

Универзитет у Београду  
Машински факултет

Ива И. Гуранов

**СТРУЈАЊА РАЗРЕЂЕНОГ ГАСА У  
МИКРОЦЕВИМА**

Докторска дисертација

Београд, 2023.

University of Belgrade  
Faculty of Mechanical Engineering

Iva I. Guranov

# **RAREFIED GAS FLOW IN MICROTUBES**

Doctoral disertation

Belgrade, 2023.

**Ментори докторске дисертације:**

др Снежана Милићев, ванредни професор,  
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Невена Стевановић, редовни професор,  
Универзитет у Београду - Машински факултет

**Чланови комисије за одбрану докторске дисертације:**

др Снежана Милићев, ванредни професор,  
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Невена Стевановић, редовни професор,  
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Милан Лечић, редовни професор,  
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Александар Тоћић, редовни професор,  
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Маша Букуров, редовни професор,  
Универзитет у Новом Саду - Факултет техничких наука

Датум одбране: \_\_\_\_\_.

# Захвалница

*Посебну захвалност дугујем менторкама, професорки Снежани Милићев и професорки Невени Стевановић. Хвала на свом разумевању, подршци и посвећености заједничком раду.*

*Хвала свима који су на било који начин помогли при изради ове дисертације.*

## Апстракт

У докторату су анализирани проблеми стационарног осносиметричног дозвучног струјања гаса у микроцевима. Струјање гаса је изазвано разликом притисака на улазу и излазу из микроцеви, како кружног, тако и прстенастог попречног пресека.

У првој групи проблема анализирано је изотермско стишљиво струјање разређеног гаса кроз микроцеви кружног променљивог попречног пресека (конвергентне, дивергентне) и цеви кружног константног попречног пресека. Други проблем се односи на неизотермско струјање гаса у микроцевима константног попречног пресека. Добијена су решења за стишљиво струјање гаса, као и решења за случај када се стишљивост занемарује. У трећем проблему анализира се изотермско стишљиво струјање гаса кроз микроцеви константног прстенастог попречног пресека. Четврта група проблема односи се на струјања у прстенастој геометрији, али се разматрају неизотермска струјања са анализом утицаја стишљивости.

Како се разматра струјање у микроцевима, дужина слободног пута молекула није занемарљиво мала у односу на пречник цеви, па се ефекат разређености гаса мора узети у обзир. Разматрани су случајеви струјања мање разређеног гаса, тј. са Кнудсеновим бројем мањим од 0,1. С обзиром на то, за решавање проблема могуће је применити макроскопски приступ. Решења се добијају на основу система једначина континуума: једначина континуитета, Навије-Стоксове једначине, једначина енергије и једначина стања идеалног гаса. Разређеност се узима у обзир применом граничних услова клизања и температурског скока, карактеристичним за струјања разређеног гаса. Како се струјање одвија при релативно малим вредностима Кнудсеновог броја, могуће је претпоставити решења поља притиска, брзине и температуре у облику пертурбационих редова по Кнудсеновом броју. Прва апроксимација представља решење за услове континуума. Остале апроксимације представљају утицај клизања, температурског скока, инерције, конвекције, дисипације и рада услед ширења.

Добијена решења су верификована поређењем са резултатима других аутора. Потврда тачности решења добијених пертурбационом методом омогућава примену методе и добијање аналитичких решења и за многе друге случајеве струјања у микроцевима, за које на други начин није могуће доћи до аналитичких резултата.

**Кључне речи:** разређени гас, струјање са клизањем, температурски скок, изотермско струјање, неизотермско струјање, стишљиво, нестишљиво, микроцев, прстенаста микроцев

**Научна област:** Машинство

**Ужа научна област:** Механика флуида

**УДК број:** 533.6.011.8(043.3)

## Abstract

The problems of stationary, axisymmetric, subsonic gas flow in microtubes are analysed in the dissertation. The gas flow is caused by the pressure drop between the inlet and outlet of the microtube.

The first problem deals with isothermal compressible flow of rarefied gas through microtubes with variable circular cross-section (convergent, divergent and microtubes with constant cross-section). The second problem is related to non-isothermal gas flow in constant cross-section microtubes. Solutions are obtained for compressible gas flow, as well as for the case when compressibility is neglected. Isothermal compressible gas flow through microtubes with constant annular cross-section is analysed in the third problem. The fourth group of problems considers the annular geometry, but non-isothermal flows with an analysis of compressibility effects.

The length of the free path of the molecules is not negligibly small compared to the diameter of the microtube; therefore, the effect of gas rarefaction must be taken into account. The cases of less rarefied gas flow were considered, i.e. with the Knudsen number lower than 0.1. Hence, a macroscopic approach was applied to solve the problems. Solutions were obtained based on the system of continuum equations: the continuity equation, the Navier-Stokes equation, the energy equation and the equation of state of ideal gas. The rarefaction is taken into account by applying the boundary conditions of velocity slip and temperature jump, characteristic for rarefied gas flow. As the flow takes place at relatively small values of the Knudsen number, it is possible to assume the solutions of the pressure, velocity and temperature in the form of perturbation series developed according to the Knudsen number. The first element of such a series represents the first approximation, which includes the solution for the continuum conditions. Other approximations represent the effects of slip, temperature jump, inertia, convection, dissipation, and work due to expansion.

The obtained solutions were validated by comparison with the results of other authors. Confirmation of the accuracy of the solutions obtained by the perturbation method enables the application of the method for many other cases of gas flow in microtubes, for which it is not possible to obtain an analytical solution in any other way.

**Key words:** rarefied gas, slip flow, temperature jump, isothermal flow, non-isothermal flow, compressible, incompressible, microtube, annular microtube

**Scientific field in general:** Mechanical engineering

**Scientific field in particular:** Fluid mechanics

**UDK number:** 533.6.011.8(043.3)

# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>1</b>
1.1	Микро-електро-механички системи	2
1.2	Структура рада и проблеми који су решени у докторату	7
<b>2</b>	<b>Преглед постојећих истраживања струјања разређеног гаса у микроцевима</b>	<b>9</b>
2.1	Струјања разређеног гаса у микроцевима кружног и елиптичног попречног пресека	10
2.1.1	Изотермска струјања	10
2.1.2	Неизотермска струјања	11
2.2	Струјања разређеног гаса у прстенастим микроцевима	15
<b>3</b>	<b>Основне једначине и гранични услови</b>	<b>17</b>
3.1	Струјање разређеног гаса	17
3.2	Режими струјања према вредностима Кнудсеновог броја	18
3.3	Основне једначине	20
3.4	Гранични услови	22
3.4.1	Гранични услови за брзину	24
3.4.2	Гранични услов за температуру	25
<b>4</b>	<b>Изотермско струјање гаса у микроцевима променљивог попречног пресека</b>	<b>26</b>
4.1	Опис проблема и модел струјања	26
4.2	Систем једначина у бездимензијском облику	27
4.2.1	Дефинисање референтних величина и референтних бездимензијских бројева	27
4.2.2	Претпоставке на којима се заснива модел	29
4.2.3	Основне једначине и гранични услов у бездимензијском облику	31
4.3	Решавање изотермског проблема струјања кроз микроцеви	33
4.3.1	Струјање гаса при малим Рејнолдсовим бројевима	35
4.3.2	Струјање гаса при великим Рејнолдсовим бројевима	41
4.4	Анализа резултата	45

4.4.1	Анализа резултата за мале Рејнолдсове бројеве . . . . .	46
4.4.2	Анализа резултата за велике Рејнолдсове бројеве . . . . .	51
4.4.3	Валидација резултата . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Неизотермско струјање гаса у микроцевима константног попречног пресека</b>	<b>62</b>
5.1	Опис проблема и модел струјања . . . . .	62
5.2	Систем једначина у бездимензијском облику . . . . .	62
5.2.1	Дефинисање референтних величина и референтних бездимензијских бројева . . . . .	63
5.2.2	Претпоставке на којима се заснива модел . . . . .	64
5.2.3	Основне једначине и гранични услови у бездимензијском облику . . . . .	66
5.3	Решавање проблема неизотермског струјања кроз микроцеви . . . . .	69
5.3.1	Струјање гаса при малим Рејнолдсовим бројевима . . . . .	70
5.3.2	Струјање гаса при великим Рејнолдсовим бројевима . . . . .	76
5.4	Анализа резултата . . . . .	81
5.4.1	Анализа резултата за мале Рејнолдсове бројеве . . . . .	82
5.4.2	Анализа и валидација резултата за велике Рејнолдсове бројеве . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Изотермско струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека</b>	<b>90</b>
6.1	Опис проблема и модел струјања . . . . .	90
6.2	Систем једначина у бездимензијском облику . . . . .	90
6.2.1	Дефинисање референтних величина и референтних бездимензијских бројева . . . . .	91
6.2.2	Претпоставке на којима се заснива модел . . . . .	92
6.2.3	Основне једначине и гранични услови у бездимензијском облику . . . . .	93
6.3	Решавање проблема изотермског струјања у микроцевима прстенастог попречног пресека . . . . .	95
6.3.1	Струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека при малим Рејнолдсовим бројевима . . . . .	96
6.3.2	Струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека при великим Рејнолдсовим бројевима . . . . .	99
6.4	Анализа резултата . . . . .	101
6.4.1	Анализа резултата за мале Рејнолдсове бројеве . . . . .	102
6.4.2	Анализа резултата за велике Рејнолдсове бројеве . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Неизотермско струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека</b>	<b>107</b>
7.1	Опис проблема и модел струјања . . . . .	107



7.2	Систем једначина у бездимензијском облику . . . . .	107
7.2.1	Дефинисање референтних величина и референтних бездимензијских бројева . . . . .	108
7.2.2	Претпоставке на којима се заснива модел . . . . .	109
7.2.3	Основне једначине и гранични услови у бездимензијском облику . . . . .	111
7.3	Решавање проблема неизотермског струјања гаса у микроцевима прстена- стог попречног пресека . . . . .	114
7.3.1	Струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека при малим Рејнолдсовим бројевима . . . . .	114
7.3.2	Струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека при великим Рејнолдсовим бројевима . . . . .	120
7.4	Анализа резултата . . . . .	127
7.4.1	Анализа резултата за мале Рејнолдсове бројеве . . . . .	128
7.4.2	Анализа и валидација резултата за велике Рејнолдсове бројеве . . . . .	130
<b>8</b>	<b>Закључак</b>	<b>136</b>
	Биографија аутора . . . . .	150

## Списак слика

1.1	а) МЕМС силиконски мотор са длаком људске косе [3], б) нога биљне ваши на зупчаницима микромотора [4]. . . . .	1
1.2	Приказ величине потпуно спакованог МЕМС акцелерометра [7]. . . . .	3
1.3	Фотографија слоја микроигала [17]. . . . .	4
1.4	Микроизмењивач топлоте са микроцевима [18]. . . . .	5
1.5	Џул-Томсонов микроизмењивач [24]. . . . .	6
3.1	Различити режими струјања, које настаје услед разлике притисака, у дугом микроканалу [78]. . . . .	19
3.2	Рефлексија молекула гаса са чврстом површи: а) спекуларна рефлексија, б) дифузна рефлексија. . . . .	22
4.1	Геометрија микроцеви променљивог попречног пресека. . . . .	26
4.2	Упоредни приказ геометрија конвергентне, дивергентне и цеви константног попречног пресека. . . . .	28
4.3	Расподела притиска дуж микроцеви при задатом масеном протоку за случај малог Рејнолдсовог броја: а) $R_i = 0,8$ , б) $R_i = 1$ , в) $R_i = 1,2$ , г) поређење расподела притиска за три геометрије. . . . .	47
4.4	Резултати добијени при познатој вредности притиска на улазу и излазу из цеви при малим Рејнолдсовим бројевима за $R_i = 1$ : а) притисак, б) брзина. . . . .	48
4.5	Профили брзине за случај малог Рејнолдсовог броја за познат масени проток: а) $R_i = 0,8$ , б) $R_i = 1$ , в) $R_i = 1,2$ . . . . .	49
4.6	Прираштај масених протока за различите вредности Кнудсеновог броја при малим Рејнолдсовим бројевима: а) $R_i = 0,8$ , б) $R_i = 1$ , в) $R_i = 1,2$ . . . . .	50
4.7	Расподела притиска дуж микроцеви при изотермском стишљивом струјању за велике Рејнолдсове бројеве: а) $R_i = 0,8$ , б) $R_i = 1$ , в) $R_i = 1,2$ , г) поређење расподела притиска за три геометрије. . . . .	52
4.8	Расподела притиска дуж микроцеви при изотермском стишљивом струјању за случај са и без инерције: а) $R_i = 0,8$ , б) $R_i = 1$ , в) $R_i = 1,2$ . . . . .	53
4.9	Резултати добијени за познат однос улазног и излазног притиска из цеви за $R_i = 1$ : а) поље притиска (4.112); б) брзина (4.109) укључујући решења за притисак (4.112). . . . .	54
4.10	Расподела притиска дуж микроцеви константног попречног пресека за случај са и без инерције. . . . .	54
4.11	Профили брзине у различитим пресецима за случај великог Рејнолдсовог броја: а) $R_i = 0,8$ , б) $R_i = 1$ , в) $R_i = 1,2$ . . . . .	55

4.12	Релативно повећање масеног протока у зависности од притиска за различите вредности Кнудсеновог броја: а) $R_i = 0,8$ , б) $R_i = 1$ , в) $R_i = 1,2$ . . . . .	56
4.13	Расподела притиска за изотермско струјање гаса кроз микроцев добијена у докторату (4.70) и тачно аналитичко решење [90]. . . . .	57
4.14	Поређење резултата за брзину при малим Рејнолдсовим бројевима из доктората (4.64) са тачним решењем [90]. . . . .	58
4.15	Поређење релативног повећања масеног протока у зависности од притиска: а) $R_i = 0,7$ ; б) $R_i = 1$ ; в) $R_i = 1,3$ . . . . .	60
5.1	Геометрија микроцеви. . . . .	62
5.2	Расподела притиска за струјање у микроцеви са занемареном стишљивости за континуум $Kn_r = 0$ (5.73) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,05$ и $Kn_r = 0,1$ ) (5.72). . . . .	83
5.3	Расподела притиска у микроцеви константног попречног пресека: а) стишљиво неизотермско струјање (5.65); б) када је стишљивост занемарена (5.72). . . . .	83
5.4	Профили брзине за нестишљиво струјање у различитим попречним пресецима микроцеви, за континуум $Kn_r = 0$ и струјање са клизањем $Kn_r = 0,1$ (5.74). . . . .	84
5.5	Профили температуре у различитим пресецима микроцеви за континуум ( $Kn_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,1$ ) (5.101). . . . .	85
5.6	а) Поље притиска за стишљиво струјање при великим Рејнолдсовим бројевима (5.100); б) Поређење поља притиска (5.100) за случај са и без ефеката другог реда. . . . .	85
5.7	Профили брзине у различитим пресецима микроцеви за континуум $Kn_r = 0$ и струјање са клизањем $Kn_r = 0,1$ (5.102). . . . .	86
5.8	Поређење профила температуре за нестишљиво струјање при великим Рејнолдсовим бројевима (5.106) са профилем температуре Асака и Хонга [98] у излазном попречном пресеку. . . . .	87
5.9	Поље притиска: а) нестишљиво струјање при великим Рејнолдсовим бројевима (5.105); б) поређење поља притиска за нестишљиво струјање (5.105) са и без ефеката другог реда. . . . .	88
5.10	Поређење профила брзина у различитим попречним пресецима микроцеви за нестишљиво струјање гаса Асака и Хонга [98] са профилима брзине (5.107). . . . .	88
6.1	Геометрија прстенасте микроцеви. . . . .	90
6.2	Расподела притиска дуж прстенасте микроцеви за континуум ( $Kn_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,05$ , $Kn_r = 0,1$ ) код стишљивог струјања (6.52): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	102
6.3	Профили брзине у различитим пресецима прстенасте микроцеви за континуум ( $Kn_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,1$ ) (6.44): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	103

6.4	Расподела притиска дуж прстенасте микроцеви за континуум $K_{n_r} = 0$ и струјање са клизањем $K_{n_r} = 0,1$ код изотермског стишљивог струјања (6.70): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	104
6.5	Расподела притиска дуж микроцеви за континуум $K_{n_r} = 0$ (6.53) и струјање са клизањем ( $K_{n_r} = 0,1$ ), без инерције и са инерцијом (6.70): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	104
6.6	Профили брзине у различитим пресецима микроцеви за континуум ( $K_{n_r} = 0$ ) и струјање са клизањем ( $K_{n_r} = 0,1$ ) (6.67): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	105
7.1	Геометрија прстенасте микроцеви. . . . .	107
7.2	Расподела притиска за континуум ( $K_{n_r} = 0$ ) и струјање са клизањем ( $K_{n_r} = 0,05$ и $K_{n_r} = 0,1$ ) (7.73): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	128
7.3	Профили брзине за континуум ( $K_{n_r} = 0$ ) и струјање са клизањем ( $K_{n_r} = 0,1$ ) (7.75): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	129
7.4	Профили температуре у различитим попречним пресецима за континуум ( $K_{n_r} = 0$ ) и струјање са клизањем ( $K_{n_r} = 0,1$ ) (7.105): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	130
7.5	Расподела притиска дуж микроцеви за континуум ( $K_{n_r} = 0$ ) и струјање са клизањем ( $K_{n_r} = 0,05$ и $K_{n_r} = 0,1$ ) (7.104): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	131
7.6	Расподела притиска дуж микроцеви за континуум $K_{n_r} = 0$ (7.67) и струјање са клизањем $K_{n_r} = 0,1$ са и без ефеката другог реда (7.104): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	131
7.7	Профили брзине у различитим попречним пресецима за континуум ( $K_{n_r} = 0$ ) и струјање са клизањем ( $K_{n_r} = 0,1$ ) (7.114): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	132
7.8	Профили температуре за континуум ( $K_{n_r} = 0$ ) и струјање са клизањем ( $K_{n_r} = 0,1$ ) (7.111): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	133
7.9	Расподела притиска дуж микроцеви за континуум ( $K_{n_r} = 0$ ) и струјање са клизањем ( $K_{n_r} = 0,05$ и $K_{n_r} = 0,1$ ) (7.110): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	133
7.10	Расподела притиска дуж микроцеви за континуум ( $K_{n_r} = 0$ ) и струјање са клизањем ( $K_{n_r} = 0,1$ ) са и без ефеката другог реда (7.110): а) $R_2/R_1 = 5/3$ ; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	134
7.11	Профили брзине у различитим микроцеви за континуум ( $K_{n_r} = 0$ ) и струјање са клизањем ( $K_{n_r} = 0,1$ ) (7.112): а) $R_2/R_1 = 5/3$ и поређење са [102]; б) $R_2/R_1 = 3$ . . . . .	135

## Списак табела

- 3.1 Коефицијент акомодације вектора количине кретања и термички коефицијент акомодације за типичне гасове и материјале зида [79]. . . . . 23
- 4.1 Вредности масеног протока за различите геометрије микроцеви према различитим односима притисака на улазу и излазу из цеви. . . . . 59

# Ознаке

$\sim$	ознака изнад слова за димензијске величине
без $\sim$	ознака изнад слова за бездимензијске величине
$a$	температурско-вискозни параметар
$\alpha$	угао нагиба зида микроцеви
$\beta$	параметар
$c$	брзина звука
$c_m$	средња брзина молекула
$c_p$	специфични топлотни капацитет при константном притиску
$c_v$	специфични топлотни капацитет при константној запремини
$d$	пречник молекула
$D$	пречник микроцеви
$\delta_{jk}$	Кронекеров делта симбол
$e$	унутрашња енергија по јединици масе гаса
$e_i$	унутрашња енергија молекула пре судара са зидом
$e_r$	унутрашња енергија молекула после судара са зидом
$e_w$	унутрашња енергија молекула гаса на температури зида
$E$	енергија по јединици масе гаса
$\varepsilon$	мали параметар
$\eta$	параметар
$\gamma$	параметар
$k$	топлотна проводљивост гаса
$\kappa$	однос специфичних топлотних капацитета
$k_B$	Болцманова константа
$K_i$	пројекција вектора количине кретања молекула на правац струјања флуида пре судара са зидом
$K_r$	пројекција вектора количине кретања молекула на правац струјања флуида после судара са зидом
$K_w$	количина кретања молекула у правцу струјања флуида коју су молекули преузели од зида
$K_n$	Кнудсенов број

$\lambda$	дужина слободног пута молекула
$L$	дужина микроцеви
$m$	параметар
$\dot{m}$	масени проток
Ma	Махов број
$\mu$	динамичка вискозност гаса
$n$	параметар
$\nu$	кинематска вискозност гаса
$p$	притисак
Pr	Прантлов број
$q$	топлотни флукс
$r, \theta, z$	координате цилиндричног координатног система
$R$	полупречник микроцеви
Re	Рејнолдсов број
$R_g$	гасна константа
$\rho$	густина гаса
$\dot{S}_{jk}$	компонента тензора брзине деформисања
$\sigma_{jk}$	компонента тензора напона
$\sigma_T$	термички коефицијент акомодације
$\sigma_v$	коефицијент акомодације вектора количине кретања
$T$	температура
$\tau_{jk}$	компоненте тензора напона услед вискозности
$\mathbf{u}$	вектор брзине
$u$	компонента брзине у подужном правцу
$v, V$	компонента брзине у попречном правцу

## Индекси

$i$  улазни пресек

$e$  излазни пресек

$r$  референтни пресек

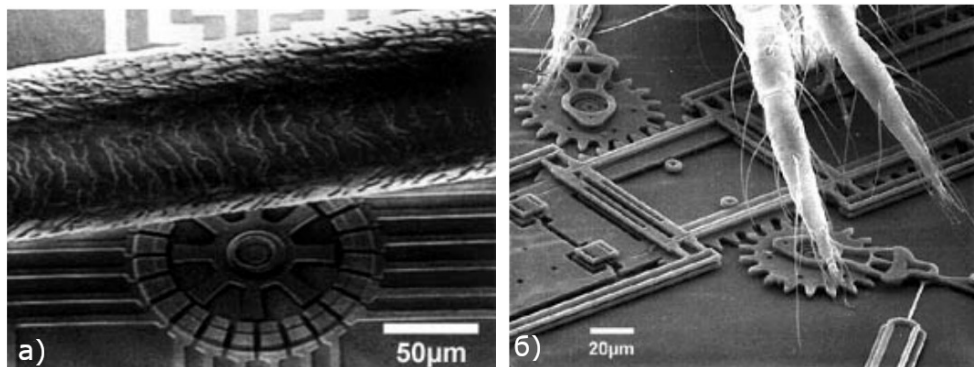
$w$  зид

0, 1, 2, 3 прва, друга, трећа и четврта апроксимација



# 1 Увод

Човек одавно тежи освајању технологије потребне за изградњу све већих објеката, док са друге стране тежи и освајању технологија потребних за прављење екстремно малих система. Настојање човека ка истраживању и изградњи великих објеката испољило се хиљадама година п.н.е. Велика пирамида у Гизи висине 147 m изграђена је око 2600. године п.н.е., Емпајер стејт билдинг у Њујорку из 1931. године има висину 443 m, док је највиша грађевина коју је човек до данас направио Бурџ Калифа у Дубаију, висине 828 m, завршена 2010. године. Насупрот томе, изградња система и производња уређаја димензија знатно мањих у односу на величину човека почела је да се развија тек половином 20. века. Претходио јој је проналазак часовника у 13. веку и проналазак микроскопа у 17. веку [1]. Први транзистор направљен је 1947. године. Своју револуционарну визију минијатуризације изнео је 1959. године нобеловац Ричард Фејман [2]. Сматрао је развој микротехнологија и микропроизводње неопходним за креирање читавог микросвета који би допринео развоју



**Слика 1.1:** а) МЕМС силиконски мотор са длаком људске косе [3], б) нога биљне ваши на зупчаницима микромотора [4].

човечанства. У свом визионарском говору сугерисао је да би се рачунари могли производити коришћењем хемијских технологија, стварањем малог чврстог „блока” који би садржао све потребне елементе - што је данас и остварено.

Са напретком у технолошким процесима и производњи постепено су се развили сложенији системи микродимензија. Микросистеми састављени од електро и механичких ком-

поненти чија је карактеристична димензија између  $1 \mu\text{m}$  и  $1 \text{mm}$  названи су микро-електро-механичким системима, скраћено МЕМС-има (слика 1.1). МЕМС-и налазе широку примену у разним гранама индустрије и медицине, а трошкови производње оваквих уређаја континуално опадају. Паралелно се развијају и алати и начини производње МЕМС-а, а стално се развијају и нове врсте микроуређаја, који нуде бројне предности у односу на традиционалне уређаје.

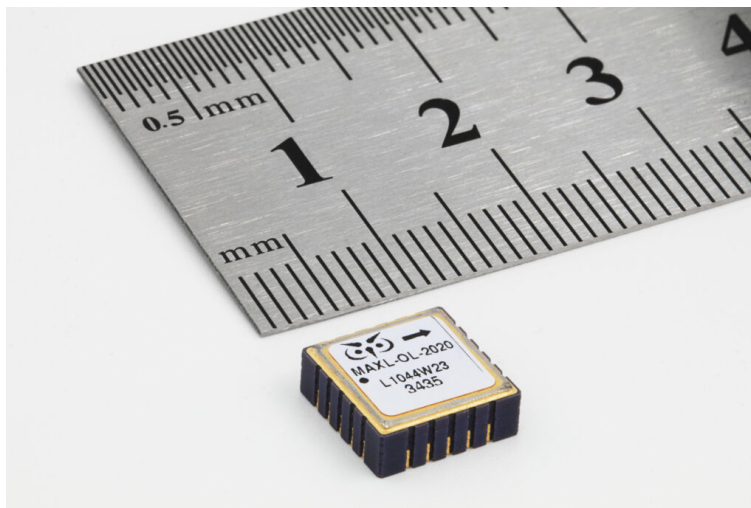
## 1.1 Микро-електро-механички системи

Иако су МЕМС-и већином још увек били део академских истраживања, осамдесетих година 20. века развијене су и прве микропумпе и микровентили, који су били изграђени на истим принципима као и пумпе и вентили уобичајених димензија. Цена израде представљала је препреку за њихову широку употребу. Са друге стране, развој индустрије у којој су овакви системи неопходни, диктирао је развој МЕМС-а. Развој хемије и биотехнологије допринео је да се, уместо минијатуризације познатих решења, развију нови принципи на чијој бази функционишу ови микроуређаји. Развој многих области науке допринео је производњи читавог спектра микроуређаја који у себи не садрже само механичке и електро компоненте, већ и термичке, оптичке, као и компоненте које у себи садрже струјање флуида. Из тог разлога, данас се у МЕМС-е не убрајају само уређаји који садрже искључиво механичке и електро компоненте, односно, МЕМС је постао акроним којим се описују минијатуризовани системи.

Материјали за израду минијатуризованих уређаја настали су од материјала који потичу из електронске индустрије. Уобичајено су то полимери, због њихове расположивости, функционалности и прилагодљивости. Методе производње оваквих компонента свих врста заснивају се на литографским принципима или на концептима традиционалне машинске обраде [5].

МЕМС-и налазе своју примену како у свакодневном животу, тако и у оквиру медицине, биотехнологије и многим другим гранама индустрије. Данас се у просечном аутомобилу налази око 70 МЕМС уређаја, укључујући систем против блокирања кочница, уређаје и системе за контролу навигације, контролу стабилности, праћење вибрација, сензоре горива, сензоре за праћење притиска у гумама, сензоре протока, смањење буке, сигурносне појасеве, итд. Једна од првих примена МЕМС уређаја у аутомобилима је и примена у

оквиру ваздушних јастука, чиме је постигнуто смањење трошкова производње и монтаже система безбедности [6]. Овај сензор представља акцелерометар (слика 1.2), који мери нагло успоравање возила приликом удара у објекат. Успоревење се очитава променом напона. Када напон достигне критичну вредност управљачка јединица шаље сигнал микроактуа-

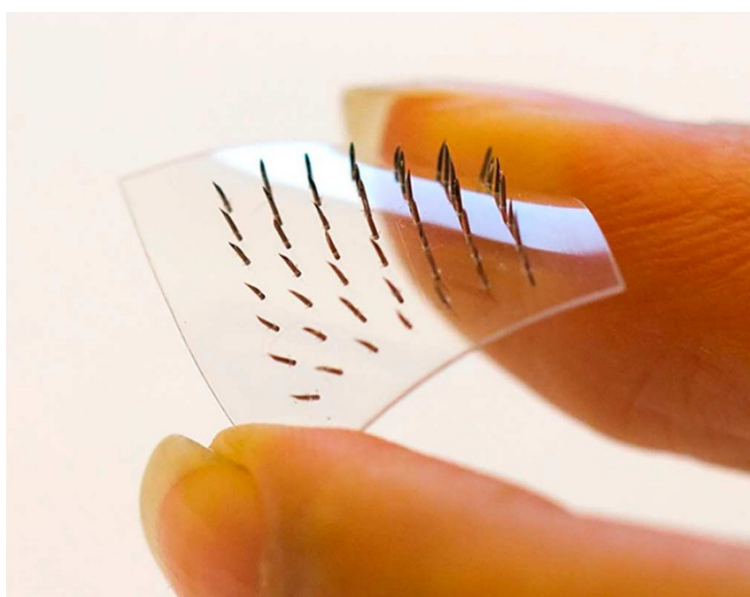


Слика 1.2: Приказ величине потпуно спакованог MEMS акцелерометра [7].

тору који активира експлозивно пуњење ваздушног јастука. Насупрот првим ваздушним јастуцима који су представљали сложен, скуп и робустан систем, MEMS је омогућио да се иста функција врши интегрисањем акцелерометра и управљачке електронике у један чип, који се може сместити у унутрашњост волана и данас је знатно јефтинији него што је био на почетку примене у овој области. Сензори и актуатори који се употребљавају у ваздушним јастуцима, чија је поузданост доказана употребом у великом броју оваквих система у претходним годинама, су од великог значаја за данашњу широку распрострањеност MEMS уређаја и њихову технологију израде. На тај начин аутомобилска индустрија постаје један од главних покретача развоја MEMS-а, а примена MEMS-а постаје могућа и за остала подједнако захтевна окружења [8].

Медицина и биологија су међу најперспективнијим и у исто време најизазовнијим областима примене MEMS-а. Повећане могућности у областима имплантабилних сензора, пејсмејкера и система за испоруку лекова довеле су до брзог раста интересовања за примену MEMS-а у медицинске сврхе, а тежи се томе да системи засновани на MEMS-у замене читаве биолошке системе у људском телу. Сходно томе, у зависности од примене, настало је и мноштво подврста MEMS-а, а у литератури се могу наћи различити приступи давању назива насталим подврстама. У области биомедицине развили су се био-микро-

електро-механички-системи (биоМЕМС) [9]-[11], системи микро тоталне анализе ( $\mu$ TAS) [12], лабораторије на чипу ("lab-on-chip") [13]-[16], хибридни МЕМС-и (интегрисање неорганских структура у живе организме), а све наведене врсте се и преклапају у одређеној мери. БиоМЕМС и сродне технологије омогућавају низ револуционарних доприноса у системима за испоруку лекова. Развијени су системи за трансдермалну испоруку лекова, имплантабилни системи за испоруку лекова засновани на активiranом ослобађању и временском ослобађању лека, као и низ микрофабрикованих носача за испоруку лекова који обезбеђују способност циљања лека.



Слика 1.3: Фотографија слоја микроигала [17].

Трансдермална испорука лекова представља одговарајући начин примене фармацеутских производа који се не могу узимати орално. Хиподермичне ињекције са иглом која продире у горњи слој коже често изазивају стрепњу, нелагодност, бол и локализовану трауму код пацијената. Атрактивна алтернатива за заобилажење овог проблема је употреба микрофабрикованих микроиглица за трансдермалну испоруку лека (слика 1.3). Дужина микроигле ( $100 - 1000 \mu\text{m}$ ) довољна је за стварање рупа у горњем слоју коже, али није довољно велика да би изазвала значајан бол. Смањује се и оштећење ткива и ризик од преношења инфекција у поређењу са конвенционалним хиподермичним ињекцијама, а повећане су могућности примене. Низ микроиглица може се комбиновати са резервоаром за лек и са микропумпом у оквиру самосталног спољашњег система за испоруку лека. На овај начин обезбеђује се контролисана брзина испоруке лека, а систем представља

минијатуризовану верзију постојећих инсулинских инфузионих пумпи. Још неке примене МЕМС-а у биомедицинске сврхе обухватају МЕМС-е као очне имплантате, микрофлуидне технике за детекцију, манипулацију и изолацију ретких ћелија, као и примену МЕМС-а за минимално инвазивне процедуре.

Као што се види из претходно наведених примера саставни део МЕМС-а је струјање флуида у микроканалима различитих геометрија, па се природно намеће потреба за проучавањем струјања флуида у микросистемима. Осим тога, интересантни су феномени размене топлоте на микронивоу који се одвијају у микроизмењивачима топлоте.

Побољшање преноса топлоте, уз минимизирање пада притиска и смањење величине и обима система за конверзију енергије, предмет је интензивних истраживања већ деценијама. Растуће потребе за енергијом, потребе за повећањем енергетске ефикасности и уштеде

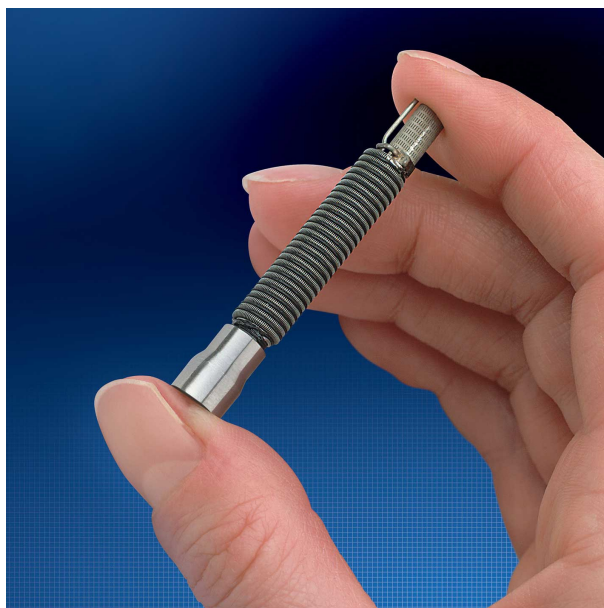


Слика 1.4: Микроизмењивач топлоте са микроцевима [18].

материјала, ограничења простора за смештање уређаја и једноставност руковања уређајем створили су револуционарне изазове за развој измењивача топлоте високих перформанси. Међу разним техникама чини се да су микроразмењивачи топлоте обећавајући начин за суочавање са наведеним изазовима у управљању термичком енергијом (слика 1.4). Правилно дизајнирани и искоришћени микроелементи ових система могу прецизно да врше дистрибуцију протока флуида, смање потребну дужину струјања и омогуће успостављање ламинарног струјања у елементима уз постизање високих коефицијената преноса топлоте, високог односа површине и запремине, као и смањење пада притиска. Због наведених предности и због брзог развоја микроуређаја, који имају примену у разним областима индустрије, изучавање карактеристика преноса топлоте у микроелементима постаје све

важније.

Микроизмењивачи топлоте у различитим конфигурацијама употребљавају се у многобројним индустријама [19]-[21]. Све већу примену налазе и у медицини, посебно у криохируршким сондама за аблацију тумора и лечење срчане аритмије. Један такав микроизмењивач (слика 1.5) налази се у Џул-Томсоновом криогеном хладњаку, који је саставни део криохируршке сонде. Овај измењивач топлоте има пречнике микроцеви од десетина до стотина микрона, у зависности од просторних ограничења, а једноставна структура и компактност су његове предности [22]. При аблацији тумора помоћу овог измењивача врши се константно хлађење врха сонде. На тај начин обезбеђује се формирање ледене кугле у околном ткиву места примене [23]. Најчешће је врх сонде позициониран на месту канцерогеног ткива, а охлађени врх сонде формирањем ледене кугле у околном ткиву уништава канцерогене ћелије. Хлађење помоћу микроизмењивача широко је распрострањено и код ласерских диода велике снаге и фотонапонских ћелија система соларне енергије, као и у



Слика 1.5: Џул-Томсонов микроизмењивач [24].

аутомобилској, ваздухопловној, енергетској и процесној индустрији, затим у термотехници, микроелектроници и биоинжењерингу.

Микроцеви су често саставни део МЕМС-а. Могу бити провидне, флексибилне, биокомпатибилне, чиме се остварује широк спектар њихове примене. У мноштву претходно наведених уређаја присутно је неизотермско струјање гаса у микроцевима под различитим температурским условима. Због тога је веома значајна могућност одређивања свих вели-



чина у струјном пољу, за различите геометрије микроцеви и за различите температурске граничне услове, што је предмет рада ове докторске дисертације.

## 1.2 Структура рада и проблеми који су решени у докторату

Струјање гаса у микроцевима је саставни део сложених МЕМС-а, који налазе све већу примену у разним областима индустрије и медицине. Због тога су истраживања струјања гаса у микроканалима и микроцевима веома актуелна. У овом раду решавају се проблеми струјања разређеног гаса у микроцевима кружног и прстенастог попречног пресека. Сви случајеви решени су за режим струјања при малим и умерено великим вредностима Рејнолдсовог броја. Разматран је утицај стишљивости поређењем резултата добијених за стишљиво струјање гаса са одговарајућим резултатима када је стишљивост занемарена. Разматрана струјања су стационарна, осносиметрична и дозвучна.

Увод, дат у поглављу 1, обухвата кратку историју микросистема. Наведени су разни примери примене микро-електро-механичких система, чији саставни део врло често чине микроцеви. После уводног поглавља представљен је преглед постојећих истраживања у области струјања разређеног гаса у микроцевима - поглавље 2. Приказани су радови који дају нумеричка, експериментална, као и малобројна аналитичка решења. Основе струјања разређеног гаса, заједно са режимима струјања према вредностима Кнудсеновог броја, дати су у поглављу 3. За струјање гаса са клизањем оправдано је користити једначине које важе за услове континуума у комбинацији са граничним условима карактеристичним за област струјања са клизањем. Наведене једначине и гранични услови представљени су у поглављу 3.

Конкретна аналитичка решења, која представљају срж овог доктората, изложена су у поглављима 4-7. У поглављу 4 решен је проблем стишљивог изотермског струјања гаса у микроцевима кружног попречног пресека променљивог полупречника (конвергентне, дивергентне и микроцеви константног попречног пресека). Добијени резултати за поље притиска, брзине и за масени проток верификовани су упоређивањем са решењима датим у литератури. Проблем неизотермског струјања гаса кроз микроцеви константног попречног пресека са константном температуром зида решен је у поглављу 5. Осим решења за

стишљиво струјање, код неизотермског струјања гаса кроз микроцеви, дата су и решења за случај струјања гаса када се стишљивост занемарује и упоређена са резултатима доступним у литератури. Изотермски случај стишљивог струјања разређеног гаса кроз микроцев прстенастог попречног пресека, заједно са добијеним решењима за поље притиска и брзине, представљен је у поглављу 6. Случај са константном и једнаком температуром на оба зида микроцеви константног прстенастог попречног пресека дат је у поглављу 7. Резултати су добијени за случај стишљивог струјања, као и за случај када се стишљивост занемарује. Њихова тачност је потврђена поређењем са одговарајућим резултатима из литературе.

