

# **О брахистохронных движениях твердых тел с различными ограничениями реакции связи**

Александр Обрадович, профессор, научный советник  
Машиностроительный факультет Белградского университета,  
Кафедра механики, Кральице Марие 16, 11120 Белград 35  
[aobradovic@mas.bg.ac.rs](mailto:aobradovic@mas.bg.ac.rs)

Первая часть: Реализация брахистохронного движения твердого тела в вертикальной плоскости с помощью реально шероховатых центроид

Вторая часть: Реализация брахистохронного движения саней Чаплыгина в вертикальной плоскости с односторонней неголономной связью

Третья часть: Краткое описание брахистохронного движения с ограниченными реакциями связи с использованием активного управления

## От Москвы до Белграда (учителя и ученики)



- **Гавриил Константинович Суслов** (1857—1935) “научный пращур”  
«О силовой функции, допускающей данные частные интегралы», Москва, 1890, докторская диссертация



- **Пётр Васильевич Воронец** (1871—1923) “научный прапрадедушка”  
«Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости», Киев, 1903, магистерская диссертация  
«Преобразование уравнений динамики с помощью линейных интегралов движения (с приложением к задаче об  $n$  телах)», Киев, 1906, докторская диссертация



- **Антон Дмитриевич Билимович** (1879—1970) “научный прадедушка”  
«Соприкасательные движения твердого тела», Одесса, 1919, монография, в качестве докторской диссертации



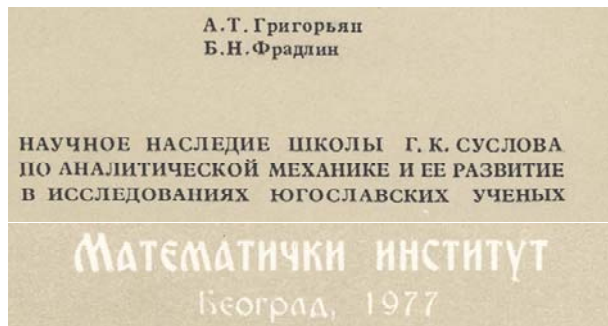
- **Велько Вуйчич** (1929—2020) “научный дедушка”  
«Движение динамически изменяющихся объектов и его устойчивость (на сербском языке)», Белград, 1962, докторская диссертация, Константин Петрович Воронец (1902—1974) член комиссии



- **Йосиф Вукович** (1940—2014) “научный отец”  
«Оптимальное управление движением механических систем (на сербском языке)», Белград, 1984, докторская диссертация



- **Александр Обрадович** (1962)  
«Особые оптимальные управления механических систем (на сербском языке)», Белград, 1995, докторская диссертация



Мы проследили научные связи в области механики на протяжении нескольких поколений, установившиеся между учеными России и Югославии, принадлежащими к школе СУСЛОВА-ВОРОНЦА-БИЛИМОВИЧА. При этом картина преемственности имеет следующий вид: П.В. ВОРОНЕЦ - ученик СУСЛОВА, БИЛИМОВИЧ - ученик П.В. ВОРОНЦА, АНГЕЛИЧ - ученик БИЛИМОВИЧА, ВУЙЧИЧ и СТОЯНОВИЧ - ученики БИЛИМОВИЧА и АНГЕЛИЧА, ВУЯНОВИЧ - ученик БИЛИМОВИЧА, АНГЕЛИЧА и СТОЯНОВИЧА, ДЖУНИЧ - ученики АНГЕЛИЧА, ВУЯНОВИЧА и ВУЙЧИЧА. К этой славной плеяде русских и югославских механиков следует также причислить сына П.В. ВОРОНЦА - академика Сербской Академии наук и искусств КОНСТАНТИНА ПЕТРОВИЧА ВОРОНЦА (1902-1974), который защитил у А. БИЛИМОВИЧА (докторскую) диссертацию по неголономной механике "Натяжение твердого тела по упругому основанию" и который, позже, посвятил свою работу механике непрерывных сред.

Дмитрий Константинович Бобылев (1842 — 1917), учитель Суслова,

его ученики: Иван Всеволодович Мещерский (1859 — 1935) и Александр Михайлович Ляпунов (1857-1918) ...

# Сотрудничество с ММФ МГУ (брахистохронное движение механических систем)



Олег Юрьевич Черкасов, Кафедра прикладной механики и управления, механико-математический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова

- Obradović A.**, Cherkasov O., Miličić L., THE BRACHISTOCHRONIC MOTION OF CHAPLYGIN SLEIGH IN A VERTICAL PLANE WITH UNILATERAL NONHOLONOMIC CONSTRAINT, T.4.3, 9th International Congress of Serbian Society of Mechanics Vrnjačka Banja, Serbia, July 5-7, 2023
- Obradović A.**, Cherkasov O., Realization of the brachistochronic motion of a rigid body in a vertical plane using real rough centroids , 3rd CONFERENCE ON NONLINEARITY, 4—8.09.2023, Belgrade, Serbia
- Obradović A.**, Cherkasov O., Miličić L., Šalinić S., REALIZATION OF THE BRACHISTOCHRONIC MOTION OF CHAPLYGIN SLEIGH IN A VERTICAL PLANE WITH UNILATERAL NONHOLONOMIC CONSTRAINT, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.50, No.2, 2023

# Наш механический журнал

Editor-in-Chief

**Vladimir Dragović**

Mathematical Institute SANU, Belgrade, Serbia & University of Texas at Dallas, USA

E-mail: tam@mi.sanu.ac.rs

Deputy Editor-in-Chief

**Božidar Jovanović**

Mathematical Institute SANU, Belgrade, Serbia

Editorial Board (from Russian Federation) :

† **Alexey V. Borisov**

Udmurt State University, Russia

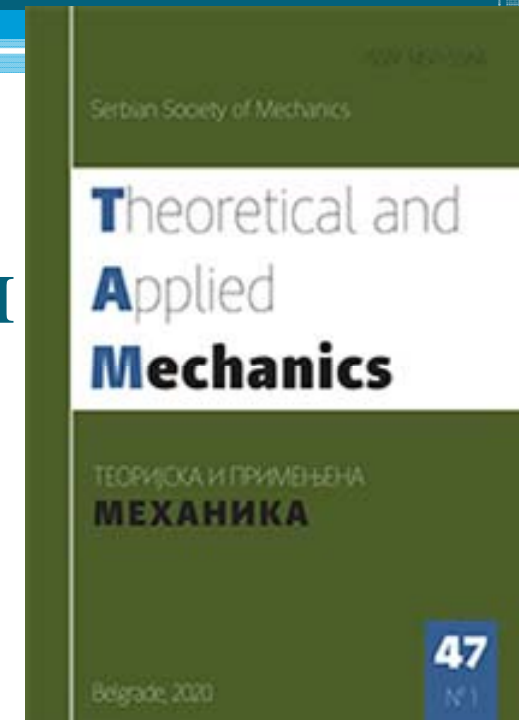
**Valery V. Kozlov**

Vice-President of the Russian Academy of Sciences

Russian Academy of Sciences & Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

**Alexander Seyranian**

Institute of Mechanics, Lomonosov State University, Moscow, Russia



## Моё единственное пребывание в Москве (район Раменки, 1997)



- Владимир Мефодьевич Матросов (1932-2011)  
Академик РАН, Президент Академии нелинейных наук
- Именем В.М. Матросова названа малая планета
- Основатель Югославского отделения академии нелинейных наук в Белграде (1998), которая переросла в Сербскую академию нелинейных наук (2018)
- Александр Обрадович, член-корреспондент Сербской академии нелинейных наук (САНН)  
<http://www.nonlinearity2023.matf.bg.ac.rs/index.php>

Александр Обрадович, «Особые управления при минимизации времени движения системы твердых тел»,  
Вторая международная конференция по нелинейным наукам, Москва, 16-18 июня 1997

## Первая часть: Реализация брахистохронного движения твердого тела в вертикальной плоскости с помощью реально шероховатых центроид

Obrodović A., Cherkasov O., Realization of the brachistochronic motion of a rigid body in a vertical plane using real rough centroids, 3rd CONFERENCE ON NONLINEARITY, 4—8.09.2023, Belgrade, Serbia

- Минимальное время между двумя заданными положениями в вертикальной плоскости при заданном значении начальной механической энергии.
- Задача формулируется и решается в замкнутой форме
- Глобальное минимальное время движения.
- Реализация этого движения также достигается исключительно за счет идеальных механических связей.
- Получены параметрические уравнения движущейся и неподвижной центроид, а также законы изменения тангенциальной и нормальной составляющих реакции связи.
- Максимальное значение коэффициента трения скольжения должно быть меньше кулоновского коэффициента трения.

