be defined. Experimental research is necessary for determining the damping of similar models, /2/.

SOPSTVENE FREKVENCIJE I MODOVI OSCILACIJE KONSTRUKCIJE

NATURAL FREQUENCIES AND OSCILLATION MODES OF THE STRUCTURE

U opštem slučaju, osnovna jednačina problema određivanja sopstvenih parametara strukturalnog modela je izražena kao, /1, 5/:

In the general case, the basic equation of the problem of determining natural parameters of a structural model is expressed as, /1, 5/:

$$[M] \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta) + [K](\delta) = (0) \tag{5}$$

Izrazi za pomeranje konstrukcije su  $(\delta_i(t)) = (\delta_i^0) e^{i\omega t}$ , gde je  $\omega$  sopstvena kružna frekvencija, a  $t$  je vreme. Zatim sledi:

The expressions for displacement of the structure are  $(\delta_i(t)) = (\delta_i^0) e^{i\omega t}$ , where  $\omega$  is the natural circular frequency, and  $t$  is time. There follows:

$$(-\omega^2 [M] + [K])(\delta^0) = (0) \tag{6}$$

Iz izraza (6) rešenja se mogu dobiti iz uslova (7), poznatim kao jednačina frekvencije.

From Eq. (6) the solutions can be obtained from condition (7), known as the frequency equation.

$$D = \det \left| -\omega^2 [M] + [K] \right| = 0 \tag{7}$$

Veze između rešenja iz jedn. (7) su poznate iz teorije oscilacija. Dodeljivanjem izračunatih vrednosti pojedinim sopstvenim frekvencijama  $-\omega$  u (6), odgovarajući izrazi (8) se mogu dobiti kao,

$$(-\omega_i^2 [M] + [K])(\delta_i^0) = (0) \tag{8}$$

Kada se sistem homogenih algebarskih jednačina normira, na primer sa  $\delta_i^0 = 1$ , tada modalna matrica  $[\mu]$ , jedn. (9) konačno dobija oblik

$$[\mu] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Relations between the solutions from Eq. (7) are known from theory of oscillations. Assigning calculated values to some natural frequencies  $-\omega$  in (6), the corresponding expressions (8) can be obtained,

When the system of homogeneous algebraic equations is normed, as an example with  $\delta_i^0 = 1$ , the modal matrix  $[\mu]$ , Eq. (9) will finally be obtained as

PRIGUŠENJE KONSTRUKCIJE

Prigušenje konstrukcije se eksperimentalno određuje prema obliku amplitudne obvojnice (anvelope) sopstvenih oscilacija sa prvim osnovnim modom strukture, /4, 5/. Rešenje osnovnih jedn. (10) i (11) za male oscilacije sa jednim stepenom slobode se mogu napisati kao jedn. (12).

$$[M](\ddot{x}) + [B](\dot{x}) + [K](x) = (0) \tag{10}$$

$$(\dot{x}) + [M]^{-1}[B](\dot{x}) + [M]^{-1}(K)(x) = (0) \tag{11}$$

$$x(t) = Re^{-\delta t} \cos(pt + \alpha) \tag{12}$$

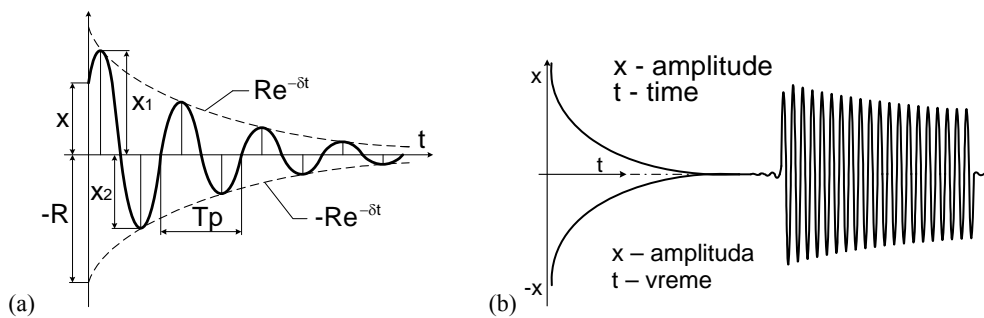
Ako se veličine  $x_1(t_1)$  i  $x_2(t_2)$  uzmu sa oscilograma na sl. 3, onda se koeficijent prigušenja može dobiti iz jedn. (13).