У поглављу 8 изведени су закључци претходно представљених истраживања. Наведен је допринос доктората, карактеристике добијених решења, као и утицаји појединих параметара. Дати су и могући правци даљег рада.



## 2 Преглед постојећих истраживања струјања разређеног гаса у микроцевима

Преглед аналитичких, нумеричких и експерименталних истраживања унутрашњих струјања разређеног гаса дат је у овом поглављу.

Струјања разређеног гаса у каналима и цевима у широком опсегу Кнудсенових бројева разматрали су Бескок и Карниадакис [25]. Развили су обједињени модел који предвиђа расподелу брзине, притиска, као и масеног и запреминског протока у каналима и цевима, за различите односе карактеристичних димензија ових елемената и за пун опсег Кнудсенових бројева ( $0 \leq Kn < \infty$ ). Предложени модел заснован је на општем граничном услову клизања за брзину, који је такође представљен у овом раду и који се користи за представљање расподеле брзине у каналима и цевима за цео режим струјања. Агравул [26] је разматрао струјања гаса у микроканалима различитих попречних пресека, али и микроканалима са кривинама или наглим проширењима/сужењима, са различитим моделима клизања. Анализирао је и утицај храпавости површине на карактеристике струјања и на укупан пад притиска. Колин [27] је дао преглед конвективног преноса топлоте у различитим микрогеометријама, са нагласком на ефекте разређености у режиму клизања. Представљени су различити услови преноса топлоте (константа температура зида, константан топлотни флуks) и различите микрогеометрије (кружни, правоугаони, трапезоидни и троугласти попречни пресек, паралелне плоче, прстенасти и полукружни попречни пресек) са специфичним утицајима (вискозна дисипација, аксијална кондукција, променљива својства флуида). Шарипов и Силизњов [28] приказују анализу одговарајућих нумеричких података и аналитичких резултата при струјању разређеног гаса, при чему су обухваћени сви опсежи карактеристичних параметара. Разматрају произвољне падове притиска и температуре - од малих вредности, када важи линеарна кинетичка теорија, до великих, када се примењују нелинеарни модели. Покривен је читав опсег разређености гаса, као и геометрије цеви. Преглед дат у [29] резимира бројна истраживања фокусирана на проучавање струјања флуида и преноса топлоте код различитих типова микроцеви

и микроканала, са циљем јасне и детаљне анализе утицаја геометријске спецификације, граничних услова и типа флуида. Преглед различитих граничних услова који се користе уз Навије-Стоксове једначине у области струјања гаса са клизањем представљен је у [30]. Анализиран је и утицај дужине слободног пута молекула, храпавости, вискозности, врсте гаса и коефицијената акомодације на хибридне моделе клизања за микрострујања гаса.

Надаље су разматрана разнолика струјања разређеног гаса кроз микроцеви кружног и елиптичног попречног пресека, као и кроз микроцеви прстенастог попречног пресека.

## 2.1 Струјања разређеног гаса у микроцевима кружног и елиптичног попречног пресека

### 2.1.1 Изотермска струјања

Изотермско струјање разређеног гаса у микроцеви кружног попречног пресека разматрали су Шарипов и Силизњов [31]. Струјање је изазвано разликом притисака у резервоарима повезаним за крајеве микроцеви, а за добијање масеног протока примењен је БГК модел Болцманове једначине. Граур и Шарипов [32] истраживали су зависност масеног протока од разлике притисака на крајевима микроцеви помоћу БГК кинетичког модела. За разлику од истраживања [31], у раду [32] је осим микроцеви кружног попречног пресека разматрана и микроцев елиптичног попречног пресека, са различитим односима полупречника елипсе, за цео опсег Кнудсенових бројева. Титарев [33] се такође бавио струјањем разређеног гаса услед разлике притисака за широк опсег Кнудсенових бројева и за широк распон односа дужине и полупречника микроцеви кружног попречног пресека. Применио је нумеричко решавање Болцманове кинетичке једначине са линеаризованим моделом колизионог интеграла Шакова. Изотермско струјање разређеног гаса, које се одвија услед осцилујућег градијента притиска у подужном правцу, истраживао је Цимпукис [34]. Примењен је нумерички приступ заснован на решавању временски зависне линеаризоване БГК кинетичке једначине.

Изотермско струјање у микроцеви наизменично конвергентно-дивергентног попречног пресека, које настаје због разлике притисака, разматрао је Акбери са групом аутора [35]. Примењен је нумерички и аналитички приступ. Нумеричко решење базирано је на

методи коначних елемената, а добијено аналитичко решење засновано је на претпоставци да је профил подужне брзине параболичан у свим попречним пресецима цеви. У раду Раденковића и др. [36] дато је решење за стишљиво изотермско струјање разређеног гаса у микроцеви добијено макроскопским приступом уз примену Максвеловог граничног услова. За аналитичко решавање проблема примењен је пертурбациони приступ, где су све величине претпостављене у облику пертурбационих редова. Аналитички приступ при решавању изотермског струјања кроз микроцев елиптичног попречног пресека применили су и Дуан и Музичка [37]. Методом раздвајања променљивих развили су једноставан модел за одређивање Пуазејевог броја, а модел се може користити и за израчунавање масеног протока и расподеле притиска при струјању са клизањем у елиптичним микроцевима.

Експериментално мерење масеног протока у микроцеви кроз коју се одвија изотермско струјање разређеног гаса извршио је Јуарт са групом аутора [38]. Резултате добијене двома експерименталним процедурама упоредили су са својим аналитичким решењима, при чему је постигнуто добро слагање. Карактеристике струјања гаса у микроцевима различитих пречника под условима високог притиска експериментално је испитивао Ђао са групом аутора [39]. Експеримент је показао да се под условима високог притиска јављају утицаји подразумевани за струјања на микроскали, иако вредност Кнудсеновог броја не указује на то.

### 2.1.2 Неизотермска струјања

#### Униформни топлотни флуks на зиду, униформна температура зида

Сан [40] је анализирао конвективни пренос топлоте при нестишљивом струјању разређеног гаса у цеви константне температуре зида, константног топлотног флуksа и са линеарном расподелом температуре дуж зида у правцу струјања. Решења је добио применом хибридне методе коначних разлика - коначних запремина за услове струјања са клизањем и температурским скоком. Анализиран је и утицај вискозности. Ким и Парк [41] су разматрали стишљиво струјање разређеног вискозног гаса за различите пречнике микроцеви. Користили су нумеричку полу-имплицитну методу за спрегу притиска и брзине. Квадратна интерполација је коришћена за конвективне чланове. Хонг и др. [42] су разматрали вредност Пуазејевог броја ( $fRe$ ) за развијено микрострујање у режиму струјања са клизањем. Моментна и једначина енергије за стишљиво струјање решене су за широк опсег

Рејнолдсових и Махових бројева са два термичка гранична услова: константном температуром зида и константним топлотним флуksom. Нумерички модел је потврђен поређењем са постојећим експерименталним и нумеричким резултатима. Тао [43] је методом коначних разлика разматрао струјање разређеног гаса у микроцеви. У оквиру режима клизања и раног прелазног режима анализиран је утицај стишљивости, разређености и температурске разлике између улаза и зида цеви на масени проток. Анализирана су три модела: када је температура зида једнака, мања или већа од температуре гаса на улазу у цев.

Азиз и Нидбалски [44] су направили упоредну студију модела са клизањем првог и другог реда реда укључујући аксијалну кондукцију и вискозну дисипацију. Сматрајући да је струјање хидродинамички потпуно развијено, профили брзине добијени су аналитичким путем. Нумеричко решење за температуру добијено је помоћу вишедимензијске Њутнове методе, уз услов константне температуре на зиду цеви. Шјао [45] је аналитичким путем коришћењем сопствених вредности разматрао хидродинамички потпуно развијено струјање разређеног гаса, где је поље температуре потпуно развијено или се развија од самог улаза у микроцев кружног попречног пресека. Микроцев је изложена константном топлотном флуksу, а струјање је стационарно, осносиметрично, нестишљиво са занемареним утицајем вискозне дисипације и аксијалне кондукције. Кушвахa [46] аналитички решава исти проблем укључујући вискозну дисипацију. Тунч и Бајазитоглу [47] су приступили решавању једначине енергије, која такође укључује вискозну дисипацију, помоћу технике интегралне трансформације. Разматрана су два случаја: униформна температура и униформни топлотни флуks.

Хонг и др. [48] су радили експерименте при ламинарном преносу топлоте у микроцевима константне температуре зида ниже од улазне (хлађено кућиште). Одређена је пренесена количина топлоте као и локалне вредности температуре. Резултати су потврђени поређењем са резултатима из литературе. Хемадри је са групом аутора [49] презентовао експериментално истраживање струјања разређеног гаса, где се услед струјања топле воде кроз омотач цеви температура зида цеви кружног попречног пресека одржава константном. Овде су, по први пут, изведена локална мерења температуре у разређеном гасу да би се анализирале вредности Нуселтовог броја.

## Градијент температуре на зиду у правцу струјања гаса

Струјање гаса кроз микроцев, која повезује два резервоара испуњена гасом, може бити остварено услед разлике притисака у резервоарима или услед разлике температуре гаса у њима. Феномен струјања гаса, који настаје као последица различите температуре између резервоара, назива се термичким пузањем. У том случају гас почиње да струји од хладнијег ка топлијем резервоару, чак и када не постоји разлика притисака. У затвореном систему струјање гаса од хладнијег ка топлијем резервоару доводи до разлике притисака, која изазива струјање гаса у супротном смеру у односу на термичко пузање. Након извесног времена струјање услед разлике притисака потпуно поништава струјање услед разлике температуре. Овај ефекат настаје као последица термомолекуларног притиска. На ове феномене указао је Рејнолдс [50] и назвао их термичком транспирацијом [51].

Струјање разређеног гаса кроз микроцев кружног попречног пресека, узроковано градијентом температуре и притиска у подужном правцу, изучавао је Шарипов [51]. Израчунао је масени проток помоћу С кинетичког модела, а разређен је и метод за израчунавање ефеката термомолекуларног притиска и термичког пузања изазваних великом разликом температуре. Граур и Шарипов [52] истраживали су стационарно струјање разређеног гаса кроз микроцев елиптичног попречног пресека, узроковано градијентом притиска и градијентом температуре. Масени протоци израчунати су помоћу С кинетичког модела, за цео опсег Кнудсенових бројева и за широк опсег односа полуосе елипсе. Метод за израчунавање масеног протока при струјању разређеног гаса кроз кружну микроцев променљивог пречника, која је изложена произвољном паду притиска и температуре, дали су Шарипов и Бертолдо [53]. Метод је заснован на резултатима добијеним на основу кинетичке једначине, а разматран је и термомолекуларни притисак.

Термичку транспирацију у микроцеви кружног попречног пресека истраживао је Карденас са групом аутора [54]. Истраживање је било експериментално, са предлогом оригиналне методе за мерење масеног протока при термичкој транспирацији. Модификовањем већ познатих експерименталних метода, Породонов је са групом аутора још 1978. дао карактеристике разлика притисака које се јављају при термичкој транспирацији и микроцеви кружног попречног пресека за различите гасове, различите разређености, под утицајем различитих температурских градијената [55].

## Проширени Грецов проблем

Ламинарно нестишљиво струјање флуида кроз кружну цев, са потпуно равнијеним профилем брзине и развијајућим профилем температуре, најпре су независно разматрали Грец [56], [57] и Нуселт [58]. Цев је одржавана на константној температури, која се разликује од температуре флуида на улазу у цев. Аксијална кондукција, вискозна дисипација, и извори термичке енергије унутар флуида су занемарени [59]. Касније су настала многа истраживања која проширују Грецов проблем, односно укључују додатне ефекте.

Грецов проблем проширио је Барон са групом аутора укључивањем ефеката разређености 1997. године [60]. Проблем је решен аналитичким путем, посебном техником заснованом на процени сопствених вредности [61]. Међутим, иако су аутори експлицитно споменули гранични услов температурског скока у спецификацији граничних услова, занемарили су га у прорачуну сопствених вредности. Лародеј је са групом аутора [62] узео у обзир гранични услов клизања за брзину и температурског скока за температуру. Даљим проширивањем Грецовог проблема, укључујући топлотни флуks на зиду, уместо досадашње константне температуре зида, бавио се Емил са групом аутора [63]. Осим специјалне технике засноване на процени сопствених вредности, за решавање инверзног проблема који се односи на одређивање температуре при задатом топлотном флуксу на зиду, коришћена је Лапласова трансформација.

Ајдин и Авци разматрали су Грецов проблем проширен ефектима разређености и вискозне дисипације [64], као и аксијалне кондукције [65]. При укљученом утицају вискозне дисипације разматрали су два температурска гранична услова: константни топлотни флуks и константну температуру зида, а разматрани су случајеви хлађења и загревања зида микроцеви. Једначина енергије решена је нумерички, методом коначних разлика, а детаљно је разматран утицај промене Кнудсеновог и Брикмановог броја на промене Нуселтовог броја [64]. Ајдин и Авци такође анализирају Грецов проблем проширен утицајем разређености и аксијалне кондукције, где је микроцев изложена разлици топлотног флуksа између зида цеви и улаза у цев. Студија је решена нумерички, методом коначних разлика, а детаљно се разматра утицај Кнудсеновог и Пеклеовог броја на Нуселтов број [65].

Три Грецова проблема, проширена утицајем разређености, вискозне дисипације и аксијалне кондукције, разматрао је Четин са групом аутора [66], [67], [68]. Најпре су разматрали случај са униформном температуром зида, где је брзина добијена аналитичким пу-

тем, а температура нумерички - методом коначних разлика [66]. Код истог случаја, али са константном температуром зида, једначина енергије решена је аналитички, коришћењем проширења сопствених функција [67]. Затим је разматран услов константног топлотног флукса на зиду цеви [68]. Дистрибуција температуре, такође, је добијена аналитичким путем - коришћењем проширења сопствених функција. Чланови решења добијени су као конфлуентне хипергеометријске функције. Исти проблем, Грецов случај проширен утицајем разређености, вискозне дисипације и аксијалне кондукције разматрао је и Баришик са групом аутора [69]. Температура зида је константна. Баришиков приступ потпуно је аналитички. Математички изазови превазиђени су коришћењем Грам-Шмитове ортогонализационе технике заједно са Гаусовом квадратуром. Грецов проблем проширен утицајем разређености, вискозне дисипације и аксијалне кондукције, за два температурска гранична услова, униформну температура зида и униформни температурски флуks, изучавали су Ђон и Ђон [70]. Нуселтов број и расподела температуре добијени су развојем сопствених функција.

## 2.2 Струјања разређеног гаса у прстенастим микроцевима

Пренос топлоте при аксијалном струјању разређеног гаса између два саосна цилиндра на различитим температурама разматран је у радовима [71] и [72]. Махарџан је са групом аутора [71] решење добио С-моделом и директном симулацијом Монте Карло, са примењеним Лин и Вилис граничним условом температурског скока. Решење Пантасиса и Валу-георгиса [72] засновано је на нелинеарном С кинетичком моделу са Серчигнани-Лампис граничним условима. Струјање разређеног гаса између два коаксијална елиптична цилиндра са различитим униформним температурама разматрано је у раду Ајокија и др. [73]. Истраживање стационарног струјања гаса индукваног између ова два цилиндра базирају на кинетичкој теорији гасова, а анализа је извршена нумерички, помоћу директне симулације Монте-Карло, за широк опсег Кнудсенових бројева.

Венг и Чен [74] анализирају утицај закривљености површине зида на микрострујање гаса, ради проучавања природне конвекције у вертикалној прстенастој микроцеви отвореног краја са изотермски загрејаним унутрашњим зидом. Потпуно развијена решења за брзину, температуру, проток, смичући напон и топлотни флуks изведена су аналитички,

а резултати показују да закривљеност површине зида има значајан утицај. Овај утицај резултира нелинеарним понашањем температуре, што није случај код микроканала са паралелним зидовима. Истраживање механизма транспортних феномена аналитичким путем, при протоку разређеног гаса малих брзина у режиму струјања са клизањем које се одвија између осовине и њеног цилиндричног кућишта (цилиндрични Куетов проблем), извршено је у раду Шамширија и др. [75]. Узимајући у обзир ефекте разређености и вискозне дисипације проблем је моделован нестишљивим Навије-Стокс-Фуријеовим једначинама у поларно-цилиндричном координатном систему. Разматрана су два различита термичка гранична услова: униформни топлотни флуks и константна температура зида. Струјање разређеног гаса са преносом топлоте у микроцеви прстенастог попречног пресека аналитички разматрају Дуан и Музичка [76]. Анализа резултата дата је за услов када постоји пренос топлоте на оба зида цеви, као и за случај када је један зид адијабатски изолован, а преко другог се врши пренос топлоте. Стационарни проблем преноса топлоте у разређеном гасу који се налази између два коаксијална цилиндра, која се одржавају на две различите константне температуре, разматрали су и Барбера и Брини [77]. У овом случају спољашњи цилиндар мирује, док се унутрашњи креће у аксијалном правцу константном брзином. Аналитичком решавању проблема приступљено је помоћу Градових једначина проширене термодинамике.



## 3 Основне једначине и гранични услови

### 3.1 Струјање разређеног гаса

При струјању гаса кроз микроцеви дужина слободног пута молекула  $\tilde{\lambda}$  није занемарљиво мала у односу на пречник цеви  $\tilde{D}$ , па разређеност гаса чак и на уобичајеним околним условима долази до изражаја. Процена степена разређености одређена је вредношћу Кнудсеновог броја:

$$\text{Kn} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{D}}. \quad (3.1)$$

Дужина слободног пута молекула  $\tilde{\lambda}$  представља средње растојање које молекули пређу између два судара. Ако се разматра идеалан једноатомски гас, са моделима молекула у облику чврстих сфера, дужина слободног пута молекула дефинише се као:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{k}_B \tilde{T}}{\tilde{p} \tilde{d}^2 \pi \sqrt{2}}, \quad (3.2)$$

где је  $\tilde{T}$  температура гаса,  $\tilde{k}_B = 1,38 \cdot 10^{-38}$  J/K Болцманова константа,  $\tilde{d}$  пречник молекула, а  $\tilde{p}$  је притисак.

На основу једначина (3.1) и (3.2) следи тачна веза између Кнудсеновог, Рејнолдсовог и Маховог броја:

$$\text{Kn} = \sqrt{\frac{\pi \kappa}{2}} \frac{\text{Ma}}{\text{Re}}. \quad (3.3)$$

Рејнолдсов број приказује однос инерцијалних и вискозних сила:

$$\text{Re} = \frac{\tilde{u} \tilde{D}}{\tilde{\nu}}, \quad (3.4)$$

где је  $\tilde{u}$  карактеристична брзина струјања, а  $\tilde{\nu}$  кинематска вискозност гаса. Махов број је мера стишљивости флуида и може се посматрати као однос инерцијалних и еластичних сила, тј. као однос брзине флуида  $\tilde{u}$  према брзини звука:

$$\text{Ma} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{c}}. \quad (3.5)$$

Брзина звука  $\tilde{c}$  се на температури  $\tilde{T}$  дефинише као:

$$\tilde{c} = \sqrt{\kappa \tilde{R}_g \tilde{T}},$$

где је  $\kappa$  однос специфичних топлотних капацитета при константном притиску и константној запремини ( $\kappa = \tilde{c}_p / \tilde{c}_v$ ), а  $\tilde{R}_g$  гасна константа. За неизотермске проблеме дефинише се Прантлов број:

$$\text{Pr} = \frac{\tilde{c}_p \tilde{\mu}}{\tilde{k}}, \quad (3.6)$$

где је  $\tilde{\mu}$  динамичка вискозност гаса, а  $\tilde{k}$  је његова топлотна проводљивост.

Из кинетичке теорије гасова следи веза између вискозности и дужине слободног пута молекула:

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}} = \frac{\tilde{\lambda} \tilde{c}_m}{2}, \quad (3.7)$$

где  $\tilde{c}_m$  означава средњу брзину молекула, која је нешто већа од брзине звука  $\tilde{c}$ :

$$\tilde{c}_m = \sqrt{\frac{8}{\pi \kappa}} \tilde{c}. \quad (3.8)$$

Тачна веза између Кнудсеновог, Рејнолдсовог и Маховог броја (3.3) омогућава процену реда величине чланова у систему основних једначина и граничних услова помоћу којих ће бити решавани проблеми у овој тези.

## 3.2 Режији струјања према вредностима

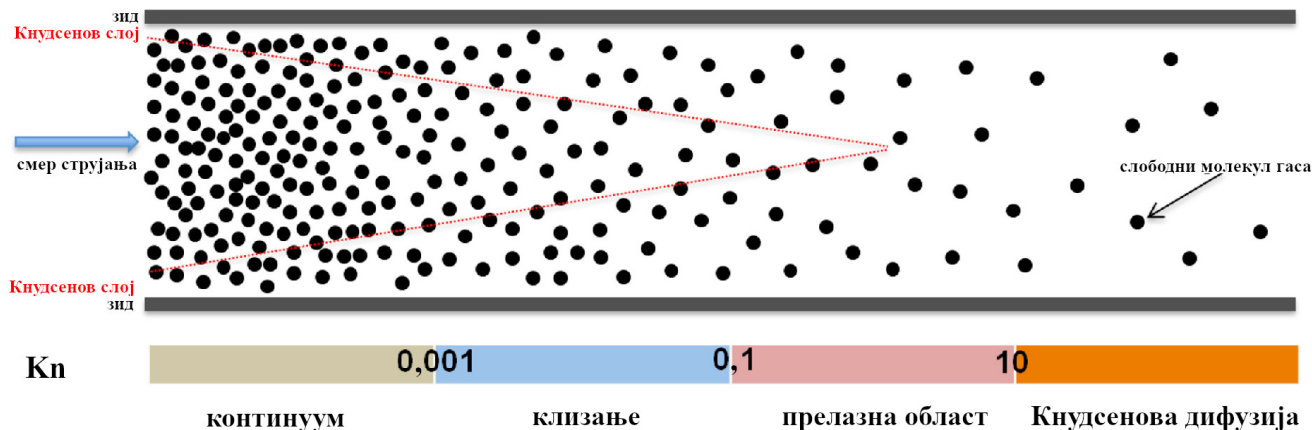
### Кнудсеновог броја

Према вредностима Кнудсеновог броја разликују се следећи Режији струјања [1]:

- континуум ( $\text{Kn} < 0,001$ ),
- струјање гаса са клизањем ( $0,001 \leq \text{Kn} < 0,1$ ),
- прелазни режим ( $0,1 \leq \text{Kn} < 10$ ),
- слободно молекуларно струјање ( $\text{Kn} \geq 10$ ).

Наведене границе Режији су оквирне. Различити Режији струјања захтевају различит

приступ решавању проблема у наведеним областима. Сликвит приказ различитих режима струјања у зависности од Кнудсеновог броја, где црне тачке представљају молекуле гаса у микроканалу, приказан је на слици 3.1.



Слика 3.1: Различити режими струјања, које настаје услед разлике притисака, у дугом микроканалу [78].

Струјање у области континуума се описује једначином континуитета, Навије-Стоксовим једначинама, једначином енергије, једначином стања идеалног гаса и класичним граничним условима континуума према којима су брзина и температура гаса на зиду једнаке брзини и температури зида (гас је у термодинамичкој равнотежи).

У области струјања са клизањем, чак и за веома мале вредности Кнудсеновог броја постоји слој у близини зида, у коме гас није у стању термодинамичке равнотеже, и назива се Кнудсенов слој (слика 3.1). Кнудсенов слој има дебљину реда величине дужине слободног пута молекула. У области струјања гаса са клизањем разређеност гаса мора се узети у обзир. То се остварује применом граничних услова клизања гаса на зиду за поље брзине и температурског скока за температуру, који су тачности реда Кнудсеновог броја,  $\mathcal{O}(\text{Kn})$ . При извођењу Навије-Стоксових једначина из кинетичке теорије показује се да су оне такође тачности реда  $\mathcal{O}(\text{Kn})$ , па је оправдано користити их у комбинацији са овим граничним условима.

У прелазном режиму и режиму слободног молекуларног струјања више се не могу применити Навије-Стоксове једначине. У раном прелазном режиму још се може користити модел континуума са клизањем, али користећи Барнетове једначине уместо Навије-Стоксовог модела у комбинацији са граничним условима тачности  $\mathcal{O}(\text{Kn}^2)$ . За веће вредности Кнудсеновог броја, у потпуно прелазном и режиму слободног струјања, проблем се

решава применом кинетичке теорије гасова.

### 3.3 Основне једначине

Како се у тези разматра струјање разређеног гаса, овај режим моделоваће се једначинама које важе за област континуума, заједно са граничним условом клизања за брзину и граничним условом температурског скока. У општем облику систем једначина за стационарно струјање чине, једначина континуитета, Навије-Стоксове једначине и једначина енергије, који записан у индексној нотацији у диференцијалном облику гласи:

$$\frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{u}_j)}{\partial \tilde{x}_j} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} (\tilde{\rho} \tilde{u}_j \tilde{u}_k - \tilde{\sigma}_{jk}) = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} (\tilde{\rho} \tilde{E} \tilde{u}_j - \tilde{\sigma}_{jk} \tilde{u}_k + \tilde{q}_j) = 0. \quad (3.11)$$

Проблеми разматрани у овом раду су струјање гаса кроз микроцеви кружног попречног пресека и микроцеви прстенастог попречног пресека, тако да је погодно користити цилиндрични координатни систем. У цилиндричном координатном систему положај сваке тачке одређен је помоћу три координате  $(r, \theta, z)$ , а за осносиметрични случај координатама  $(r, z)$ .

Кронекеров симбол означен је са  $\delta_{jk}$ , а са  $\tilde{\sigma}_{jk}$  компоненте тензора напона:

$$\tilde{\sigma}_{jk} = -\tilde{p} \delta_{jk} + \tilde{\tau}_{jk}, \quad (3.12)$$

где је веза између компоненте тензора брзине деформисања  $\tilde{S}_{jk}$  и компоненте тензора напона услед вискозности  $\tilde{\tau}_{jk}$  према Стоксовој хипотези о напонима:

$$\tilde{\tau}_{jk} = 2\tilde{\mu} \tilde{S}_{jk} - \frac{2}{3} \tilde{\mu} \delta_{jk} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}. \quad (3.13)$$

Збир унутрашње енергије  $\tilde{e}$  и кинетичке енергије, сведене на јединицу масе гаса, даје укупну енергију сведену на јединицу масе гаса:

$$\tilde{E} = \tilde{e} + \frac{\tilde{u}_k \tilde{u}_k}{2}. \quad (3.14)$$

Уз претпоставку да се размена топлоте са околином врши провођењем, компоненте вектора топлотног флукса су:

$$\tilde{q}_j = -\tilde{k} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j}. \quad (3.15)$$

Коначно, за стационарно осносиметрично стишљиво низотермско струјање, које ће бити разматрано у овој тези, систем једначина који чине једначина континуитета, једначине количине кретања за подужни и попречни правац и једначина енергије у диференцијалном облику је:

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{\rho} \tilde{v})}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{u})}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{z} : \tilde{\rho} \left( \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \frac{2}{3} \tilde{\mu} \left( -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}) + 2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \right) \right) + \\ &+ \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{r}} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{r} : \tilde{\rho} \left( \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \right) &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{\mu} \left( -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{v}) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \tilde{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right) \right) \\ &+ \frac{2\tilde{\mu}}{\tilde{r}} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \tilde{c}_p \left( \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) &= \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{k} \tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left( \tilde{k} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right) + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \\ &+ 2\tilde{\mu} \left( \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \right)^2 \right) + \tilde{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 - \frac{2}{3} \tilde{\mu} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{v})}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Овде је  $\tilde{u}$  пројекција брзине на подужни правац  $\tilde{z}$ , а  $\tilde{v}$  пројекција брзине на попречни правац  $\tilde{r}$ , који се мери од осе цеви. Приметимо да у овим једначинама динамичка вискозност и топлотна проводљивост нису константни у струјном пољу.

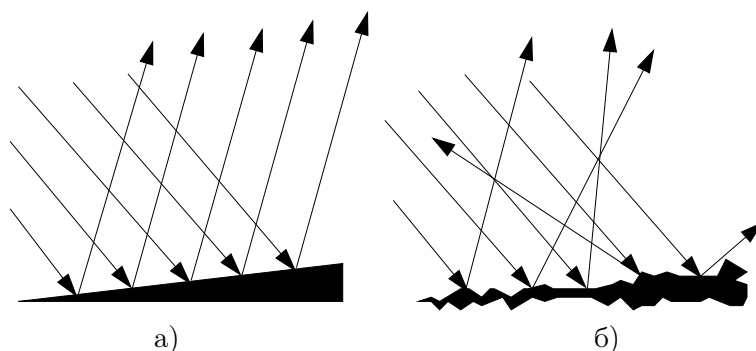
С обзиром на то да се разматра стишљиво струјање гаса, овом систему једначина потребно је додати и једначину стања идеалног гаса:

$$\tilde{p} = \tilde{\rho} \tilde{R}_g \tilde{T}. \quad (3.20)$$

### 3.4 Гранични услови

У класичној механици флуида, која се заснива на условима континуума, гранични услов за брзину одређен је брзином зида, а гранични услов за температуру одређен је температуром зида. Тако је релативна брзина флуида у односу на површину са којом је у додиру нула, а температура флуида једнака је температури површи коју додирује. Да би ова два гранична услова могла да се примене, неопходно је да су струјни ток флуида и чврста површ, коју флуид додирује, у термодинамичкој равнотежи, тј. потребна је бесконачно висока учесталост судара између флуида и чврсте површи. Показало се да услови без клизања и без температурског скока дају тачна решења све до вредности Кнудсеновог броја  $Kn = 0,001$ . За веће вредности Кнудсеновог броја учесталост судара није довољно висока да би био испуњен услов термодинамичке равнотеже, стога долази до клизања гаса у односу на површ са којом је у контакту, као и до температурског скока гаса у односу на температуру зида.

За тачно дефинисање граничних услова клизања и температурског скока неопходно је знати како се молекули после судара са чврстом површи рефлектују. Модел интеракције између гаса и чврсте површи основа је за исправно решавање проблема при струјањима разређеног гаса. Због физичке сложености овог питања експериментална и теоријска истраживања далеко су од савршенства. Опсег у коме се дефинише интеракција молекула гаса и чврсте површи креће се у границама од спекуларне до дифузне рефлексије.



**Слика 3.2:** Рефлексија молекула гаса са чврстом површи: а) спекуларна рефлексија, б) дифузна рефлексија.

При спекуларној рефлексији молекули се одбијају од идеално глатке површи, под углом који је једнак углу под којим молекули ударају у површ (слика 3.2 а)). Дифузна рефлексија представља интеракцију молекула гаса и хрпаве површи, где је вероват-

ноћа одбијања молекула у свим правцима једнака (слика 3.2 б)). Макроскопски гледано, интеракцију између гаса и зида дефинишу коефицијент акомодације вектора количине кретања и термички коефицијент акомодације.

Коефицијент акомодације вектора количине кретања дефинисан је разменом количине кретања молекула гаса са зидом:

$$\sigma_v = \frac{\tilde{K}_i - \tilde{K}_r}{\tilde{K}_i - \tilde{K}_w}, \quad (3.21)$$

где су  $\tilde{K}_i$  и  $\tilde{K}_r$  пројекције вектора количине кретања молекула на правац струјања флуида пре и после судара са зидом.  $\tilde{K}_w$  је количина кретања молекула у правцу струјања флуида коју су молекули преузели од зида. У случају спекуларне рефлексije количина кретања молекула  $\tilde{K}_i$  пре судара са зидом једнака је количини кретања молекула  $\tilde{K}_r$  после судара са зидом, па је  $\sigma_v = 0$ . У случају дифузне рефлексije  $\tilde{K}_r = \tilde{K}_w$ , па је  $\sigma_v = 1$ . Ако је зид непокретан ( $\tilde{K}_w = 0$ ) средња брзина рефлектованих молекула у правцу струјања флуида тада је једнака нули, тј.  $\tilde{K}_r = 0$ .

Термички коефицијент акомодације је:

$$\sigma_T = \frac{\tilde{e}_i - \tilde{e}_r}{\tilde{e}_i - \tilde{e}_w}, \quad (3.22)$$

где  $\tilde{e}_i$  и  $\tilde{e}_r$  респективно означавају унутрашњу енергију молекула пре и после судара са зидом, док се са  $\tilde{e}_w$  означава унутрашња енергија молекула гаса на температури зида. При идеалној размени енергије, када је  $\tilde{e}_r = \tilde{e}_w$ , следи да је  $\sigma_T = 1$ .

Коефицијент акомодације вектора количине кретања и термички коефицијент акомодације зависе од врсте гаса, квалитета и врсте површи и услова струјања. За поједине гасове и материјале зида коефицијенти акомодације дати су у табели 3.1.

Врста гаса	Материјал зида	$\sigma_v$	$\sigma_T$
Ваздух	Алуминијум	0,87 - 0,97	0,87 - 0,97
Хелијум	Алуминијум		0,073
Ваздух	Гвожђе	0,87 - 0,93	0,87 - 0,96
Водоник	Гвожђе		0,31 - 0,55
Ваздух	Бронза	0,88 - 0,95	

**Таблица 3.1:** Коефицијент акомодације вектора количине кретања и термички коефицијент акомодације за типичне гасове и материјале зида [79].

### 3.4.1 Гранични услови за брзину

Гранични услов клизања гаса на зиду, тачности реда Кнудсеновог броја, развио је Максвел користећи кинетичку теорију једноатомских гасова [80]. У изворном облику Максвеловог граничног услова чланови, у којима се јављају изводи брзине, дати су као изводи у правцу нормале на зид, за који се овај гранични услов користи. У раду Стеванановић [81] показано је да је изводе у правцу нормале на зид при малим угловима нагиба зида цеви  $\alpha$  могуће заменити изводима у правцу попречне координате  $\tilde{r}$ . При томе долази до грешке реда  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ , где је  $\varepsilon$  параметар мале вредности (поглавље 4.2.1). На основу тога, Максвелов гранични услов за струјање у цевима гласи:

$$\tilde{u} - \tilde{u}_w = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \tilde{\lambda} \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right|_w + \frac{3}{4} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho} \tilde{T}} \left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \right|_w, \quad \tilde{v} = \tilde{v}_w, \quad (3.23)$$

где индекс  $w$  означава зид,  $\tilde{u}_w$  и  $\tilde{v}_w$  су пројекције брзине зида на  $\tilde{z}$  и  $\tilde{r}$  правце, а  $\tilde{\lambda}$  је дато једначином (3.2). Први члан овако дефинисаног граничног услова (3.23) показује да негативан градијент брзине у правцу координате  $\tilde{r}$  доводи до повећања брзине гаса у односу на брзину зида. Други члан је термичко пузање, које се јавља као последица утицаја промене температуре гаса на зиду у правцу струјања. Овде се неће разматрати струјања гаса са подужном променом температуре гаса, па ће се Максвелов гранични услов свести на први члан са десне стране израза (3.23).

У литератури се срећу различити гранични услови другог реда [79]. Овде ће бити коришћен гранични услов Хсиа-Домота, који је дефинисан у раду [82]. За случај струјања у кружној цеви он гласи:

$$\tilde{u} - \tilde{u}_w = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left( -\tilde{\lambda} \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right|_w - \frac{\tilde{\lambda}^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} \right|_w \right). \quad (3.24)$$

У изворном облику, у граничном услову клизања Хсиа - Домота [82], чланови у којима се јављају изводи брзине дати су као изводи у правцу нормале на зид. Као и код Максвеловог граничног услова, изводи у правцу нормале на зид при малим угловима нагиба зида цеви  $\alpha$  замењени су изводима у правцу попречне координате  $\tilde{r}$ , а на основу [81].



### 3.4.2 Гранични услов за температуру

Гранични услов за поље температуре тачности реда  $\mathcal{O}(\text{Kn})$ , који се користи у овом раду, извео је Смолуховски [83] применом кинетичке теорије гасова. За струјања у цевима може се написати као:

$$\tilde{T} - \tilde{T}_w = -\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{\tilde{\lambda}}{\text{Pr}} \left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right|_w. \quad (3.25)$$

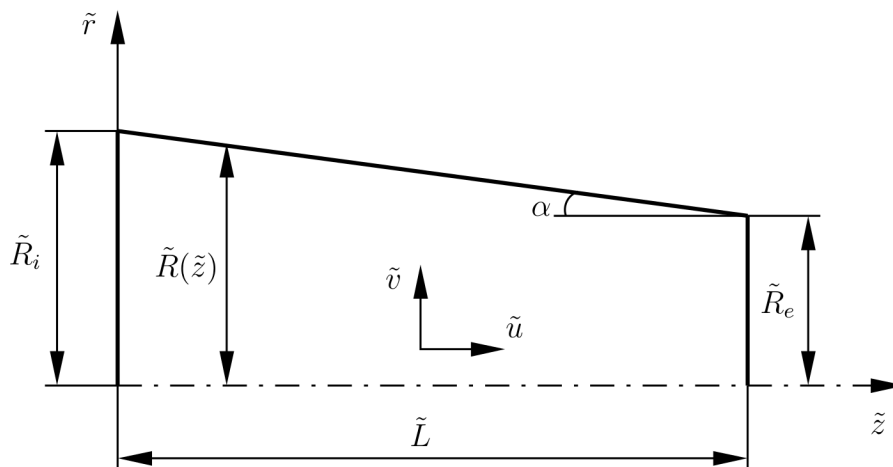
Овај услов зове се још условом температурског скока. Температура зида је  $\tilde{T}_w$ , а све остале величине представљају стање гаса на зиду. Гранични услов Смолуховског (3.25) показује да негативан градијент температуре у радијалном правцу  $\tilde{r}$  доприноси повећању температуре гаса у односу на температуру зида.

# 4 Изотермско струјање гаса у микроцевима променљивог попречног пресека

## 4.1 Опис проблема и модел струјања

У овом поглављу разматра се осносиметрично стационарно изотермско струјање разређеног гаса у кружној микроцеви променљивог попречног пресека. Струјање гаса у микроцеви је стишљиво и дозвучно, а настаје услед разлике притисака на улазу и излазу из микроцеви.

Полупречник осносиметричне кружне цеви мења се у функцији подужне координате  $\tilde{z}$ . Смер координате  $\tilde{z}$  (смер струјања гаса), попречне координате  $\tilde{r}$ , полупречник улазног попречног пресека  $\tilde{R}_i$ , полупречник излазног попречног пресека  $\tilde{R}_e$ , полупречник цеви за било коју вредност координате  $\tilde{z}$  између улаза и излаза  $\tilde{R}(\tilde{z})$ , дужина цеви  $\tilde{L}$ , као и угао нагиба  $\alpha$ , приказани су на слици 4.1. Величине у улазном пресеку носе индекс „ $i$ ”, док су величине на излазу из цеви означене индексом „ $e$ ”. Димензијске величине носе ознаку  $\sim$ , док ће бездимензијске величине бити без такве ознаке. Пројекције вектора брзине на подужни правац  $\tilde{z}$  и на попречни правац  $\tilde{r}$  су редом  $\tilde{u}$  и  $\tilde{v}$ .