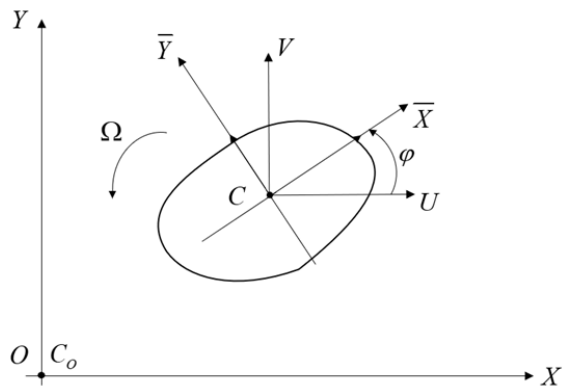


Рис. 1.1. Твердое тело в вертикальной плоскости

Механическая энергия остается неизменной:

$$\frac{1}{2}m(U^2 + V^2 + i^2\Omega^2) + mgY = mgL \quad (1.1)$$

Дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= U \\ \dot{Y} &= V \\ \dot{\phi} &= \Omega\end{aligned}\quad (1.2)$$

Безразмерные величины:

$$\begin{aligned}X &= ix, \quad Y = iy, \quad \Omega = \omega \sqrt{\frac{g}{i}}, \quad V = v\sqrt{gi}, \quad U = u\sqrt{gi}, \quad t = \tau \sqrt{\frac{i}{g}}, \quad L = il, \\ F_N &= mgF_n, \quad F_T = mgF_t, \quad \bar{X} = i\bar{x}, \quad \bar{Y} = i\bar{y}\end{aligned}\quad (1.3)$$

Уравнения состояния:

$$\begin{aligned}x' &= u \\ y' &= v \\ \varphi' &= \omega\end{aligned}\quad (1.4)$$

Сохранение механической энергии:

$$u^2 + v^2 + \omega^2 + 2y - 2l = 0 \quad (1.5)$$

Начальные условия:

$$\tau_0 = 0 \quad x(\tau_0) = 0 \quad y(\tau_0) = 0 \quad \varphi(\tau_0) = 0 \quad (1.6)$$

Конечные условия:

$$\tau_1 = ? \quad x(\tau_1) = x_1 \quad y(\tau_1) = y_1 \quad \varphi(\tau_1) = \varphi_1 \quad (1.7)$$

Управления:

$$u = u(\tau) = ?, \quad v = v(\tau) = ?, \quad \omega = \omega(\tau) = ? \quad (1.8)$$



Функционал:

$$J = \int_0^{\tau_1} d\tau = \tau_1 \quad (1.9)$$

Функция Понтрягина:

$$H = -1 + \lambda_x u + \lambda_y v + \lambda_\varphi \omega - \mu(u^2 + v^2 + \omega^2 + 2y - 2l) \quad (1.10)$$

Сопряженная система:

$$\lambda_x' = 0 \quad \lambda_y' = 2\mu \quad \lambda_\varphi' = 0 \quad (1.11)$$

Условия оптимальности:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \omega} = 0 \quad (1.12)$$

Управление, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\lambda_x}{2\mu} \\ v &= \frac{\lambda_y}{2\mu} \\ \omega &= \frac{\lambda_\varphi}{2\mu} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Множитель  $\mu$  :

$$H(\tau) = 0 \quad (1.14)$$

$$\mu(\tau) = \frac{1}{4(l-y(\tau))} > 0 \quad (1.15)$$

Условия второго порядка:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2\mu < 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} = -2\mu < 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \omega^2} = -2\mu < 0 \quad (1.16)$$

Управление, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности:

$$\begin{aligned} u &= 2(l - y)\lambda_x \\ v &= 2(l - y)\lambda_y \\ \omega &= 2(l - y)\lambda_\varphi \end{aligned} \quad (1.17)$$

Дифференциальные уравнения ГРВР:

$$\begin{aligned} x' &= 2(l - y)\lambda_x & \lambda_x' &= 0 \\ y' &= 2(l - y)\lambda_y & \lambda_y' &= \frac{1}{2(l - y)} \\ \varphi' &= 2(l - y)\lambda_\varphi & \lambda_\varphi' &= 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Общие решения:

$$\begin{aligned} y &= l - \frac{1 + \cos(p\tau + \alpha)}{p^2} \\ x &= \frac{2\lambda_x}{p^2} \left( \tau + \frac{1}{p} \sin(p\tau + \alpha) \right) + C_1 \\ \varphi &= \frac{2\lambda_\varphi}{p^2} \left( \tau + \frac{1}{p} \sin(p\tau + \alpha) \right) + C_2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

$(p, \alpha, \lambda_x, \lambda_\varphi, C_1, C_2)$  определяются вместе с неизвестным моментом  $\tau_1$  из (5), (6) и (7).

Нелинейные алгебраические уравнения:

$$0 = l - \frac{1 + \cos(\alpha)}{p^2} \quad y_1 = l - \frac{1 + \cos(p\tau_1 + \alpha)}{p^2}$$

$$\left(\frac{x_1 p^2}{2(\tau_1 + \frac{1}{p}\sin(p\tau_1 + \alpha) - \frac{1}{p}\sin(\alpha))}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_1 p^2}{2(\tau_1 + \frac{1}{p}\sin(p\tau_1 + \alpha) - \frac{1}{p}\sin(\alpha))}\right)^2 + \left(\frac{p \sin(p\tau_1 + \alpha)}{2(1 + \cos(p\tau_1 + \alpha))}\right)^2 = \frac{p^2}{2(1 + \cos(p\tau_1 + \alpha))}$$

(1.20)

Пределы решений:

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \quad -\sqrt{\frac{2}{l}} \leq p \leq \sqrt{\frac{2}{l}}, \quad 0 \leq \tau_1$$

(1.21)

Параметры задачи:

$$l = 2, \quad x_1 = -\varphi_1 = \frac{\pi+2}{2\sqrt{2}}, \quad y_1 = 1$$

(1.22)

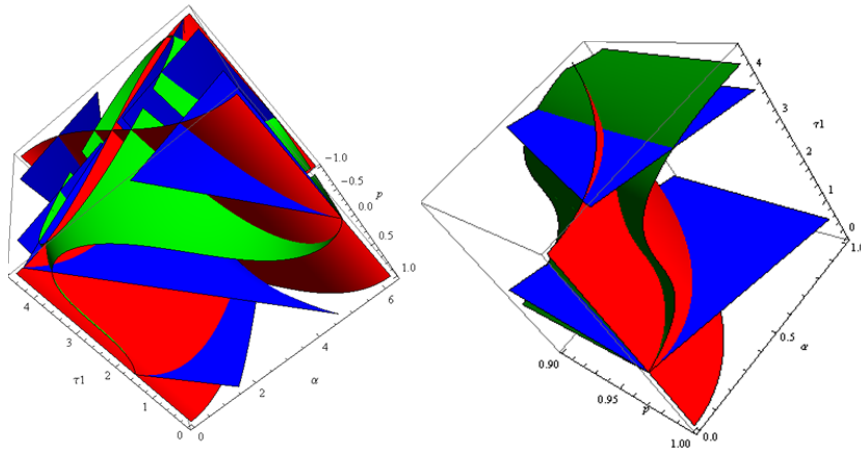


Рис. 1.2. Множественные решения TPBVP

Глобальное минимальное время:

$$\begin{aligned}
 p &= \pm 1, \quad \tau_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = 0, \\
 x &= \frac{(\tau + \sin\tau)}{\sqrt{2}}, \quad y = 1 - \cos\tau, \quad \varphi = -\frac{(\tau + \sin\tau)}{\sqrt{2}} \\
 \lambda_x &= \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \lambda_y = \frac{\sin\tau}{2(1 + \cos\tau)}, \quad \lambda_\varphi = -\frac{1}{2\sqrt{2}},
 \end{aligned}
 \tag{1.23}$$

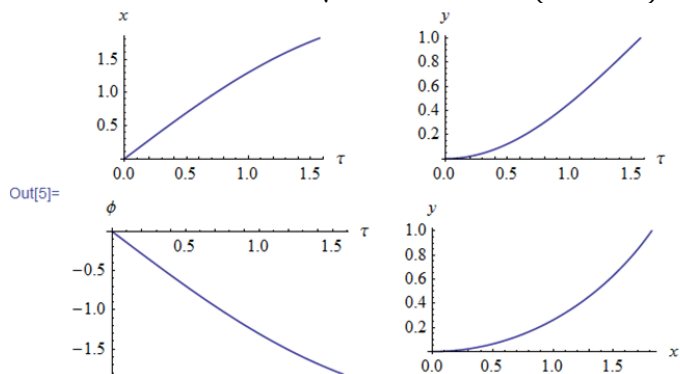


Рис. 1.3.

Первые два следующих решения (численные):

$$\begin{aligned}
 p &= 0.954626, \quad \tau_1 = 4.20981, \quad \alpha = 0.604787, \\
 p &= -0.954626, \quad \tau_1 = 4.20981, \quad \alpha = 5.678340,
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

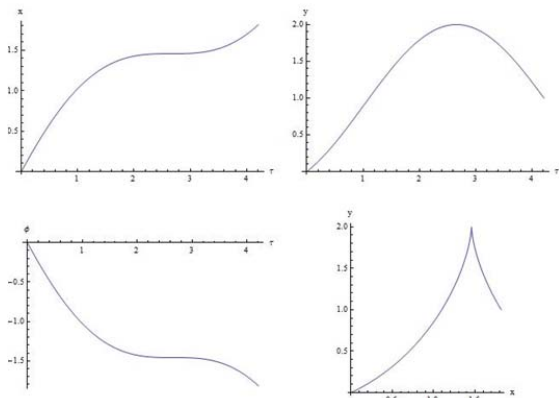


Рис. 1.4.

Obradović A., Šalinić S., Jeremić O., Mitrović Z., On the brachistochronic motion of a variable-mass mechanical system in general force fields, *Mathematics and Mechanics of Solids*, ISSN: 1081-2865, 2014, Vol. 19(4) 398–410.