$$\delta = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \left( \frac{x_1}{x_2} \right) \tag{13}$$

STRUCTURAL DAMPING

The structural damping will be experimentally determined according to the shape of amplitude envelope of the natural oscillation with first basic transversal mode of structure, /4, 5/. The solution of the basic Eqs. (10) and (11) for small oscillations with one degree of freedom can be written as Eq. (12).

If the values  $x_1(t_1)$  and  $x_2(t_2)$  are taken from the oscillogram in Fig. 3, then the coefficient of damping can be obtained from Eq. (13).



Slika 3. Teorijski i realni oscilogram: a) osnovni model za male oscilacije; b) oscilogram.  
Figure 3. Theoretical and real oscillogram: a) basic model for small oscillations; b) oscillogram.

Uvrštavanjem relacije za sopstvenu učestanost bez prigušenja  $-\omega$  i frekvencije sa prigušenjem  $-\omega_d$  u izraz (13), kao rezultat dobijamo jedn. (14).

Ovim se popravlja vrednost prigušenja za manje od 2%, jer se uobičajene vrednosti relativnog prigušenja kod realnih konstrukcija manje od 20%, /2/.

$$\delta = \frac{1}{t_2 - t_1} \left( \frac{\omega_d}{\omega} \right) \ln \left( \frac{x_1}{x_2} \right) \tag{14}$$

By including the relation of natural frequency without damping  $-\omega$  and the frequency with damping  $-\omega_d$  in expression (13), as a result we get Eq. (14).

This improves the value of solution of damping by less than 2%, because the usual values of relative damping in real structures are less than 20%, /2/.

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - c^2} \tag{15}$$

Ako se prigušenje konstrukcije redukuje na sopstvenu frekvenciju, dobija se bezdimenzioni koeficijent prigušenja konstrukcije  $-\zeta, /4/$ .

If the structural damping is reduced to the natural frequency, the nondimensional coefficient of structural damping  $-\zeta, /4/$ , can be obtained.

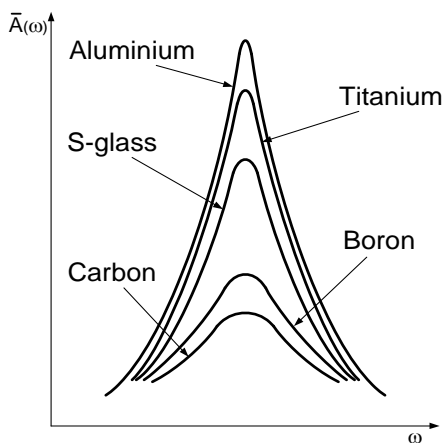
$$\varepsilon = \delta / \omega \tag{16}$$

Rezultati istraživanja od strane autora su šire razmotreni u */4/*.

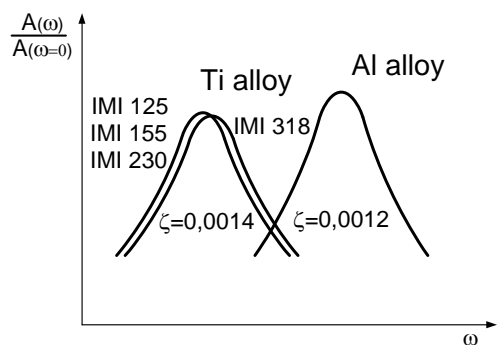
The results of investigations by the author are widely treated in */4/*.

Funkcije  $A(\omega)$  za nekoliko materijala su prikazane na sl. 4.