Слика 4.1: Геометрија микроцеви променљивог попречног пресека.

## 4.2 Систем једначина у бездимензијском облику

Систем једначина у димензијском облику који описује стационарно изотермско осносиметрично стишљиво струјање разређеног гаса у микроцеви чине једначина континуитета (3.16), једначине количине кретања за  $\tilde{z}$  (3.17) и  $\tilde{r}$  правац (3.18), једначина стања идеалног гаса (3.20), као и гранични услов клизања другог реда Хсиа-Домото (3.24).

Да би се димензијски систем једначина за струјање гаса кроз микроцев свео на облик погодан за решавање потребно је увести одговарајуће референтне величине, референтне бездимензијске бројеве и претпоставке на којима се заснива модел.

### 4.2.1 Дефинисање референтних величина и референтних бездимензијских бројева

Како би услови дозвучног струјања са клизањем били задовољени неопходно је да вредности бездимензијских бројева, који карактеришу струјање, буду у одређеном опсегу. Притисак у микроцеви мења се од улаза ка излазу, па се и Кнудсенов и Махов број мењају. Због пада притиска дуж цеви, максимална вредност Маховог и Кнудсеновог броја јавља се у излазном попречном пресеку. Да би Махов и Кнудсенов број били унутар дозвољеног опсега, који се разматра у овом раду, излазни пресек је изабран за референтни попречни пресек. На тај начин је обезбеђено да, у свим осталим попречним пресецима, вредност Маховог и Кнудсеновог броја буде мања од те вредности. Референтне величине: брзина, притисак, густина и динамичка вискозност, означене су индексом „ $r$ ” и дефинисане у излазном попречном пресеку. За подужну координату  $\tilde{z}$  референтна величина је дужина цеви  $\tilde{L}$ . Бездимензијске величине, које су реда  $\mathcal{O}(1)$ , су тада одређене са:

$$u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_r}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{u}_r}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_r}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_r}, \quad \mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_r}, \quad r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{R}_r}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{\tilde{L}}. \quad (4.1)$$

Размера за брзину је средња подужна брзина у излазном попречном пресеку  $\tilde{u}_r$ :

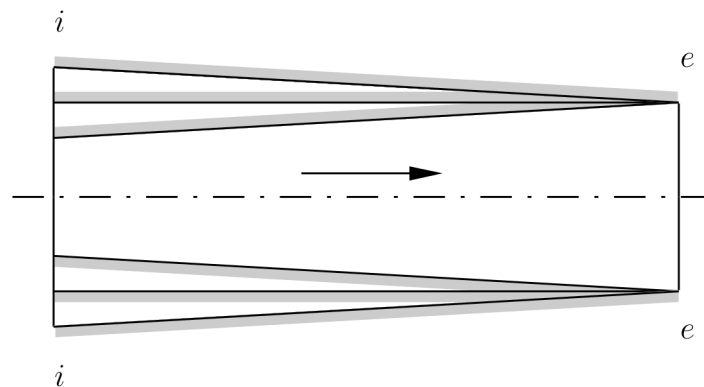
$$\tilde{u}_r = \frac{2}{\tilde{R}_e^2} \int_0^{\tilde{R}_e} \tilde{u}_e \tilde{r} d\tilde{r}. \quad (4.2)$$

Референтна густина  $\tilde{\rho}_r$  је добијена из једначине стања идеалног гаса (3.20), у којој фигурише референтна вредност притиска  $\tilde{p}_r$ . Референтна динамичка вискозност означена је са  $\tilde{\mu}_r$ , а како се ради о изотермском случају вредност бездимензијске вискозности је константна  $\mu = \tilde{\mu}/\tilde{\mu}_r = 1$ . Референтни полупречник цеви је полупречник у излазном попречном пресеку  $\tilde{R}_r = \tilde{R}_e$ .

У складу са изабраним референтним полупречником све геометријске величине у правцу попречне координате  $\tilde{r}$  (полупречници) свде се на бездимензијски облик помоћу  $\tilde{R}_e$ . Зависно од бездимензијског улазног полупречника микроцеви  $R_i$ , могуће је уочити три карактеристична случаја:

- дивергентна микроцев ( $R_i < 1$ ),
- микроцев константног попречног пресека ( $R_i = 1$ ),
- конвергентна микроцев ( $R_i > 1$ ).

На слици 4.2 су приказане три цеви: конвергентна, дивергентна и константног попречног пресека, исте дужине и истог излазног попречног пресека.



**Слика 4.2:** Упоредни приказ геометрија конвергентне, дивергентне и цеви константног попречног пресека.

Израз који дефинише промену полупречника цеви  $R$  од подужне координате, за сва три случаја, у бездимензијском облику је:

$$R(z) = R_i - z(R_i - 1). \quad (4.3)$$

Према дефинисаним референтним величинама добијају се и референтни бездимен-

зијски бројеви. Референтни Махов, Кнудсенов и Рејнолдсов број су:

$$\text{Ma}_r = \frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{\kappa \tilde{p}_r / \tilde{\rho}_r}}, \quad (4.4)$$

$$\text{Kn}_r = \frac{\tilde{\lambda}_r}{2\tilde{R}_e}, \quad (4.5)$$

$$\text{Re}_r = \frac{2\tilde{\rho}_r \tilde{u}_r \tilde{R}_e}{\tilde{\mu}_r}. \quad (4.6)$$

Из дефиниције референтног Маховог (4.4), Рејнолдсовог (4.6) и Кнудсеновог броја (4.5), следи релација између њих:

$$\text{Kn}_r = \sqrt{\frac{\pi \kappa}{2}} \frac{\text{Ma}_r}{\text{Re}_r}. \quad (4.7)$$

#### 4.2.2 Претпоставке на којима се заснива модел

Након примене референтних величина и референтних бездимензијских бројева, са циљем преуређивања добијених бездимензијских једначина у погоднији облик, уводе се претпоставке засноване на карактеристикама струјања.

Уводи се мали параметар  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ), који се дефинише се као однос пречника цеви у излазном попречном пресеку и дужине цеви:

$$\varepsilon = \frac{2\tilde{R}_e}{\tilde{L}}. \quad (4.8)$$

Сматра се да се полупречник цеви  $R(z)$  мења споро са променом подужне координате  $z$ . Због тога је угао нагиба зида цеви према оси цеви мали, односно реда величине малог параметра  $\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . То доводи до закључка да је попречна компонента брзине много мања од подужне компоненте, па је могуће претпоставити:

$$\tilde{v} = \varepsilon \tilde{V}, \quad \tilde{V} = \mathcal{O}(1). \quad (4.9)$$

Како се ради о дозвучном струјању са клизањем вредности Маховог и Кнудсеновог броја су мале. Може се претпоставити да је:

$$\kappa \text{Ma}_r^2 = \gamma \varepsilon^m, \quad \gamma = \mathcal{O}(1), \quad (4.10)$$

$$\text{Kn}_r = \eta \varepsilon^n, \quad \eta = \mathcal{O}(1). \quad (4.11)$$

Да би остао задовољен услов, да Махов и Кнудсенев број имају мале вредности, степени малог параметра  $\varepsilon$  у (4.10) и (4.11) треба да буду позитивни, тј.  $m > 0$ ,  $n > 0$ .

Осим мале вредности Маховог броја, претпоставља се и да је однос квадрата Маховог броја и Рејнолдсовог броја реда величине малог параметра  $\varepsilon$ :

$$\frac{\kappa \text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} = \beta \varepsilon, \quad \beta = \mathcal{O}(1). \quad (4.12)$$

Из (4.10) и (4.12) следи веза између Рејнолдсовог броја и малог параметра  $\varepsilon$ :

$$\text{Re}_r = \gamma \varepsilon^{m-1} / \beta, \quad (4.13)$$

где позитивна вредност експонента малог параметра  $\varepsilon$  ( $m > 1$ ) одговара струјању при малим Рејнолдсовим бројевима, а негативне вредности експонента ( $m \leq 1$ ) одговарају великим Рејнолдсовим бројевима.

Узимајући у обзир претпоставке о Маховом (4.10), Кнудсеновом (4.11) и Рејнолдсовом броју (4.13) и њихову међусобну релацију (4.7) следи веза између параметара  $\gamma$ ,  $\eta$  и  $\beta$ :

$$\gamma = \frac{\beta^2 \pi}{2\eta^2}. \quad (4.14)$$

Параметри  $\gamma$ ,  $\eta$ ,  $\beta$ ,  $m$  и  $n$  су уведени да би се повећала флексибилност модела, што омогућује његову ширу примену. Без ових параметара, за одређену вредност малог параметра  $\varepsilon$ , постојала би само једна вредност Маховог, Кнудсеновог и Рејнолдсовог броја. Увођењем параметара  $\gamma$ ,  $\eta$ ,  $\beta$ ,  $m$  и  $n$ , за одређену вредност малог параметра  $\varepsilon$  могу се добити резултати за широк опсег Махових и Кнудсенових бројева у оквиру режима дозвучног струјања и струјања са клизањем, што даље одговара широком опсегу вредности Рејнолдсовог броја.

Вредности параметара  $m$  и  $n$  нису независне. Њихова релација следи из везе између референтног Маховог, Рејнолдсовог и Кнудсеновог броја (4.7) и претпоставки о реду величине референтног Маховог (4.10), Кнудсеновог (4.11) и односа квадрата Маховог и Рејнолдсовог броја (4.12):

$$2n + m = 2. \quad (4.15)$$

С обзиром на то да мора бити задовољен услов да су параметри  $m$  и  $n$  позитивни, на основу једначине (4.15) следе њихови домени:  $n \in (0,1)$  и  $m \in (0,2)$ . Узимајући у обзир израз за Рејнолдсов број (4.13), може се закључити да су вредности параметара  $m$  и  $n$  [84] за област малих Рејнолдсових бројева ( $Re_r < 1$ ):

$$1 < m < 2, \quad 0 < n < 1/2, \quad (4.16)$$

а за област умерено великих Рејнолдсових бројева ( $Re_r \geq 1$ ):

$$0 < m \leq 1, \quad 1/2 \leq n < 1. \quad (4.17)$$

### 4.2.3 Основне једначине и гранични услов у бездимензијском облику

Коришћењем уведених референтних величина и референтних бездимензијских бројева димензијске једначине (3.16)-(3.18) своде се на бездимензијски облик:

$$\frac{1}{r\tilde{R}_e} \frac{\partial(r\rho v)}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{L}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \kappa Ma_r^2 \rho \left( \frac{\tilde{L}}{\tilde{R}_e} v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2\kappa Ma_r^2}{Re_r} \frac{\tilde{L}}{\tilde{R}_e} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) + \\ & + \frac{2\kappa Ma_r^2}{Re_r} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{4}{3} \frac{\tilde{R}_e}{\tilde{L}} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \kappa Ma_r^2 \rho \left( v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\tilde{R}_e}{\tilde{L}} u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{4\kappa Ma_r^2}{Re_r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{v}{r^2} + \frac{\tilde{R}_e}{6\tilde{L}} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\tilde{R}_e^2}{2\tilde{L}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Увођењем претпоставки да се струјање одвија у микроцеви где је пречник цеви много мањи од дужине (4.8), да је радијална компонента брзине много мања од подужне компоненте (4.9) и да гас струји дозвучно са клизањем (4.10)-(4.12), из (4.18)-(4.20) добија се следећи облик бездимензијског система једначина:

$$\frac{\varepsilon}{r\tilde{R}_e} \frac{\partial(r\rho V)}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{L}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \gamma \varepsilon^m \rho \left( 2V \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ & + 2\beta \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \gamma \varepsilon^{m+2} \rho \left( V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2} u \frac{\partial V}{\partial z} \right) = & - \frac{\partial p}{\partial r} + 4\beta \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{V}{r^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\varepsilon^2}{8} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Одбацивањем малих величина реда  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  и мањих, једначине (4.21)-(4.23) своде се на:

$$\frac{2}{r} \frac{\partial (r\rho V)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (4.24)$$

$$\gamma \varepsilon^m \rho \left( 2V \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (4.26)$$

Из пројекције једначине количине кретања на попречни правац (4.26) види се да притисак не зависи од попречне координате  $r$ . Како је струјање осносиметрично притисак не зависи ни од координате  $\theta$ , тако да се може закључити да притисак зависи само од  $z$  ( $\partial p / \partial z = dp/dz$ ).

Наведеном систему (4.24)-(4.26) придружује се једначина стања идеалног гаса у бездимензијском облику:

$$p = \rho. \quad (4.27)$$

Гранични услов за брзину на зиду цеви Хсиа-Домота (3.24) такође се своди на бездимензијски облик употребом референтних величина и референтних бездимензијских бројева:

$$u = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left( -2\text{Kn}_r \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial r} - 2\text{Kn}_r^2 \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \Big|_{r=1}. \quad (4.28)$$

Користећи претпоставку о малом Кнудсеновом броју (4.11) добија се гранични услов Хсиа-Домота облика:

$$u = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left( -2\eta \varepsilon^n \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial r} - 2\eta^2 \varepsilon^{2n} \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \Big|_{r=1}. \quad (4.29)$$

Услови струјања су такви да постоји симетрија у односу на  $z$  осу, тако да ће се осим граничног услова на зиду цеви (4.29) користити и услов симетрије, како за подужну тако



и за попречну компоненту брзине:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad V|_{r=0} = 0. \quad (4.30)$$

### 4.3 Решавање изотермског проблема струјања кроз микроцеви

Да би се дошло до решења система једначина (4.24)-(4.27), (4.29), (4.30) примењује се пертурбациони приступ. У оваквом приступу све карактеристичне бездимензијске величине изражене су у форми пертурбационог реда. Како се ради о струјању гаса са клизањем, одабран је развој по референтном Кнудсеновом броју. Сваки члан у пертурбационом реду представља по једну апроксимацију. Заменом бездимензијских величина до чијег решења је потребно доћи, у облику пертурбационих редова, у бездимензијски систем једначина добија се број система једначина који је једнак броју апроксимација развијеног реда. Решења у сваком систему једначина представљају решења одговарајућих величина за ту апроксимацију. Облик развоја величине  $f$  у пертурбациони ред са четири апроксимације је:

$$f = f_0 + \text{Kn}_r f_1 + \text{Kn}_r^2 f_2 + \text{Kn}_r^3 f_3 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^4). \quad (4.31)$$

Прву апроксимацију, односно решење за случај континуума, представља члан  $f_0$ . Овакво решење узима у обзир све карактеристике струјања (осносиметричност, дозвучност, стишљивост, стационарност) осим разређености. Остале апроксимације, у овом случају (4.31) друга  $f_1$ , трећа  $f_2$  и четврта  $f_3$ , дају корекције због клизања на зиду, као и услед утицаја који дају чланови реда величине  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$ .

Разматрајући ред чланова у систему бездимензијских једначина и граничних услова (4.24)-(4.27), (4.29), (4.30), види се да је систем састављен од чланова који су реда величине  $\mathcal{O}(1)$ ,  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$  и реда величине степена референтног Кнудсеновог броја и квадрата референтног Кнудсеновог броја, односно  $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$  и  $\mathcal{O}(\varepsilon^{2n})$ . Оба члана једначине континуитета (4.24), једначина количине кретања за  $r$  правац (4.26), услов симетрије (4.30), као и чланови са десне стране једначине количине кретања за  $z$  правац (4.25), који представљају силу притиска и вискозну силу, реда су  $\mathcal{O}(1)$ . Чланови са леве стране једначине количине кретања за  $z$  правац (4.25) приказују инерцијалну силу и реда су  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$ , док гранични услов

за брзину (4.29) садржи чланове реда  $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$  и реда  $\mathcal{O}(\varepsilon^{2n})$ . Приказ наведених чланова, у систему једначина за сваку апроксимацију, условљен је односом вредности параметара  $m$  и  $n$ , који треба да задовоље услове за одговарајућу област вредности Рејнолдсових бројева, (4.16) и (4.17). Када је испуњен услов  $m = n$ , већ у другој апроксимацији јавиће се сви чланови система једначина, односно и чланови реда Кнудсеновог броја и чланови реда квадрата Маховог броја. То значи да ће тада у другој апроксимацији бити узет у обзир и ефекат клизања на зиду и ефекат инерције. Међутим, у случају када је  $n < m$ , у другој апроксимацији долази до изражаја само ефекат разређености гаса. Од односа вредности параметара у оквиру  $n < m$ , зависи у којој апроксимацији ће се јавити и чланови реда квадрата Маховог броја, тј. ефекат инерције.

Решавање једначина из добијених система одвија се истим током за сваку апроксимацију. Најпре се приступа решавању једначине количине кретања за  $z$  осу (4.25). Уз одговарајући услов симетрије (4.30) и гранични услов (4.29) добија се аналитичко решење за одговарајућу апроксимацију брзине  $u$ .

Добијање диференцијалних једначина за апроксимације притиска могуће је на два начина. Диференцијалне једначине притиска добијају се из интегралног облика једначине континуитета, која у општем бездимензијском облику гласи:

$$\dot{m} = \int_{r=0}^{r=R(z)} 2\rho u r dr. \quad (4.32)$$

Користи се пертурбациони приступ, где су карактеристичне величине претпостављене у облику пертурбационих редова. Интеграљење добијених једначина континуитета у границама од осе цеви  $r = 0$  до зида  $r = R(z)$  може се извести на два начина.

Први приступ се односи на случај када је познат масени проток, а потребно је одредити поље притиска. Тада је целокупан масени проток садржан у првој апроксимацији  $\dot{m} = \dot{m}_0 = const.$ , док су масени протоци у осталим апроксимацијама једнаки нули  $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dots = 0$ . На овај начин добија се решење за расподелу притиска дуж цеви при чему прва апроксимација одговара условима континуума. Укупно решење које узима у обзир и више апроксимације је решење за струјање са клизањем.

Другим приступом се сматра случај када је познат однос улазног и излазног притиска

на улазу у цев, тј. вредност бездимензијског притиска на улазу у цев, а тражи се масени проток. Како је однос притисака на улазу и излазу познат, он је у потпуности садржан у првој апроксимацији  $p_0|_{z=0} = p_{0i} = p_i$ , док је бездимензијски притисак у улазном пресеку у осталим апроксимацијама једнак нули  $p_1|_{z=0} = p_2|_{z=0} = \dots = 0$ .

У зависности од сложености добијених диференцијалних једначина, коначно решење за апроксимације притиска може се добити аналитичким или нумеричким путем.

### 4.3.1 Струјање гаса при малим Рејнолдсовим бројевима

За случај изотермског струјања у микроцеви, при малим Рејнолдсовим бројевима, брзина и притисак претпостављени су у облику пертурбационих редова, са по четири апроксимације. На тај начин добијају се четири система једначина и одговарајућих граничних услова, чијим се поступним решавањем добијају решења за сваку апроксимацију. Испуњавајући услов међусобног односа  $m$  и  $n$  (4.15) и услов о опсегу вредности  $m$  и  $n$  при малим Рејнолдсовим бројевима (4.16), изабране су вредности  $m = 3/2$  и  $n = 1/4$ . На тај начин, утицај инерције, представљен члановима реда  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$ , неће се јавити у прве четири апроксимације које су овде добијене. Утицај инерције у овом случају јавио би се тек у седмој апроксимацији.

Пројекције брзине и притисак, у облику пертурбационих редова, представљени су изразима:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 + \text{Kn}_r^2 u_2 + \text{Kn}_r^3 u_3 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^4), \quad (4.33)$$

$$V = V_0 + \text{Kn}_r V_1 + \text{Kn}_r^2 V_2 + \text{Kn}_r^3 V_3 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^4), \quad (4.34)$$

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 + \text{Kn}_r^2 p_2 + \text{Kn}_r^3 p_3 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^4). \quad (4.35)$$

Према једнакости (4.27), која је добијена из једначине стања идеалног гаса, изразом (4.35) представљена је и густина у облику пертурбационог реда.

Уврштавајући развој карактеристичних величина (4.33)-(4.35) у бездимензијски систем једначина (4.24)-(4.27), (4.29), (4.30) добија се систем бездимензијских једначина за сваку апроксимацију:

$$\varepsilon^0 : \frac{dp_0}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right), \quad (4.36)$$

$$\int_0^{R(z)} 2p_0 u_0 r dr = \dot{m}_0, \quad (4.37)$$

$$u_0|_{r=R(z)} = 0, \quad (4.38)$$

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (4.39)$$

$$p_0|_{z=1} = 1, \quad (4.40)$$

$$\varepsilon^n : \frac{dp_1}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right), \quad (4.41)$$

$$\int_0^{R(z)} 2(p_0 u_1 + p_1 u_0) r dr = \dot{m}_1, \quad (4.42)$$

$$u_1|_{r=R(z)} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2}{p_0} \left. \frac{\partial u_0}{\partial r} \right|_{r=R(z)}, \quad (4.43)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (4.44)$$

$$p_1|_{z=1} = 0, \quad (4.45)$$

$$\varepsilon^{2n} : \frac{dp_2}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_2}{\partial r} \right), \quad (4.46)$$

$$\int_0^{R(z)} 2(p_0 u_2 + p_1 u_1 + p_2 u_0) r dr = \dot{m}_2, \quad (4.47)$$

$$u_2|_{r=R(z)} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2}{p_0} \left( \left. \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{p_1}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{1}{p_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \right) \right|_{r=R(z)}, \quad (4.48)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (4.49)$$

$$p_2|_{z=1} = 0, \quad (4.50)$$

$$\varepsilon^{3n} : \frac{dp_3}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_3}{\partial r} \right), \quad (4.51)$$

$$\int_0^{R(z)} 2(p_0 u_3 + p_1 u_2 + p_2 u_1 + p_3 u_0) r dr = \dot{m}_3, \quad (4.52)$$

$$u_3|_{r=R(z)} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left( \frac{2}{p_0} \left( \left. \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{p_1}{p_0} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \left( \frac{p_1^2}{p_0^2} - \frac{p_2}{p_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \right) + \right.$$

$$+ \frac{2}{p_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} - 2 \frac{p_1}{p_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} \right) \Big|_{r=R(z)}, \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (4.54)$$

$$p_3|_{z=1} = 0. \quad (4.55)$$

Системи једначина решавају се поступно. Најпре се решава систем за прву апроксимацију, затим редом системи за другу, трећу и четврту апроксимацију. Сваки систем једначина решава се почевши од једначине количине кретања за  $z$  правац (4.36), (4.41), (4.46), (4.51) са одговарајућим условима симетрије за брзину (4.39), (4.44), (4.49), (4.54) и граничним условима за брзину на зиду цеви (4.38), (4.43), (4.48), (4.53), помоћу којих се добијају решења за апроксимације брзине  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$ . Примењујући приступ када је задат масени проток, тј. када је садржан у првој апроксимацији ( $\dot{m} = \dot{m}_0 = 1$ ,  $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3 = 0$ ), диференцијалне једначине за апроксимације притиска следе из интегралних облика једначина континуитета за сваку апроксимацију (4.37), (4.42), (4.47), (4.52):

- прва апроксимација:

$$u_0 = \frac{p_0'}{16\beta} (r^2 - (R(z))^2), \quad (4.56)$$

$$p_0 p_0' = -\frac{32\beta}{(R(z))^4}, \quad (4.57)$$

- друга апроксимација:

$$u_1 = \frac{p_1'}{16\beta} (r^2 - (R(z))^2) - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p_0' R(z)}{p_0 4\beta}, \quad (4.58)$$

$$(p_0 p_1)' = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{R(z)} p_0', \quad (4.59)$$

- трећа апроксимација:

$$u_2 = \frac{p_2'}{16\beta} (r^2 - (R(z))^2) - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{1}{4\beta} \left( \frac{R(z)}{p_0} \left( p_1' - \frac{p_1 p_0'}{p_0} \right) + \frac{p_0'}{p_0^2} \right), \quad (4.60)$$

$$(p_0 p_2)' = -p_1 p_1' - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{R(z)} \left( p_1' + \frac{1}{R(z)} \frac{p_0'}{p_0} \right), \quad (4.61)$$

- четврта апроксимација:

$$u_3 = \frac{p'_3}{16\beta} (r^2 - (R(z))^2) - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{1}{4\beta} \left( \frac{R(z)}{p_0} \left( p'_2 - \frac{p_1 p'_1}{p_0} - \frac{p_2 p'_0}{p_0} + \frac{p_1^2 p'_0}{p_0^2} \right) + \frac{1}{p_0^2} \left( p'_1 - 2 \frac{p_1 p'_0}{p_0} \right) \right), \quad (4.62)$$

$$(p_0 p_3)' = - (p_1 p_2)' - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{R(z)} \left( p'_2 + \left( p'_1 - \frac{p_1 p'_0}{p_0} \right) \frac{1}{p_0 R(z)} \right). \quad (4.63)$$

Како притисак зависи само од подужне координате  $z$  у свим изразима је први извод по координати  $z$  означен са  $'$ , други извод по истој координати носи ознаку  $''$  (нпр.  $p'_0 = dp_0/dz$ ).

Коначно решење поља брзине за изотермско стишљиво струјање при малим Рејнолдсовим бројевима је:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \text{Kn}_r u_1 + \text{Kn}_r^2 u_2 + \text{Kn}_r^3 u_3 = \\ &= \frac{p'_0}{16\beta} (r^2 - (R(z))^2) + \text{Kn}_r \left[ \frac{p'_1}{16\beta} (r^2 - (R(z))^2) - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p'_0}{p_0} \frac{R(z)}{4\beta} \right] + \\ &+ \text{Kn}_r^2 \left[ \frac{p'_2}{16\beta} (r^2 - (R(z))^2) - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{1}{4\beta} \left( \frac{R(z)}{p_0} \left( p'_1 - \frac{p_1 p'_0}{p_0} \right) + \frac{p'_0}{p_0^2} \right) \right] + \\ &+ \text{Kn}_r^3 \left[ \frac{p'_3}{16\beta} (r^2 - (R(z))^2) - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{1}{4\beta} \left( \frac{R(z)}{p_0} \left( p'_2 - \frac{p_1 p'_1}{p_0} - \frac{p_2 p'_0}{p_0} + \frac{p_1^2 p'_0}{p_0^2} \right) + \frac{1}{p_0^2} \left( p'_1 - 2 \frac{p_1 p'_0}{p_0} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Примењујући услов за излазну вредност притиска у првој апроксимацији (4.40) на добијену диференцијалну једначину за притисак (4.57), могуће је добити аналитичко решење за прву апроксимацију поља притиска за цев променљивог попречног пресека:

$$p_0 = \sqrt{1 + \frac{64\beta}{3(R_i - 1)} \left( 1 - \frac{1}{(R(z))^3} \right)}. \quad (4.65)$$

За другу, трећу и четврту апроксимацију није могуће доћи до аналитичког решења за  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  код цеви променљивог попречног пресека, већ се оне решавају нумерички. Нумерички резултати добијени су коришћењем методе Рунге-Кута четвртог и петог реда, која даје могућност променљивог корака за ефикасно израчунавање решења. Како су за поље притиска познати услови на излазу из цеви, а не почетни услови, овом начину

решавања прилагођена је подужна координата. Односно, прорачун је текао од излаза из цеви ка улазу.

Како се разматрају случајеви конвергентних, дивергентних и микроцеви константног попречног пресека, и како је јединствени полупречник за сва три случаја у зависности од подужне координате  $z$  дефинисан према (4.3), сви до сада добијени изрази важе за случај тако дефинисаног полупречника. Међутим, у случају константног попречног пресека, где је  $R_i = R(z) = R_e = 1$ , претходни систем једначина се своди на једноставнији облик. У том случају могуће је аналитички решити добијене диференцијалне једначине за апроксимације притиска, чиме се добија аналитички израз за расподелу притиска у микроцеви. Односно, примењујући услове за вредност притиска на излазу из цеви (4.40), (4.45), (4.50), (4.55) на добијене диференцијалне једначине за сваку апроксимацију (4.57), (4.59), (4.61), (4.63), заједно са  $R(z) = 1$ , добијају се аналитичка решења за прву, другу, трећу и четврту апроксимацију притиска код цеви константног попречног пресека:

$$p_0 = \sqrt{1 + 64\beta(1 - z)}, \quad (4.66)$$

$$p_1 = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \left( \frac{1}{p_0} - 1 \right), \quad (4.67)$$

$$p_2 = -\frac{p_1^2}{2p_0} - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{p_0} (p_1 + \ln p_0), \quad (4.68)$$

$$p_3 = -\frac{p_1 p_2}{p_0} - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{p_0} \left( p_2 - \frac{8}{p_0} \left( 1 - \frac{1}{p_0} \right) \right). \quad (4.69)$$

Израз за поље притиска код микроцеви константног попречног пресека када је задат масени проток, када су све апроксимације притиска изражене преко прве апроксимације  $p_0$  (4.66), је:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \text{Kn}_r p_1 + \text{Kn}_r^2 p_2 + \text{Kn}_r^3 p_3 = \\ &= p_0 + \text{Kn}_r \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \left( \frac{1}{p_0} - 1 \right) + \text{Kn}_r^2 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left[ -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{32}{p_0} \left( \frac{1}{p_0^2} - 1 \right) - \frac{8}{p_0} \ln p_0 \right] + \\ &+ \text{Kn}_r^3 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{64}{p_0^2} \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{4}{p_0} \left( \frac{1}{p_0^2} - 1 \right) + \frac{\ln p_0}{p_0} \right) - \frac{1}{p_0} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Случај струјања у микроцеви константног попречног пресека решен је и нумерички, методом Рунге-Кута, и постигнуто је потпуно поклапање.

За добијање поља притиска, када је познат однос притисака на улазу и излазу из цеви константног попречног пресека, најпре су из интегралних облика једначине континуитета (4.37), (4.42), (4.47), (4.52) добијене диференцијалне једначине за притисак:

$$\dot{m}_0 = -\frac{p_0 p_0'}{32\beta}, \quad (4.71)$$

$$\dot{m}_1 = -\frac{(p_0 p_1)'}{32\beta} - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p_0'}{4\beta}, \quad (4.72)$$

$$\dot{m}_2 = -\frac{(p_0 p_2)'}{32\beta} - \frac{p_1 p_1'}{32\beta} - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{1}{4\beta} \left( p_1' + \frac{p_0'}{p_0} \right), \quad (4.73)$$

$$\dot{m}_3 = -\frac{(p_0 p_3)'}{32\beta} - \frac{(p_1 p_2)'}{32\beta} - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{1}{4\beta} \left( p_2' + \frac{1}{p_0} \left( p_1' - \frac{p_1 p_0'}{p_0} \right) \right). \quad (4.74)$$

Узимајући у обзир да је на излазу из цеви сав притисак садржан у првој апроксимацији  $p_0|_{z=1} = 1$ ,  $p_1|_{z=1} = p_2|_{z=1} = p_3|_{z=1} = 0$ , као и за познат притисак на улаз у цев  $p_0|_{z=0} = p_{0i} = p_i$ ,  $p_1|_{z=0} = p_2|_{z=0} = p_3|_{z=0} = 0$  добијени су масени протоци за микроцев константног попречног пресека:

$$\dot{m}_0 = \frac{p_i^2 - 1}{64\beta}, \quad (4.75)$$

$$\dot{m}_1 = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{1}{4\beta} (p_i - 1), \quad (4.76)$$

$$\dot{m}_2 = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{1}{4\beta} \ln p_i, \quad (4.77)$$

$$\dot{m}_3 = \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right)^2 \frac{1}{(1 + p_i)\beta} \left( \frac{(1 - p_i)(1 + p_i^2)}{p_i^2} + 2 \ln p_i^2 \right). \quad (4.78)$$

Затим су добијене и апроксимације притиска:

$$p_0 = \sqrt{(1 - p_i^2)z + p_i^2}, \quad (4.79)$$

$$p_1 = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \left( \frac{p_i}{p_0} (1 - z) + \frac{z}{p_0} - 1 \right), \quad (4.80)$$

$$p_2 = -\frac{p_1^2}{2p_0} - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{p_0} \left( p_1 + \ln \frac{p_0}{p_i} + z \ln p_i \right), \quad (4.81)$$

$$p_3 = -\frac{p_1 p_2}{p_0} - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{p_0} \left[ p_2 + \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{4}{1 + p_i} \left( z \left( \frac{(1 - p_i)(1 + p_i^2)}{p_i^2} + 2 \ln p_i^2 \right) + \frac{(p_i - 1)(p_0^2 + p_i^2)}{p_0^2 p_i^2} - 2 (\ln p_0^2 + \ln p_i^2) \right) \right]. \quad (4.82)$$



Добијене апроксимације притиска дају укупно решење за поље притиска за микроцев константног попречног пресека у случају малих Рејнолдсових бројева, када је познат однос притисака на улазу и излазу из цеви:

$$\begin{aligned}
p &= p_0 + \text{Kn}_r p_1 + \text{Kn}_r^2 p_2 + \text{Kn}_r^3 p_3 = \\
&= p_0 + \text{Kn}_r \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \left( \frac{p_i}{p_0} (1 - z) + \frac{z}{p_0} - 1 \right) + \\
&\quad + \text{Kn}_r^2 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{p_0^3} \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 4 (p_0^2 - (p_i (1 - z) + z)^2) - p_0^2 \left( \ln \frac{p_0}{p_i} + z \ln p_i \right) \right) + \\
&\quad + \text{Kn}_r^3 \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right)^2 \frac{32}{p_0} \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{p_0^4} ((p_i (1 - z) + z)^3 + (p_i - 1) p_0^2 z) + \right. \\
&\quad + \frac{1}{1 + p_i} \left( \frac{p_i - 1}{p_i^2} (z (1 + p_i^2) - 1) + 2 (\ln p_0^2 + (1 - z) \ln p_i^2) \right) + \\
&\quad \left. + \frac{1}{p_0^2} \left( \frac{1}{1 + p_i} \left( 1 - p_i \left( 1 + 8 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} (1 + p_i) \right) \right) + 2 (p_i (z - 1) - z) \left( \ln \frac{p_0}{p_i} + z \ln p_i \right) \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.83}$$

За микроцев променљивог попречног пресека може се добити диференцијална једначина:

$$\dot{m}_0 = -\frac{p_0 p_0'}{32\beta} (R(z))^4, \tag{4.84}$$

на основу које је могуће добити решење за прву апроксимацију масеног протока:

$$\dot{m}_0 = \frac{3R_i^3 (R_i - 1) (p_i^2 - 1)}{64\beta (R_i^3 - 1)}, \tag{4.85}$$

и прву апроксимацију притиска:

$$p_0 = \sqrt{(1 - p_i^2) \frac{R_i^3 - (R(z))^3}{(R(z))^3 (R_i^3 - 1)} + p_i^2}. \tag{4.86}$$

### 4.3.2 Струјање гаса при великим Рејнолдсовим бројевима

Код изотермског случаја струјања у микроцеви за велике Рејнолдсове бројеве одређене су две апроксимације свих величина. Како се ради о великим Рејнолдсовим бројевима утицај инерције треба узети у обзир. Да би се јавио у другој апроксимацији, тј. да би утицај инерције био истог реда као утицај разређености потребно је да параметри  $m$  и  $n$  имају исту вредност. На тај начин се постиже да се у другој апроксимацији јављају сви чланови

система основних једначина (4.24)-(4.27), (4.29), (4.30). Подужна и попречна пројекција брзине и притисак у облику пертурбационих редова су:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (4.87)$$

$$V = V_0 + \text{Kn}_r V_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (4.88)$$

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2). \quad (4.89)$$

Изразом (4.89) представљена је и густина у облику пертурбационог реда, на основу без-димензијског облика једначине стања идеалног гаса (4.27).

Узимајући у обзир обе компоненте брзине (4.87), (4.88) и притисак (4.89), изражене преко апроксимација у систем једначина (4.24)-(4.27), (4.29), (4.30) добијају се два система једначина, за обе апроксимације:

$$\varepsilon^0 : \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r p_0 V_0) + \frac{\partial}{\partial z} (p_0 u_0) = 0, \quad (4.90)$$

$$\frac{d p_0}{d z} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right), \quad (4.91)$$

$$\int_0^{R(z)} 2 p_0 u_0 r dr = \dot{m}_0, \quad (4.92)$$

$$u_0|_{r=R(z)} = 0, \quad (4.93)$$

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (4.94)$$

$$p_0|_{z=1} = 1, \quad (4.95)$$

$$\varepsilon^n : \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r p_0 V_1 + r p_1 V_0) + \frac{\partial}{\partial z} (p_0 u_1 + p_1 u_0) = 0, \quad (4.96)$$

$$\frac{d p_1}{d z} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) - \frac{\gamma}{\eta} p_0 \left( 2 V_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right), \quad (4.97)$$

$$\int_0^{R(z)} 2 (p_0 u_1 + p_1 u_0) r dr = \dot{m}_1, \quad (4.98)$$

$$u_1|_{r=R(z)} = - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2}{p_0} \left. \frac{\partial u_0}{\partial r} \right|_{r=R(z)}, \quad (4.99)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (4.100)$$

$$p_1|_{z=1} = 0. \quad (4.101)$$

У првој апроксимацији јављају се чланови система једначина реда величине  $\mathcal{O}(1)$  на које нема утицај одабир вредности параметара  $m$  и  $n$ , па се овај систем једначина (4.90)-(4.95), а тако и његово решење, не разликује од система за прву апроксимацију при малим Рејнолдсовим бројевима (4.36)-(4.40).