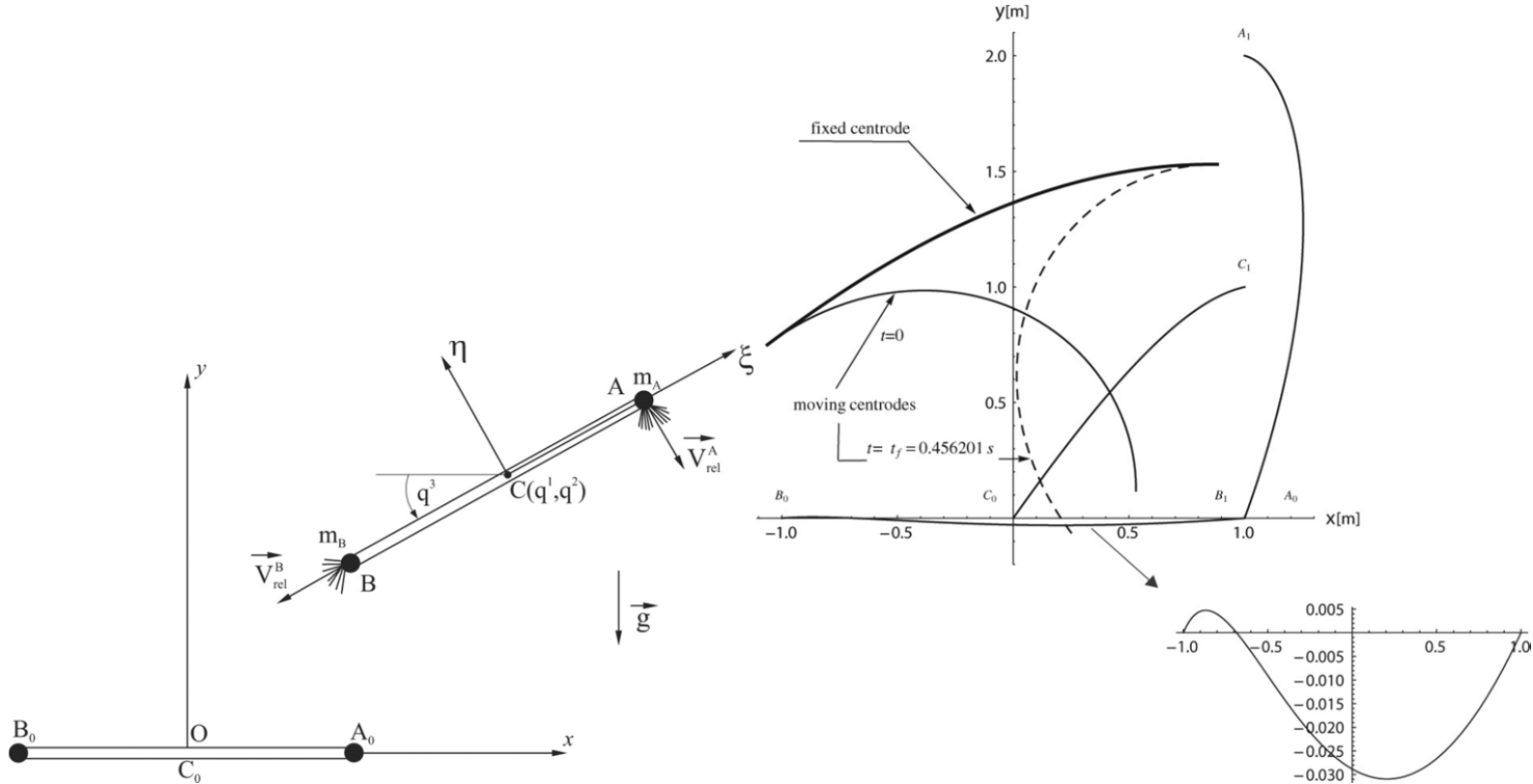


Рис. 1.5.

Уравнения фиксированной центроиды:

$$x_P = x - \frac{y'}{\varphi'} \quad , \quad y_P = y + \frac{x'}{\varphi'} \quad (1.25)$$

Движущаяся центроида:

$$\overline{x_P} = \frac{(x' \sin\varphi - y' \cos\varphi)}{\varphi'} \quad , \quad \overline{y_P} = \frac{(y' \sin\varphi + x' \cos\varphi)}{\varphi'} \quad (1.26)$$

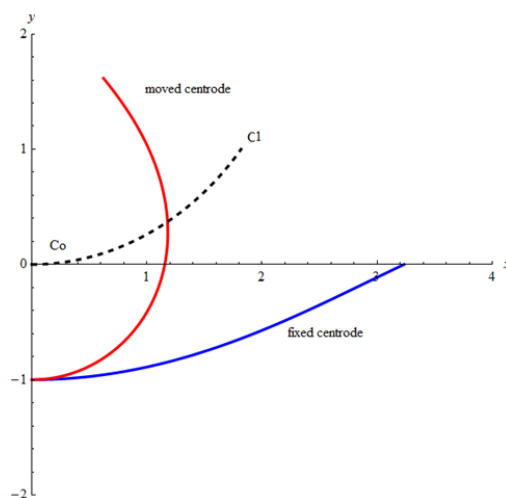


Рис. 1.6.Траектория центра масс, фиксированная центроида и движущаяся центроида в исходном положении

Закон трения Кулона:

$$-\mu_0 \leq \mu = \frac{F_t}{F_n} \leq \mu_0 \quad (1.27)$$

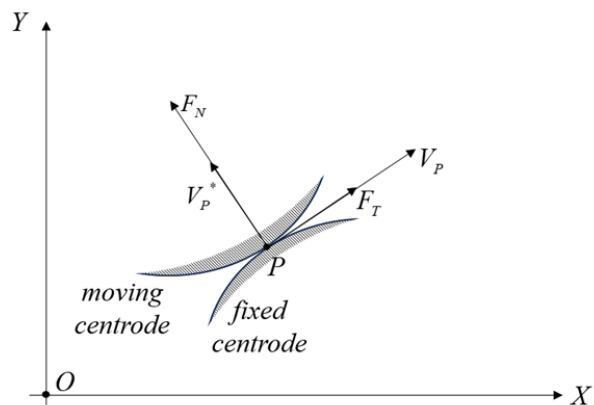


Рис. 1.7. Силы в точке контакта

Скорость  $v_P$  и вектор  $v_P^*$ :

$$v_{Px} = x'_P, \quad v_{Py} = y'_P, \quad v_{Px}^* = -y'_P, \quad v_{Py}^* = x'_P \quad (1.28)$$

Закон движения центра масс:

$$u' = F_{nx} + F_{tx}, \quad v' = F_{ny} + F_{ty} - 1 \quad (1.29)$$

Проекции реакции связи в точке P:

$$F_t = \frac{u' v_{Px} + (1+v') v_{Py}}{v_P}, \quad F_n = \frac{u' v_{Px}^* + (1+v') v_{Py}^*}{v_P} \quad (1.30)$$

Коэффициент трения:

$$\mu = \frac{u' v_{Px} + (1+v') v_{Py}}{u' v_{Px}^* + (1+v') v_{Py}^*} \quad (1.31)$$

$$\mu = \frac{(-1 + 4\cos\tau + \cos 2\tau) \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}}{4\sqrt{2}(2 + \cos\tau)} \quad (1.32)$$

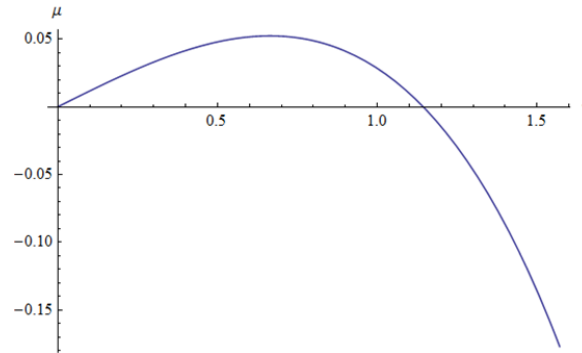


Рис. 1.8. Коэффициент трения

$$\tau = 1.14372$$

$$\mu^* = 0.176777.$$

Соотношение (5) присоединилось бы к начальным условиям (6):

$$u(0)^2 + v(0)^2 + \omega(0)^2 + 2y(0) - 2l = 0 \quad (1.33)$$

В уравнения состояния, кроме кинематических уравнений (4), пришлось бы включать и динамические уравнения:

$$x' = u$$

$$y' = v$$

$$\varphi' = \omega$$

$$u' = u_x$$

$$v' = u_y$$

$$\omega' = u_\varphi$$

(1.34)



На основании соотношения (5):

$$uu_x + vu_y + \omega u_\varphi + v = 0. \quad (1.35)$$

Ограничение вытекающее из закона трения Кулона:

$$-\mu_0 \leq \frac{u_x(u\omega^2 - u_y\omega + u_\varphi v) + (1 + u_y)(v\omega^2 + u_x\omega - u_\varphi u)}{-u_x(v\omega^2 + u_x\omega - u_\varphi u) + (1 + u_y)(u\omega^2 - u_y\omega + u_\varphi v)} \leq \mu_0 \quad (1.36)$$

Выводы первой части:

- Упрощение задачи оптимального управления.
- Аналитическое решение.
- Траектория центра масс представляет собой деформированную циклоиду.
- Глобальное минимальное время.
- Способ реализации за счет качения центроид у других авторов нам неизвестен.
- В случае идеально шероховатых поверхностей решения, полученные на основе кинематических уравнений, одновременно представляют собой брахистохронные движения.
- Также и в случае реальных шероховатых поверхностей, когда  $|\mu(\tau)| \leq \mu_0$
- В случае невыполнения этого требования приходится ставить более сложную задачу оптимального управления.

## Вторая часть: Реализация брахистохронного движения саней Чаплыгина в вертикальной плоскости с односторонней неголономной связью

Obradović A., Cherkasov O., Miličić L., Šalinić S., REALIZATION OF THE BRACHISTOCHRONIC MOTION OF CHAPLYGIN SLEIGH IN A VERTICAL PLANE WITH UNILATERAL NONHOLONOMIC CONSTRAINT, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.50, No.2, 2023

- Процедура определения брахистохронного движения саней Чаплыгина в вертикальной плоскости, где такое лезвие, что препятствует движению точки контакта только в одном направлении.
- Дана простейшая постановка соответствующей задачи оптимального управления
- Для ряда случаев найдены аналитические решения. Для остальных случаев численное интегрирование проводилось методом стрельбы, где показано, что полученное решение представляет собой глобальное минимальное время.
- Представлен метод брахистохронного движения с помощью одиночной голономной и одной односторонней неголономной механической связи.