The functions  $A(\omega)$  for several different materials are shown in Fig. 4.



Slika 4. Karakteristike prigušenja  
Figure 4. Damping characteristics.



Slika 5. Karakteristike amplituda/frekvencija  
Figure 5. Amplitude/frequency characteristics.

PRIMER

EXAMPLE

Sopstvene frekvencije i prigušenje konstrukcije za model ljuske dat na sl. 2 su prikazani za različite materijale (Ti, legura Ti i legura Al).

The natural frequencies and structural damping for the shell model shown in Fig. 2, are presented for different materials (Ti, Ti alloy and Al alloy).

Proračuni su izvedeni prema gornjim navedenim jednačinama sa softverom koji je razvio autor (softver nije prikazan u ovom radu). Istraživanja se zasnivaju na primeni metode frekvencija sa računatom silom pobude u oblasti modela konstrukcija sa osloncem, */4/*.

The calculations are performed according to the above quoted equations and software developed by the author (the software is not included in this paper). Investigations are based on application of frequency method with included excitation force in the area of structural model support, */4/*.

Rezultati su prikazani u tabeli 1 i na sl. 5.

The results are represented in Table 1 and in Fig. 5.

Tabela 1. Rezultati karakterističnih parametara dobijeni softverskim paketom autora  
Table 1. Results of characteristic parameters calculated with the software package of the author.

Materijal (Material)	Modul elastičnosti E (Young's modulus E)	Gustina $\rho$ Density $\rho$	(E/ $\rho$ )	$\omega$	$\zeta, /4/$	$\delta$
	GPa	$10^3$ (kg/m <sup>3</sup> )	$100 \times$ (m/s)	s <sup>-1</sup>	-	s <sup>-1</sup>
IMI 125	105	4.51	2328	31.2	.0014	.044
IMI 155	112.5	4.51	2495	31.8	.0014	.045
IMI 230	115	4.56	2522	31.6	.0014	.044
IMI 318	120	4.42	2715	32.5	.0014	.045
Al legura Al alloy	73.5	2.80	2625	39.9	.0012	.048

ZAKLJUČAK

CONCLUSION

Dinamička strukturalna analiza konstrukcije od Ti ljuske zasniva se na principima analize izotropnih struktura sa opštim geometrijskim oblicima. Specifičnosti elemenata Ti ljuske su unete u matrice krutosti i u matricu prigušenja konstrukcije. Ove matrice su bitne za buduće analize i proračune karakteristika amplituda/frekvencija konstrukcija tipa ljuski.

The dynamic structural analysis of Ti shell structure has been based on principles of analyses of isotropic structures with general geometric forms. The specific of Ti shell elements have been included in stiffness matrices and in the matrix of structural damping. These matrices are important for following analyses and calculations of the amplitude/frequency characteristics of shell structures.

Dobijeni rezultati su pokazali da je prigušenje konstrukcije razmatranih Ti modela nešto manje od prigušenja konstrukcije na bazi Al legure, jer analizirani materijali imaju različite specifične module elastičnosti, dok odgovarajuće konstrukcije imaju različite bezdimenzione koeficijente prigušenja, /4/.

The obtained results have shown the structural damping of the considered Ti models to be somewhat lower than damping of the structure based on Al alloy, because the analysed materials have different specific modules of elasticity while the respective structures have different nondimensional damping coefficients, /4/.

#### LITERATURA – REFERENCES

1. Przemieniecki, J.S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, New York, NY, 1968.
2. Sekulović, M., Metod konačnih elemenata, IRO Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
3. Zienkiewicz, O.C., The Finite Element in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971.
4. Tomić, R., Structural damping of titanium and titanium alloy, report IVT/121-RU-09, Mostar, 1988.
5. Tomić, R., *The natural frequency analysis of the gear pump housing with high pressure*, MVM-Vol. 29, No. 2 & 3, Kragujevac, June-September 2003, p.73-79.