Поступак решавања система једначина сличан је поступку за случај малих Рејнолдсових бројева. Сада је за израчунавање подужне компоненте брзине у другој апроксимацији  $u_1$ , неопходно пронаћи и попречну компоненту брзине у првој апроксимацији  $V_0$ , што при малим Рејнолдсовим бројевима није био случај. Из диференцијалног облика једначине континуитета (4.90), заједно са условима  $V_0|_{r=0} = 0$ ,  $V_0|_{r=R(z)} = 0$ , добија се прва апроксимација попречне компоненте брзине:

$$V_0 = \frac{r}{128\beta} \left[ \left( \frac{p_0'^2}{p_0} + p_0'' \right) (2R(z)^2 - r^2) - 4p_0' (R_i - 1) R(z) \right]. \quad (4.102)$$

Заменом добијених решења за прву апроксимацију притиска  $p_0$  (4.65) и одговарајућих извода,  $p_0'$  и  $p_0''$ , у једначину (4.102), добија се израз за прву апроксимацију попречне компоненте брзине код микроцеви променљивог попречног пресека:

$$V_0 = \frac{r(R_i - 1)}{p_0 R(z)^5} (r^2 - R(z)^2). \quad (4.103)$$

За микроцев константног попречног пресека улазни полупречник је  $R_i = 1$ , па из израза (4.103) следи да је у том случају:

$$V_0 = 0. \quad (4.104)$$

Сматрајући да је поље притиска познато, решавају се диференцијалне једначине количине кретања за  $z$  правац (4.91), (4.97), које заједно са одговарајућим условима симетрије (4.94), (4.100) и граничним условима (4.93), (4.99) дају решења за апроксимације подужне компоненте брзине (4.105), (4.107). Са добијеним решењима за подужну брзину, из интегралних облика једначине континуитета (4.92), (4.98), сматрајући да је масени проток задат и сав садржан у првој апроксимацији  $\dot{m}_0 = 1$ ,  $\dot{m}_1 = 0$ , добијају се диференцијалне

једначине за одговарајуће апроксимације поља притиска (4.106), (4.108):

- прва апроксимација:

$$u_0 = \frac{p'_0}{16\beta} (r^2 - (R(z))^2), \quad (4.105)$$

$$p_0 p'_0 = -\frac{32\beta}{(R(z))^4}, \quad (4.106)$$

- друга апроксимација:

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{p'_1}{16\beta} (r^2 - R(z)^2) - \frac{2 - \sigma_v p'_0 R(z)}{\sigma_v p_0 4\beta} + \\ & + \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \frac{p'_0}{36864\beta^3\pi} \left( 32\beta \frac{R_i - 1}{R(z)^5} (4r^6 - 9r^4 R(z)^2 + 5R(z)^6) + \right. \\ & + p_0 \left( 9p'_0 (R_i - 1) (r^4 - 4r^2 R(z)^2 + 3R(z)^4) R(z) + \right. \\ & \left. \left. + (2r^6 - 9r^4 R(z)^2 + 18r^2 R(z)^4 - 11R(z)^6) p''_0 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} (p_0 p_1)' = & -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8p'_0}{R(z)} + \\ & + \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \frac{p_0 p'_0}{768\beta^2\pi R(z)} \left( 8(R_i - 1) (8\beta + p_0 p'_0 R(z)^4) - 3p_0 p''_0 R(z)^5 \right). \end{aligned} \quad (4.108)$$

Узимајући у обзир решења за прву (4.105) и другу апроксимацију брзине (4.107) следи брзина при изотермском стишљивом струјању гаса у микроцеви у случају великих Рејнолдсових бројева:

$$\begin{aligned} u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = & \frac{p'_0}{16\beta} (r^2 - (R(z))^2) + \text{Kn}_r \left[ \frac{p'_1}{16\beta} (r^2 - R(z)^2) - \frac{2 - \sigma_v p'_0 R(z)}{\sigma_v p_0 4\beta} + \right. \\ & + \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \frac{p'_0}{36864\beta^3\pi} \left( 32\beta \frac{R_i - 1}{R(z)^5} (4r^6 - 9r^4 R(z)^2 + 5R(z)^6) + \right. \\ & + p_0 \left( 9p'_0 (R_i - 1) (r^4 - 4r^2 R(z)^2 + 3R(z)^4) R(z) + \right. \\ & \left. \left. + (2r^6 - 9r^4 R(z)^2 + 18r^2 R(z)^4 - 11R(z)^6) p''_0 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.109)$$

За микроцев константног попречног пресека при струјању при великим Рејнолдсовим бројевима, уз услове о вредности притиска на излазу из цеви  $p_0|_{z=1} = 1$  (4.95),  $p_1|_{z=1} = 0$  (4.101) и за познат масени проток, добијен је израз за поље притиска:

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \left( \frac{1}{p_0} - 1 \right) + \frac{4\text{Kn}_r \text{Re}_r^2}{\pi} \frac{\ln p_0}{p_0} \right], \quad (4.110)$$

где је прва апроксимација притиска дата једначином (4.66).

Поље притиска добијено је и за случај када је познат однос улазног и излазног притиска за микроцев константног попречног пресека. Тада је сав улазни притисак садржан у првој апроксимацији  $p_0|_{z=0} = p_i$ , а притисак на улазу у цев за другу апроксимацију је  $p_1|_{z=0} = 0$ . Исти услов, да је целокупан притисак у првој апроксимацији, важи и за излазни попречни пресек  $p_0|_{z=1} = 1$  (4.95). За другу апроксимацију на излазу из цеви притисак је  $p_1|_{z=1} = 0$  (4.101). Како је аналитичко решење за прву апроксимацију притиска у овом случају већ дато (4.79), следи да је аналитичко решење за другу апроксимацију притиска за струјање при великим Рејнолдсовим бројевима за микроцев константног попречног пресека:

$$p_1 = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \left( \frac{p_i}{p_0} (1 - z) + \frac{z}{p_0} - 1 \right) + \frac{4\text{Kn}_r \text{Re}_r^2}{\pi p_0} (\ln p_0 + (z - 1) \ln p_i). \quad (4.111)$$

Добија се да је поље притиска при струјању у случају великих Рејнолдсових бројева кроз микроцев константног попречног пресека, када је познат однос притисака на улазу и излазу из цеви:

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \left( \frac{p_i}{p_0} (1 - z) + \frac{z}{p_0} - 1 \right) + \frac{4\text{Kn}_r \text{Re}_r^2}{\pi p_0} (\ln p_0 + (z - 1) \ln p_i) \right]. \quad (4.112)$$

## 4.4 Анализа резултата

У оквиру анализе резултата приказани су резултати добијени за случај изотермског струјања разређеног гаса у микроцеви. Струјање је стишљиво стационарно дозвучно и осносиметрично. Анализа резултата извршена је за режим струјања при малим и умерено великим Рејнолдсовим бројевима, као и за различите случајеве геометрије микроцеви:

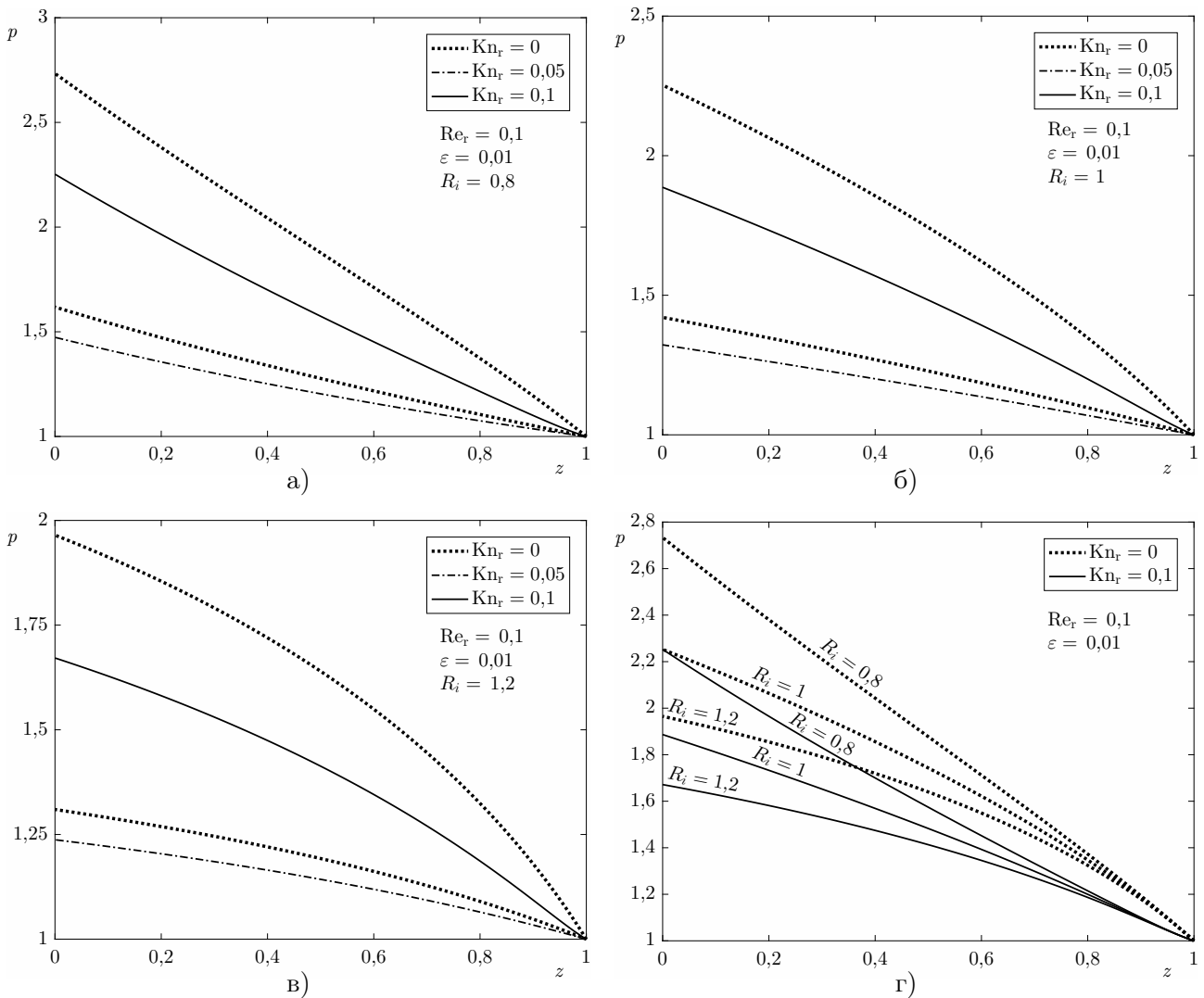
конвергентне, дивергентне и микроцеви константног попречног пресека.

На основу димензијске анализе показано је да је, за потпуно одређивање струјног поља, потребно задати  $R_i$ , који представља однос улазног и излазног полупречника, вредност параметара  $m$  и  $n$ , који одређују режим струјања, референтну вредност Кнудсеновог броја, референтну вредност Рејнолдсовог броја и вредност малог параметра  $\varepsilon$ , који представља однос пречника цеви на излазу и дужине. На основу вредности ових параметара следе вредности референтног Маховог броја, параметара  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\eta$ .

#### 4.4.1 Анализа резултата за мале Рејнолдсове бројеве

Резултати за случај малих Рејнолдсових бројева приказани су за вредност референтног Рејнолдсовог броја  $Re_r = 0,1$ , малог параметра  $\varepsilon = 0,01$  и за различите референтне Кнудсенове бројеве. Коришћен је коефицијент акомодације за дифузну рефлексију  $\sigma_v = 1$  и однос специфичних топлотних капацитета при константном притиску и константној запремини за једноатомски гас  $\kappa = 5/3$ .

Промена притиска дуж микроцеви при малим Рејнолдсовим бројевима за дивергентне, микроцеви константног попречног пресека и конвергентне микроцеви, добијена за задату вредност масеног протока, приказана је на слици 4.3. Резултати за дивергентну микроцев  $R_i = 0,8$  (слика 4.3 а) и конвергентну микроцев  $R_i = 1,2$  (слика 4.3 в)) добијени су из диференцијалних једначина (4.57), (4.59), (4.61), (4.63) са условима о вредности притиска на излазу из цеви (4.40), (4.45), (4.50), (4.55). Резултати за микроцев константног попречног пресека  $R_i = 1$  дати су на основу аналитичког решења за притисак (4.70). Притисак је приказан за вредности референтног Кнудсеновог броја:  $Kn_r = 0,05$  и  $Kn_r = 0,1$ . За оба случаја, приказана је и прва апроксимација притиска, односно решење за услове континуума ( $Kn_r = 0$ ), када ефекат клизања гаса на зиду није узет у обзир. Овакво решење, где је  $Kn_r = 0$ , задржава све остале карактеристике разматраног струјања у овом случају (стишљивост, дозвучност, стационарност, осносиметричност) осим клизања. Са дијаграма 4.3 је видљиво да је за све три геометрије микроцеви, за исти Рејнолдсов број у референтном попречном пресеку - на излазу из цеви, укупни притисак нижи од притиска добијеног када се разређеност гаса занемари - разређеност снижава притисак дуж микроцеви при истом масеном протоку.

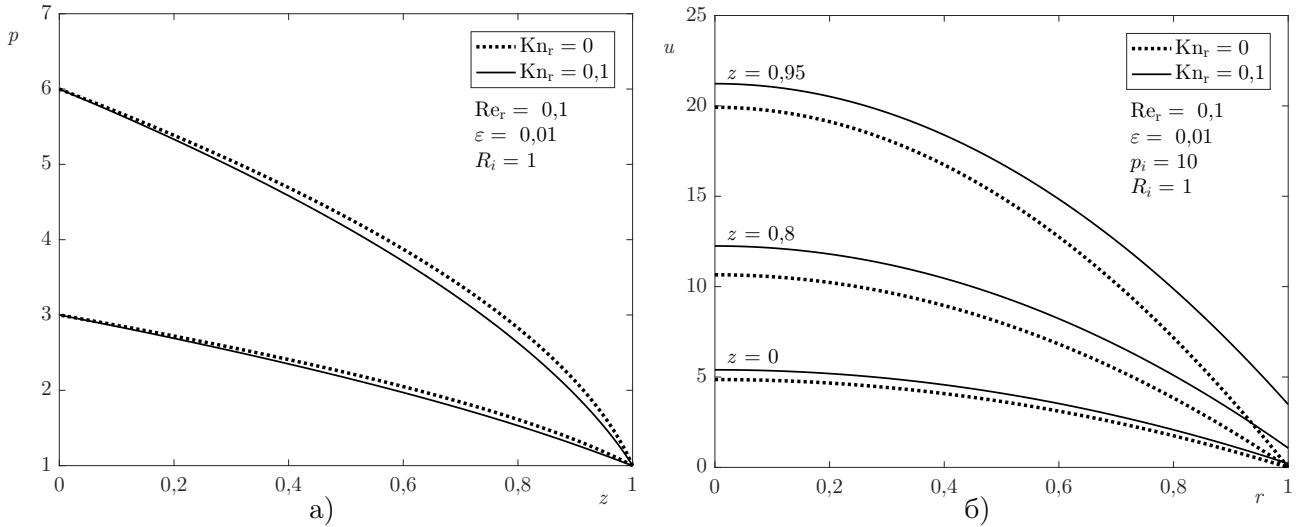


**Слика 4.3:** Распредела притиска дуж микроцеви при задатом масеном протоку за случај малог Рејнолдсовог броја: а)  $R_i = 0,8$ , б)  $R_i = 1$ , в)  $R_i = 1,2$ , г) поређење расподела притиска за три геометрије.

При истом референтном Рејнолдсовом броју и излазном притиску из цеви највећа вредност притиска је потребна на улазу у дивергентни, мања вредност на улазу у цев константног попречног пресека, а најмањи притисак потребан је на улазу у конвергентну микроцев (слика 4.3). Исти закључци за расподелу притиска при промени геометрије, односно за дивергентни, конвергентни и канал константног попречног пресека, добијени су у докторатима [81] и [85].

Промена притиска дуж микроцеви константног попречног пресека, добијена када је познат притисак на улазу и излазу из цеви (4.83), приказана је на слици 4.4 а). Види се да је за обе вредности задатог улазног притиска ( $p_i = 3$  и  $p_i = 6$ ) притисак за случај

континуума већи од притиска у случају струјања са клизањем. До истог закључка су дошли Бескок и др. [86] при прорачуну расподеле притиска за континуум и струјање са клизањем.

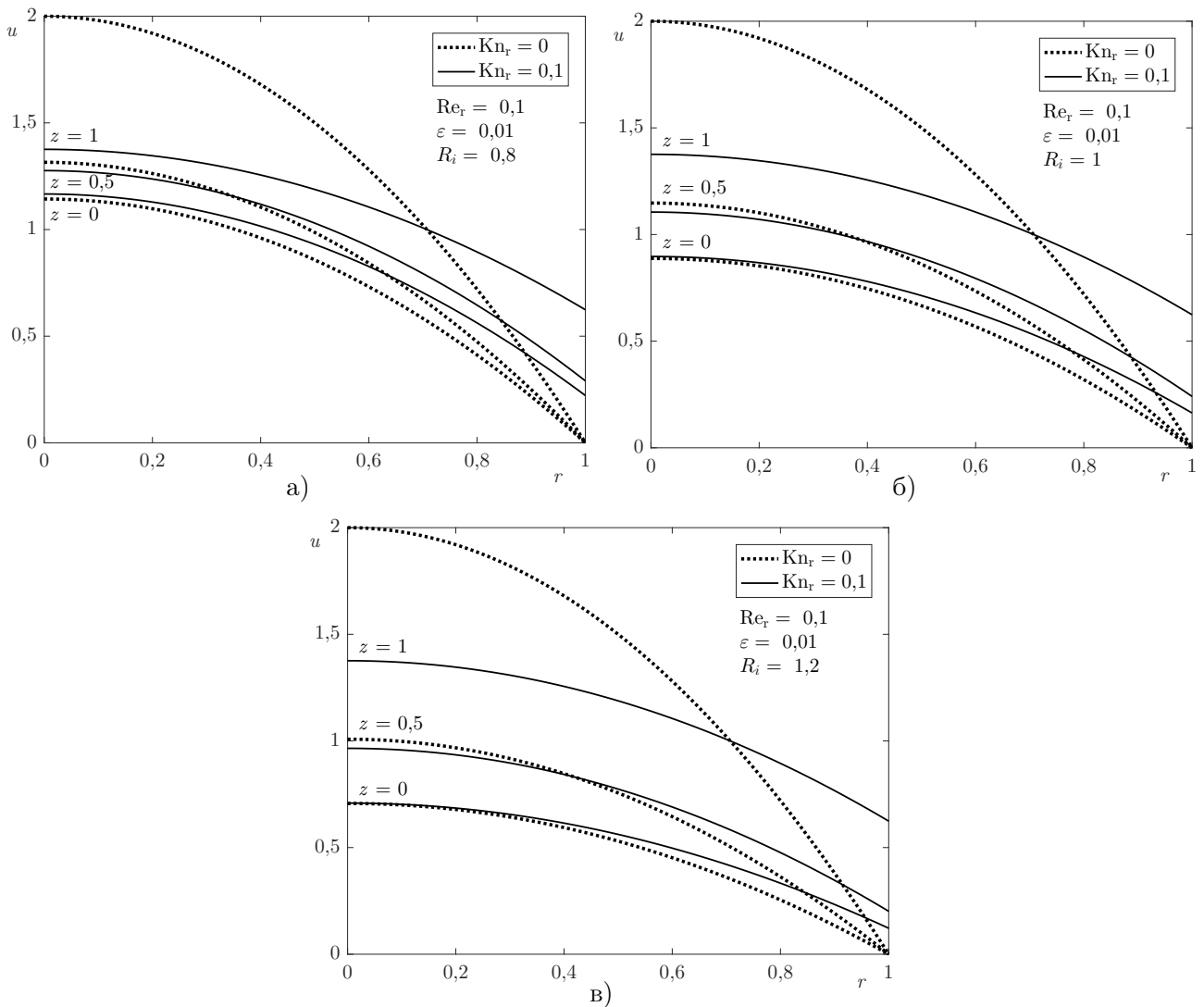


**Слика 4.4:** Резултати добијени при познатој вредности притиска на улазу и излазу из цеви при малим Рејнолдсовим бројевима за  $R_i = 1$ : а) притисак, б) брзина.

На примеру струјања гаса кроз микроцев константног попречног пресека може се анализирати утицај разређености и стишљивости на расподелу притиска дуж цеви (слика 4.4 а)). Расподела притиска за случај континуума није линеарна ( $Kn_r = 0$ ), каква би била да је у питању нестишљиво струјање, одакле следи да стишљивост расподелу притиска чини нелинеарном. Супротно од тога, повећање разређености утиче на смањење закривљености криве притиска (крива  $Kn_r = 0,1$  у односу на криву  $Kn_r = 0$ ). Из овога се може закључити да разређеност има супротан утицај на расподелу притиска у односу на стишљивост, што је закључено за струјање гаса у микроканалима [86] и микроцевима [87]. Узимајући у обзир оба утицаја, ипак се добија нелинеарна расподела притиска.

Брзине (4.64), за случај када је притисак одређен за познат однос улазног и излазног притиска (бездимензијски улазни притисак), приказане су на слици 4.4 б). Показује се да су вредности брзине у свим попречним пресецима за случај разређеног струјања веће од брзине добијене за случај када се разређеност занемарује. Утицај клизања на зиду расте од улаза ка излазу из цеви, што је и очекивано, јер Кнудсенов број расте од улаза ка излазу.

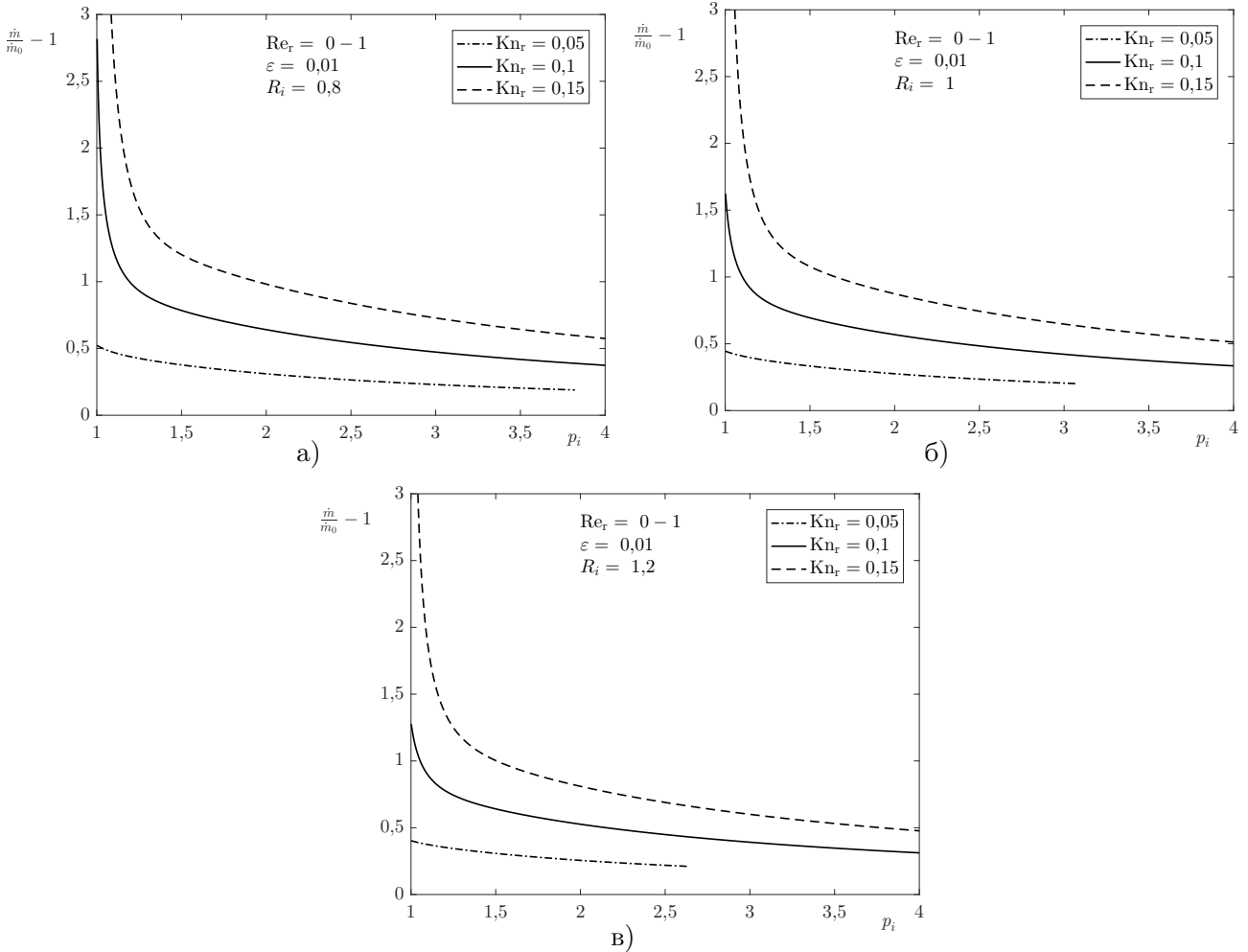




**Слика 4.5:** Профили брзине за случај малог Рејнолдсовог броја за познат масени проток: а)  $R_i = 0,8$ , б)  $R_i = 1$ , в)  $R_i = 1,2$ .

Профили брзина за сва три случаја геометрије при малим Рејнолдсовим бројевима (4.64) у случају познатог масеног протока приказани су на слици 4.5. За сваку геометрију одабрана су по три попречна пресека у којима су дати профили брзина, и то су улазни пресек ( $z = 0$ ), пресек  $z = 0,5$  и излазни попречни пресек ( $z = 1$ ). За сваки попречни пресек дате су брзине за случај без клизања ( $Kn_r = 0$ ) и брзине које у себи садрже клизање ( $Kn_r = 0,1$ ). Како се вредност локалног Кнудсеновог броја може изразити као  $Kn_r/p$ , на основу добијених резултата за поље притиска следи да локални Кнудсенов број расте идући од улаза ка излазу из цеви. Ефекат разређености расте, па самим тим низструјно у сваком попречном пресеку расте разлика између профила брзине са и без клизања. У циљу поређења, изабрано је да су услови струјања у излазном попречном пресеку за дивергентну, конвергентну, као и за микроцев константног попречног пресека исти, тј. профил

брзине за све три геометрије је исти у излазном попречном пресеку. У другим пресецима, највеће су брзине у дивергентној микроцеви, затим у цеви константног попречног пресека и најмање су у конвергентној микроцеви.



**Слика 4.6:** Прираштај масених протока за различите вредности Кнудсеновог броја при малим Рејнолдсовим бројевима: а)  $R_i = 0,8$ , б)  $R_i = 1$ , в)  $R_i = 1,2$ .

Према претпоставкама о референтном Рејнолдсовом (4.12), Маховом (4.4) и односу квадрата Маховог и Рејнолдсовог броја (4.6) параметри  $\beta$  и  $\beta_0$  могу се написати у облику:

$$\beta = \frac{4\dot{m}\tilde{\mu}_r}{\tilde{p}_r\tilde{\rho}_r\varepsilon\tilde{D}_r^3\pi}, \quad (4.113)$$

$$\beta_0 = \frac{4\dot{m}_0\tilde{\mu}_r}{\tilde{p}_r\tilde{\rho}_r\varepsilon\tilde{D}_r^3\pi}. \quad (4.114)$$

Следи да се однос масених протока  $\dot{m}$  и  $\dot{m}_0$ , може представити односом параметара  $\beta$  и

$\beta_0$ :

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{\beta}{\beta_0}. \quad (4.115)$$

На основу претходне релације (4.115) релативни пораст масеног протока  $\dot{m}$  у односу на масени проток за случај када се клизање занемарује  $\dot{m}_0$  приказан је у зависности од односа притисака на улазу и излазу из цеви на слици 4.6. За задати однос притисака на улазу и излазу из канала  $p_i$  из једначине (4.65) може се одредити вредност параметра  $\beta_0$ :

$$\beta_0 = \frac{3R_i^3 (p_i^2 - 1)}{64 (R_i^2 + R_i + 1)}, \quad (4.116)$$

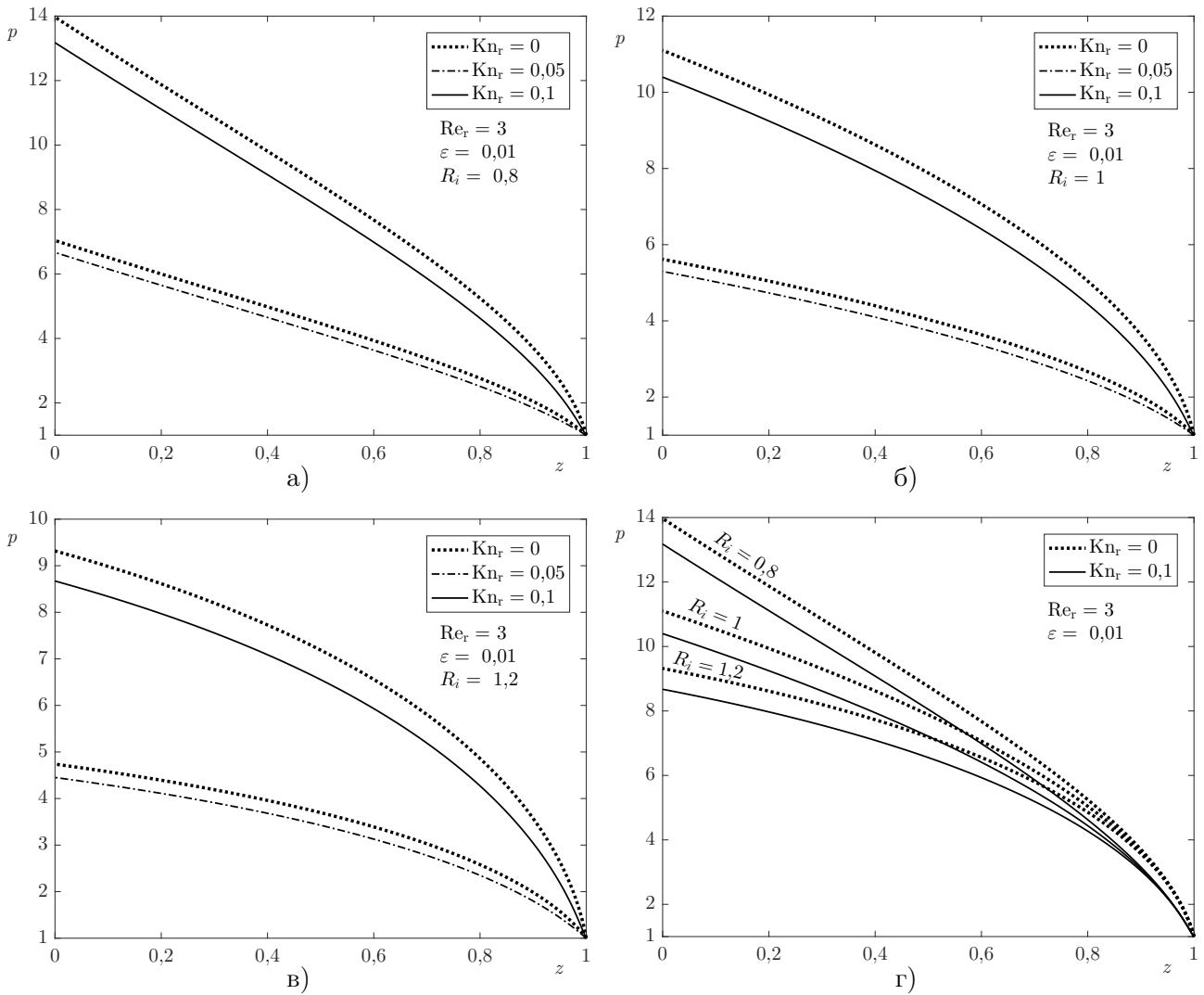
За исти однос притисака из диференцијалних једначина за притисак (4.57), (4.59), (4.61), (4.63) нумерички се одређује вредност параметра  $\beta$  за случај када је клизање узето у обзир.

Резултати за мале Рејнолдсове бројеве (слика 4.6) показују да је са порастом односа улазног и излазног притиска све мањи утицај разређености на релативно повећање протока. Односно, са повећањем референтне вредности Кнудсеновог броја долази до повећања одступања масеног протока разређеног гаса у односу на случај када се разређеност занемарује. При задатим истим параметрима струјања, тј. истом параметру  $\varepsilon$ , референтном Кнудсеновом броју  $Kn_r$ , при истом односу улазног и излазног притиска  $p_i$  и истом излазном попречном пресеку највећи релативни прираштај масеног протока у односу на континуум јавља се код дивергентне микроцеви, затим микроцеви константног попречног пресека и најмањи код конвергентне микроцеви.

#### 4.4.2 Анализа резултата за велике Рејнолдсове бројеве

У овом поглављу приказана је анализа поља притиска, брзине и масеног протока при великим Рејнолдсовим бројевима. Резултати су дати за вредност малог параметра  $\varepsilon = 0,01$  и за различите вредности референтног Кнудсеновог броја. Вредност референтног Рејнолдсовог броја износи  $Re_r = 3$ . Коефицијент акомодације за случај дифузне рефлексије је  $\sigma_v = 1$ . Однос специфичних топлотних капацитета при константном притиску и константној запремини за једноатомски гас је  $\kappa = 5/3$ .

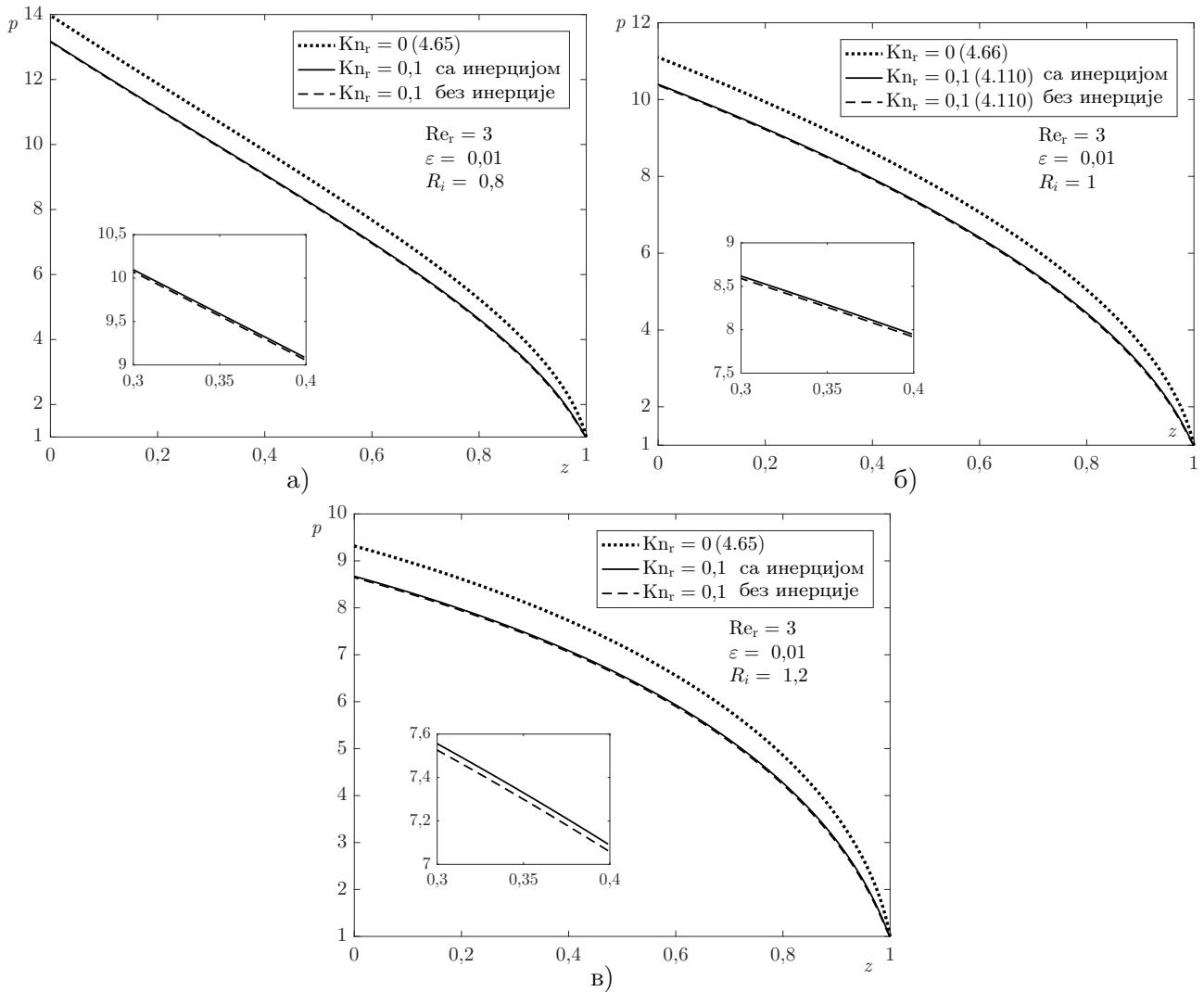
Расподела притиска дуж микроцеви за дивергентну (слика 4.7 а)), микроцев константног попречног пресека (слика 4.7 б)) и конвергентну цев (слика 4.7 в)) добијена је за



**Слика 4.7:** Расподела притиска дуж микроцеви при изотермском стишљивом струјању за велике Рејнолдсове бројеве: а)  $R_i = 0,8$ , б)  $R_i = 1$ , в)  $R_i = 1,2$ , г) поређење расподела притиска за три геометрије.

познат масени проток из диференцијалних једначина (4.106), (4.108) са условима (4.95), (4.101). Случај струјања у микроцеви константног попречног пресека решен је и аналитички (4.110) и постигнуто је потпуно поклапање са нумеричким решењем. Показује се да разређеност снижава вредност притиска дуж микроцеви без обзира на њихову геометрију. За исту вредност малог параметра  $\varepsilon$  и референтног Кнудсеновог броја, да би се остварио исти масени проток (иста вредност референтног Рејнолдсовог броја), највећи однос улазног и излазног притиска потребан је код дивергентне микроцеви, затим микроцеви константног попречног пресека и најмањи однос улазног и излазног притиска потребан је код конвергентне микроцеви.

Утицај инерције анализиран је на слици 4.8. Утицај разређености ( $Kn_r = 0,1$ ) снижава

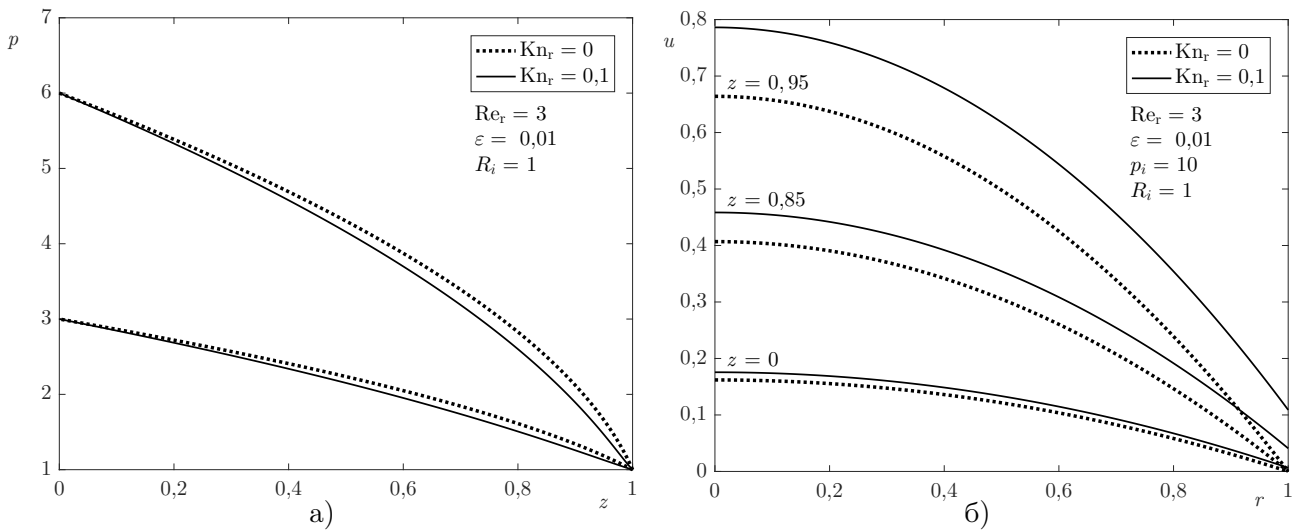


**Слика 4.8:** Распореда притиска дуж микроцеви при изотермском стишљивом струјању за случај са и без инерције: а)  $R_i = 0,8$ , б)  $R_i = 1$ , в)  $R_i = 1,2$ .