Golubev, Y.F. Brachistochrone for a rigid body sliding down a curve. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 52, 571–587 (2013).

Valery V. Kozlov, On the Dynamics of Systems with One-sided Non-integrable Constraints, *Theoretical and Applied Mechanics*, Volume 46 (2019) Issue 1, 1–14.

Если ограничение двустороннее [Голубев Ю.Ф.], то  $V=0$ ,

В данной статье будут рассмотрены случаи односторонних ограничений, когда  $V \geq 0$  или  $V \leq 0$

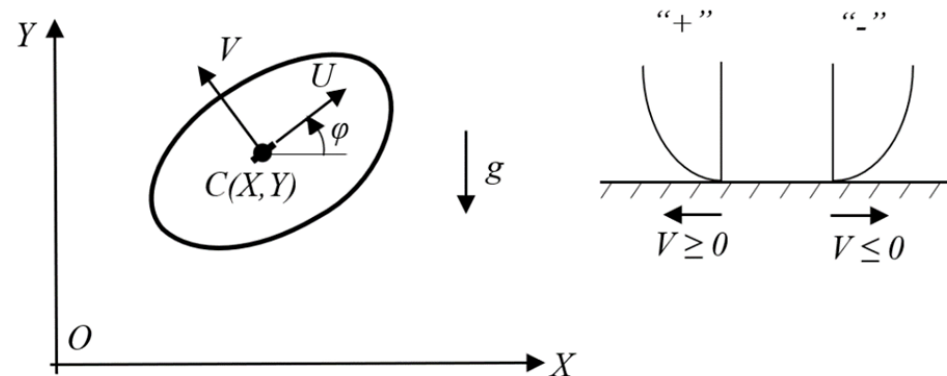


Рис. 2.1 Сани Чаплыгина в вертикальной плоскости.

Механическая энергия остается неизменной:

$$\frac{1}{2}m(U^2 + V^2 + i^2\Omega^2) + mgY = mgL \quad (2.1)$$

Дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= U \cos \varphi - V \sin \varphi \\ \dot{Y} &= U \sin \varphi + V \cos \varphi \\ \dot{\varphi} &= \Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

Безразмерные величины:

$$X = ix, \quad Y = iy, \quad \Omega = \omega \sqrt{\frac{g}{i}}, \quad V = \pm v^2 \sqrt{gi}, \quad U = u \sqrt{gi}, \quad t = \tau \sqrt{\frac{i}{g}}, \quad L = il \quad (2.3)$$

Уравнения состояния:

$$\begin{aligned} x' &= u \cos \varphi \mp v^2 \sin \varphi \\ y' &= u \sin \varphi \pm v^2 \cos \varphi \\ \varphi' &= \omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сохранение механической энергии:

$$u^2 + v^4 + \omega^2 + 2y - 2l = 0 \quad (2.5)$$

Начальные условия:

$$\tau_0 = 0 \quad x(\tau_0) = 0 \quad y(\tau_0) = 0 \quad \varphi(\tau_0) = 0 \quad (2.6)$$

Конечное положение:

$$\tau_1 = ? \quad x(\tau_1) = x_1 \quad y(\tau_1) = y_1 \quad \varphi(\tau_1) = \varphi_1 \quad (2.7)$$

Задача состоит в нахождении управлений:

$$u = u(\tau) \quad v = v(\tau) \quad \omega = \omega(\tau) \quad (2.8)$$

Минимизируемый функционал:

$$J = \int_0^{\tau_1} d\tau = \tau_1 \quad (2.9)$$

Функция Понтрягина Н:

$$H = -1 + \lambda_x(u \cos \varphi \mp v^2 \sin \varphi) + \lambda_y(u \sin \varphi \pm v^2 \cos \varphi) + \lambda_\varphi \omega - \mu(u^2 + v^4 + \omega^2 + 2y - 2l) \quad (2.10)$$

Сопряженная система:

$$\lambda_x' = 0 \quad \lambda_y' = 2\mu \quad \lambda_\varphi' = -(\lambda_x(-u \sin \varphi \mp v^2 \cos \varphi) + \lambda_y(u \cos \varphi \mp v^2 \sin \varphi)) \quad (2.11)$$

Условия оптимальности принципа максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \omega} = 0 \quad (2.12)$$

Управление, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2\mu} (\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) \\
 v^2 &= 0 \vee v^2 = \frac{\pm 1}{2\mu} (-\lambda_x \sin \varphi + \lambda_y \cos \varphi) \\
 \omega &= \frac{1}{2\mu} \lambda_\varphi
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Множитель  $\mu$ :

$$H(\tau) = 0 \tag{2.14}$$

$$\mu(\tau) = \frac{1}{4(l - y(\tau))} > 0 \tag{2.15}$$

Условия максимума функции Понтрягина:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \omega^2} < 0 \tag{2.16}$$

Критерий выбора управления:

$$\begin{aligned}
 u &= 2(l - y)(\lambda_x \cos \varphi + \lambda_y \sin \varphi) \\
 v^2 &= \begin{cases} 0, & \pm (-\lambda_x \sin \varphi + \lambda_y \cos \varphi) \leq 0 \\ \pm 2(l - y)(-\lambda_x \sin \varphi + \lambda_y \cos \varphi), & \pm (-\lambda_x \sin \varphi + \lambda_y \cos \varphi) > 0 \end{cases} \\
 \omega &= 2(l - y)\lambda_\varphi \\
 S &= -\lambda_x \sin \varphi + \lambda_y \cos \varphi
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Выбором трех параметров  $\lambda_x, \lambda_{y_1}, \tau_1$  угадываются три начальных условия (2.6), где  $\lambda_\varphi(\tau_1)$  находится на основе (2.5), (2.14) и (2.17):

$$\begin{aligned}\lambda_\varphi(\tau_1) &= \pm \sqrt{\frac{1}{2(l-y_1)} - (\lambda_x \cos \varphi_1 + \lambda_{y_1} \sin \varphi_1)^2}, v^2(\tau_1) = 0 \\ \lambda_\varphi(\tau_1) &= \pm \sqrt{\frac{1}{2(l-y_1)} - (\lambda_x)^2 - (\lambda_{y_1})^2}, v^2(\tau_1) = \pm 2(l-y_1)(-\lambda_x \sin \varphi_1 + \lambda_{y_1} \cos \varphi_1)\end{aligned}\quad (2.18)$$

Оценка интервала значений параметров:

$$\begin{aligned}|\lambda_x \cos \varphi_1 + \lambda_{y_1} \sin \varphi_1| &\leq \frac{1}{\sqrt{2(l-y_1)}}, v^2(\tau_1) = 0 \\ |\lambda_x| &\leq \frac{1}{\sqrt{2l}} \\ |\lambda_{y_1}| &< \frac{1}{\sqrt{2(l-y_1)}}, v^2(\tau_1) = \pm 2(l-y_1)(-\lambda_x \sin \varphi_1 + \lambda_{y_1} \cos \varphi_1)\end{aligned}\quad (2.19)$$

Экстремальное решение на всем интервале находится на открытом множестве:

$$\begin{aligned}x' &= 2(l-y)\lambda_x & \lambda_x' &= 0 \\ y' &= 2(l-y)\lambda_y & \lambda_y' &= \frac{1}{2(l-y)} \\ \varphi' &= 2(l-y)\lambda_\varphi & \lambda_\varphi' &= 0\end{aligned}\quad (2.20)$$

Общие решения:

$$\begin{aligned}y &= l - \frac{1 + \cos(pt + \alpha)}{p^2} \\x &= \frac{2\lambda_x}{p^2} \left( t + \frac{1}{p} \sin(pt + \alpha) \right) + C_1 \\ \varphi &= \frac{2\lambda_\varphi}{p^2} \left( t + \frac{1}{p} \sin(pt + \alpha) \right) + C_2\end{aligned}\tag{2.21}$$

Параметры задачи:

$$l = 2, \quad x_1 = \varphi_1 = \frac{\pi + 2}{2\sqrt{2}}, \quad y_1 = 1\tag{2.22}$$

В случае “-“ существуют аналитические решения TPBVP:

$$\begin{aligned}x &= \frac{(\tau + \sin \tau)}{\sqrt{2}}, \quad y = 1 - \cos \tau, \quad \varphi = \frac{(\tau + \sin \tau)}{\sqrt{2}} \\ \lambda_x &= \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \lambda_y = \frac{\sin \tau}{2(1 + \cos \tau)}, \quad \lambda_\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \tau_1^- = \frac{\pi}{2}\end{aligned}\tag{2.23}$$

В случае «+» на всем интервале движения экстремальное решение находится на границе  $V=0$ .

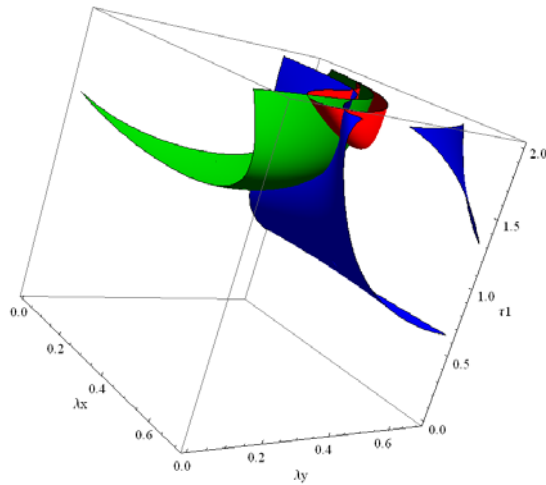


Рис. 2.2 Представление глобального минимального времени движения.