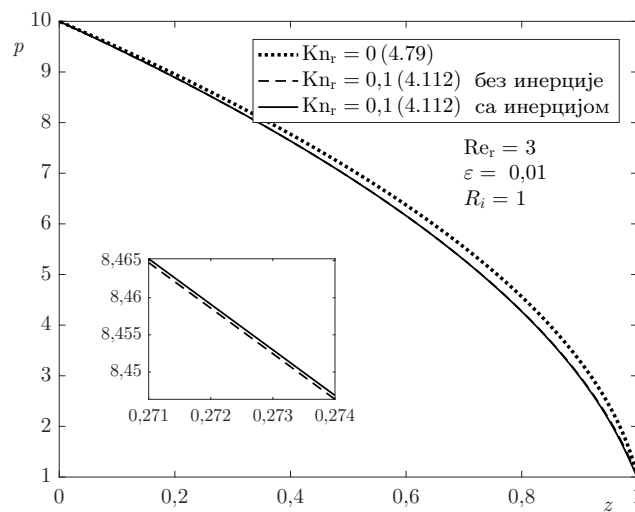
притисак дуж микроцеви за све три геометрије. За расподеле притиска, које обухватају утицај разређености ( $Kn_r = 0,1$ ), дато је решење које обухвата утицај инерције и решење које не обухвата овај утицај. Показује се да присуство инерцијалних чланова повећава притисак дуж микроцеви, за све разматране геометрије. Утицај инерције код микроцеви константног попречног пресека при истим условима струјања који су дати у овом поглављу анализиран је у претходном раду [88]. До истих заључака о утицају разређености и инерције при изотермском стишљивом струјању у микролежајевима аутори су дошли у [89].

И при великим Рејнолдсовим бројевима се показује да је притисак за случај континуума већи у односу на притисак добијен када је клизање узето у обзир (слика 4.9 а)). Ови резултати показују, да као и при малим Рејнолдсовим бројевима, разређеност има

супротан ефекат на вредност притиска у односу на стишљивост.



**Слика 4.9:** Резултати добијени за познат однос улазног и излазног притиска из цеви за  $R_i = 1$ : а) поље притиска (4.112); б) брзина (4.109) укључујући решења за притисак (4.112).

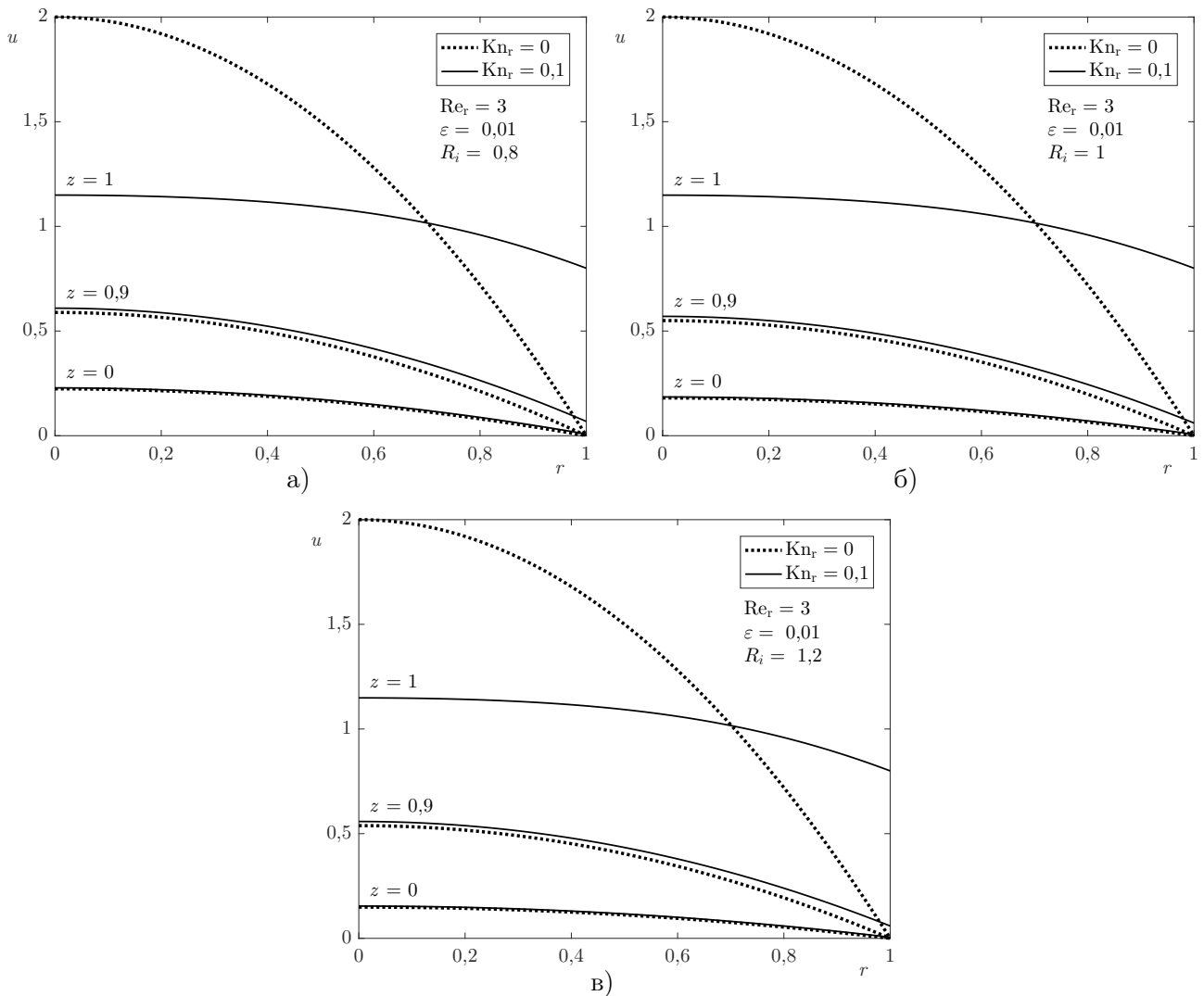


**Слика 4.10:** Расподела притиска дуж микроцеви константног попречног пресека за случај са и без инерције.

Брзине у различитим попречним пресецима микроцеви константног попречног пресека, добијене за случај познатог односа притисака на улазу и излазу из цеви, приказане су на слици 4.9 б). Показано је да је, као и при малим Рејнолдсовим бројевима, у свим пресецима укупна брзина већа од брзине која не обухвата ефекте разређености гаса и инерције. Услед граничног услова клизања брзина на зиду расте дуж микроцеви.

Иако је притисак добијен за задату вредност бездимензијског улазног притиска, утицај разређености и инерције (слика 4.10) исти је као код притиска добијеног за познат

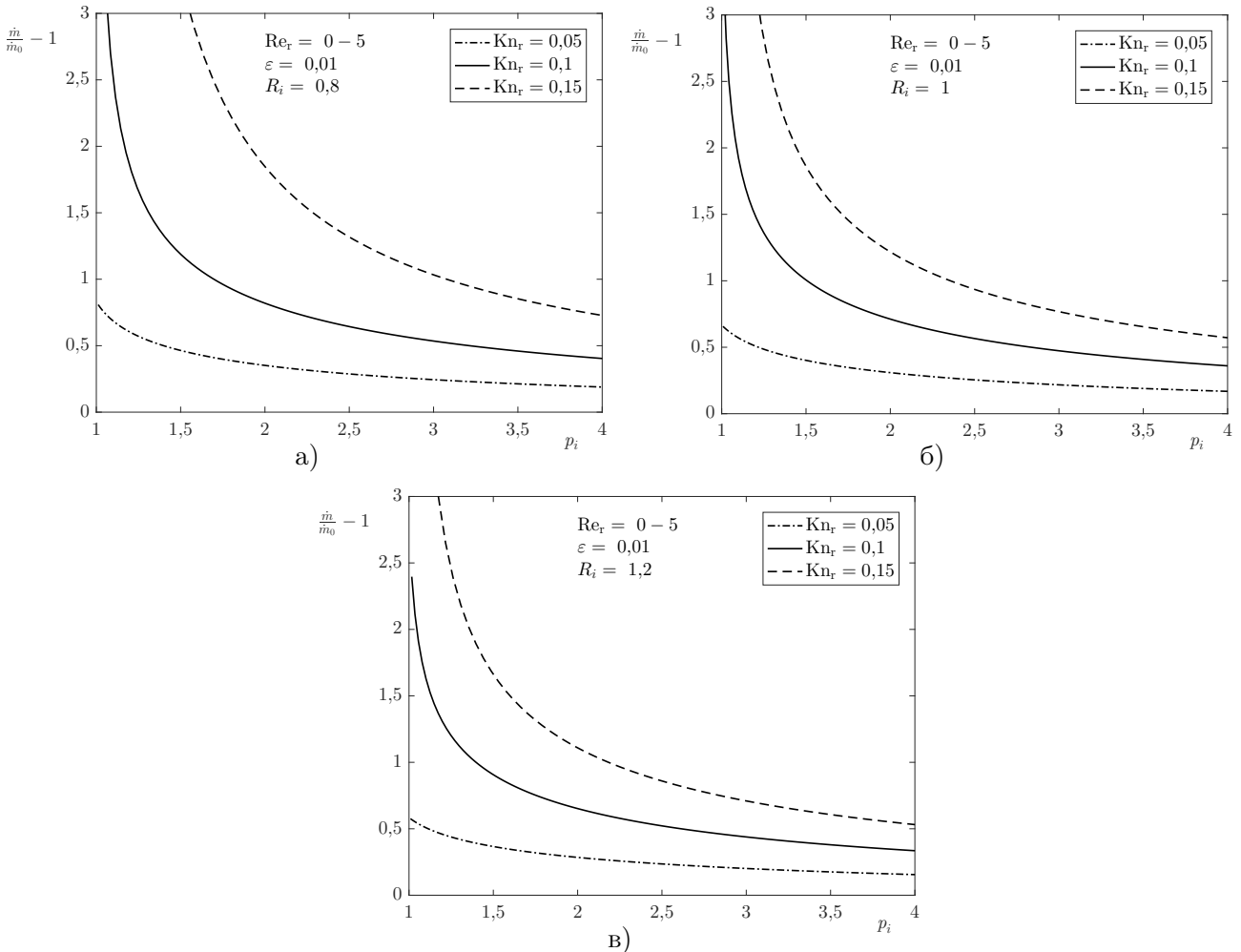
масени проток. Када је разређеност узета у обзир јавља се нижи притисак дуж микроцеви у односу на решење које занемарује утицај разређености (4.79). Анализиран је утицај инерцијалних чланова за случај када је разређеност узета у обзир. Решење које обухвата инерцију и разређеност даје нешто веће вредности притиска од решења које обухвата разређеност, а инерцију занемарује.



**Слика 4.11:** Профили брзине у различитим пресецима за случај великог Рејнолдсовог броја: а)  $R_i = 0,8$ , б)  $R_i = 1$ , в)  $R_i = 1,2$ .

На слици 4.11 приказани су профили брзина (4.109) у различитим попречним пресецима за дивергентну микроцев, микроцев константног попречног пресека и конвергентну микроцев, при истим условима у излазном попречном пресеку. Показује се да је дуж целе цеви присутан ефекат клизања гаса на зиду. Овај утицај клизања расте ка излазу из цеви. Такође, за исте вредности референтних бројева у излазу највеће вредности подужне брзине на улазу у цев јављају се код дивергентне микроцеви, потом код цеви констант-

ног попречног пресека и код конвергентне микроцеви. Као и при малим Рејнолдсовим бројевима вредност локалног Кнудсеновог броја расте ка излазу из цеви. Услед пораста разређености расте и разлика између профила брзине добијених када се разређеност занемарује и када се узима у обзир.



**Слика 4.12:** Релативно повећање масеног протока у зависности од притиска за различите вредности Кнудсеновог броја: а)  $R_i = 0,8$ , б)  $R_i = 1$ , в)  $R_i = 1,2$ .

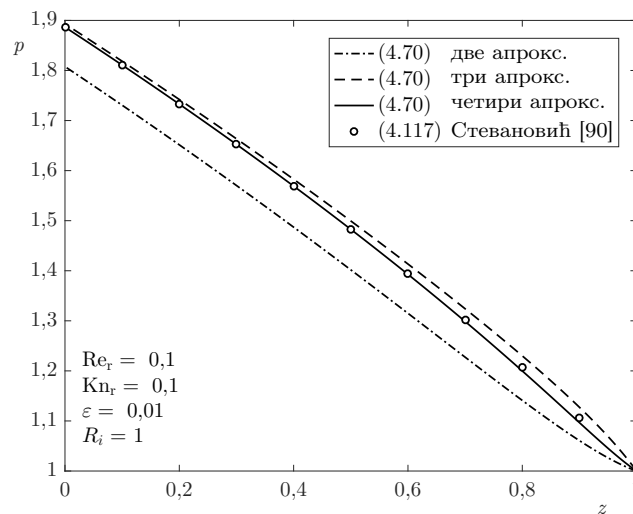
Релативни прираштај масених протока за случај када је узета у обзир разређеност и инерција у односу на случај када ови ефекти нису узети у обзир, у зависности од односа притисака на улазу и излазу из цеви, дат је на слици 4.12. Овај дијаграм добијен је на исти начин као и при малим Рејнолдсовим бројевима. Релативни прираштај масеног протока у односу на случај када се разређеност занемарује одређен је на основу релације (4.115) и (4.116). У овом случају вредност параметра  $\beta$  одређује се нумерички из система диференцијалних једначина (4.106) и (4.108). Осим нумеричког приступа који користи наведене диференцијалне једначине за одређивање параметра  $\beta$  може се користити и ана-



литички израз за поље притика у микроцеви константног попречног пресека (4.110). При повећању односа улазног и излазног притиска промена степена разређености, тј. Кнудсеновог броја, има све мањи утицај на релативни прираштај масеног протока у односу на масени проток када се разређеност не узима у обзир. За исту вредност малог параметра  $\varepsilon$  и референтног Кнудсеновог броја, при истом односу притисака на улазу и излазу, највећи прираштај масеног протока, у односу на масени проток када се разређеност не узима у обзир, јавља се код дивергентне, затим код цеви константног попречног пресека и најмањи код конвергентне микроцеви.

### 4.4.3 Валидација резултата

У литератури постоје поједина аналитичка решења и резултати нумеричких експеримената за сва три типа геометрије микроцеви, која су овде анализирана. Ова решења упоређена су са резултатима добијеним у докторату.



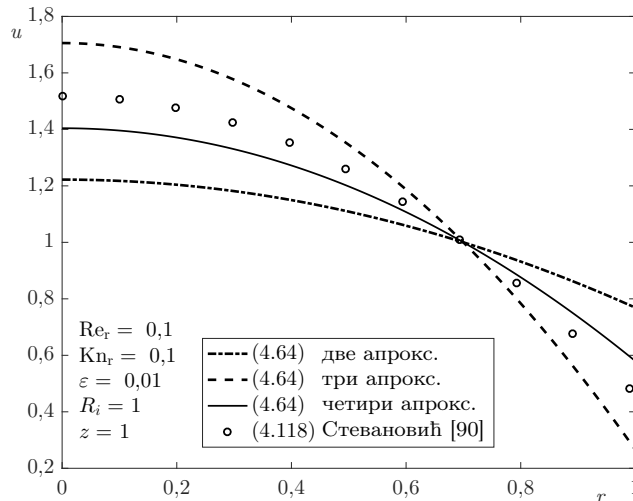
**Слика 4.13:** Расподела притиска за изотермско струјање гаса кроз микроцев добијена у докторату (4.70) и тачно аналитичко решење [90].

У литератури [90] дато је тачно аналитичко решење за случај стишљивог стационарног осносиметричног дозвучног изотермског струјања разређеног гаса у микроцеви константног попречног пресека при малим Рејнолдсовим бројевима (инерција се занемарује). Сагласно са коришћеним граничним условом Хсиа-Домота приказана решења су тачности реда  $\mathcal{O}(\text{Kn}_r^2)$ . Како су решења у [90] дата у димензијском облику, за потребе упоређивања са решењима из овог рада преведена су у бездимензијски облик. Тако је добијен израз за

притисак реда тачности  $\mathcal{O}(\text{Kn}_r^2)$ :

$$p^2 + 16\text{Kn}_r p + 16\text{Kn}_r^2 \ln p - 1 - 16\text{Kn}_r - 64\beta \dot{m} (1 - z) = 0. \quad (4.117)$$

Поље притиска за изотермско струјање разређеног гаса у цеви константог попречног пресека, при малим Рејнолдсовим бројевима, овде је дато у облику аналитичког решења са четири апроксимације (4.70). Поређењем аналитичког решења за притисак [90] и овде добијеног решења (4.70), које садржи четири апроксимације, види се готово потпуно поклапање. На слици 4.13 приказана су и решења са две [91], [92], три и четири апроксимације као и аналитичко решење [90]. Показује се да се повећањем броја апроксимација повећава тачност решења.



**Слика 4.14:** Поређење резултата за брзину при малим Рејнолдсовим бројевима из доктората (4.64) са тачним решењем [90].

У циљу поређења, аналитичко решење за брзину дато у [90] може се приказати у бездимензијском облику:

$$u = \frac{1}{16\beta} \frac{dp}{dz} \left( r^2 - 1 - 4 \frac{\text{Kn}_r}{p} - 4 \frac{\text{Kn}_r^2}{p^2} \right). \quad (4.118)$$

Ово аналитичко решење је добијено на основу граничног услова Хсиа-Домота, па је оно тачности реда  $\mathcal{O}(\text{Kn}_r^2)$ .

Поље брзине са четири апроксимације добијено у овом раду за изотермско стишљиво струјање разређеног гаса у микроцеви константног попречног пресека представљено је (4.64), где је  $R(z) = 1$ . Поређење аналитичког решења за брзину [90] и решења за изотерм-

ско стишљиво струјање добијено у овом докторату са две [91], три и четири апроксимације, у излазном попречном пресеку дато је на на слици 4.14. Као и код притиска, већи број апроксимација доприноси тачнијем решењу.

Резултати за релативни прираштај масеног протока из доктората пореде се са нумеричким резултатима Шарипова који су добијени из кинетичке теорије гасова [93] и [94]. Резултати Шарипова дати су у виду калкулатора, који се базира на нумеричким решењима Шарипова и Силизњова за микроцев константног попречног пресека [31] и Шарипова и Бертолда за микроцев променљивог попречног пресека [53]. За поређење са резултатима из овог рада искоришћен је димензијски облик израза за масени проток у микроцеви константног попречног пресека [90]. Истим поступком овде је могуће извести израз за масени проток у димензијском облику за микроцев променљивог попречног пресека:

$$\tilde{m} = -\frac{3\pi\tilde{R}_i^2\tilde{R}_e^2}{16\tilde{R}_g\tilde{T}\tilde{\eta}\tilde{L}\left(\tilde{R}_i^2 + \tilde{R}_i\tilde{R}_e + \tilde{R}_e^2\right)}\left(\tilde{p}_e^2 - \tilde{p}^2 + 16\text{Kn}_r\tilde{p}_e(\tilde{p}_e - \tilde{p}) + 16\text{Kn}_r^2\tilde{p}_e^2\ln\frac{\tilde{p}_e}{\tilde{p}}\right). \quad (4.119)$$

У случају када се занемари разређеност масени проток (4.119) своди се на:

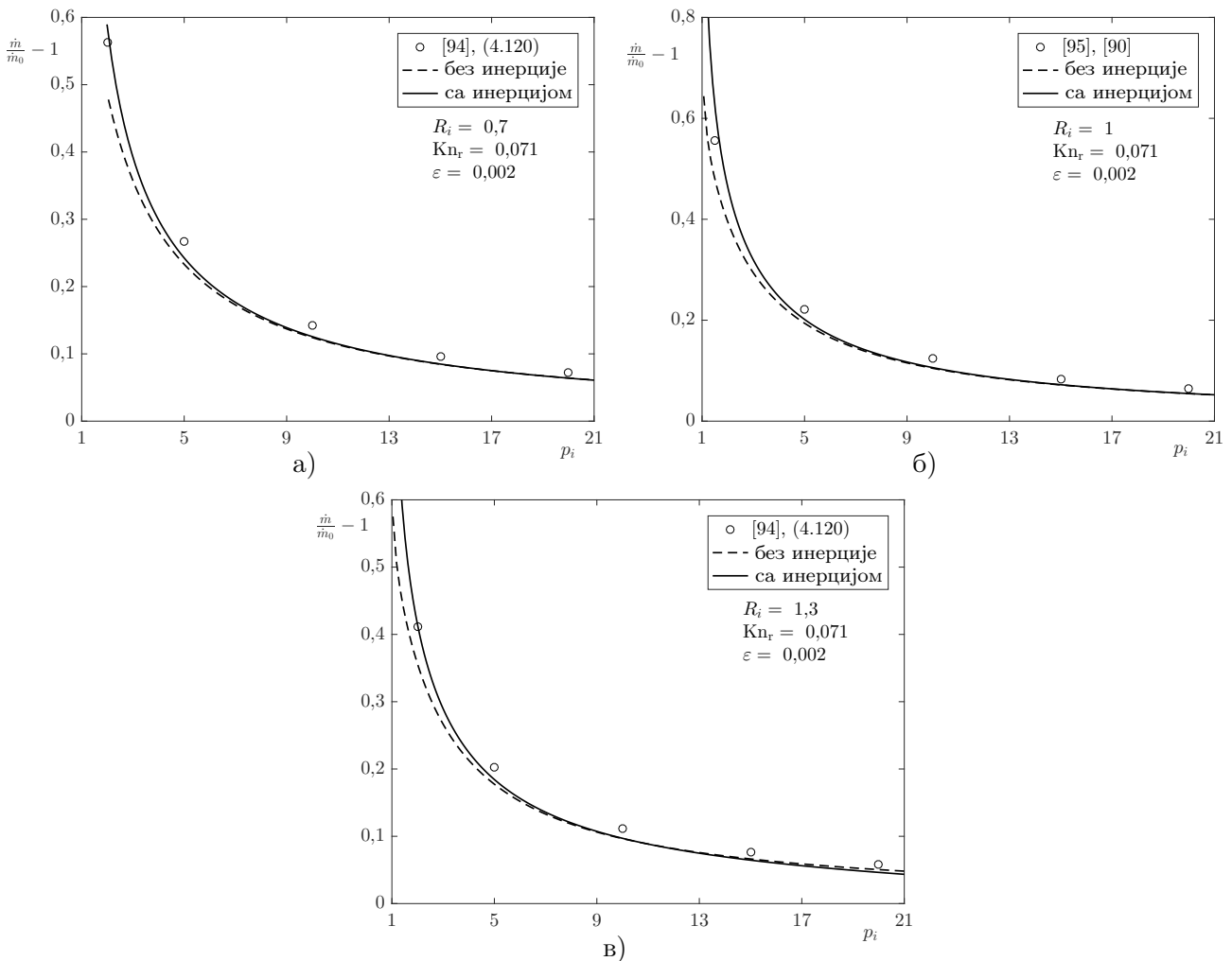
$$\tilde{m}_0 = -\frac{3\pi\tilde{R}_i^2\tilde{R}_e^2}{16\tilde{R}_g\tilde{T}\tilde{\eta}\tilde{L}\left(\tilde{R}_i^2 + \tilde{R}_i\tilde{R}_e + \tilde{R}_e^2\right)}\left(\tilde{p}_e^2 - \tilde{p}^2\right). \quad (4.120)$$

$R_i = 0,7$			$R_i = 1$			$R_i = 1,3$		
$\tilde{p}_i/\tilde{p}_e$	$\tilde{m}_0$ [kg/s] (4.120)	$\tilde{m}$ [kg/s] [94]	$\tilde{p}_i/\tilde{p}_e$	$\tilde{m}_0$ [kg/s] [90]	$\tilde{m}$ [kg/s] [93]	$\tilde{p}_i/\tilde{p}_e$	$\tilde{m}_0$ [kg/s] (4.120)	$\tilde{m}$ [kg/s] [94]
2	$6,97 \cdot 10^{-12}$	$1,09 \cdot 10^{-11}$	1,5	$6,18 \cdot 10^{-12}$	$9,62 \cdot 10^{-12}$	2	$2,45 \cdot 10^{-11}$	$3,46 \cdot 10^{-11}$
5	$5,58 \cdot 10^{-11}$	$7,07 \cdot 10^{-11}$	5	$1,19 \cdot 10^{-10}$	$1,45 \cdot 10^{-10}$	5	$1,96 \cdot 10^{-10}$	$2,36 \cdot 10^{-10}$
10	$2,3 \cdot 10^{-10}$	$2,63 \cdot 10^{-10}$	10	$4,9 \cdot 10^{-10}$	$5,5 \cdot 10^{-10}$	10	$8,09 \cdot 10^{-10}$	$9 \cdot 10^{-10}$
15	$5,21 \cdot 10^{-10}$	$5,71 \cdot 10^{-10}$	15	$1,1 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^{-9}$	15	$1,83 \cdot 10^{-9}$	$1,97 \cdot 10^{-9}$
20	$9,28 \cdot 10^{-10}$	$9,95 \cdot 10^{-10}$	20	$1,97 \cdot 10^{-9}$	$2,1 \cdot 10^{-9}$	20	$3,26 \cdot 10^{-9}$	$3,45 \cdot 10^{-9}$

**Таблица 4.1:** Вредности масеног протока за различите геометрије микроцеви према различитим односима притисака на улазу и излазу из цеви.

Помоћу калкулатора [93], [94] за задат однос притисака између улаза и излаза из цеви израчунава се масени проток. Резултати су добијени за неон, чија је универзална гасна константа  $\tilde{R}_g = 412 \text{ J/kgK}$  и динамичка вискозност  $\tilde{\mu} = 32,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pas}$ , полупречник цеви у излазном попречном пресеку  $10 \mu\text{m}$ , дужину цеви  $1 \text{ cm}$ , при температури  $\tilde{T} = 300 \text{ K}$ . За ове податке и различите односе притисака на улазу и излазу дати су масени протоци

за три карактеристичне геометрије: конвергентну, дивергентну и микроцев константног попречног пресека.



**Слика 4.15:** Поређење релативног повећања масеног протока у зависности од притиска: а)  $R_i = 0,7$ ; б)  $R_i = 1$ ; в)  $R_i = 1,3$ .

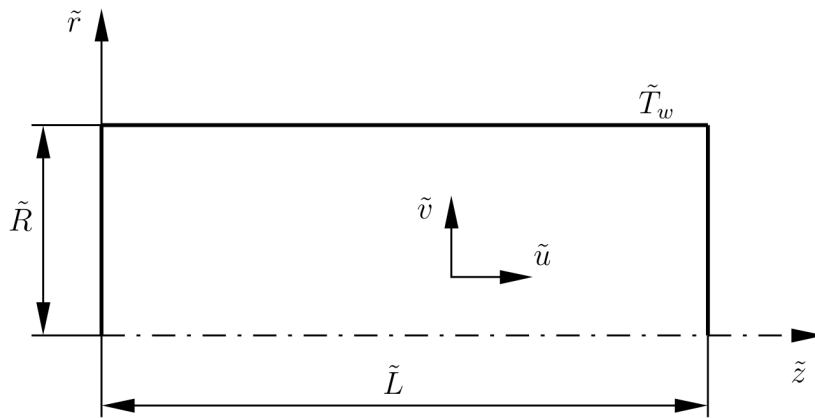
Релативни прираштај масених протока за три наведене геометрије приказан је на слици 4.15. За резултате из доктората релативни прираштај масеног протока добијен је на већ описани начин (поглавље 4.4.1) и приказан за случај који узима у обзир разређеност и инерцију (пуна линија) и случај који узима у обзир само разређеност (испрекидана линија). Резултати добијени на основу калкулатора [93], [94] на дијаграму су приказани кружићима и дати у табели 4.1. Уз масени проток добијен из калкулатора [93], [94], искоришћен је масени проток када се разређеност не узима у обзир за микроцев константног попречног пресека [90] и микроцев променљивог попречног пресека (4.120). Показује се да је постигнуто добро слагање резултата из овог рада са нумеричким резултатима [93] и [94]. Може се закључити да инерција доводи до повећања релативног прираштаја масеног

протока при чему је утицај инерције значајнији при мањем односу улазног и излазног притиска.

# 5 Неизотермско струјање гаса у микроцевима константног попречног пресека

## 5.1 Опис проблема и модел струјања

У овом поглављу разматра се неизотермско стационарно дозвучно осносиметрично струјање разређеног гаса у микроцеви константног попречног пресека (слика 5.1). Анализира се стишљиво струјање, као и струјање када је стишљивост занемарена. Струјање гаса у микроцеви последица је разлике притисака између улазног и излазног попречног пресека. Како нема промене попречног пресека, димензијски полупречници су једнаки у свим пресецима  $\tilde{R}_i = \tilde{R}_e = \tilde{R}$ . Температура зида цеви,  $\tilde{T}_w$ , је константна.



Слика 5.1: Геометрија микроцеви.

## 5.2 Систем једначина у бездимензијском облику

Познавање температуре, брзине и притиска у свакој тачки струјног поља проистиче из димензијског система једначина (3.16)-(3.20), са одговарајућим граничним условима. Са циљем одређивања значаја чланова оваквог система, систем једначина и граничних услова своди се на бездимензијски облик. Због тога се уводе референтне величине и референтни бездимензијски бројеви, а затим и претпоставке на којима се заснива разматрани модел.

### 5.2.1 Дефинисање референтних величина и референтних бездимензијских бројева

У погледу геометрије, за референтни попречни пресек разматране микроцеви могуће је изабрати било који пресек између улаза и излаза. Међутим, потребно је задовољити и карактеристике анализираниог струјања - дозвучност и струјање са клизањем, целом дужином микроцеви. Махов и Кнудсенов број, као мера наведених карактеристика струјања, расту од улазног ка излазном пресеку цеви. Да би се њихове вредности ограничиле у целокупној цеви, за референтни пресек изабран је пресек где се јављају максималне вредности Маховог и Кнудсеновог броја - излазни попречни пресек цеви. На тај начин осигурано је да се дуж цеви јављају само ниже вредности Маховог и Кнудсеновог броја од максималних. Тада сигурно не долази до загушења и остаје се у области струјања са клизањем. Бездимензијске величине су реда  $\mathcal{O}(1)$  и представљају однос величине у одређеној просторној координати у односу на вредност у референтном попречном пресеку:

$$u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_r}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{u}_r}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_r}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_r}, \quad T = \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}_w}, \quad r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{R}_r}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{\tilde{L}},$$

$$\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_r}, \quad k = \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}_r}. \quad (5.1)$$

Референтна брзина је средња подужна брзина у референтном попречном пресеку:

$$\tilde{u}_r = \frac{2}{\tilde{R}^2} \int_0^{\tilde{R}} \tilde{u}_e \tilde{r} d\tilde{r}. \quad (5.2)$$

Притисак у излазном попречном пресеку означен је са  $\tilde{p}_r$ , а референтна густина добијена је из једначине стања идеалног гаса  $\tilde{\rho}_r = \tilde{p}_r / (\tilde{R}_g \tilde{T}_w)$ . Како је полупречник микроцеви  $\tilde{R}$  константан  $\tilde{R}_r = \tilde{R}_i = \tilde{R}_e = \tilde{R}$ , следи да ће бездимензијски полупречници у свим попречним пресецима бити исти  $R = R_i = R_e = 1$  ( $R = \tilde{R}/\tilde{R}_r$ ,  $R_i = \tilde{R}_i/\tilde{R}_r$ ,  $R_e = \tilde{R}_e/\tilde{R}_r$ ). Дужина цеви је  $\tilde{L}$ . Референтна динамичка вискозност је  $\tilde{\mu}_r$ , а референтна топлотна проводљивост  $\tilde{k}_r$ , обе дефинисана за  $\tilde{T}_w$ . Према молекуларном моделу чврстих сфера дефинисане су бездимензијске вредности динамичке вискозности и топлотне проводљивости:

$$\mu = k = T^a. \quad (5.3)$$

Вредности вискозно-температурског параметра  $a$  могу покрити различите моделе:

- \*  $a = 0$  одговара случају константне вискозности и топлотне проводљивости  
( $\mu = k = 1$ ),
- \*  $a = 0,5$  представља модел еластичних молекула,
- \*  $a = 1$  представља модел Максвелових молекула.

У случају  $a = 0$  решења не зависе од температурско-вискозног коефицијента, односно вискозност и топлотна проводљивост не зависе од температуре [95].

Референтни бездимензијски бројеви дефинисани су у складу са величинама у референтном попречном пресеку. Референтни Махов, Кнудсенов и Рејнолдсов број су:

$$\text{Ma}_r = \frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{\kappa \tilde{p}_r / \tilde{\rho}_r}}, \quad (5.4)$$

$$\text{Kn}_r = \frac{\tilde{\lambda}_r}{2\tilde{R}}, \quad (5.5)$$

$$\text{Re}_r = \frac{2\tilde{\rho}_r \tilde{u}_r \tilde{R}}{\tilde{\mu}_r}. \quad (5.6)$$

Прантлов број је исти у целокупном струјном пољу:

$$\text{Pr} = \text{Pr}_r = \tilde{c}_p \frac{\tilde{\mu}_r}{\tilde{k}_r}. \quad (5.7)$$

И у случају неизотермског струјања веза између референтног Маховог (5.4), Кнудсеновог (5.5) и Рејнолдсовог броја (5.6) је иста као и у случају изотермског струјања (4.7).

### 5.2.2 Претпоставке на којима се заснива модел

Приликом свођења једначина на бездимензијски облик, да би се добиле једначине погодне за решавање, потребно је увести претпоставке.

Претпоставља се да је пречник много мањи од дужине микроцеви, па се мали параметар  $\varepsilon$  дефинише као:

$$\varepsilon = \frac{2\tilde{R}}{\tilde{L}}, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (5.8)$$

С обзиром на то да је микроцев константног попречног пресека, претпоставља се да



је попречна компонента брзине много мања од подужне:

$$\tilde{v} = \varepsilon \tilde{V}, \quad \tilde{V} = \mathcal{O}(1). \quad (5.9)$$

Разматра се дозвучно струјање са клизањем, па се уводи претпоставка о малим вредностима Маховог и Кнудсеновог броја:

$$\kappa \text{Ma}_r^2 = \gamma \varepsilon^m, \quad \gamma = \mathcal{O}(1), \quad (5.10)$$

$$\text{Kn}_r = \eta \varepsilon^n, \quad \eta = \mathcal{O}(1), \quad (5.11)$$

где су вредности параметара  $m$  и  $n$  позитивне,  $m > 0$  и  $n > 0$ .

Како је струјање дозвучно и овде ће, као и у случају изотермског струјања, бити претпостављен ред величине односа квадрата Маховог броја и Рејнолдсовог броја:

$$\frac{\kappa \text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} = \beta \varepsilon, \quad \beta = \mathcal{O}(1). \quad (5.12)$$

На основу претпоставке о квадрату Маховог броја (5.10) и односу квадрата Маховог и Рејнолдсовог броја (5.12) може се извести веза између Рејнолдсовог броја и малог параметра  $\varepsilon$ :

$$\text{Re}_r = \gamma \varepsilon^{m-1} / \beta. \quad (5.13)$$

Овај израз се користи за одређивање реда величине референтног Рејнолдсовог броја помоћу експонента  $m - 1$ . Односно, вредности експонента малог параметра  $m > 1$  представљају струјања при малим Рејнолдсовим бројевима. Струјањима при великим Рејнолдсовим бројевима одговара вредност  $m \leq 1$ .

Веза између параметара  $\gamma$ ,  $\eta$  и  $\beta$  добија се на основу претпоставке о Маховом (5.10), Кнудсеновом (5.11), Рејнолдсовом броју (5.13) и везе између њих (4.7):

$$\gamma = \frac{\beta^2 \pi}{2\eta^2}. \quad (5.14)$$

Такође, параметри  $m$  и  $n$  нису независни. Зависност између њих следи из претпостав-

ки (5.10)-(5.12) и израза (4.7):

$$2n + m = 2. \quad (5.15)$$

Уз већ наведен услов  $m > 0$  и  $n > 0$ , из релације (5.15), следи домен ових параметара  $n \in (0,1)$  и  $m \in (0,2)$ .

Како је за струјање при малим Рејнолдсовим бројевима ( $\text{Re}_r < 1$ )  $m > 1$ , домен параметара  $m$  и  $n$  је:

$$1 < m < 2, \quad 0 < n < 1/2. \quad (5.16)$$

За струјања при умерено великим Рејнолдсовим бројевима ( $\text{Re}_r \geq 1$ ), када је  $m \leq 1$ , параметри  $m$  и  $n$  су у опсегу:

$$0 < m \leq 1, \quad 1/2 \leq n < 1. \quad (5.17)$$

### 5.2.3 Основне једначине и гранични услови у бездимензијском облику

Узимајући у обзир референтне величине и референтне бездимензијске бројеве димензијски систем једначина (3.16)-(3.19) своди се на бездимензијски облик:

$$\frac{1}{r\tilde{R}} \frac{\partial (r\rho v)}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{L}} \frac{\partial (\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \kappa \text{Ma}_r^2 \rho \left( \frac{\tilde{L}}{\tilde{R}} v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2\kappa \text{Ma}_r^2 \tilde{L}}{\text{Re}_r \tilde{R}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) + \\ &+ \frac{2\kappa \text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{4}{3} \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \kappa \text{Ma}_r^2 \rho \left( v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} u \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{4\kappa \text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right) \right. \\ &\left. - \frac{\mu}{2} \frac{v}{r^2} - \frac{4}{3} \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{2\tilde{R}}{\tilde{L}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\tilde{R}^2}{2\tilde{L}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{PrRe}_r \rho \left( v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\tilde{R}}{2\tilde{L}} u \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left( \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \text{PrRe}_r \left( v \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} u \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\kappa - 1) \text{PrMa}_r^2 \mu \left[ 2 \left( \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{v}{r} \right)^2 \right) + \right. \\
& + \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + \left( \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} \right)^2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \\
& \left. - \frac{2}{3} \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{\tilde{R}}{\tilde{L}} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) \right] \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Узимајући у обзир претпоставку да је референтни пречник много мањи од дужине цеви (5.8) и да је попречна компонента брзине много мања од подужне (5.9), као и претпоставке о везама између Маховог, Кнудсеновог и Рејнолдсовог броја са малим параметром  $\varepsilon$  (5.10)-(5.12) бездимензијски систем једначина (5.18)-(5.21) може се написати у облику:

$$\frac{\varepsilon}{r\tilde{R}} \frac{\partial (r\rho V)}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{L}} \frac{\partial (\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
\gamma \varepsilon^m \rho \left( 2V \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\
&+ 2\beta \varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right), \quad (5.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma \varepsilon^{m+2} \rho \left( V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2} u \frac{\partial V}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + 4\beta \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} \right) \right) \\
&- \frac{\mu V}{2r^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\varepsilon^2}{8} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad (5.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma \varepsilon^m \frac{\text{Pr}}{2\beta} \rho \left( V \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u}{2} \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\
&+ \gamma \varepsilon^m \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\text{Pr}}{\beta} \left( V \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\
&+ \gamma \varepsilon^m \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \mu \left[ 2 \left( \left( \varepsilon^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{V}{r} \right)^2 \right) + \right. \\
&+ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\varepsilon^4}{4} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \\
&\left. - \frac{2}{3} \left( \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} \right)^2 + \varepsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial (rV)}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\varepsilon^2}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) \right] \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Одбацивањем чланова реда  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  и мањих добија се коначан облик једначина у бездимензијском облику:

$$\frac{2}{r} \frac{\partial (r\rho V)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (5.26)$$

$$\gamma \varepsilon^m \rho \left( 2V \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (5.28)$$

$$\text{Pr} \frac{\gamma \varepsilon^m}{4\beta} \rho \left( 2V \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \gamma \varepsilon^m \left( \frac{u}{4\beta} \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right). \quad (5.29)$$

Из пројекције једначине количине кретања на попречни правац (5.28) очигледно је да не постоји зависност притиска од попречне координате  $r$ . Како је струјање и осносиметрично, следи да поље притиска зависи само од подужне координате  $z$ , тј.  $\partial p / \partial z = dp / dz$ .