WolframMathematica с использованием команд `NDSolve[...]`, `ContourPlot3D[...]`, числовые зависимости:

$$x_0(\lambda_x, \lambda_{y1}, \tau_1) = 0, \quad y_0(\lambda_x, \lambda_{y1}, \tau_1) = 0, \quad \varphi_0(\lambda_x, \lambda_{y1}, \tau_1) = 0 \quad (2.24)$$

Параметрические значения:

$$\lambda_x = 0.499037, \quad \lambda_{y1} = 0.369326, \quad \tau_1^+ = 1.76731 \quad (2.25)$$



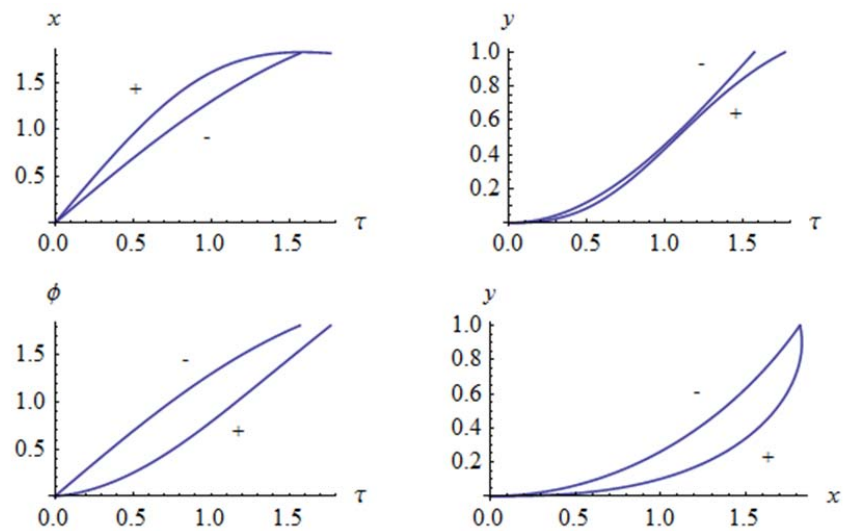


Рис. 2.3. Окончательные уравнения движения и траектории центра масс саней Чаплыгина

Функция  $S = -\lambda_x \sin\varphi + \lambda_y \cos\varphi$  отрицательна, условия (2.17) полностью выполняются.

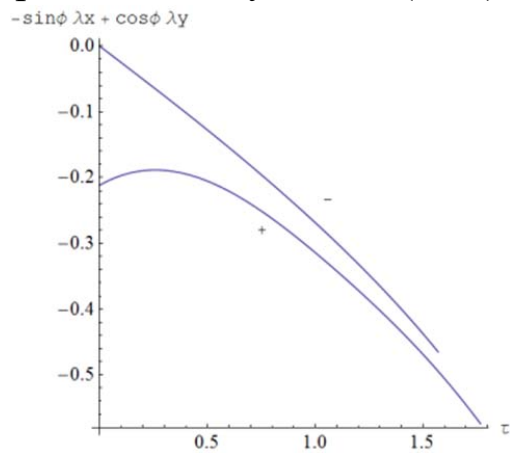


Рис. 2.4. Функция  $S = -\lambda_x \sin\varphi + \lambda_y \cos\varphi$ .

Числовые параметры (2.22) будут немного изменены, случай “+”:

$$l = 2, \quad x_1 = \varphi_1 = 1.25 \quad y_1 = 1 \tag{2.26}$$

Решение TPBVP:

$$\lambda_x = 0.378358, \quad \lambda_{y1} = 0.475233, \quad \tau_1 = 1.18207 \tag{2.27}$$

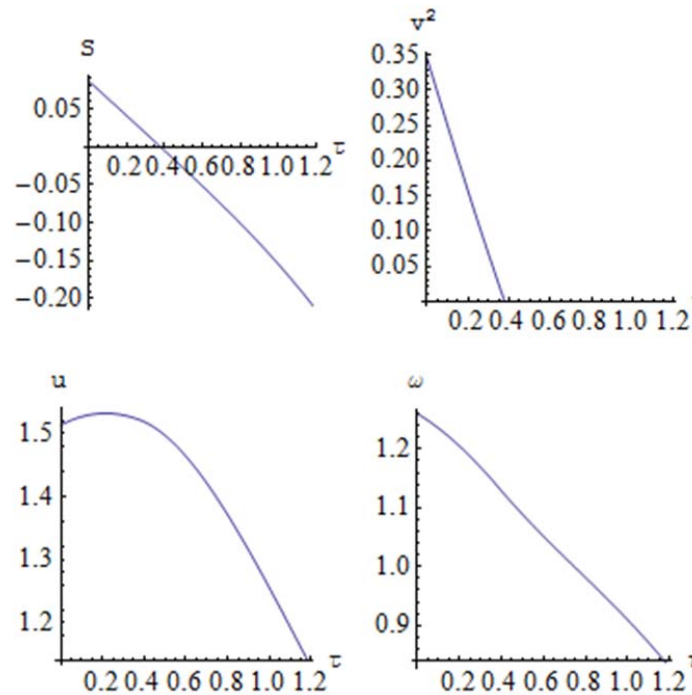


Рис. 2.5. Диаграммы безразмерных скоростей, угловой скорости и функции  $S$ .

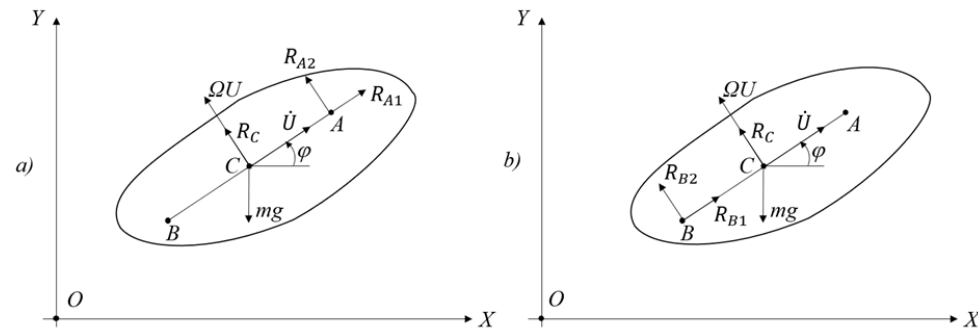


Рис. 2.6. Реакции связей для случая дополнительной направляющей: а) в точке А, б) в точке В.

Реализация брахистохронного движения в случае «+» ( $V = 0$ )

$$l = 2, \quad x_1 = \varphi_1 = \frac{\pi + 2}{2\sqrt{2}}, \quad y_1 = 1$$

Безразмерный вид:

$$R_C = mg r_C, \quad R_A = m g r_A, \quad R_B = mgr_B$$

Динамические уравнения в точке А:

$$u' = r_{A1} - \sin \varphi, \quad \omega u = r_{A2} + r_C - \cos \varphi, \quad \omega' = r_{A2} \quad (2.28)$$

Динамические уравнения в точке В:

$$u' = r_{B1} - \sin \varphi, \quad \omega u = r_{B2} + r_C - \cos \varphi, \quad \omega' = -r_{B2} \quad (2.29)$$

Законы изменения реакции  $R_C$  в обоих случаях, и проверяем его знак ( $R_C > 0$ ):

$$r_C = \omega u + \cos \varphi - \omega' \quad (2.30)$$

$$r_C = \omega u + \cos \varphi + \omega' \quad (2.31)$$

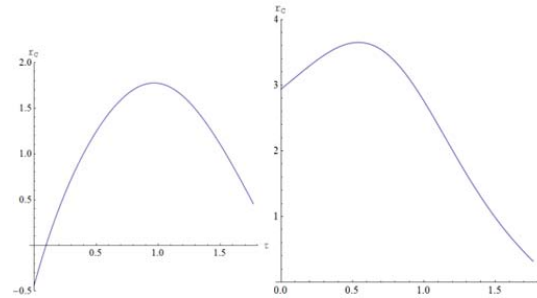


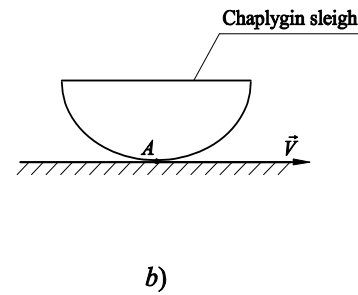
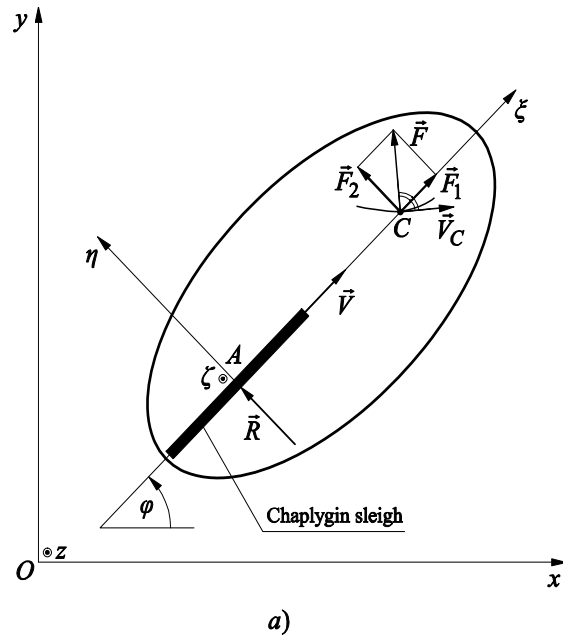
Рис. 2.7 Безразмерная реакция связи для случая направляющих в точках А и В.