Применом референтних величина на једначину стања идеалног гаса (3.20), добија се њен бездимензијски облик:

$$p = \rho T, \quad (5.30)$$

За гранични услов за поље брзине изабран је Максвелов гранични услов (3.23), који у бездимензијском облику гласи:

$$u|_{r=1} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 2\text{Kn}_r \frac{T^{a+0,5}}{p} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (5.31)$$

Бездимензијски гранични услов за поље температуре - услов Смолуховског у бездимензијском облику, на основу димензијског израза (3.25), је:

$$T|_{r=1} = 1 - \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{\text{Kn}_r}{\text{Pr}} \frac{T^{a+0,5}}{p} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (5.32)$$

Узимајући у обзир везу између Кнудсеновог броја и малог параметра  $\varepsilon$  (5.11) гранични услови за брзину и температуру могу се написати на следећи начин:

$$u|_{r=1} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 2\eta \varepsilon^n \frac{T^{a+0,5}}{p} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (5.33)$$

$$T|_{r=1} = 1 - \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{\eta \varepsilon^n}{\text{Pr}} \frac{T^{a+0,5}}{p} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (5.34)$$

Како при струјању постоји симетрија у односу на  $z$  осу, граничним условима ће се придодати услов симетрије за поље брзине:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad V = 0, \quad (5.35)$$

и услов симетрије за поље температуре:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (5.36)$$

### 5.3 Решавање проблема неизотермског струјања кроз микроцеви

При решавању система бездимензијских једначина (5.26)-(5.29) и граничних услова (5.33)-(5.36) карактеристичне величине претпостављају се у облику пертурбационих редова. Овде ће све величине бити приказане са две апроксимације пертурбационог реда. Општи облик развоја произвољне величине  $f$  у пертурбациони ред, са две апроксимације, где је изабран развој по референтном Кнудсеновом броју је:

$$f = f_0 + \text{Kn}_r f_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2). \quad (5.37)$$

Прва апроксимација  $f_0$  је решење за случај континуума. Друга апроксимација  $f_1$  обухвата утицај клизања и утицај који у системима једначина дају чланови реда  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$ .

У систему једначина (5.26)-(5.29), (5.33)-(5.36), јављају се чланови реда величине  $\mathcal{O}(1)$ ,  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$  и  $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$ . У једначини континуитета (5.26), у једначини количине кретања за попречни правац (5.28), код услова симетрије за температуру (5.36) и брзину (5.35), јављају се само чланови реда величине  $\mathcal{O}(1)$ . Једначина количине кретања за подужни правац (5.27) са десне стране садржи силу притиска и вискозну силу, који су такође реда величине  $\mathcal{O}(1)$ . Лева страна ове једначине (5.27) представља инерцијалну силу, и то су чланови реда величине  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$ . У једначини енергије (5.29) јављају се чланови реда величине  $\mathcal{O}(1)$  и  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$ . Чланови реда величине  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$  представљају конвективни члан, рад услед ширења и рад вискозних сила - дисипацију. Провођење топлоте у једначини (5.29) је реда величине  $\mathcal{O}(1)$ . Гранични услови за брзину (5.33) и температуру (5.34) састоје се

од чланова реда величине  $\mathcal{O}(1)$  и чланова реда Кнудсеновог броја  $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$ . Чланови реда  $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$  у граничним условима (5.33) и (5.34) представљају утицај клизања и температурски скок, редом.

Који ће се чланови, почетног система једначина, појавити у систему једначина за одређену апроксимацију зависи од међусобног односа параметара  $m$  и  $n$ . У складу са тим разматрају се два режима струјања. У првом случају решење се осмишљава тако да се у другој апроксимацији, у односу на прву, јави само утицај разређености. Овај услов ће бити задовољен само када је задовољен однос  $n < m$ . Наиме, утицај чланова реда величине  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$  ће се јавити и у овом случају, али тек у некој од апроксимација вишој од друге. У складу са условом  $n < m$  ово је случај струјања при малим Рејнолдсовим бројевима (5.16). За једнаке вредности параметара  $m$  и  $n$  друга апроксимација, у односу на прву, садржи утицај чланова реда величине  $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$ , односно  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$ . То је утицај разређености, инерције, конвекције, рада услед ширења и дисипације. Узимајући у обзир да су параметри  $m$  и  $n$  једнаки и њихову међусобну везу (5.15), показује се да је њихова вредност  $m = n = 2/3$  што припада опсегу (5.17) који одговара струјањима при великим Рејнолдсовим бројевима.

И за случај малих и умерено великих Рејнолдсових бројева решава се систем за прву, затим и за другу апроксимацију. У сваком систему, најпре се уз одговарајући гранични услов и услов симетрије за температуру из једначине енергије добија поље температуре. Затим се уз одговарајући гранични услов и услов симетрије за поље брзине из једначина количине кретања за  $z$  правац добија брзина. Након тога, добијање диференцијалне једначине притиска следи из интегралног облика једначине континуитета. Диференцијалне једначине за притисак одређују се за случај када је познат масени проток, који је тада потпуно садржан у првој апроксимацији. Масени протоци у осталим апроксимацијама су једнаки нули.

Након одабира вредности параметара  $m$  и  $n$ , изражавања величина у облику пертурбационих редова и уврштавања у бездимензијски систем једначина, формирају се системи једначина који се састоје од чланова истог реда,  $\mathcal{O}(1)$  и  $\mathcal{O}(\text{Kn}_r)$ .

### 5.3.1 Струјање гаса при малим Рејнолдсовим бројевима

У складу са условима о вредностима параметара  $m$  и  $n$  при малим Рејнолдсовим бројевима (5.16) и њиховом међусобном везом (5.15) за параметре  $m$  и  $n$  су изабране вредности

$m = 3/2$  и  $n = 1/4$ . На овај начин утицај свих чланова система једначина јавиће се тек у седмој апроксимацији. Заправо, чланови реда  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$  неће се јавити у системима једначина за мале Рејнолдсове бројеве датим са по две апроксимације. Због тога се за случај малих Рејнолдсових бројева у свим једначинама, осим у граничним условима, у другој апроксимацији јављају исти чланови као у првој апроксимацији. То су чланови који потичу од чланова реда величине  $\mathcal{O}(1)$  у систему једначина (5.26)-(5.29), (5.33)-(5.36) и настају само од развоја наведених чланова у пертурбациони ред. Гранични услови (5.33)-(5.34) садрже чланове реда Кнудсеновог броја  $\mathcal{O}(\text{Kn}_r)$ . Због тога се клизање и температурски скок гаса на зиду појављују у другој апроксимацији граничних услова за брзину и температуру.

Све карактеристичне величине претпостављене су у облику пертурбационог реда, са по две апроксимације:

$$T = T_0 + \text{Kn}_r T_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (5.38)$$

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (5.39)$$

$$V = V_0 + \text{Kn}_r V_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (5.40)$$

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (5.41)$$

$$\rho = \rho_0 + \text{Kn}_r \rho_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2). \quad (5.42)$$

Када се карактеристичне величине развијене у ред по референтном Кнудсеновом броју (5.38)-(5.42) уврсте у систем основних једначина и граничних услова у бездимензијском облику (5.26)-(5.29), (5.33)-(5.36) добија се систем једначина за обе апроксимације:

$$\varepsilon^0 : 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r T_0^a \frac{\partial T_0}{\partial r} \right), \quad (5.43)$$

$$\frac{dp_0}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r T_0^a \frac{\partial u_0}{\partial r} \right), \quad (5.44)$$

$$\int_0^1 2\rho_0 u_0 r \, dr = \dot{m}_0, \quad (5.45)$$

$$T_0|_{r=1} = 1, \quad (5.46)$$

$$\left. \frac{\partial T_0}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (5.47)$$

$$u_0|_{r=1} = 0, \quad (5.48)$$

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (5.49)$$

$$p_0|_{z=1} = 1, \quad (5.50)$$

$$\varepsilon^n : 0 = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( T_0^a \frac{\partial T_1}{\partial r} + a T_0^{a-1} T_1 \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) \right), \quad (5.51)$$

$$\frac{dp_1}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( T_0^a \frac{\partial u_1}{\partial r} + a T_0^{a-1} T_1 \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \right), \quad (5.52)$$

$$\int_0^1 2(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) r dr = \dot{m}_1, \quad (5.53)$$

$$T_1|_{r=1} = -\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{T_0^{a+0,5}}{p_0} \left. \frac{\partial T_0}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (5.54)$$

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (5.55)$$

$$u_1|_{r=1} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 2 \frac{T_0^{a+0,5}}{p_0} \left. \frac{\partial u_0}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (5.56)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (5.57)$$

$$p_1|_{z=1} = 0. \quad (5.58)$$

Системи једначина решавају се сукцесивно и истом процедуром. Најпре се решава једначина енергије за прву апроксимацију (5.43), која уз услов симетрије (5.47) и гранични услов (5.46) даје решење за температуру у првој апроксимацији. Следи решавање једначине количине кретања за  $z$  правац за прву апроксимацију (5.44) уз услов симетрије (5.49) и гранични услов за брзину на зиду цеви за прву апроксимацију (5.48). Са добијеним решењима за температуру и брзину у првој апроксимацији одређује се диференцијална једначина за поље притиска, користећи интегрални облик једначине континуитета (5.45).

Друга апроксимација температуре добија се из друге апроксимације једначине енергије (5.51) уз услов симетрије (5.55) и гранични услов за другу апроксимацију (5.54). Без обзира што је претпостављено да се ради о неизотермском струјању и што се користи једначина енергије решење се своди на изотермско:

$$T = T_0 + \text{Kn}_r T_1 = 1, \quad (5.59)$$



Затим се из једначине количине кретања за  $z$  правац за другу апроксимацију (5.52), уз услов симетрије (5.57) и гранични услов за брзину на зиду (5.56) добија друга апроксимација брзине. Узимајући у обзир решење за поље температуре (5.59), брзинско поље своди се на израз за изотермско струјање при малим Рејнолдсовим бројевима за константан попречни пресек са две апроксимације (4.64):

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{p'_0}{16\beta} (r^2 - 1) + \text{Kn}_r \left[ -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p'_0}{4\beta p_0} + \frac{p'_1}{16\beta} (r^2 - 1) \right]. \quad (5.60)$$

Како притисак зависи само од подужне координате  $z$  први изводи притиска по подужној координати означени су са  $'$ , док други изводи носе ознаку  $''$  (нпр.  $p'_0 = dp_0/dz$ ).

Добијена решења за температуру (5.59) и брзину (5.60) важе за случај стишљивог струјања, као и за случај када се стишљивост занемарује. Разлика између решења за поље брзине и температуре за стишљиво струјање и струјање када се стишљивост занемарује је у различитим решењима за поље притиска која се добијају за сваки од ова два случаја.

### Решења за стишљиво струјање гаса

Полазећи од једначине стања идеалног гаса (5.30), уврштавајући притисак (5.41), температуру (5.38) и густину (5.42) у облику пертурбационих редова, заједно са добијеним решењем за прву и другу апроксимацију температуре (5.59), добијају се прва и друга апроксимација густине за случај малих Рејнолдсових бројева:

$$\rho_0 = p_0, \quad (5.61)$$

$$\rho_1 = p_1. \quad (5.62)$$

Добијени изрази за апроксимације густине (5.61), (5.62) уводе се у одговарајуће апроксимације једначине континуитета у интергалном облику (5.45), (5.53). За познат масени проток, који је садржан у првој апроксимацији ( $\dot{m}_0 = 1$ ,  $\dot{m}_1 = 0$ ), добијене су диференцијалне једначине за прву и другу апроксимацију притиска за стишљиво неизотермско струјање гаса у микроцеви константног попречног пресека:

- прва апроксимација:

$$p_0 p'_0 = -32\beta, \quad (5.63)$$

- друга апроксимација:

$$(p_0 p_1)' = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 p_0'. \quad (5.64)$$

Из диференцијалних једначина за прву и другу апроксимацију поља притиска (5.63), (5.64), заједно са условима за вредност притиска на излазу из цеви (5.50) и (5.58), могуће је аналитичким путем добити израз за целокупно поље притиска код неизотермског стишљивог струјања разређеног гаса у микроцеви константног попречног пресека:

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \left( \frac{1}{p_0} - 1 \right) \right], \quad (5.65)$$

где је прва апроксимација притиска:

$$p_0 = \sqrt{1 + 64\beta(1 - z)}. \quad (5.66)$$

Коначно, на основу (5.60) добија се поље брзине за стишљиво неизотермско струјање гаса при константном попречном пресеку за мале Рејнолдсове бројеве:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{2}{p_0} (1 - r^2) + \text{Kn}_r \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{p_0^2} [1 + 2(r^2 - 1)]. \quad (5.67)$$

Како неизотермност не долази до изражаја при струјању гаса при малим Рејнолдсовим бројевима решења за поље притиска и брзине се свде на изотермско решење за случај струјања гаса при малим Рејнолдсовим бројевима. Тако су изрази за поље брзине при изотермском струјању за микроцев константног попречног пресека са две апроксимације (4.64) и неизотермском струјању (5.67), односно (5.60), исти. У овом случају израз за поље притиска са две апроксимације (4.70) исти је као израз (5.65).

### Решења за нестишљиво струјање гаса

Претпоставка о занемареној стишљивости може бити оправдана, посебно када се ради о струјању при малим Рејнолдсовим бројевима, због занемарљиво малих вредности Маховог броја. При таквом струјању густина је константна и целокупна вредност густине је

садржана у првој апроксимацији:

$$\rho_0 = 1, \quad (5.68)$$

$$\rho_1 = 0. \quad (5.69)$$

За случај познатог масеног протока, који је садржан у првој апроксимацији ( $\dot{m}_0 = 1$ ,  $\dot{m}_1 = 0$ ), добијају се диференцијалне једначине за прву и другу апроксимацију притиска за нестишљиво неизотермско струјање разређеног гаса при малим Рејнолдсовим бројевима:

- прва апроксимација:

$$p'_0 = -32\beta, \quad (5.70)$$

- друга апроксимација:

$$p'_1 = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8p'_0}{p_0}. \quad (5.71)$$

Решавајући диференцијалне једначине (5.70), (5.71) и примењујући услове о вредности притиска на излазу из цеви, (5.50) и (5.58), долази се до аналитичког решења за поље притиска код нестишљивог неизотермског струјања:

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \left[ -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \ln p_0 \right], \quad (5.72)$$

са решењем за прву апроксимацију:

$$p_0 = 32\beta(1 - z) + 1. \quad (5.73)$$

Иако је у овом случају стишљивост занемарена, добија се да промена притиска при струјању разређеног гаса дуж микроцеви није линеарна. Нелинеарност се јавља као последица ефекта разређености, која је у решењу за поље притиска узета у обзир. Из истог разлога је расподела притиска дуж микроцеви за случај занемарене разређености линеарна (5.73).

Израз за одређивање поља брзине при малим Рејнолдсовим бројевима, када се сти-

шљивост занемарује, добија се из општег израза за брзину (5.60) када се узме у обзир решење за притисак (5.72) за случај занемарене стишљивости:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = 2(1 - r^2) + \text{Kn}_r \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{p_0} [1 + 2(r^2 - 1)]. \quad (5.74)$$

Закључује се да у случају струјања при малим Рејнолдсовим бројевима неизотермност не долази до изражаја ни при стишљивом струјању, ни у случају када се стишљивост занемарује.

### 5.3.2 Струјање гаса при великим Рејнолдсовим бројевима

При струјању гаса при великим Рејнолдсовим бројевима све карактеристичне величине претпостављене су у облику пертурбационог реда са по две апроксимације (5.38)-(5.42). Са циљем да се у другој апроксимацији осим ефекта клизања узме у обзир и утицај инерције, конвекције, рада услед ширења и дисипације потребно је изабрати једнаке вредности параметара  $m$  и  $n$  задовољавајући њихову међусобну везу (5.15),  $m = n = 2/3$ . За мењујући величине изражене у облику пертурбационог реда (5.38)-(5.42) у бездимензијски систем једначина (5.26)-(5.29), (5.33)-(5.36) формирају се два система основних једначина и граничних услова:

$$\varepsilon^0 : \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_0 V_0) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 u_0) = 0, \quad (5.75)$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( T_0^a r \frac{\partial T_0}{\partial r} \right), \quad (5.76)$$

$$\frac{dp_0}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( T_0^a r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right), \quad (5.77)$$

$$\int_0^1 2\rho_0 u_0 r \, dr = \dot{m}_0, \quad (5.78)$$

$$T_0|_{r=1} = 1, \quad (5.79)$$

$$\left. \frac{\partial T_0}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (5.80)$$

$$u_0|_{r=1} = 0, \quad (5.81)$$

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (5.82)$$

$$p_0|_{z=1} = 1, \quad (5.83)$$

$$\varepsilon^n : \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_0 V_1 + r \rho_1 V_0) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) = 0, \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Pr} \gamma}{4 \beta} \rho_0 \left( 2V_0 \frac{\partial T_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) &= \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( T_0^a \frac{\partial T_1}{\partial r} + a T_1 T_0^{a-1} \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) \right) + \\ &+ \text{Pr} \gamma \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left( \frac{u_0}{4\beta} \frac{dp_0}{dz} + T_0^a \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\frac{\gamma}{\eta} \rho_0 \left( 2V_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) + \frac{dp_1}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( T_0^a \frac{\partial u_1}{\partial r} + a T_1 T_0^{a-1} \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \right), \quad (5.86)$$

$$\int_0^1 2 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) r dr = \dot{m}_1, \quad (5.87)$$

$$T_1 \Big|_{r=1} = - \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{T_0^{a+0.5}}{p_0} \frac{\partial T_0}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (5.89)$$

$$u_1 \Big|_{r=1} = - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 2 \frac{T_0^{a+0.5}}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (5.90)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (5.91)$$

$$p_1 \Big|_{z=1} = 0. \quad (5.92)$$

Како се у систему једначина за прву апроксимацију јављају само чланови реда величине  $\mathcal{O}(1)$ , следи да на ове чланове не утиче избор вредности параметара  $m$  и  $n$ . Из тог разлога системи једначина за прву апроксимацију за случај малих (5.43)-(5.50) и великих Рејнолдсових бројева (5.75)-(5.83) су исти, па су и решења за прву апроксимацију иста. Додатак који се јавља у првој апроксимацији при великим Рејнолдсовим бројевима је попречна компонента брзине  $V_0$ , коју је, за разлику од струјања при малим Рејнолдсовим бројевима, неопходно одредити за добијење прве апроксимације преосталих величина. Из диференцијалног облика једначине континуитета (5.75), заједно са условима  $V_0|_{r=0} = 0$  и  $V_0|_{r=R} = 0$  добија се прва апроксимација попречне компоненте брзине:

$$V_0 = \frac{r}{128\beta} (2 - r^2) \left( \frac{\rho'_0 p'_0}{\rho_0} + p''_0 \right). \quad (5.93)$$

Даље, ослањајући се на већ добијена решења за прву апроксимацију, приступа се решавању система за другу апроксимацију.

Најпре се решава једначина енергије (5.85) и уз услов симетрије (5.89) и гранични

услов (5.88) за температуру на зиду цеви добија решење за поље температуре:

$$T = T_0 + \text{Kn}_r T_1 = 1 + \text{Kn}_r^2 \text{Re}_r^2 \frac{1 - \kappa}{256\pi\beta^2\kappa} p_0'^2 \text{Pr} (r^2 - 1)^2. \quad (5.94)$$

Ово решење показује да не долази до изражаја температурски скок на зиду, али да је поље температуре у цеви неизотермско.

Даље се користећи услов симетрије (5.91) и гранични услов за поље подужне брзине на зиду цеви у другој апроксимацији (5.90) решава једначина количине кретања за другу апроксимацију (5.86). Уз подужну брзину у првој апроксимацији, добија се поље подужне брзине за неизотермско струјање разређеног гаса кроз микроцев константног попречног пресека:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{p_0'}{16\beta} (r^2 - 1) + \text{Kn}_r \left[ -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p_0'}{4\beta p_0} + \frac{p_1'}{16\beta} (r^2 - 1) + \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2}{2048\pi\beta^3} \left( \rho_0 p_0' p_0'' + \frac{a \text{Pr} (\kappa - 1) p_0'^3}{2\kappa} \right) \left( \frac{r^6}{9} - \frac{r^4}{2} + r^2 - \frac{11}{18} \right) \right]. \quad (5.95)$$

Добијени изрази за температуру и брзине су општи изрази и важе и за случај стишљивог струјања и када је стишљивост занемарена. Разлика у решењима за ова два случаја произилази из различитих решења за поље притиска.

### Решења за стишљиво струјање гаса

Увођењем израза за температуру (5.38), притисак (5.41) и густину (5.42) у облику пертурбационог реда у једначину стања идеалног гаса (5.30) и узимањем у обзир решења за прву апроксимацију температуре (5.94) следе прва и друга апроксимација густине:

$$\rho_0 = p_0, \quad (5.96)$$

$$\rho_1 = p_1 - p_0 T_1. \quad (5.97)$$

Из једначина континуитета у интегралном облику (5.78), (5.87), узимајући у обзир апроксимације густине (5.96), (5.97), добијају се диференцијалне једначине за прву и другу апроксимацију притиска за неизотермско стишљиво струјање разређеног гаса за случај великих Рејнолдсових бројева:

- прва апроксимација:

$$p_0 p_0' = -32\beta, \quad (5.98)$$

- друга апроксимација:

$$(p_0 p_1)' = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8p_0' - \frac{\gamma p_0 p_0'}{512\beta^2 \eta} \left( \frac{(\kappa - 1) \text{Pr} p_0'^2}{2\kappa} (1 + a) + p_0 p_0'' \right). \quad (5.99)$$

Диференцијалне једначине за поље притиска добијене су за познату вредност масеног протока, која је садржана у првој апроксимацији ( $\dot{m}_0 = 1$ ,  $\dot{m}_1 = 0$ ).

Са познатим вредностима притиска на излазу из цеви (5.83), (5.92), из диференцијалних једначина (5.98), (5.99), добија се расподела притиска дуж микроцеви за стишљиво неизотермско струјање гаса при великим Рејнолдсовим бројевима:

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \left( \frac{1}{p_0} - 1 \right) + 2\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \frac{\ln p_0}{\pi p_0} \left( 2 - (1 + a) \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) \right], \quad (5.100)$$

где је решење за прву апроксимацију притиска  $p_0 = \sqrt{1 + 64\beta(1 - z)}$ .

Имајући у виду добијена решења за стишљиво струјање при великим Рејнолдсовим бројевима, према општем решењу за поље температуре (5.94), добија се расподела температуре за стишљиво струјање гаса у микроцеви:

$$T = T_0 + \text{Kn}_r T_1 = 1 + 4\text{Kn}_r^2 \text{Re}_r^2 \text{Pr} \frac{(1 - \kappa)}{\pi \kappa p_0^2} (r^2 - 1)^2. \quad (5.101)$$

Ни у случају стишљивог струјања температурски скок на зиду не долази до изражаја.

На исти начин, из општег решења за поље подужне брзине (5.95), следи и расподела подужне брзине за стишљиво струјање гаса у микроцеви при великим Рејнолдсовим бројевима:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{2}{p_0} (1 - r^2) + \text{Kn}_r \frac{2}{p_0^2} \left[ 4 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{p_0^3 \pi} \left( 4\pi \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} + \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \left( 2 - \frac{a \text{Pr} (\kappa - 1)}{\kappa} \right) (\ln p_0 - 1) \right) (r^2 - 1) + \\
& + \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \frac{4}{\pi p_0} \left( 2 - \frac{a \text{Pr} (\kappa - 1)}{\kappa} \right) \left( \frac{r^6}{9} - \frac{r^4}{2} + r^2 - \frac{11}{18} \right) \Big]. \quad (5.102)
\end{aligned}$$

Уврштавањем решења за притисак у општи израз за попречну компоненту брзине у првој апроксимацији (5.93) добијено је  $V_0 = 0$ , односно код микроцеви константног попречног пресека попречна компонента не долази до изражаја.

### Решења за нестишљиво струјање гаса

Код нестишљивог струјања гаса комплетна густина садржана је у првој апроксимацији, као при малим Рејнолдсовим бројевима, па су обе апроксимације густине као у том случају  $\rho_0 = 1$ ,  $\rho_1 = 0$ . Претпоставка о занемареној стишљивости може се оправдати малим вредностима Маховог броја.

При добијању диференцијалних једначина за поље притиска масени проток је познат и садржан у првој апроксимацији ( $\dot{m}_0 = 1$ ,  $\dot{m}_1 = 0$ ). Интеграљењем једначина континуитета, за прву (5.78), а затим и за другу апроксимацију (5.87) добијају се диференцијалне једначине за притисак:

- прва апроксимација:

$$p'_0 = -32\beta, \quad (5.103)$$

- друга апроксимација:

$$p'_1 = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \frac{p'_0}{p_0} - \frac{a\gamma}{1024\beta^2\eta} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \text{Pr} p_0^3. \quad (5.104)$$

За познате вредности притиска на излазу из цеви за одговарајуће апроксимације (5.83), (5.92), добија се израз за расподелу притиска за нестишљиво струјање гаса за микроцеви константне температуре зида при великим Рејнолдсовим бројевима:

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \left[ -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \ln p_0 + 2a \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\pi \kappa} (1 - p_0) \right]. \quad (5.105)$$

Овде је прва апроксимација притиска, као и при малим Рејнолдсовим бројевима, дата



једначином  $p_0 = 32\beta(1 - z) + 1$ .

Уводећи решење за притисак у опште решење за температуру (5.94) и подужну брзину (5.95) добија се расподела температуре и подужне брзине за нестишљиво струјање гаса у микроцеви при великим Рејнолдсовим бројевима:

$$T = T_0 + \text{Kn}_r T_1 = 1 + 4\text{Kn}_r^2 \text{Re}_r^2 \text{Pr} \frac{(1 - \kappa)}{\pi \kappa} (r^2 - 1)^2, \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned} u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = & 2(1 - r^2) + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{p_0} + \right. \\ & + \frac{4}{p_0^2 \pi} \left( 4\pi \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} + \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \left( 2 - \frac{a \text{Pr} (\kappa - 1)}{\kappa} \right) (\ln p_0 - 1) \right) (r^2 - 1) \\ & \left. - 8a \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\pi \kappa} \left( \frac{r^6}{9} - \frac{r^4}{2} + r^2 - \frac{11}{18} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.107)$$

У овом случају неизотермност долази до изражаја при чему нема температурског скока на зиду, као и код стишљивог струјања. Осим тога, профил температуре је исти у сваком попречном пресеку, тј. не мења се у правцу струјања што је последица линеарне расподеле притиска у првој апроксимацији при нестишљивом струјању. Из решења за подужну брзину се види да клизање на зиду постоји и да се профил брзине мења низструјно. Такође, код нестишљивог струјања, уврштавајући решење за притисак у опште решење за попречну компоненту брзине, добија се да је  $V_0 = 0$ .

## 5.4 Анализа резултата

У овом поглављу анализирају се резултати за неизотермско струјање разређеног гаса са константном температуром зида, изазвано разликом притисака. Анализира се стационарно осносиметрично дозвучно струјање гаса кроз цев константног попречног пресека. Анализирани су режими струјања при малим и великим Рејнолдсовим бројевима.

За добијање резултата, на основу добијених решења у претходним поглављима, неопходно је задати вредности бездимензијских бројева и параметара. Димензијском анализом је показано да је потребно задати вредност малог параметра  $\varepsilon$ , референтног Рејнолдсовог броја  $\text{Re}_r$ , референтног Кнудсеновог броја  $\text{Kn}_r$  и вредност параметара  $m$  и  $n$  (одређивање режима струјања). На основу ових вредности следе преостале величине: референтни Ма-

хов број  $Ma_r$  и параметри  $\gamma$ ,  $\eta$  и  $\beta$ .

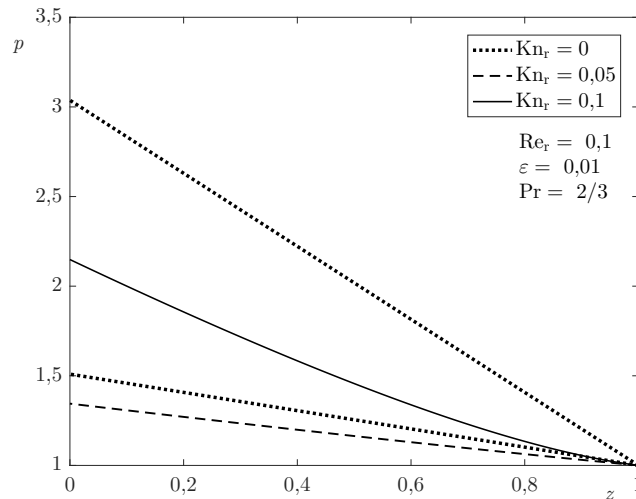
### 5.4.1 Анализа резултата за мале Рејнолдсове бројеве

За режим струјања при малим Рејнолдсовим бројевима резултати су приказани за вредност малог параметра  $\varepsilon = 0,01$ , референтни Рејнолдсов број  $Re_r = 0,1$  и одговарајуће вредности референтног Кнудсеновог броја, тј. за континуум ( $Kn_r = 0$ ) и за струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,05$ ,  $Kn_r = 0,1$ ). Изабран је коефицијент акомодације за дифузну рефлексију  $\sigma_v = 1$  и идеалну размену енергије између гаса и зида  $\sigma_T = 1$ . Сви резултати приказани су за Прантлов број  $Pr = 2/3$  и за једноатомски гас  $\kappa = 5/3$ .

Поље температуре за мале Рејнолдсове бројеве је константно ( $T = 1$ ). Овим решењем за температуру је показано да се случај са констатном температуром зида, при малим Рејнолдсовим бројевима, своди на изотермски случај. Утицај температуре долази до изражаја при великим Рејнолдсовим бројевима.

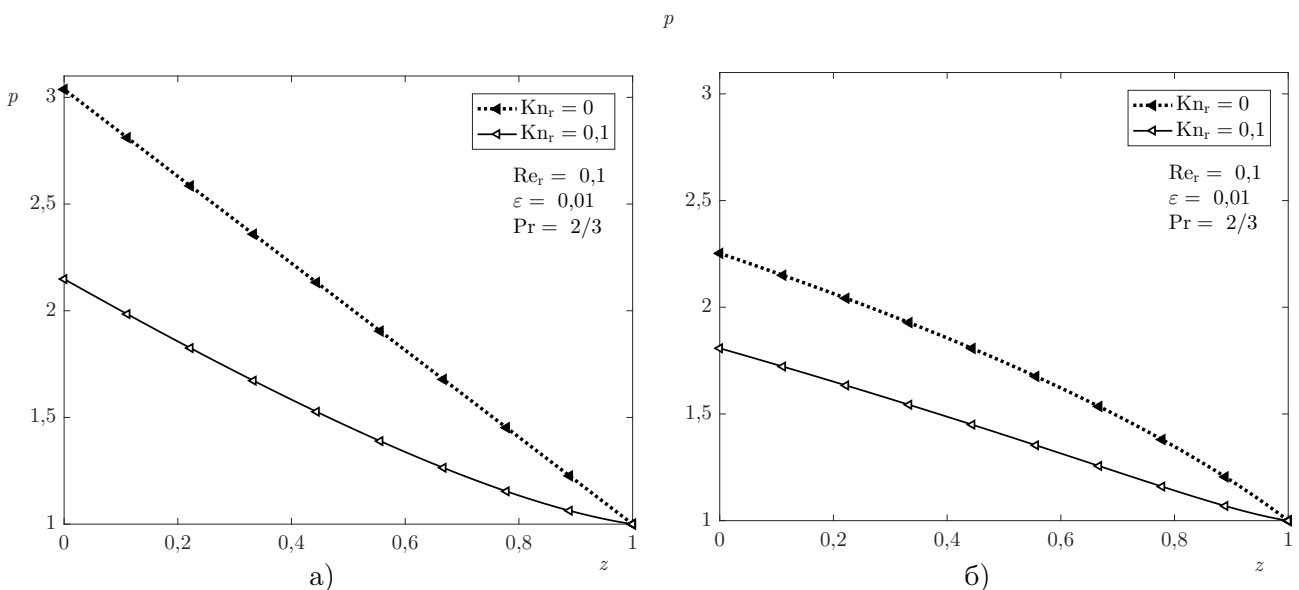
Како се неизотермско струјање при малим Рејнолдсовим бројевима своди на изотермски случај, решења за стишљиво струјање при малим Рејнолдсовим бројевима у овом поглављу иста су као резултати за изотермско стишљиво струјање при малим Рејнолдсовим бројевима за цев константног попречног пресека (поглавље 4.3.1). Следи да су резултати за поље притиска и брзине за неизотермско стишљиво струјање при малим Рејнолдсовим бројевима већ дати на сликама 4.3 б) и 4.5 б), респективно.

Расподела притиска дуж микроцеви за струјање када се стишљивост занемарује при малим Рејнолдсовим бројевима дата је на слици 5.2. Приметно је да притисак код нестишљивог струјања даје линеарну расподелу када разређеност није узета у обзир, као што је и очекивано за нестишљиво струјање. Утицај разређености исти је као што је био за стишљиво струјање при истим условима (слика 4.3 б)) - разређеност снижава вредност притиска дуж микроцеви. Односно, показује се да повећање разређености даје мањи притисак при истом масеном протоку - потребан је мањи притисак на улазу у цев. Занемаривање стишљивости има супротан утицај и доводи до већег односа притисака на улазу и излазу из цеви.



**Слика 5.2:** Расподела притиска за струјање у микроцеви са занемареном стишљивости за континуум  $Kn_r = 0$  (5.73) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,05$  и  $Kn_r = 0,1$ ) (5.72).

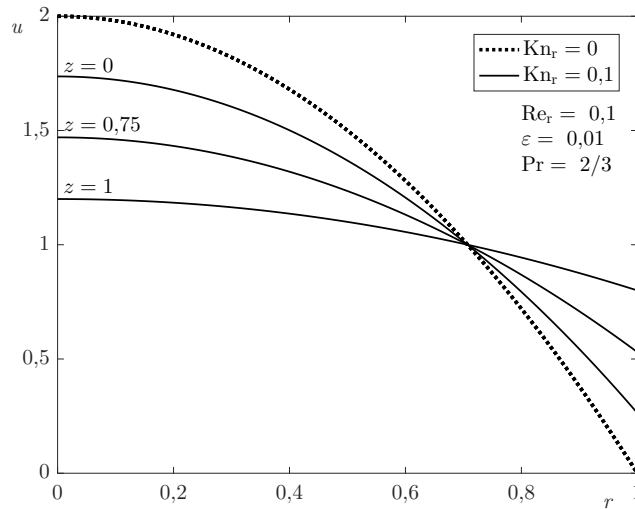
Подужна расподела притиска за континуум и струјање са клизањем за стишљиво струјање и за случај када се стишљивост занемарује при истом Рејнолдсовом броју, малом параметру и Прантловом броју приказана је на слици 5.3.



**Слика 5.3:** Расподела притиска у микроцеви константног попречног пресека: а) стишљиво неизотермско струјање (5.65); б) када је стишљивост занемарена (5.72).

Профили брзине у различитим попречним пресецима за нестишљиво неизотермско струјање, при малим Рејнолдсовим бројевима, приказани су на слици 5.4. За случај континуума профил брзине се не мења дуж цеви, што је последица линеарне расподеле притиска у случају континуума (прва апроксимација). За  $Kn_r = 0,1$  вредност брзине у оси

опада од улаза ка излазу из микроцеви. Са брзином на зиду је обрнут случај, односно утицај клизања на зиду расте од улаза ка излазу из цеви, као и код стишљивог струјања.

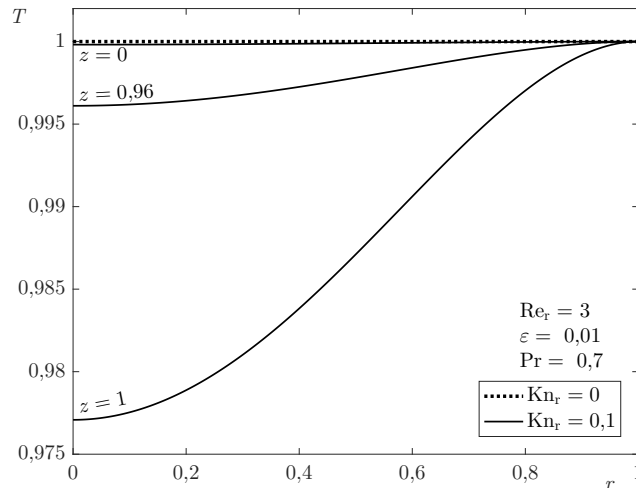


**Слика 5.4:** Профили брзине за нестишљиво струјање у различитим попречним пресецима микроцеви, за континуум  $Kn_r = 0$  и струјање са клизањем  $Kn_r = 0,1$  (5.74).

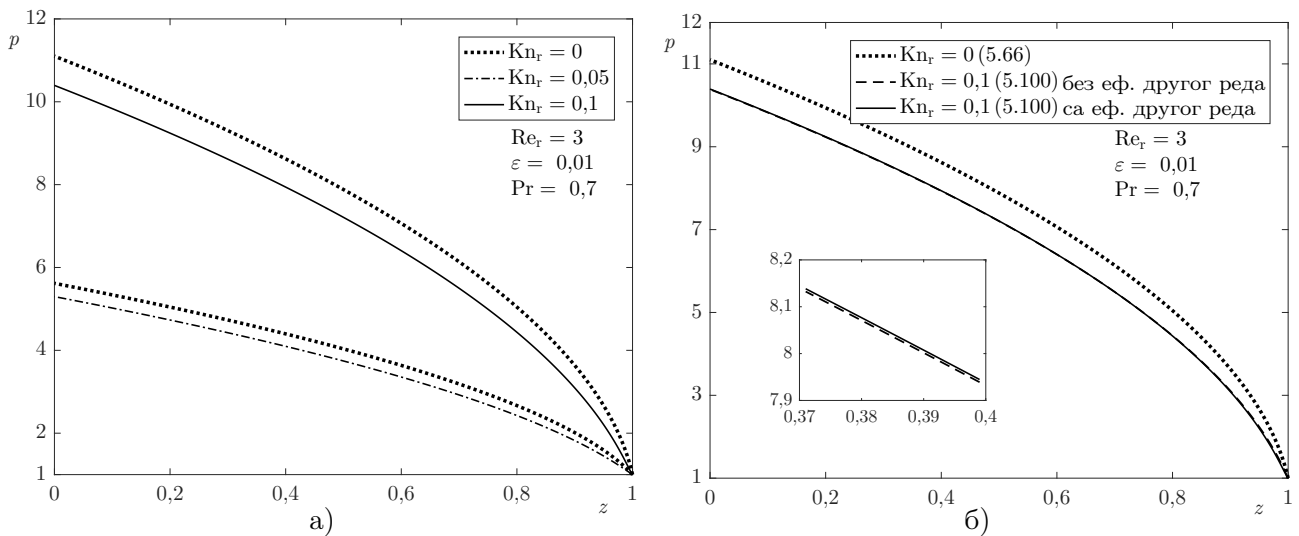
#### 5.4.2 Анализа и валидација резултата за велике Рејнолдсове бројеве

Резултати за струјање при великим Рејнолдсовим бројевима приказани су за вредност малог параметра  $\varepsilon = 0,01$ , Рејнолдсовог броја  $Re_r = 3$  и различите вредности Кнудсеновог броја. Коефицијент акомодације за дифузну рефлексију је  $\sigma_v = 1$  и коефицијент акомодације за идеалну размену енергије између гаса и зида је  $\sigma_T = 1$ . У циљу поређења са резултатима из литературе, који су добијени за ваздух, изабран је Прантлов број  $Pr = 0,7$  и однос топлотних капацитета  $\kappa = 7/5$ .

Код стишљивог струјања при великим Рејнолдсовим бројевима поље температуре приказано је за случај континуума и за случај који обухвата утицај клизања (слика 5.5). Профил температуре приказан је у три попречна пресека. Добијено је да је температура у првој апроксимацији ( $Kn_r = 0$ ) константна, како по попречном пресеку, тако и дуж цеви. Иако је коришћен гранични услов температурског скока, у прве две апроксимације пертурбационог реда овај услов није дошао до изражаја. Упркос константној вредности температуре зида долази до промене температуре у гасу у попречном пресеку. Осим тога температурски профил се мења и у правцу струјања гаса. Температура у оси цеви опада од улаза ка излазу из цеви, изузев на зиду и најнижа вредност температуре је у оси цеви.



**Слика 5.5:** Профили температуре у различитим пресецима микроцеви за континуум ( $Kn_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,1$ ) (5.101).



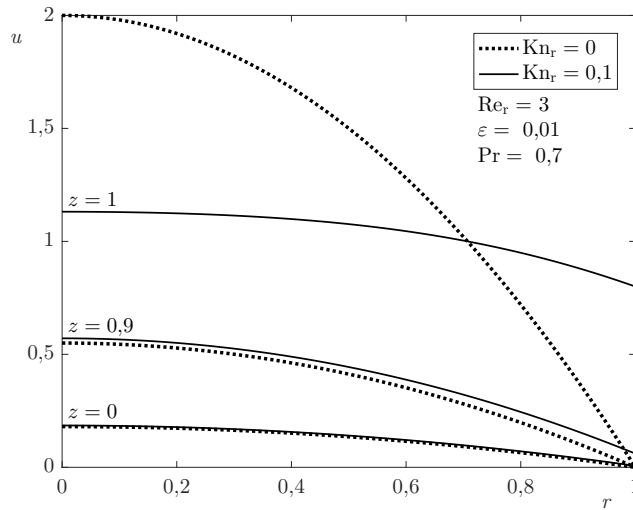
**Слика 5.6:** а) Поље притиска за стишљиво струјање при великим Рејнолдсовим бројевима (5.100); б) Поређење поља притиска (5.100) за случај са и без ефеката другог реда.

Утицај разређености на поље притиска приказан је на слици 5.6. Као што је у досадашњим анализама закључено, разређеност и у случају неизотермског струјања снижава притисак дуж микроцеви у односу на случај када је разређеност занемарена. Осим разређености анализиран је и утицај инерције, конвекције, рада услед ширења и дисипације на расподелу притиска, тј. ефеката другог реда. Поредићи резултате за расподелу притиска у разређеном гасу у случају када су ефекти другог реда узети у обзир и када је њихов утицај занемарен закључује се да ефекти реда величине Кнудсеновог броја и  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$  доводе до пораста притиска дуж микроцеви. Исти закључци о утицају разређености и ефеката другог реда добијени су и за стишљиво струјање у микролежајима константних и једнаких

[96] и константних и различитих температура зидова [97].

Анализа утицаја температурско-вискозног параметра  $a$  на поље притиска (5.100) показала је да је утицај параметра  $a$  на ово решење занемарљив. Иако је неизотермско поље температуре, промена температуре у попречном пресеку је врло мала, тако да не утиче значајно на промене вредности транспортних коефицијената  $k$  и  $\mu$ . Због тога је потпуно оправдано користити једноставније решење добијено из (5.100) за  $a = 0$ :

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8 \left( \frac{1}{p_0} - 1 \right) + 2\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \frac{\ln p_0}{\pi p_0} \left( 2 - \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) \right]. \quad (5.108)$$



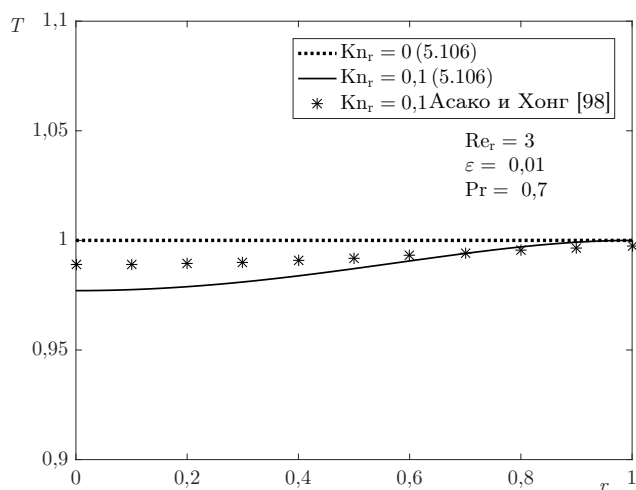
**Слика 5.7:** Профили брзине у различитим пресецима микроцеви за континуум  $\text{Kn}_r = 0$  и струјање са клизањем  $\text{Kn}_r = 0,1$  (5.102).

Профили брзине приказани су у три попречна пресека (слика 5.7). За сваки од ових пресека дат је и профил брзине за струјање без клизања. Укупна брзина на зиду цеви, односно утицај клизања, расте од улаза ка излазу. И код поља брзине температурско-вискозни параметар занемарљиво утиче на поље брзине. Због тога је оправдано користити једноставније решење које се добија из (5.102) за  $a = 0$ :

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{2}{p_0} (1 - r^2) + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{p_0^2} + \frac{p_1'}{16\beta} (r^2 - 1) + \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \frac{16}{\pi p_0^3} \left( \frac{r^6}{9} - \frac{r^4}{2} + r^2 - \frac{11}{18} \right) \right]. \quad (5.109)$$

Профил температуре, при неизотермском нестишљивом струјању за велике Рејнолдсове бројеве, приказан је на слици 5.8. Промена температуре постоји по попречном пресеку,

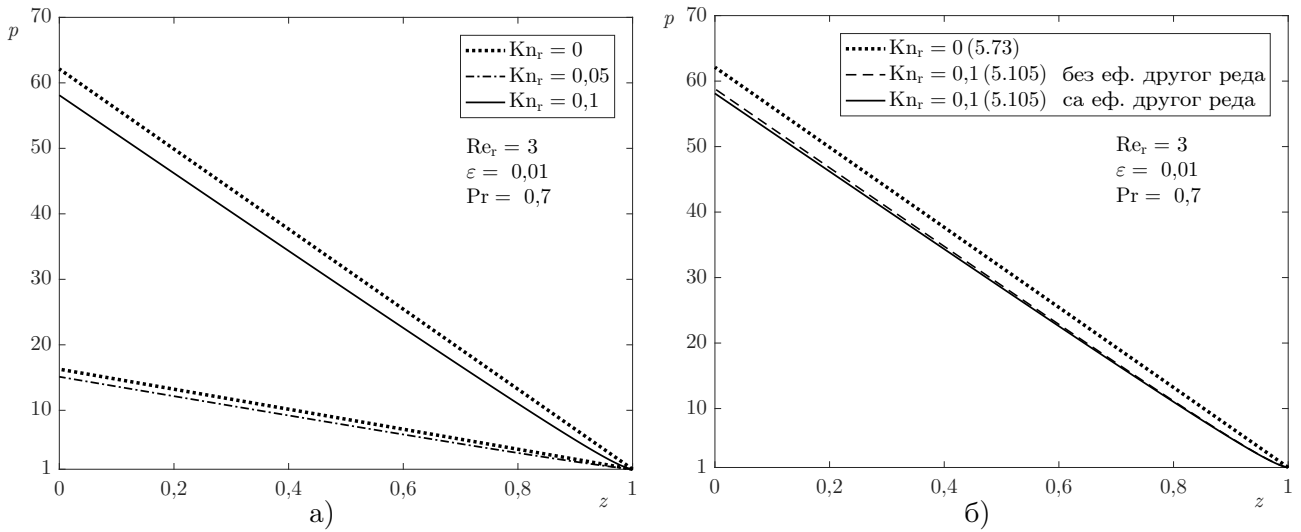
али се температура не мења дуж цеви  $T = T(r)$ . Са циљем потврде добијеног решења резултати су упоређени са резултатима Асака и Хонга [98], који су добијени за разређено нестишљиво потпуно развијено струјање гаса у микроцеви са константним температуром зида. Поређењем решења за расподелу температуре, датог једначином (5.106), са температурским профилем Асака и Хонга [98] постигнуто је добро слагање, са релативном грешком мањом од 1% (слика 5.8).



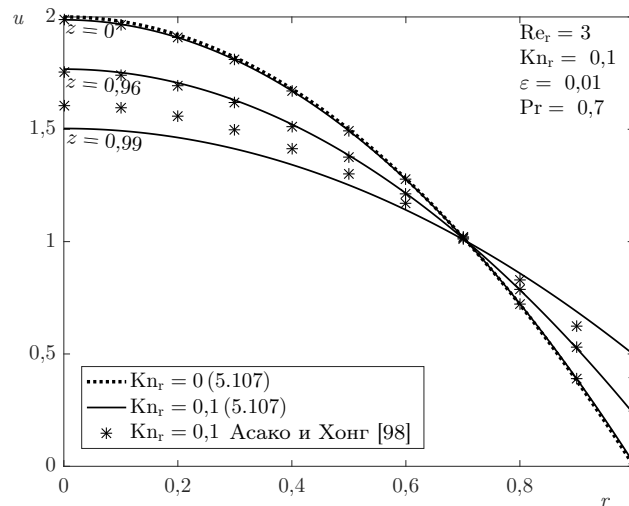
**Слика 5.8:** Поређење профила температуре за нестишљиво струјање при великим Рејнолдсовим бројевима (5.106) са профилем температуре Асака и Хонга [98] у излазном попречном пресеку.

Расподела притиска дуж микроцеви константног попречног пресека за случај занемарене стишљивости приказана је на слици 5.9. За континуум се добија линеарна расподела притиска дуж микроцеви, док разређеност снижава вредност притиска (слика 5.9 а)). Утицај разређености и ефеката другог реда на расподелу притиска, када је стишљивост занемарена, приказан је на слици 5.9 б)). Утицај разређености снижава притисак дуж микроцеви. Ефекти другог реда додатно снижавају притисак дуж микроцеви, што је супротно у односу на ефекте другог реда на расподелу притиска код стишљивог струјања.

Профили брзине за нестишљиво струјање при великим Рејнолдсовим бројевима приказани су у три попречна пресека (слика 5.10). Као код профила температуре, профили брзине су у свим наведеним попречним пресецима поређени са решењима Асака и Хонга [98] и показано је добро слагање. Решење за брзину (5.107) и решење Асака и Хонга [98] показује да се брзина клизања на зиду повећава дуж цеви, док се брзина у оси смањује. Профил брзине (5.107) добијен за континуум, када је  $Kn_r = 0$ , не мења се дуж цеви.



Слика 5.9: Поље притиска: а) нестишљиво струјање при великим Рејнолдсовим бројевима (5.105); б) поређење поља притиска за нестишљиво струјање (5.105) са и без ефеката другог реда.



Слика 5.10: Поређење профила брзина у различитим попречним пресецима микроцеви за нестишљиво струјање гаса Асака и Хонга [98] са профилима брзине (5.107).

Анализа утицаја вискозно-температурског параметра  $a$  на поље притиска код струјања са клизањем, када се стишљивост занемарује, показује да је утицај овог параметра занемарљив. Због тога је оправдано користи решење (5.105) при коме је  $a = 0$ :

$$p = p_0 + Kn_r p_1 = p_0 - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 8Kn_r \ln p_0. \quad (5.110)$$



Исти закључак је и са профилом брзине (5.107) који за  $a = 0$  даје:

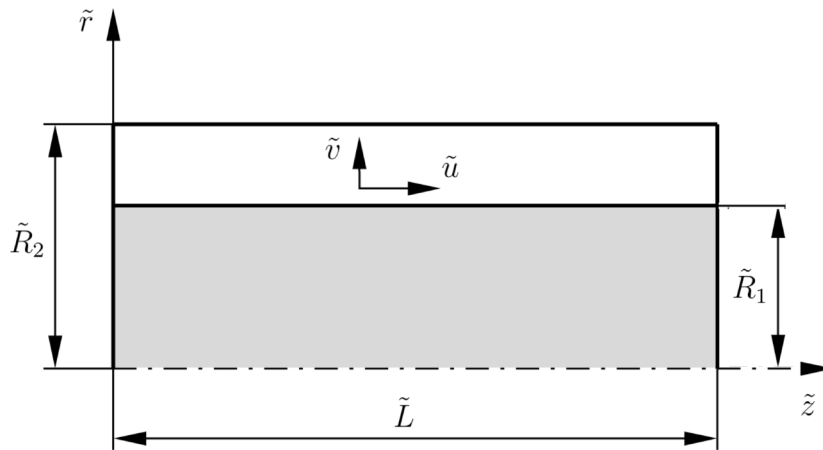
$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = 2(1 - r^2) + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{8}{p_0} + \frac{p'_1}{16\beta} (r^2 - 1) \right]. \quad (5.111)$$

Решења за поље температуре, брзине и притиска за неизотермско струјање гаса кроз микроцев при великим Рејнолдсовим бројевима објављена су у раду [99].

## 6 Изотермско струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека

### 6.1 Опис проблема и модел струјања

Изотермско осносиметрично стационарно стишљиво дозвучно струјање разређеног гаса одвија се у микроцеви прстенастог попречног пресека. Струјање је изазвано разликом притисака између улаза и излаза из цеви. Скица прстенасте микроцеви са ознакама дата је на слици 6.1. Унутрашњи полупречник микроцеви је  $\tilde{R}_1$ , а спољашњи полупречник је  $\tilde{R}_2$ . Оба полупречника су константна дуж микроцеви. Односно,  $\tilde{R}_{1i} = \tilde{R}_{1e} = \tilde{R}_1$ , и  $\tilde{R}_{2i} = \tilde{R}_{2e} = \tilde{R}_2$ , где је „ $i$ ” ознака за величине у улазном, а „ $e$ ” за величине у излазном попречном пресеку.



Слика 6.1: Геометрија прстенасте микроцеви.

### 6.2 Систем једначина у бездимензијском облику

Систем једначина при изотермском струјању састављен је од једначине континуитета, пројекција једначине количине кретања на подужни  $z$  и попречни  $r$  правац и једначине стања идеалног гаса (3.16)-(3.18), (3.20) заједно са одговарајућим граничним условима.

### 6.2.1 Дефинисање референтних величина и референтних бездимензијских бројева

Као и у досадашњим поглављима излазни пресек биће изабран за референтни. На тај начин је обезбеђено да вредности Маховог и Кнудсеновог броја у комплетном струјном пољу буду мање од њихове вредности на излазу. Тако се осигурава да не дође до загушења и остаје се у области дозвучног струјања и струјања са клизањем. Као и у претходним поглављима, вредности свих величина у референтном попречном пресеку носе индекс „ $r$ ”.

Бездимензијски облик одговарајућих величина је представљен односом разматране величине у посматраној тачки и вредности величине у референтном попречном пресеку:

$$u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_r}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{u}_r}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_r}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_r}, \quad \mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_r}, \quad r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{R}_r}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{\tilde{L}}. \quad (6.1)$$

Референтна брзина је средња подужна брзина у референтном (излазном) попречном пресеку:

$$\tilde{u}_r = \frac{2}{\tilde{R}_2^2 - \tilde{R}_1^2} \int_{\tilde{R}_1}^{\tilde{R}_2} \tilde{u}_e \tilde{r} d\tilde{r}. \quad (6.2)$$

Притисак у референтном попречном пресеку је  $\tilde{p}_r$ . Густина у референтном попречном пресеку ( $\tilde{\rho}_r$ ) добија се из једначине стања идеалног гаса (3.20). Референтни полупречник микроцеви дат је као разлика спољашњег и унутрашњег полупречника  $\tilde{R}_r = \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1$ . Следи да је унутрашњи бездимензијски полупречник  $R_1 = \tilde{R}_1 / (\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)$ , а спољашњи бездимензијски полупречник је  $R_2 = \tilde{R}_2 / (\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)$ . Дужина микроцеви је  $\tilde{L}$ . Како се разматра изотермски случај бездимензијска вискозност је константна  $\mu = \tilde{\mu} / \tilde{\mu}_r = 1$ , где је са  $\tilde{\mu}_r$  означена референтна динамичка вискозност.

Помоћу величина у референтном попречном пресеку дефинишу се референтни бездимензијски бројеви - Махов, Кнудсенов и Рејнолдсов број:

$$\text{Ma}_r = \frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{\kappa \tilde{p}_r / \tilde{\rho}_r}}, \quad (6.3)$$

$$\text{Kn}_r = \frac{\tilde{\lambda}_r}{2(\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)}, \quad (6.4)$$

$$\text{Re}_r = \frac{2\tilde{\rho}_r\tilde{u}_r(\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)}{\tilde{\mu}_r}. \quad (6.5)$$

И у овом случају на основу дефиниције референтног Маховог (6.3), Кнудсеновог (6.4) и Рејнолдсовог (6.5) броја може се извести релација:

$$\text{Kn}_r = \sqrt{\frac{\pi\kappa}{2}} \frac{\text{Ma}_r}{\text{Re}_r}. \quad (6.6)$$

### 6.2.2 Претпоставке на којима се заснива модел

Као и у претходним случајевима и овде се уводи неколико претпоставки.

Мали параметар  $\varepsilon$  дефинише се на следећи начин:

$$\varepsilon = \frac{2(\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)}{\tilde{L}}, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (6.7)$$

Као и до сада, попречна компонента брзине претпоставља се као:

$$\tilde{v} = \varepsilon\tilde{V}, \quad \tilde{V} = \mathcal{O}(1). \quad (6.8)$$

Неопходно је да струјање задовољава услове дозвучног струјања и струјања са клизањем. Овај услов постиже се увођењем претпоставке о малим вредностима референтног Маховог и Кнудсеновог броја. У складу са тим важе следеће претпоставке:

$$\kappa\text{Ma}_r^2 = \gamma\varepsilon^m, \quad \gamma = \mathcal{O}(1), \quad (6.9)$$

$$\text{Kn}_r = \eta\varepsilon^n, \quad \eta = \mathcal{O}(1), \quad (6.10)$$

где параметри  $m$  и  $n$  имају позитивне вредности.

Претпоставља се и да је однос квадрата Маховог броја и Рејнолдсовог броја, такође, реда величине малог параметра  $\varepsilon$ :

$$\frac{\kappa\text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} = \beta\varepsilon, \quad \beta = \mathcal{O}(1). \quad (6.11)$$

На основу претпоставки о реду величине квадрата Маховог броја (6.9) и реду величине односа квадрата Маховог и Рејнолдсовог броја (6.11) следи Рејнолдсов број:

$$\text{Re}_r = \gamma \varepsilon^{m-1} / \beta, \quad (6.12)$$

где је  $m > 1$  у случају струјања при малим Рејнолдсовим бројевима и  $m \leq 1$  у случају струјања при великим Рејнолдсовим бројевима.

Веза између параметара  $\gamma$ ,  $\eta$  и  $\beta$  добија се на исти начин као и у претходним поглављима:

$$\gamma = \frac{\beta^2 \pi}{2\eta^2}. \quad (6.13)$$

Такође на основу претпоставки (6.9)-(6.11) и тачне релације између референтних бројева (6.6) добија се веза између параметара  $m$  и  $n$ :

$$2n + m = 2, \quad (6.14)$$

Како параметри  $m$  и  $n$  морају бити позитивни њихов домен је  $n \in (0,1)$ ,  $m \in (0,2)$ . Разматрајући и референтни Рејнолдсов број према вредности параметра  $m$  (6.12) долази се до закључка [84] да, за мале Рејнолдсове бројеве ( $\text{Re}_r < 1$ ), параметри  $m$  и  $n$  имају вредности:

$$1 < m < 2, \quad 0 < n < 1/2. \quad (6.15)$$

За велике вредности референтног Рејнолдсовог броја ( $\text{Re}_r \geq 1$ ) вредности параметра су у опсегу:

$$0 < m \leq 1, \quad 1/2 \leq n < 1. \quad (6.16)$$

### 6.2.3 Основне једначине и гранични услови у бездимензијском облику

Полазећи од димензијских једначина (3.16)-(3.18), узимајући у обзир референтне величине и бездимензијске бројеве, добија се једначина континуитета и пројекције једначине

количине кретања у  $z$  и  $r$  правцу у бездимензијском облику:

$$\frac{1}{r(\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)} \frac{\partial(r\rho v)}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{L}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \kappa \text{Ma}_r^2 \rho \left( \frac{\tilde{L}}{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1} v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2\kappa \text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} \frac{\tilde{L}}{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) + \\ &+ \frac{2\kappa \text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{4}{3} \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{\tilde{L}} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \kappa \text{Ma}_r^2 \rho \left( v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{\tilde{L}} u \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{4\kappa \text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \frac{v}{r^2} + \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{6\tilde{L}} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{(\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)^2}{2\tilde{L}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Узимајући у обзир поменуте претпоставке претходни систем бездимензијских једначина се своди на:

$$\frac{\varepsilon}{r(\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)} \frac{\partial(r\rho V)}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{L}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \gamma \varepsilon^m \rho \left( 2V \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ &+ 2\beta \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \gamma \varepsilon^{m+2} \rho \left( V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2} u \frac{\partial V}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + 4\beta \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} \right) \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \frac{V}{r^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\varepsilon^2}{8} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Одбацивањем малих чланова реда величине  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  и мањих добијају се следеће једначине:

$$\frac{2}{r} \frac{\partial(r\rho V)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (6.23)$$

$$\gamma \varepsilon^m \rho \left( 2V \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (6.25)$$

Пројекција једначине количине кретања на попречни правац (6.25) показује да притисак не зависи од попречне координате  $r$ . Како је струјање осносиметрично, тј. притисак не зависи ни од координате  $\theta$ , следи да је притисак функција само подужне координате  $z$ :  $\partial p / \partial z = dp / dz$ .

Једначина стања идеалног гаса у бездимензијском облику је:

$$p = \rho. \quad (6.26)$$

Максвелов гранични услов за поље брзине (3.23) у бездимензијском облику за унутрашњи и спољашњи зид цеви своди се на следећи облик:

$$u|_{r=R_1} = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2Kn_r}{p} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (6.27)$$

$$u|_{r=R_2} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2Kn_r}{p} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_2}. \quad (6.28)$$

Укључујући и претпоставку о Кнудсеновом броју (6.10) добија се коначан облик Максвеловог граничног услова за унутрашњи и спољашњи зид:

$$u|_{r=R_1} = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2\eta\varepsilon^n}{p} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (6.29)$$

$$u|_{r=R_2} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2\eta\varepsilon^n}{p} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_2}. \quad (6.30)$$

### 6.3 Решавање проблема изотермског струјања у микроцевима прстенастог попречног пресека

У овом поглављу приказано је решење за струјање разређеног гаса кроз прстенасту микроцев, како за струјање при малим Рејнолдсовим бројевима, тако и за струјање при великим Рејнолдсовим бројевима. За решавање проблема изотермског струјања кроз микроцеви прстенастог попречног пресека примењен је, као и у претходним поглављима, пертурбациони приступ. Одређене су прве две апроксимације за поље брзине и притиска. Као и у случају изотермског струјања у цевима прва апроксимација представља решење за континуум, док друга апроксимација при малим Рејнолдсовим бројевима узима у обзир

разређеност, при великим Рејнолдсовим бројевима друга апроксимација узима у обзир и ефекат разређености и ефекат инерције.

### 6.3.1 Струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека при малим Рејнолдсовим бројевима

У овом случају, као и у поглављу где је разматрано струјање разређеног гаса кроз микроцев при малим Рејнолдсовим бројевима, изабране су вредности параметара  $n = 1/4$  и  $m = 3/2$ . За ове вредности параметара разређеност долази до изражаја у другој апроксимацији, док се инерција не јавља. Подужна (6.31) и попречна компонента брзине (6.32), притисак (6.33) у облику пертурбационог реда са две апроксимације, где је изабран развој по референтном Кнудсеновом броју, су:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (6.31)$$

$$V = V_0 + \text{Kn}_r V_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (6.32)$$

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2). \quad (6.33)$$

Увођењем развијених величина у бездимензијски систем једначина и граничних услова издвајају се чланови одговарајућег степена малог параметра  $\varepsilon$  и добија по један бездимензијски систем једначина за сваку апроксимацију:

$$\varepsilon^0 : \frac{dp_0}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right), \quad (6.34)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} 2p_0 u_0 r dr = \dot{m}_0, \quad (6.35)$$

$$u_0|_{r=R_1} = 0, \quad (6.36)$$

$$u_0|_{r=R_2} = 0, \quad (6.37)$$

$$p_0|_{z=1} = 1, \quad (6.38)$$

$$\varepsilon^n : \frac{dp_1}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right), \quad (6.39)$$



$$\int_{R_1}^{R_2} 2(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) r dr = \dot{m}_1, \quad (6.40)$$

$$u_1|_{r=R_1} = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (6.41)$$

$$u_1|_{r=R_2} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=R_2}, \quad (6.42)$$

$$p_1|_{z=1} = 0. \quad (6.43)$$

Системи једначина решавају се sukcesивно. Односно, после добијања решења за прву апроксимацију из система једначина за прву апроксимацију, прелази се на решавање система једначина које одговарају другој апроксимацији. Решавањем једначине количине кретања за  $z$  правац (6.34), са граничним условима за унутрашњи (6.36) и спољашњи зид (6.37) прстенасте микроцеви за прву апроксимацију, добија се прва апроксимација брзине. Диференцијална једначина за поље притиска добија се из интегралног облика једначине континуитета (6.35). Сматра се да је познат масени проток, као и да је једнак првој апроксимацији ( $\dot{m}_0 = R_1 + R_2$ ,  $\dot{m}_1 = 0$ ).

Аналогно се решава систем једначина за другу апроксимацију. Из једначине количине кретања (6.39), користећи граничне услове за унутрашњи (6.41) и спољашњи цилиндар прстенасте микроцеви (6.42) следи решење за другу апроксимацију брзине. Поље брзине за режим струјања при малим Рејнолдсовим бројевима је:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{p'_0}{\beta} C_1(r) + \frac{\text{Kn}_r}{\beta} \left[ p'_1 C_1(r) + \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p'_0}{p_0} C_2(r) \right], \quad (6.44)$$

где су  $C_1(r)$  и  $C_2(r)$  функције попречне координате  $r$ :

$$C_1(r) = \frac{1}{16 \ln \frac{R_2}{R_1}} \left( (r^2 - R_1^2) \ln \frac{R_2}{R_1} + C_1 \ln \frac{r}{R_1} \right), \quad (6.45)$$

$$C_2(r) = \frac{R_1}{4} + \frac{R_1 + R_2}{8 R_1 R_2 \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^2} \left( C_1 \ln \frac{R_1}{r} + R_2 \left( R_1 - R_2 - 2 R_1 \ln \frac{r}{R_1} \right) \ln \frac{R_2}{R_1} \right), \quad (6.46)$$

а  $C_1$  је:

$$C_1 = R_1^2 - R_2^2. \quad (6.47)$$

Како притисак зависи само од координате  $z$ , са  $'$  је означен први извод притиска по координати  $z$ . Други извод по координати  $z$  носи ознаку  $''$ .

Једначине за прву и другу апроксимацију притиска следе из интегралних облика једначине континуитета за прву (6.35) и другу (6.40) апроксимацију:

- прва апроксимација:

$$p_0 p_0' = 32\beta C_2, \quad (6.48)$$

- друга апроксимација:

$$(p_0 p_1)' = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} p_0' C_2 C_3, \quad (6.49)$$

са константама  $C_2$  и  $C_3$  датим изразима:

$$C_2 = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{(R_1 - R_2) \left( C_1 + (R_1^2 + R_2^2) \ln \frac{R_2}{R_1} \right)}, \quad (6.50)$$

$$C_3 = \frac{2 \left( C_1^2 + 4R_1 R_2 \left( C_1 + (R_1^2 - R_1 R_2 + R_2^2) \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \ln \frac{R_2}{R_1} \right)}{R_1 R_2 \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^2}, \quad (6.51)$$

и константом  $C_1$  датом са (6.47).

Добијене диференцијалне једначине за поље притиска (6.48), (6.49) уз одговарајуће услове за притисак на излазу из цеви (6.38), (6.43) решавају се аналитички, једна за другом. На тај начин добијен је израз за поље притиска при изотермском струјању разређеног гаса кроз микроцев прстенастог попречног пресека за случај малих Рејнолдсових бројева:

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left( 1 - \frac{1}{p_0} \right) C_2 C_3, \quad (6.52)$$

где је прва апроксимација притиска:

$$p_0 = \sqrt{1 + 64\beta(z-1)C_2}. \quad (6.53)$$

Константе  $C_2$  и  $C_3$  дате су изразима (6.50) и (6.51).

### 6.3.2 Струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека при великим Рејнолдсовим бројевима

Подужна и попречна компонента брзине и притисак са по две апроксимације, представљени су изразима (6.31), (6.32) и (6.33), редом. Са циљем да се у другој апроксимацији појаве сви чланови система једначина (6.23)-(6.26), (6.29), (6.30), потребно је да параметри  $m$  и  $n$  буду једнаки. У складу са међусобном везом параметара (6.14) и опсегом вредности за струјања при великим Рејнолдсовим бројевима (6.16), одабрано је  $m = n = 2/3$ . Величине у облику пертурбационих редова (6.31)-(6.33), заједно са одабраним вредностима за  $m$  и  $n$ , укључују се у систем једначина (6.23)-(6.26), (6.29), (6.30). Издвајањем чланова одговарајућег степена параметра  $\varepsilon$  добијају се системи једначина:

$$\varepsilon^0 : \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_0 V_0) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 u_0) = 0, \quad (6.54)$$

$$\frac{dp_0}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right), \quad (6.55)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} 2\rho_0 u_0 r \, dr = \dot{m}_0, \quad (6.56)$$

$$u_0|_{r=R_1} = 0, \quad (6.57)$$

$$u_0|_{r=R_2} = 0, \quad (6.58)$$

$$p_0|_{z=1} = 1, \quad (6.59)$$

$$\varepsilon^n : \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_0 V_1 + r \rho_1 V_0) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) = 0, \quad (6.60)$$

$$\frac{dp_1}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) - \frac{\gamma}{\eta} \rho_0 \left( 2V_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right), \quad (6.61)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} 2(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) r \, dr = \dot{m}_1, \quad (6.62)$$

$$u_1|_{r=R_1} = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (6.63)$$

$$u_1|_{r=R_2} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=R_2}, \quad (6.64)$$

$$p_1|_{z=1} = 0. \quad (6.65)$$

Систем једначина за прву апроксимацију (6.55)-(6.59) потпуно је исти као систем једначина за прву апроксимацију за режим струјања при малим Рејнолдсовим бројевима (6.34)-(6.38). Једнакост ових система једначина проистиче из облика пертурбационог реда, где на прву апроксимацију не утиче избор вредности параметара  $m$  и  $n$ . Следи да су и решења свих величина у првој апроксимацији за режим струјања при малим и великим Рејнолдсовим бројевима једнака.

За добијање друге апроксимације при великим Рејнолдсовим бројевима, у односу за другу апроксимацију при малим Рејнолдсовим бројевима, неопходно је одредити попречну компоненту брзине  $V_0$ . Из диференцијалног облика једначине континуитета (6.54) уз услове  $V_0|_{r=R_1} = 0$  и  $V_0|_{r=R_2} = 0$  је:

$$V_0 = \frac{r}{128\beta \ln \frac{R_2}{R_1}} \left( \frac{p_0'}{p_0} + p_0'' \right) \left[ (2R_1^2 - r^2) \ln \frac{R_2}{R_1} + C_1 \left( 2 \ln \frac{r}{R_1} - 1 \right) \right]. \quad (6.66)$$

Друга апроксимација за подужну брзину добија се из једначине количине кретања за подужни правац (6.61) уз граничне услове за брзину на унутрашњем (6.63) и спољашњем зиду цеви (6.64). Заједно са решењем за прву апроксимацију добија се поље подужне брзине за изотермско струјање разређеног гаса кроз прстенасту микроцев при великим Рејнолдсовим бројевима:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{p_0'}{\beta} C_1(r) + \frac{\text{Kn}_r}{\beta} \left[ p_1' C_1(r) + \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p_0'}{p_0} C_2(r) + \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2}{73728\pi\beta^2 \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^3} \rho_0 p_0' p_0'' C_3(r) \right], \quad (6.67)$$

где су  $C_1(r)$  и  $C_2(r)$  дате са (6.45) и (6.46), а  $C_3(r)$  је функција попречне координате  $r$ :

$$C_3(r) = 54C_1^3 \ln \frac{r}{R_1} + \left[ 9C_1^2 \left( 6(r^2 - R_1^2) + \left( 7(R_1^2 + R_2^2) + 4r^2 \left( \ln \frac{r}{R_1} - 2 \right) \right) \ln \frac{r}{R_1} \right) + (C_1(-9(r^2(r^2 - 8R_1^2) + 7R_1^4) + 2(9r^2(r^2 - 4R_1^2) + 11(R_1^2(R_1^2 + R_2^2) +$$

$$+R_2^4)) \ln \frac{r}{R_1}) + 2 (r^2 - R_1^2) (r^2 (2r^2 - 7R_1^2) + 11R_1^4) \ln \frac{R_2}{R_1}) \ln \frac{R_2}{R_1} \Big] \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (6.68)$$

Из друге апроксимације једначине континуитета у интегралном облику (6.62) добија се диференцијална једначина за другу апроксимацију притиска:

$$(p_0 p_1)' = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} p_0' C_2 C_3 + \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 C_2^3 p_0'}{3\pi (R_1 + R_2) \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^3} C_4. \quad (6.69)$$

Једначина (6.69) може да се реши аналитички уз гранични услов за  $p_1$  на излазу из цеви  $p_1|_{z=1} = 0$ . Сада је коначно поље притиска код изотермског струјања у микроцеви прстенастог попречног пресека при великим Рејнолдсовим бројевима:

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left(1 - \frac{1}{p_0}\right) C_2 C_3 + \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 C_2^3 \ln p_0}{3\pi p_0 (R_1 + R_2) \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^3} C_4 \right], \quad (6.70)$$

где је константа  $C_4$ :

$$C_4 = \left( 36C_1^4 + 63C_1^3 (R_1^2 + R_2^2) \ln \frac{R_2}{R_1} + 44 (R_1^8 - R_1^6 R_2^2 - R_1^2 R_2^6 + R_2^8) \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \right. \\ \left. + 12 (R_1^8 - R_2^8) \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^3 \right) 2 \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (6.71)$$

Уврштавајући добијено поље притиска у израз за попречну компоненту брзине (6.66) добија се да је  $V_0 = 0$ .

## 6.4 Анализа резултата

У оквиру анализе представљени су резултати за стационарно осносиметрично стишљиво дозвучно струјање гаса са клизањем у прстенастој микроцеви. Струјање се одвија под изотермским условима и изазвано је разликом притисака у улазном и излазном пресеку микроцеви. Анализирани су случајеви струјања разређеног гаса за режим малих и великих Рејнолдсових бројева у прстенастој микроцеви.

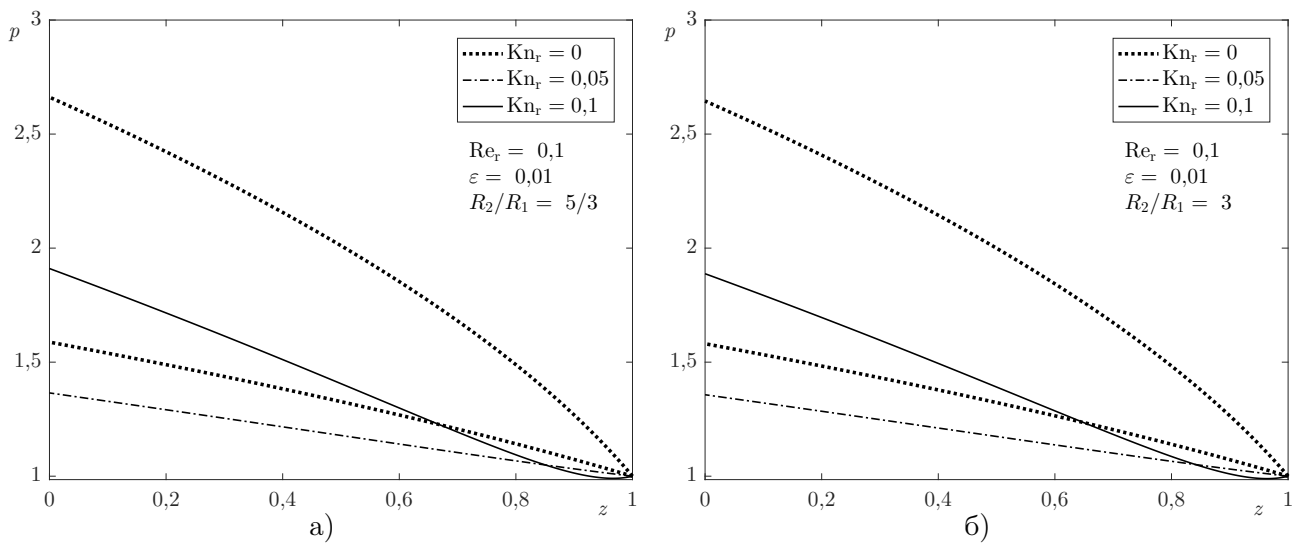
Димензијском анализом је закључено да је за приказивање резултата код прстенасте

цеви потребно задати следеће параметре: унутрашњи полупречник  $R_1$ , спољашњи  $R_2$ , мали параметар  $\varepsilon$ , референтни Кнудсенов  $\text{Kn}_r$ , Рејнолдсов број  $\text{Re}_r$ , као и параметре  $m$  и  $n$ .