Выводы второй части:

- Статья вносит вклад в неисследованную область систем с односторонней ограниченной реакцией связи.
- Упрощение задачи оптимального управления, основанной только на кинематических уравнениях.
- Аналитическое решение дифференциальных уравнений когда решение находится на открытом множестве.
- Траектория центра масс представляет собой деформированную циклоиду.
- Глобальное минимальное время движения.
- Детальный анализ возможности реализации с помощью двух идеальных механических связей.

Продолжающиеся исследования:

*C. Caratheodory, Der Schlitten, ZAMM-Z. Angew. Math. Me.13 (1933) 71–76.*

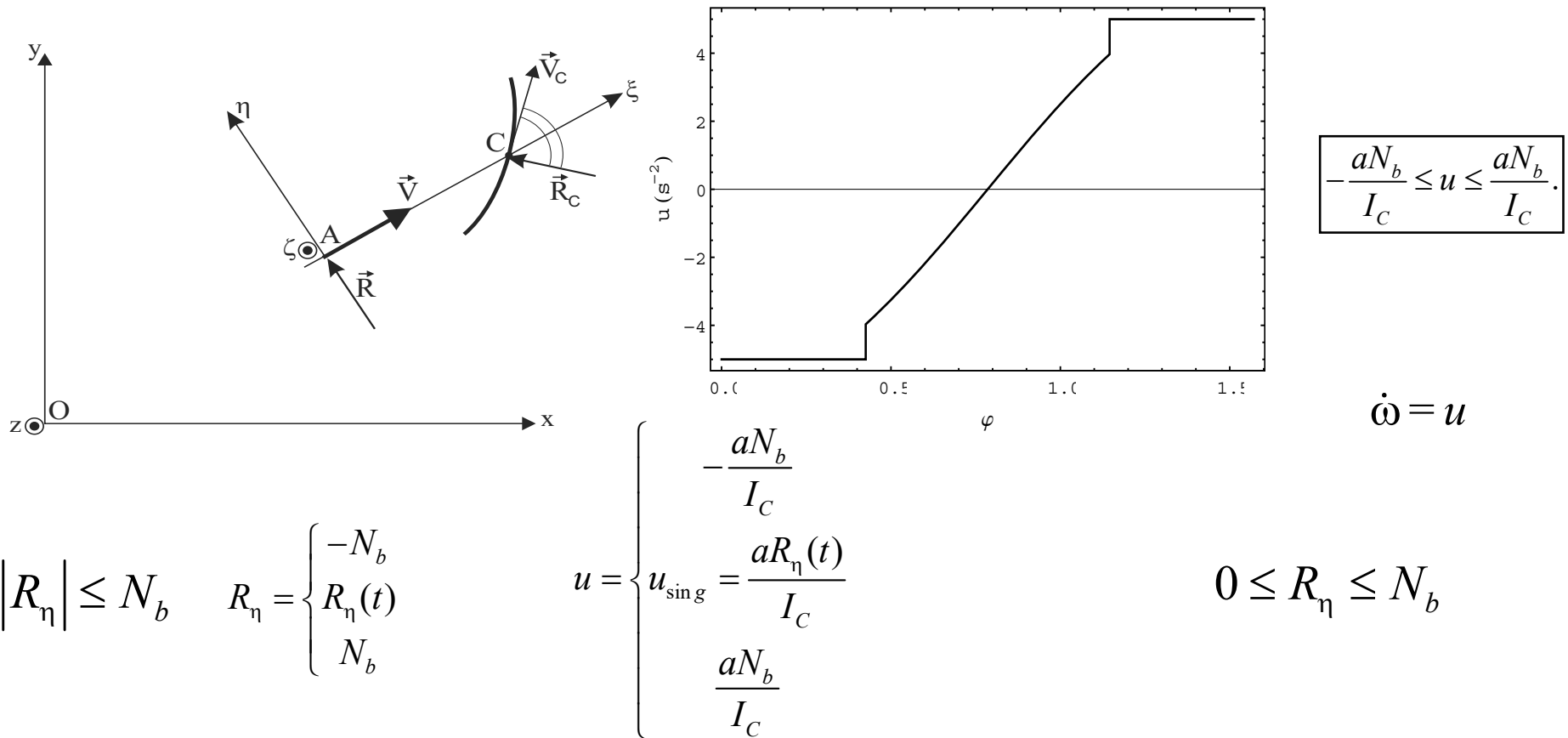


$$|R_\eta| \leq N_b$$

Установить максимально возможную величину односторонней реакции связи лезвия:

$$0 \leq R_\eta \leq N_b$$

S. Šalinić, A. Obradović, Z. Mitrović and S. Rusov, *On the brachistochronic motion of the Chaplygin sleigh*, *Acta Mechanica* 224 (2013) 2127-2141.

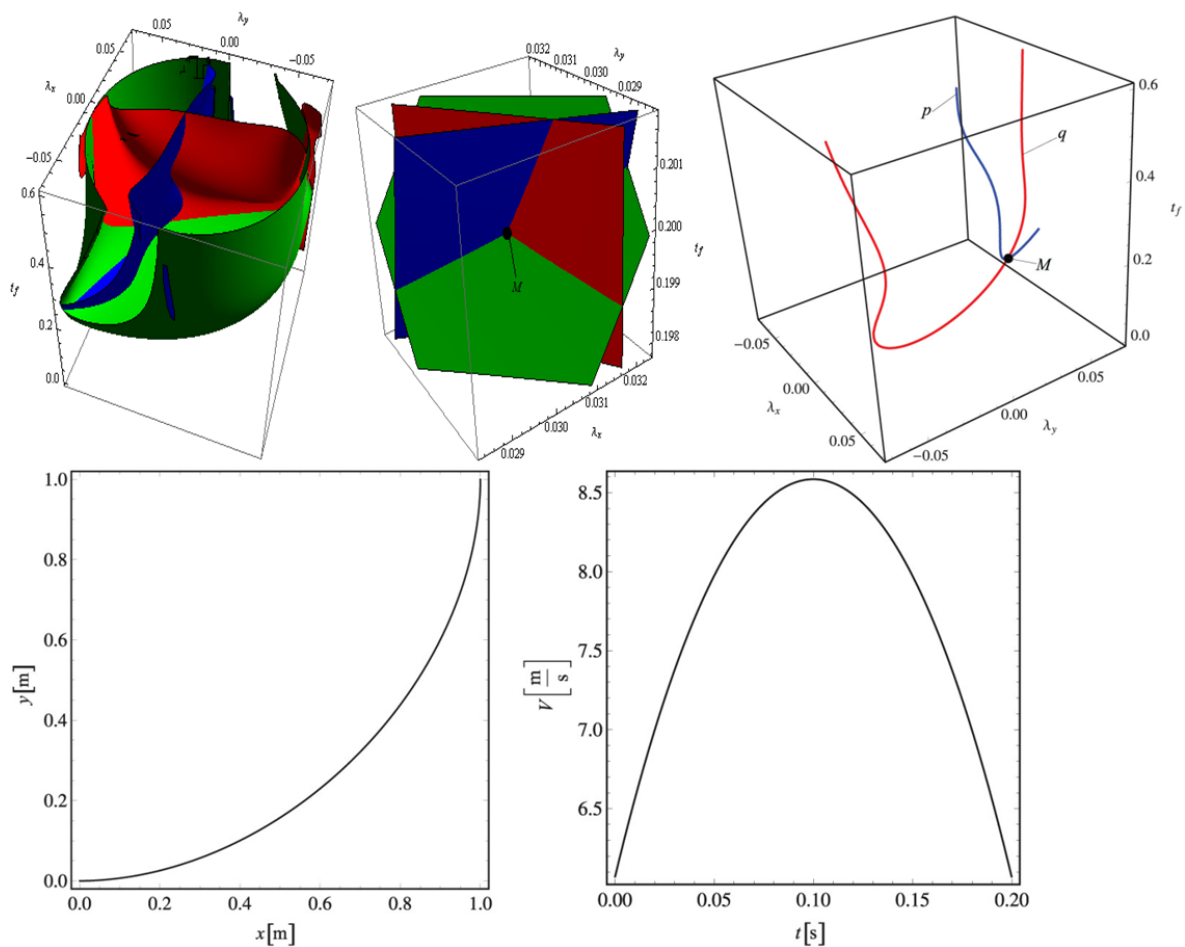


- Gabasov, R. and Kirillova, F. (1973). *Singular optimal control (in Russia)*. Science Publison, Moscow.
- McDanell, J.P., Powers, W.F.: Necessary conditions for joining optimal singular and nonsingular subarcs. *SIAM J. Control* **9**, 161–173 (1971)
- Odić, A., Bell, D.J.: Junction point on partially singular trajectories. *Int. J. Control* **85**, 1996–2003 (2012)
- Lemak S.S., Belousova M.D., The brachistochrone problem with constraints on the curvature of the trajectory, *IFAC Papers OnLine*, серия 13, том 54, с. 437-442 (2021)

В первом показанном случае:

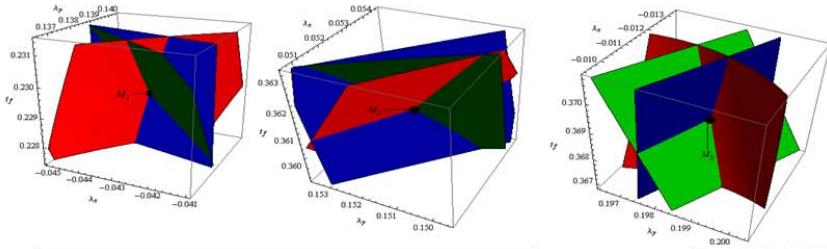
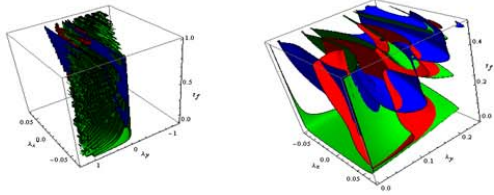
$$\varphi_f = \pi / 2 \quad -0.0707 \leq \lambda_x \leq 0.0707, \quad -0.0707 \leq \lambda_y \leq 0.0707.$$

$$t_f = 0.199832 \text{ s}, \quad \lambda_x = 0.0303507 \text{ s / m}, \quad \lambda_y = 0.0303507 \text{ s / m}.$$

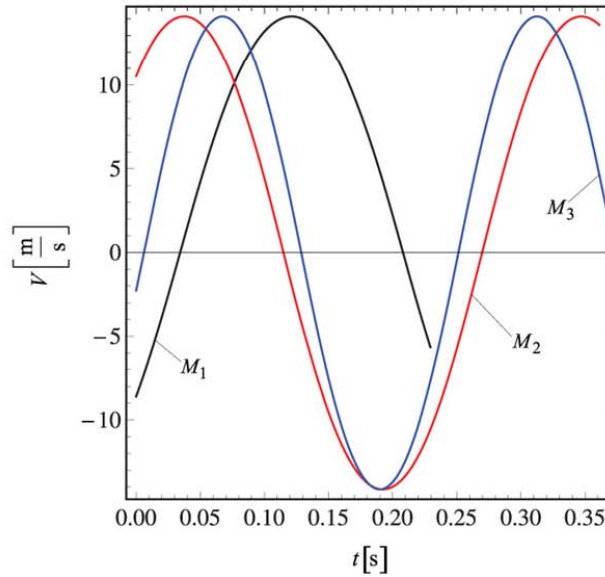
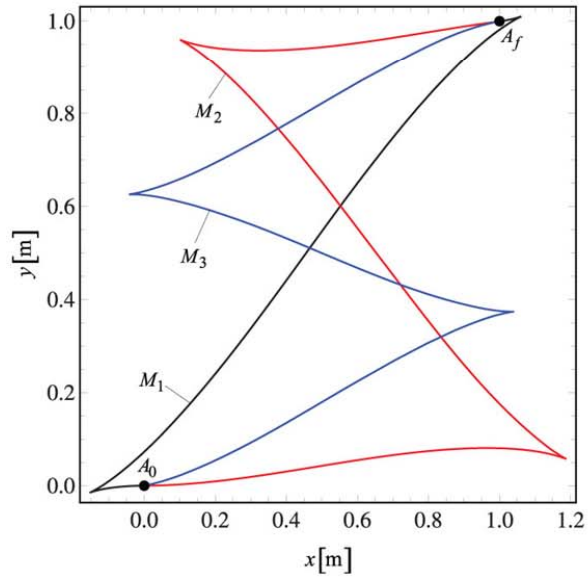


Во втором показанном случае показаны три решения:

$$\varphi_f = \pi / 30$$



Решења	$\lambda_x$ [s/m]	$\lambda_y$ [s/m]	$t_f$ [s]
<u>Прво решење (<math>M_1</math>)</u>	-0.042973	0.138484	0.229455
<u>Друго решење (<math>M_2</math>)</u>	0.0526389	0.151529	0.361141
<u>Треће решење (<math>M_3</math>)</u>	-0.0113855	0.198418	0.368861

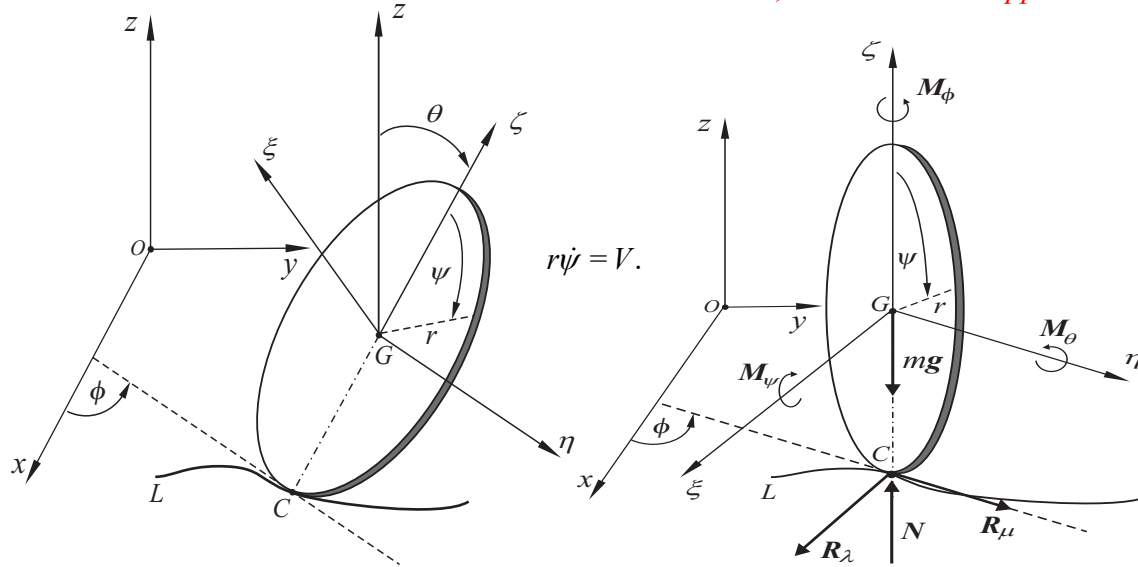




## Часть третья: Краткое описание брахистохронного движения с ограниченными реакциями связи с использованием активного управления

Законы трения Кулона при брахистохронном движении диска:

**Obradović A., Šalinić S., Radulović R., THE BRACHISTOCHRONIC MOTION OF A VERTICAL DISK ROLLING ON A HORIZONTAL PLANE WITHOUT SLIP, *Theoretical and Applied Mechanics* 44 (2017), 237-254**



$$\begin{aligned}
 R_\lambda &= -mV\dot{\phi}, & M_\psi &= \frac{3}{2}mr\dot{V}, \\
 R_\mu &= m\dot{V}, & M_\theta &= -\frac{3}{2}mrV\dot{\phi}, \\
 N &= mg, & M_\phi &= \frac{1}{4}mr^2\ddot{\phi}.
 \end{aligned}$$

$$R_\lambda^2 + R_\mu^2 \leq k_f^2 N^2$$

$$\text{extremal trajectory} \begin{cases} \text{subarc1}[0, t_1] & f_1 = 0, f_2 = 0, \\ \text{subarc2}[t_1, t_2] & f_1 < 0, f_2 = 0, \\ \text{subarc3}[t_2, t_f] & f_1 = 0, f_2 = 0, \end{cases}$$

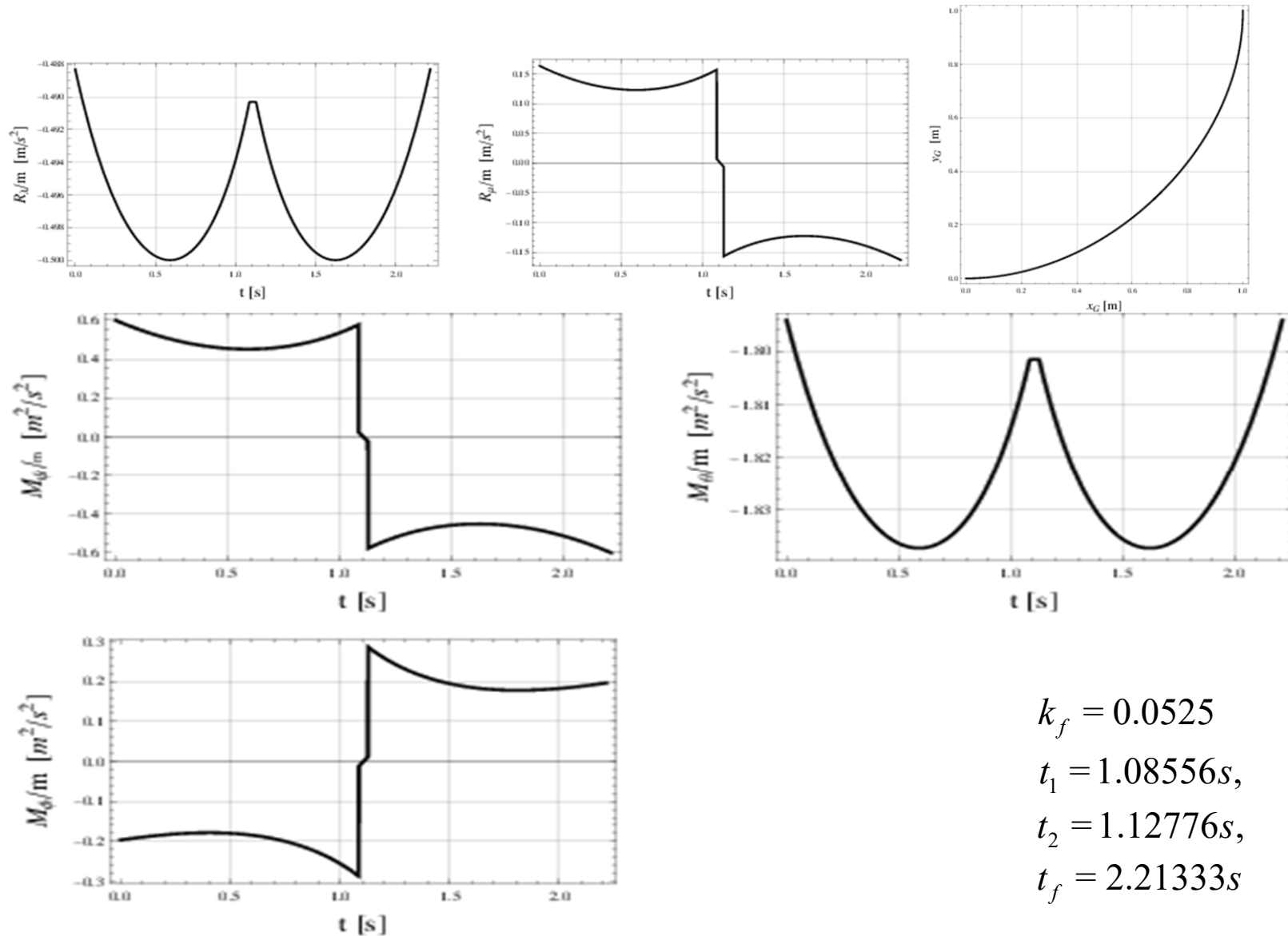
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_G &= V \cos \phi, \\
 \dot{y}_G &= V \sin \phi, \\
 \dot{\phi} &= u_1, \\
 \dot{V} &= u_2.
 \end{aligned}$$

$$f_1 \equiv u_2^2 + V^2 u_1^2 - k_f^2 g^2 \leq 0,$$

$$f_2 \equiv V^2 + \frac{r^2 u_1^2}{6} - c_1^2 = 0.$$

$$c_1^2 = \frac{4T_0}{3m}$$

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 0, & x_G(0) &= 0, & y_G(0) &= 0, & \phi(0) &= 0, \\
 x_G(t_f) &= 1m, & y_G(t_f) &= 1m, & \phi(t_f) &= \pi/2.
 \end{aligned}$$



$$k_f = 0.0525$$

$$t_1 = 1.08556s,$$

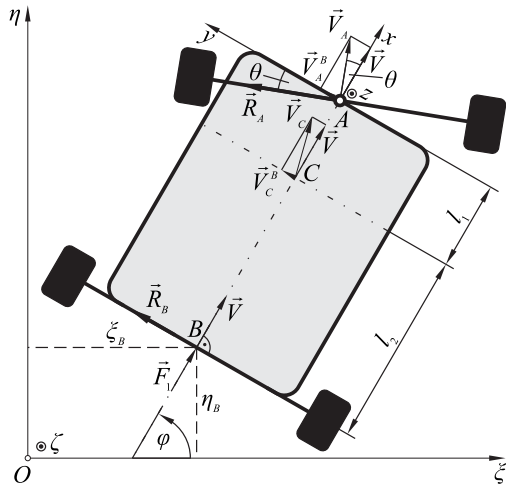
$$t_2 = 1.12776s,$$

$$t_f = 2.21333s$$

[https://www.researchgate.net/publication/321398486\\_The\\_brachistochronic\\_motion\\_of\\_a\\_vertical\\_disk\\_rolling\\_on\\_a\\_horizontal\\_plane\\_without\\_slip](https://www.researchgate.net/publication/321398486_The_brachistochronic_motion_of_a_vertical_disk_rolling_on_a_horizontal_plane_without_slip) (Reads: 1500 , 24.02.2024)

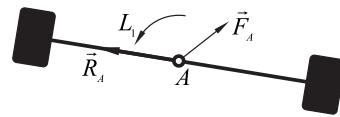
# Брахистохронное движение упрощенной модели транспортного средства

Soltakhanov, Sh.Kh., Yushkov, M.P., Zegzhda, S.A.: *Mechanics of Non-Holonomic Systems: A New Class of Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2009)



$$L_1 = L_1(t),$$

$$\vec{F}_1 = F_1(t)\vec{i}.$$



$$\mu_1(t)N_1 = F_B = \sqrt{R_B^2 + F_1^2} < F_1^{fr} = \mu N_1.$$

$$\mu_2(t)N_2 = |R_A| < F_2^{fr} = \mu N_2,$$

$$J_2 \ll J_1 \quad J_2 \approx 0,$$

$$M = M_1 + M_2,$$

$$J^* = M_1 l_2^2 + M_2 l^2 + J.$$

$$J = J_1 + J_2,$$

Radoslav Radulović, Aleksandar Obradović, Slaviša Šalinić, Zoran Mitrović, The brachistochronic motion of a wheeled vehicle, *Nonlinear Dynamics*, ISSN 0924-090X, vol.87, no.1, pp.191-205, (2017)

$$\dot{\xi}_B = V \cos \varphi, \dot{\eta}_B = V \sin \varphi, \dot{\varphi} = \omega,$$

$$\dot{\omega} = \frac{l}{J^*} \frac{V}{\sqrt{V^2 + l^2 \omega^2}} u - \frac{\omega}{J^*} (l_2 M + l_1 M_2) V,$$

$$\dot{V} = -\frac{l \omega}{M \sqrt{V^2 + l^2 \omega^2}} u + \frac{\omega^2}{M} (l_2 M + l_1 M_2),$$

$$I = \int_{t_0}^{t_f} dt.$$

$$u \leq \mu N_2,$$

$$u = R_A,$$

$$MV^2(t_0) + J^* \omega^2(t_0) - 2T_0 = 0,$$

$$t_0 = 0, \xi_B(t_0) = 0, \eta_B(t_0) = 0, \varphi(t_0) = 0,$$

$$t = t_f, \xi_B(t_f) = a, \eta_B(t_f) = b, \varphi(t_f) = \varphi_f,$$

**Ali H. Nayfeh (1933-2017)**

Статья, “спасённая от отклонения”

“Dear Dr. Salinic:

We received two reviews of your revised paper, but one of the reviewers recommended **rejection**. Therefore, i invited two more people who agreed to review it.

Best wishes,

**Ali H. Nayfeh**

University Distinguished Professor

Virginia Tech and University of Jordan

Benjamin Franklin Laureate

Editor-in-Chief, Nonlinear Dynamics”

Формализм скобок Пуассона и условия Келли ( Gabasov,R.and Kirillova,F. (1973). Singular optimal control (inRussia). Science Publision, Moscow.):

$$u = \begin{cases} u_{sing}, & \text{if } 0 \leq t < t_1 \\ u_{max} = \mu N_2, & \text{if } t_1 \leq t \leq t_f \end{cases}, \quad u_{sing} = -\frac{\{\{H_1, H_0\}, H_0\}}{\{\{H_1, H_0\}, H_1\}}, \quad \{\{H_1, H_0\}, H_1\} = \frac{l^2}{J^* M (V^2 + l^2 \omega^2)} > 0$$

$\mu$	$\lambda_z$ (s/m)	$\lambda_\eta$ (s/m)	$t_1$ (s)	$t_f$ (s)	$V_f$ (m/s)	$\mu_{1max}$
0.13	0.51221	0.51218	5.86088	6.22571	0.93142	0.05210
0.11	0.51252	0.51187	5.40027	6.22581	0.96214	0.05870
0.09	0.51424	0.51011	4.84490	6.22668	1.01417	0.05320
0.08	0.51650	0.50778	4.50509	6.22813	1.04739	0.05143

## Список других докладов, посвященных брахистохронным движениям механических систем

- Obradović A., Mladenović N., Marković S., Brachistochronic Rigid Body General Motion, FME Transactions, Belgrade, No 36, 2008., pp 109-112
- Obradović A., Čović V., Vesković M., Dražić M., Brachistochronic Motion of a Nonholonomic Rheonomic Mechanical System, Acta Mechanica, ISSN 0001-5970, 214, 291–304 (2010)
- Jeremić O., Šalinić S., Obradović A., Mitrović Z., On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields, Mathematical and Computer Modelling, ISSN 0895-7177, (2011) vol. 54 No. 11-12, 2900-2912
- Šalinić S., Obradović A., Mitrović Z., Rusov S., Brachistochrone with limited reaction of constraint in an arbitrary force field, Nonlinear Dynamics, ISSN 0924-090X, Volume 69, No 1-2 (2012), 211-222
- Šalinić S., Obradović A., Mitrović Z., On the brachistochronic motion of mechanical systems with unilateral constraints, Mechanics Research Communications, ISSN 0093-6413, Volume 45, (2012), 1-6
- Jeremić B., Obradović A., Radulović R., Analysis of the Minimum Required Coefficient of Sliding Friction at Brachistochronic Motion of a Nonholonomic Mechanical System, FME Transactions, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 42, 3, pp. 199 - 204, ISSN:1451-2092, 2014.
- Бојан Јеремиић, Александар Обрадовић, Радослав Радуловић, Analysis of the brachistochronic motion of a variable mass nonholonomic mechanical system, Theoretical and Applied Mechanics, 43, 1, pp. 19 - 32, ISSN:1450-5584, 2016.
- Radoslav Radulović, Aleksandar Obradović, Slaviša Šalinić, Contribution to the determination of the global minimum time for the brachistochronic motion of a holonomic mechanical system, Meccanica, vol.52, no.4, pp.795-805, 2017.



Спасибо за внимание!

- [aobradovic@mas.bg.ac.rs](mailto:aobradovic@mas.bg.ac.rs)
- [https://machinery.mas.bg.ac.rs/APP/faces/author.xhtml?author\\_id=orcid%3A%3A0000-0001-8808-6627](https://machinery.mas.bg.ac.rs/APP/faces/author.xhtml?author_id=orcid%3A%3A0000-0001-8808-6627)