Сви резултати су приказани за услов дифузне рефлексије  $\sigma_v = 1$  (на оба зида) и за специфични топлотни капацитет за једноатомски гас  $\kappa = 5/3$ .

### 6.4.1 Анализа резултата за мале Рејнолдсове бројеве

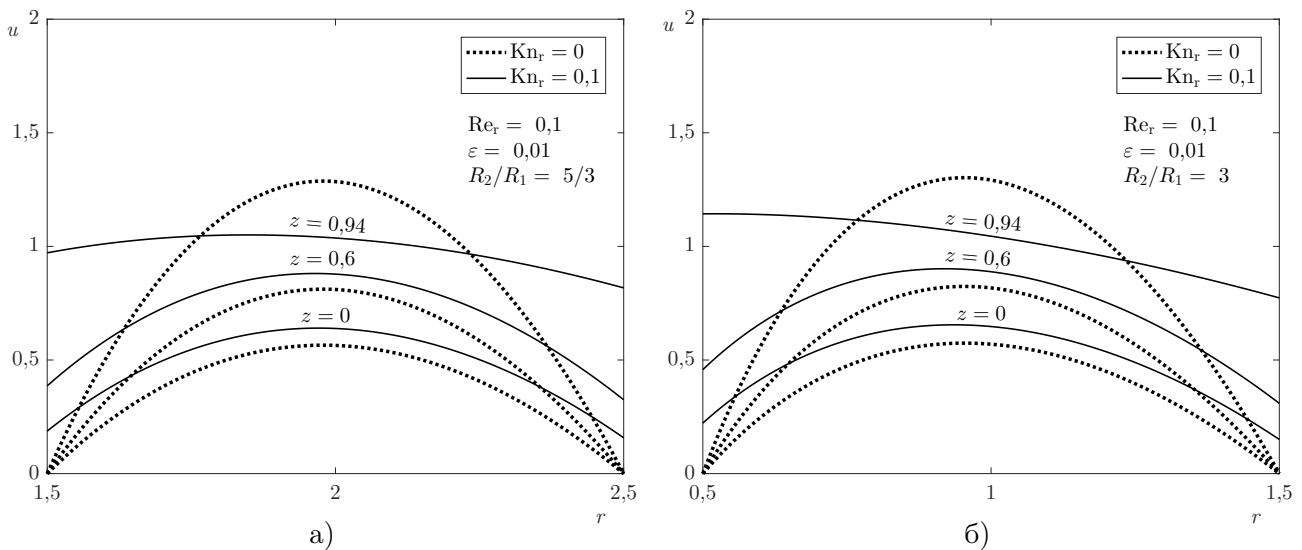
Резултати за случај струјања при малим Рејнолдсовим бројевима приказани су за вредност малог параметра  $\varepsilon = 0,01$ . За вредност референтног Рејнолдсовог броја изабрано је  $\text{Re}_r = 0,1$ . Резултати су приказани за различите вредности референтног Кнудсеновог броја, које обухватају случајеве са и без утицаја клизања, као и за две вредности односа спољашњег и унутрашњег полупречника,  $\tilde{R}_2/\tilde{R}_1 = 5/3$  и  $\tilde{R}_2/\tilde{R}_1 = 3$ . Односи димензијског спољашњег и унутрашњег полупречника једнаки су њиховим бездимензијским односима. За сваки бездимензијски однос спољашњег и унутрашњег полупречника следи тачно одређена вредност бездимензијског спољашњег и унутрашњег полупречника.



**Слика 6.2:** Расподела притиска дуж прстенасте микроцеви за континуум ( $\text{Kn}_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $\text{Kn}_r = 0,05$ ,  $\text{Kn}_r = 0,1$ ) код стишљивог струјања (6.52): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

У случају струјања разређеног гаса кроз прстенасте цеви при малим Рејнолдсовим бројевима показује се да разређеност доводи до мање вредности притиска за исти масени проток (слика 6.2), као и у случају струјања разређеног кроз микроцеви. Анализиран је и утицај односа спољашњег и унутрашњег полупречника цеви на расподелу притиска. Показује се да повећање односа  $R_2/R_1$  доводи до пада притиска дуж цеви, како у случају

континуума тако и у случају разређеног струјања. Утицај односа  $R_2/R_1$  посебно долази до изражаја при већим вредностима Кнудсеновог броја.



**Слика 6.3:** Профили брзине у различитим пресецима прстенасте микроцеви за континуум ( $\text{Kn}_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $\text{Kn}_r = 0,1$ ) (6.44): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

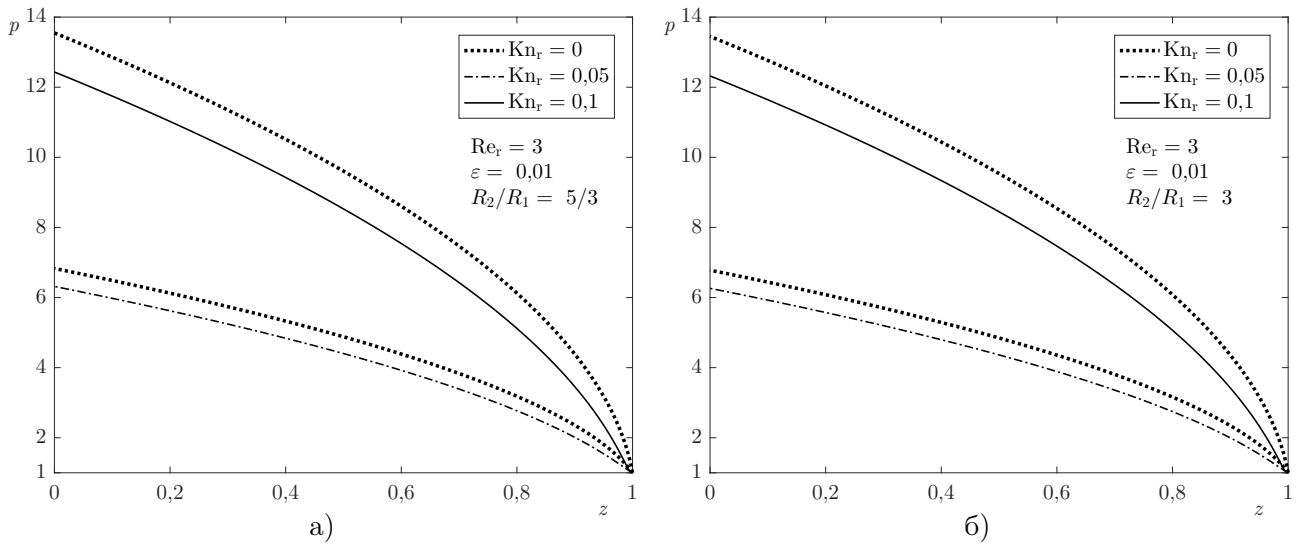
Профили брзине дати су у три попречна пресека цеви (слика 6.3). У сваком пресеку дати су резултати за континуум ( $\text{Kn}_r = 0$ ) и за поље брзине када је разређеност узета у обзир ( $\text{Kn}_r = 0,1$ ). Брзина расте од улаза ка излазу из цеви. Брзина клизања на зиду цеви такође расте од улаза ка излазу из цеви. Профил брзине није симетричан и брзина клизања на унутрашњем зиду већа је од брзине клизања на спољашњем зиду. Ова разлика је све већа од улаза ка излазу из цеви. Повећање односа  $R_2/R_1$ , до кога се долази повећањем спољашњег полупречника, доводи до веће разлике између брзина на спољашњем и унутрашњем зиду (слика 6.3 б)). Односно, брзина на унутрашњем зиду расте, а на спољашњем опада.

#### 6.4.2 Анализа резултата за велике Рејнолдсове бројеве

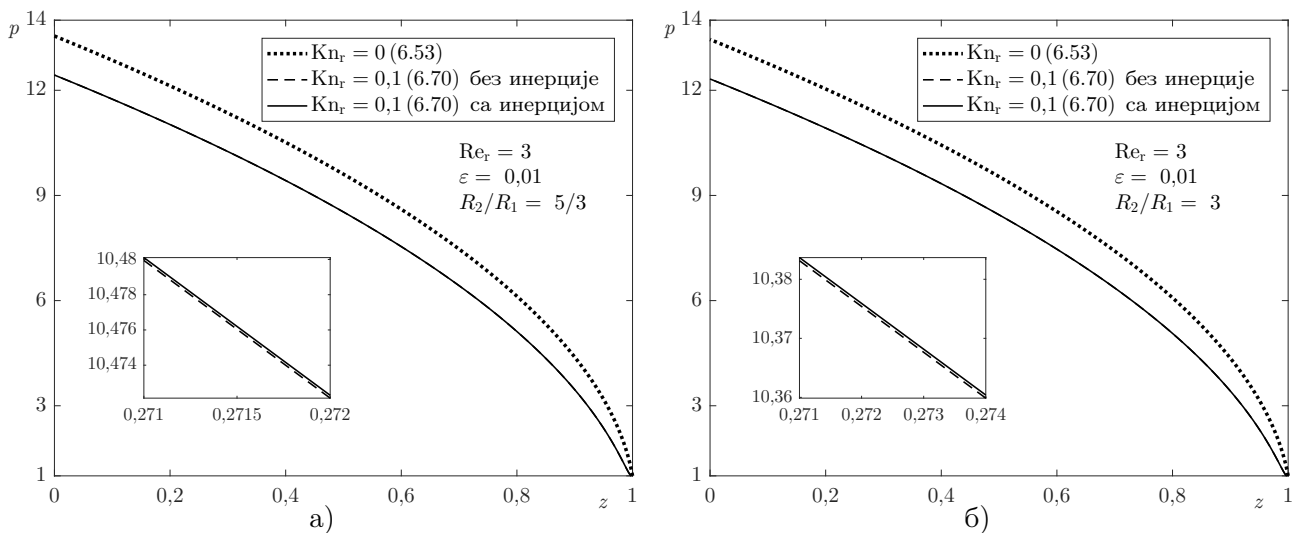
Резултати за случај струјања при великим Рејнолдсовим бројевима приказани су за Рејнолдсов број  $\text{Re}_r = 3$ , малог параметра  $\varepsilon = 0,01$  и за случај континуума ( $\text{Kn}_r = 0$ ) и случај када се разређеност узима у обзир ( $\text{Kn}_r = 0,05$ ,  $\text{Kn}_r = 0,1$ ). Анализиран је утицај различитих односа спољашњег и унутрашњег полупречника, па су дати резултати за два случаја: када је  $R_2/R_1 = 5/3$  и за случај  $R_2/R_1 = 3$ .

Као и при малим Рејнолдсовим бројевима, и у случају великих Рејнолдсових бројева

показује се да притисак има мање вредности са порастом разређености (слика 6.4). Утицај односа  $R_2/R_1$  израженији је за веће вредности Кнудсеновог броја. Са порастом односа спољашњег и унутрашњег полупречника снижава се вредност притиска дуж микроцеви, како за континуум, тако и за струјање са клизањем.



**Слика 6.4:** Распореда притиска дуж прстенасте микроцеви за континуум  $Kn_r = 0$  и струјање са клизањем  $Kn_r = 0,1$  код изотермског стишљивог струјања (6.70): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .



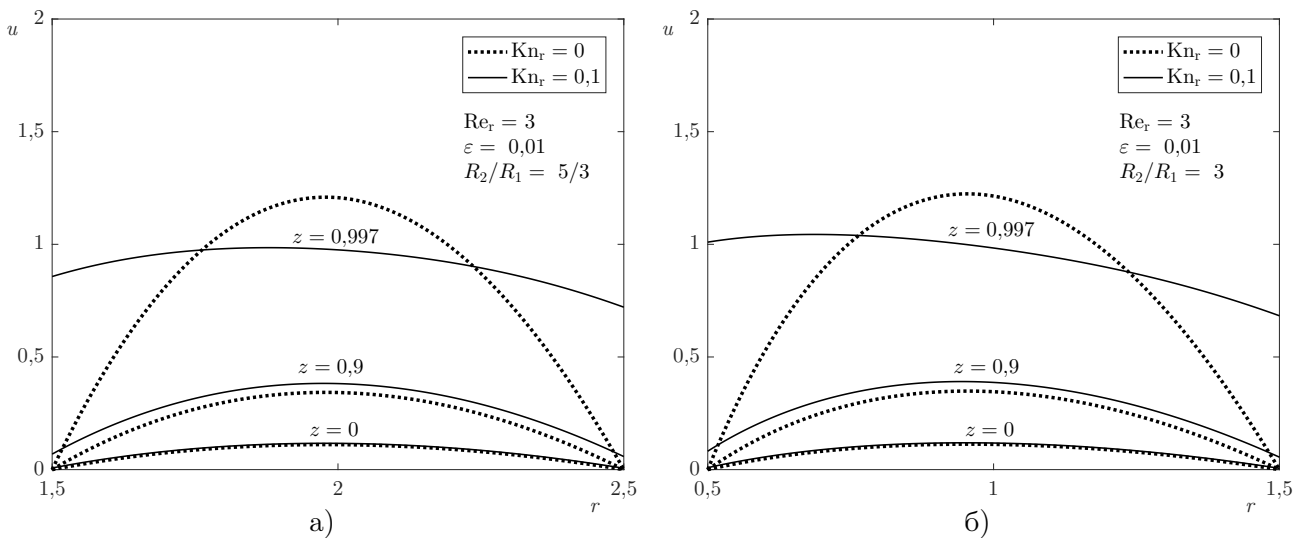
**Слика 6.5:** Распореда притиска дуж микроцеви за континуум  $Kn_r = 0$  (6.53) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,1$ ), без инерције и са инерцијом (6.70): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

Утицај инерције и разређености на расподелу притиска приказан је на слици 6.5. Распореда притиска за случај континуума ( $Kn_r = 0$ ), даје веће вредности притиска дуж микроцеви. Случајеви, који обухватају утицај разређености, приказани су за вредност референтног Кнудсеновог броја  $Kn_r = 0,1$  и то за два случаја: када се инерција узима у



обзир (пуна линија) и када се занемарује (испрекидана линија). Види се да инерција у овим случајевима незнатно повећава вредност притиска. Занемарљиво мали утицај инерције је последица мале вредности Рејнолдсовог броја. Без обзира што се ради о случају са великим Рејнолдсовим бројевима, Рејнолдсов број је релативно мали, па она не долази до изражаја. Као и у досадашњим разматрањима, повећање односа  $R_2/R_1$  доводи до снижавања притиска и за случај континуума и за случај разређеног струјања са и без инерције.

Профили брзине за три попречна пресека приказани су на слици 6.6. Дуж целе цеви уочава се ефекат клизања на зиду, што је последица граничних услова клизања за брзину који долазе до изражаја у другој апроксимацији. И овде се уочава асиметричност профила брзине као и при малим Рејнолдсовим бројевима. Брзина гаса на унутрашњем зиду већа је од брзине на спољашњем зиду цеви. Разлика између брзина гаса на унутрашњем и спољашњем зиду цеви повећава се са повећањем односа спољашњег и унутрашњег полупречника  $R_2/R_1$  (слика 6.6 б)), и ова разлика расте од улаза ка излазу из цеви.



**Слика 6.6:** Профили брзине у различитим пресецима микроцеви за континуум ( $Kn_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,1$ ) (6.67): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

Исто понашање профила брзине према промени односа полупречника  $R_2/R_1$ , као на сликама 6.3 и 6.6, за потпуно развијено стишљиво струјање изазвано градијентом притиска у прстенастој микроцеви са константном и међусобно једнаком температуром гаса и зидова, добили су и Тахери и Страттрап [100]. Наиме, за више вредности односа  $R_2/R_1$  разлика између закривљености унутрашњег и спољашњег зида је велика и профили брзина су асиметрични у односу на подужну осу цеви. Утицај закривљености се смањује када

величина процепа опада (однос  $R_2/R_1$  се смањује). За однос  $R_2/R_1$  ближи јединици добија се профил брзине близак симетричном профилу, односно профилу брзине за струјање између паралелних плоча [101].

# 7 Неизотермско струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека

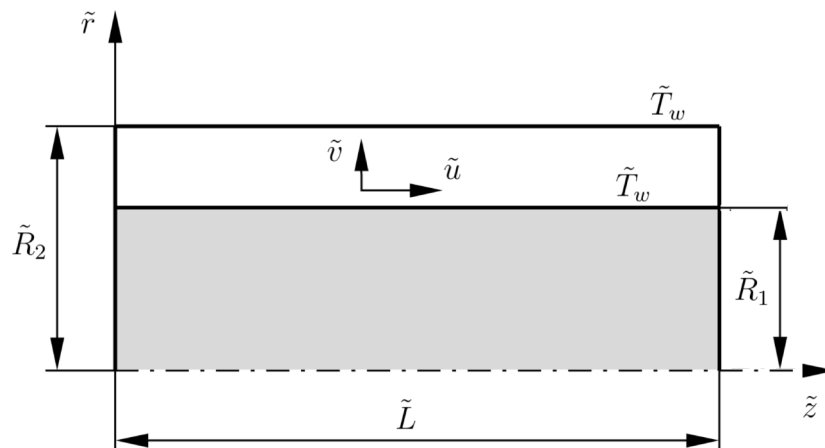
## 7.1 Опис проблема и модел струјања

Неизотермско стационарно дозвучно струјање гаса са клизањем кроз осносиметричну микроцев прстенастог попречног пресека разматра се у овом поглављу. Струјање гаса изазвано је разликом притисака између улаза и излаза из цеви. Најпре се струјање сматра стишљивим, потом је разматран случај занемарене стишљивости.

Прстенаста микроцев, кроз коју се одвија неизотермско струјање гаса, константног је попречног пресека (слика 7.1). Следи да је унутрашњи полупречник исти у свим попречним пресецима  $\tilde{R}_{1i} = \tilde{R}_{1e} = \tilde{R}_1$ , као и спољашњи полупречник  $\tilde{R}_{2i} = \tilde{R}_{2e} = \tilde{R}_2$ . Температуре унутрашњег и спољашњег зида су константне, међусобно једнаке и означене са  $\tilde{T}_w$ .

## 7.2 Систем једначина у бездимензијском облику

У циљу одређивања значаја појединих чланова у систему једначина и граничних услова они се свODE на бездимензијски облик.



Слика 7.1: Геометрија прстенасте микроцеви.

### 7.2.1 Дефинисање референтних величина и референтних бездимензијских бројева

За превођење димензијских једначина у бездимензијски облик, потребно је увести одговарајуће референтне величине. Излазни попречни пресек је изабран са референтни, а све величине које фигуришу у њему су референтне величине. С обзиром на то да вредности Кнудсеновог и Маховог броја расту од улаза ка излазу из цеви, избором излазног попречног пресека за референтни обезбеђује се да ће у целој цеви бити дозвучни режим струјања у условима клизања, ако је у излазном пресеку тај услов задовољен. Бездимензијске величине су:

$$u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_r}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{u}_r}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_r}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_r}, \quad T = \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}_w}, \quad r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{R}_r}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{\tilde{L}},$$

$$\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_r}, \quad k = \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}_r}. \quad (7.1)$$

Референтна брзина осредњена по попречном пресеку је  $\tilde{u}_r$  и већ је представљена изразом (6.2). Притисак у референтном - излазном попречном пресеку означен је са  $\tilde{p}_r$ . Густина у референтном пресеку добија се из једначине стања идеалног гаса, где су све величине представљене својим референтним вредностима  $\tilde{\rho}_r = \tilde{p}_r / (\tilde{R}_g \tilde{T}_w)$ . Дужина цеви је  $\tilde{L}$ . Са изабраним референтним полупречником  $\tilde{R}_r = \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1$ , следи да је унутрашњи бездимензијски полупречник  $R_1 = \tilde{R}_1 / (\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)$ , а спољашњи бездимензијски полупречник је  $R_2 = \tilde{R}_2 / (\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)$ . Референтна топлотна проводљивост  $\tilde{k}_r$  и референтна динамичка вискозност  $\tilde{\mu}_r$  дефинисане су за температуру зида цеви  $\tilde{T}_w$ . Према молекуларном моделу чврстих сфера бездимензијска топлотна проводљивост  $k$  и динамичка вискозност  $\mu$  су:

$$k = \mu = T^a. \quad (7.2)$$

Вискозно-температурски параметар  $a$  у зависности од вредности даје различите моделе:

- \*  $a = 0$  што одговара моделу константне вискозности и топлотне проводљивости ( $\mu = k = 1$ ),
- \*  $a = 0,5$  што одговара моделу еластичних молекула,
- \*  $a = 1$  код модела Максвелових молекула.

Референтни бездимензијски бројеви дефинисани су помоћу референтних величина.

Референтни Махов, Кнудсенов и Рејнолдсов број су:

$$\text{Ma}_r = \frac{\tilde{u}_r}{\sqrt{\kappa \tilde{p}_r / \tilde{\rho}_r}}, \quad (7.3)$$

$$\text{Kn}_r = \frac{\tilde{\lambda}_r}{2 \left( \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 \right)}, \quad (7.4)$$

$$\text{Re}_r = \frac{2 \tilde{\rho}_r \tilde{u}_r \left( \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 \right)}{\tilde{\mu}_r}. \quad (7.5)$$

Прантлов број је исти у целокупном струјном пољу:

$$\text{Pr} = \text{Pr}_r = \tilde{c}_p \frac{\tilde{\mu}_r}{\tilde{k}_r}. \quad (7.6)$$

Као и у претходним поглављима важи веза између референтног Маховог, Рејнолдсовог и Кнудсеновог броја (6.6).

## 7.2.2 Претпоставке на којима се заснива модел

Услови струјања за које су добијена решења дефинисани су следећим претпоставкама.

Референтни пречник цеви много је мањи од дужине цеви, па је могуће увести мали параметар  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{2 \left( \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 \right)}{\tilde{L}}, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (7.7)$$

Претпоставља се да је, због константног попречног пресека прстенасте микрочеви, попречна компонента брзине много мања од подужне. У складу са дефинисаним малим параметром  $\varepsilon$  попречна компонента брзине може се написати у облику:

$$\tilde{v} = \varepsilon \tilde{V}, \quad \tilde{V} = \mathcal{O}(1). \quad (7.8)$$

При дозвучном струјању са клизањем вредности референтног Маховог и референтног Кнудсеновог броја су мале и може се претпоставити:

$$\kappa \text{Ma}_r^2 = \gamma \varepsilon^m, \quad \gamma = \mathcal{O}(1), \quad m > 0, \quad (7.9)$$

$$\text{Kn}_r = \eta \varepsilon^n, \quad \eta = \mathcal{O}(1), \quad n > 0. \quad (7.10)$$

Услов дозвучности дозвољава и претпоставку о реду величине односа квадрата референтног Маховог броја и референтног Рејнолдсовог броја:

$$\frac{\kappa \text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} = \beta \varepsilon, \quad \beta = \mathcal{O}(1). \quad (7.11)$$

Користећи претпоставку о квадрату Маховог броја (7.9) и претпоставку о односу квадрата Маховог и Рејнолдсовог броја (7.11) може се добити израз за референтни Рејнолдсов број:

$$\text{Re}_r = \gamma \varepsilon^{m-1} / \beta, \quad (7.12)$$

где је вредношћу експонента малог параметра  $m - 1$  одређен режим струјања. Струјање при малим Рејнолдсовим бројевима одговара вредностима  $m > 1$ , а струјање при великим Рејнолдсовим бројевима одговара вредностима  $m \leq 1$ .

Као и у свим претходним случајевима струјања разређеног гаса у микроцевима и прстенастим микроцевима и овде важи веза између параметара  $\gamma$ ,  $\eta$  и  $\beta$ :

$$\gamma = \frac{\beta^2 \pi}{2\eta^2}, \quad (7.13)$$

као и између параметара  $m$  и  $n$ :

$$2n + m = 2. \quad (7.14)$$

Заједно са условом  $m > 0$ ,  $n > 0$ , веза између параметара  $m$  и  $n$  (7.14) даје њихове домене  $n \in (0,1)$ ,  $m \in (0,2)$ . Разматрајући израз за референтни Рејнолдсов број (7.12) закључује се да параметри  $m$  и  $n$  [84] за мале Рејнолдсове бројеве ( $\text{Re}_r < 1$ ) могу имати вредности:

$$1 < m < 2, \quad 0 < n < 1/2, \quad (7.15)$$

а за велике Рејнолдсове бројеве ( $\text{Re}_r \geq 1$ ) вредности:

$$0 < m \leq 1, \quad 1/2 \leq n < 1. \quad (7.16)$$

### 7.2.3 Основне једначине и гранични услови у бездимензијском облику

Једначина континуитета (3.16), количине кретања за подужни (3.17) и попречни правац (3.17) и једначина енергије (3.19) у димензијском облику коришћењем претходно дефинисаних размера трансформишу се у бездимензијски облик:

$$\frac{1}{r(\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)} \frac{\partial(r\rho v)}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{L}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \kappa \text{Ma}_r^2 \rho \left( \frac{\tilde{L}}{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1} v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2\kappa \text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} \frac{\tilde{L}}{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) + \\ & + \frac{2\kappa \text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{4\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{3\tilde{L}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right), \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \kappa \text{Ma}_r^2 \rho \left( v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{\tilde{L}} u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{4\kappa \text{Ma}_r^2}{\text{Re}_r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\mu}{2r^2} v - \frac{4\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{3\tilde{L}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{2(\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)}{\tilde{L}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{(\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)^2}{2\tilde{L}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right), \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{PrRe}_r \rho \left( v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{2\tilde{L}} u \frac{\partial T}{\partial z} \right) = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left( \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{\tilde{L}} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \text{PrRe}_r \left( v \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{\tilde{L}} u \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ & + (\kappa - 1) \text{PrMa}_r^2 \mu \left[ 2 \left( \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{\tilde{L}} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{v}{r} \right)^2 \right) + \right. \\ & + \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{\tilde{L}} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + \left( \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{\tilde{L}} \right)^2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \\ & \left. - \frac{2}{3} \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{\tilde{L}} \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1}{\tilde{L}} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (7.20)$$

Користећи претпоставке (7.7)-(7.11) једначине се могу написати као:

$$\frac{\varepsilon}{r(\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1)} \frac{\partial(r\rho V)}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{L}} \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \gamma\varepsilon^m \rho \left( 2V \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ &+ 2\beta\varepsilon^2 \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right), \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \gamma\varepsilon^{m+2} \rho \left( V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2} u \frac{\partial V}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + 4\beta\varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} \right) \right) \\ &- \frac{\mu V}{2r^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{\varepsilon^2}{8} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \gamma\varepsilon^m \frac{\text{Pr}}{2\beta} \rho \left( V \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u}{2} \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\ &+ \gamma\varepsilon^m \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\text{Pr}}{\beta} \left( V \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\ &+ \gamma\varepsilon^m \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \mu \left[ 2 \left( \left( \varepsilon^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{V}{r} \right)^2 \right) + \right. \\ &+ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\varepsilon^4}{4} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \\ &\left. - \frac{2}{3} \left( \varepsilon^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} \right)^2 + \varepsilon^2 \frac{1}{r} \frac{\partial(rV)}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\varepsilon^2}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Одбацавањем величина реда величине  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  и мањих систем се своди на:

$$\frac{2}{r} \frac{\partial(r\rho V)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0, \quad (7.25)$$

$$\gamma\varepsilon^m \rho \left( 2V \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (7.27)$$

$$\text{Pr} \frac{\gamma\varepsilon^m}{4\beta} \rho \left( 2V \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \gamma\varepsilon^m \left( \frac{u}{4\beta} \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right). \quad (7.28)$$

Као и у претходнима поглављима, притисак не зависи од попречне координате  $r$  (7.27).

Узимајући у обзир да је струјање и осносиметрично, закључује се да притисак зависи само од подужне координате  $z$ , тако да  $\partial p / \partial z = dp / dz$ .



Бездимензијском систему потребно је додати и бездимензијски облик једначине стања идеалног гаса:

$$p = \rho T. \quad (7.29)$$

Види се да је добијени систем једначина (7.25)-(7.29) исти као и бездимензијски систем једначина за изотермско струјање разређеног гаса кроз микроцев (5.26)-(5.30). Међутим, у овом случају разлика је у дефиницији размере за попречни правац и дефиницији бездимензијских бројева према томе.

Полазећи од Максвеловог граничног услова за брзину у димензијском облику (3.23) добија се да је Максвелов бездимензијски гранични услов за унутрашњи и спољашњи зид цеви:

$$u|_{r=R_1} = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 2\text{Kn}_r \frac{T^{a+0,5}}{p} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.30)$$

$$u|_{r=R_2} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 2\text{Kn}_r \frac{T^{a+0,5}}{p} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_2}. \quad (7.31)$$

За температурско поље изабран је гранични услов Смолуховског. Полазећи од димензијског облика граничног услова Смолуховског (3.25) добија се бездимензијски облик за унутрашњи и спољашњи зид микроцеви:

$$T|_{r=R_1} = 1 - \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{\text{Kn}_r}{\text{Pr}} \frac{T^{a+0,5}}{p} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.32)$$

$$T|_{r=R_2} = 1 + \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{\text{Kn}_r}{\text{Pr}} \frac{T^{a+0,5}}{p} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2}. \quad (7.33)$$

Уводећи у разматрање и везу између Кнудсеновог броја и малог параметра  $\varepsilon$  (7.10) следи да Максвелов гранични услов за унутрашњи и спољашњи зид гласи:

$$u|_{r=R_1} = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 2\eta\varepsilon^n \frac{T^{a+0,5}}{p} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.34)$$

$$u|_{r=R_2} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 2\eta\varepsilon^n \frac{T^{a+0,5}}{p} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_2}. \quad (7.35)$$

На исти начин гранични услов Смолуховског за унутрашњи и спољашњи зид је:

$$T|_{r=R_1} = 1 - \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{\eta\varepsilon^n}{\text{Pr}} \frac{T^{a+0,5}}{p} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.36)$$

$$T|_{r=R_2} = 1 + \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{\eta \varepsilon^n}{\text{Pr}} \frac{T^{a+0.5}}{p} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2}. \quad (7.37)$$

### 7.3 Решавање проблема неизотермског струјања гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека

За решавање система једначина (7.25)-(7.29) са граничним условима (7.34)-(7.37) примењује се пертурбациони приступ, где су све величине изражене у облику пертурбационог реда и изабран је развој по референтном Кнудсеновом броју. У овом поглављу све величине претпостављене су у облику пертурбационог реда са по две апроксимације:

$$f = f_0 + \text{Kn}_r f_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2). \quad (7.38)$$

Уврштавајући све величине до чијег је решења потребно доћи у облику пертурбационог реда у систем једначина у бездимензијском облику, добијају се два система једначина.

Анализом реда величине сваког члана из добијених система једначина и граничних услова закључује се да сви чланови спадају у једну од три групе: чланови реда величине јединице  $\mathcal{O}(1)$ , реда величине Кнудсеновог броја  $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$  или реда величине квадрата Маховог броја  $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$ . Следи да избор вредности параметара  $m$  и  $n$  утиче на то који чланови ће се појавити у којој апроксимацији система једначина.

#### 7.3.1 Струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека при малим Рејнолдсовим бројевима

Све величине до чијег решења је потребно доћи са по две апроксимације пертурбационог реда, где је изабран развој по референтном Кнудсеновом броју, су:

$$T = T_0 + \text{Kn}_r T_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (7.39)$$

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (7.40)$$

$$V = V_0 + \text{Kn}_r V_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (7.41)$$

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2), \quad (7.42)$$

$$\rho = \rho_0 + \text{Kn}_r \rho_1 + \mathcal{O}(\text{Kn}_r^2). \quad (7.43)$$

За вредности параметара  $m$  и  $n$  за случај малих Рејнолдсових бројева, а према опсегу за вредности  $m$  и  $n$  при малим Рејнолдсовим бројевима (7.15) и њиховој међусобној вези (7.14), изабрано је  $m = 3/2$  и  $n = 1/4$ .

Величине претпостављене у облику пертурбационих редова (7.39)-(7.43), заједно са одабраним вредностима параметара  $m$  и  $n$ , замењују се у систем бездимензијских једначина и граничних услова (7.25)-(7.28), (7.34)-(7.37). Издвајањем чланова реда  $\mathcal{O}(1)$  и реда  $\mathcal{O}(\text{Kn}_r)$  добија се два система једначина и граничних услова:

$$\varepsilon^0 : 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r T_0^a \frac{\partial T_0}{\partial r} \right), \quad (7.44)$$

$$\frac{dp_0}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( T_0^a r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right), \quad (7.45)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} 2\rho_0 u_0 r \, dr = \dot{m}_0, \quad (7.46)$$

$$T_0|_{r=R_1} = 1, \quad (7.47)$$

$$T_0|_{r=R_2} = 1, \quad (7.48)$$

$$u_0|_{r=R_1} = 0, \quad (7.49)$$

$$u_0|_{r=R_2} = 0, \quad (7.50)$$

$$p_0|_{z=1} = 1, \quad (7.51)$$

$$\varepsilon^n : 0 = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( T_0^a \frac{\partial T_1}{\partial r} + a T_1 T_0^{a-1} \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) \right), \quad (7.52)$$

$$\frac{dp_1}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( T_0^a \frac{\partial u_1}{\partial r} + a T_1 T_0^{a-1} \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \right), \quad (7.53)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} 2(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) r \, dr = \dot{m}_1, \quad (7.54)$$

$$T_1|_{r=R_1} = -\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{T_0^{a+0,5}}{p_0} \frac{\partial T_0}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.55)$$

$$T_1|_{r=R_2} = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{T_0^{a+0,5}}{p_0} \frac{\partial T_0}{\partial r} \Big|_{r=R_2}, \quad (7.56)$$

$$u_1|_{r=R_1} = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2T_0^{a+0,5}}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.57)$$

$$u_1|_{r=R_2} = -\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{2T_0^{a+0,5}}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=R_2}, \quad (7.58)$$

$$p_1|_{z=1} = 0. \quad (7.59)$$

Решавање полази од једначине енергије за прву апроксимацију (7.44), која са граничним условима за температуру гаса на унутрашњем (7.47) и спољашњем зиду (7.48) даје решење за температуру у првој апроксимацији. Затим се решава једначина количине кретања за  $z$  правац за прву апроксимацију (7.45) са граничним условима за брзину гаса на унутрашњем (7.49) и спољашњем зиду за прву апроксимацију (7.50). Након температуре и брзине одређује се диференцијална једначина за поље притиска, користећи интегрални облик једначине континуитета (7.46) и претходно добијена решења за температуру и брзину у првој апроксимацији.

Друга апроксимација температуре добија се из једначине енергије за другу апроксимацију (7.52) са граничним условима за унутрашњи (7.55) и спољашњи зид за другу апроксимацију (7.56). Следи да температура у другој апроксимацији износи  $T_1 = 0$ , а са већ добијеним решењем за прву апроксимацију  $T_0 = 1$ , поље температуре је:

$$T = T_0 + \text{Kn}_r T_1 = 1. \quad (7.60)$$

Односно, струјање гаса при малим Рејнолдсовим бројевима при константној температури зидова прстенасте микроцеви своди се на изотермско.

Једначина количине кретања за другу апроксимацију (7.53), заједно са граничним условима за унутрашњи (7.57) и спољашњи зид за другу апроксимацију (7.58), даје решење за другу апроксимацију брзине. Узимајући у обзир и добијено решење за поље температуре (7.60), добија се поље брзине:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{p'_0}{\beta} C_1(r) + \frac{\text{Kn}_r}{\beta} \left[ p'_1 C_1(r) + \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p'_0}{p_0} C_2(r) \right], \quad (7.61)$$

где је  $C_1$  константа дата релацијом (6.47), а  $C_1(r)$  и  $C_2(r)$  су функције попречне координате  $r$  дате изразима (6.45) и (6.46). Решење за брзину при малим Рејнолдсовим бројевима (7.61)

своди се на брзину за изотермско струјање у микроцеви прстенастог попречног пресека (6.44).

Пошто притисак зависи само од подужне координате  $z$  први изводи притиска по подужној координати означени су са  $'$ , док други изводи носе ознаку  $''$ .

Притисак се одређује из интегралног облика једначине континуитета, након добијене температуре и брзине за сваку апроксимацију. Поље притиска разматраће се за два случаја, за стишљиво струјање и за случај када се стишљивост занемарује. Приказана решења за поље температуре (7.60) и брзине (7.61) представљају општа решења која важе за оба случаја.

### Решења за стишљиво струјање гаса

Уврштавањем густине, притиска и температуре, изражених у облику пертурбационих редова (7.43), (7.42), (7.39), у једначину стања идеалног гаса (7.29) добијају се изрази за прву и другу апроксимацију густине. Узимајући у обзир и добијено решење за поље температуре (7.60) густина у првој и другој апроксимацији за случај малих Рејнолдсових бројева је:

$$\rho_0 = p_0, \quad (7.62)$$

$$\rho_1 = p_1. \quad (7.63)$$

Користећи приступ познатог масеног протока, где је целокупан масени проток садржан у првој апроксимацији (поглавље 4.3), из интегралног облика једначине континуитета за обе апроксимације (7.46), (7.54), добијају се диференцијалне једначине за поље притиска. За микроцев прстенастог попречног пресека масени проток у првој апроксимацији је  $\dot{m}_0 = R_1 + R_2$ , а масени проток у другој апроксимацији износи  $\dot{m}_1 = 0$ . Диференцијалне једначине за поље притиска код неизотермског стишљивог струјања разређеног гаса кроз микроцев прстенастог попречног пресека су:

- прва апроксимација:

$$p_0 p_0' = 32\beta C_2, \quad (7.64)$$

- друга апроксимација:

$$(p_0 p_1)' = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} p_0' C_2 C_3, \quad (7.65)$$

са константама  $C_2$  и  $C_3$  датим изразима (6.50) и (6.51) и константом  $C_1$  датом са (6.47).

Произилази да је добијене диференцијалне једначине за прву (7.64) и другу апроксимацију притиска (7.65), заједно са условима за вредности притиска на излазу из цеви (7.51) и (7.59), могуће решити аналитичким путем. Одавде следи израз за целокупно поље притиска за стишљиво неизотермско струјање у микроцеви прстенастог попречног пресека при малим Рејнолдсовим бројевима који, са уврштеним решењем за поље температуре (7.60), гласи:

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left(1 - \frac{1}{p_0}\right) C_2 C_3. \quad (7.66)$$

Решење за прву апроксимацију притиска је:

$$p_0 = \sqrt{1 + 64\beta(z-1)C_2}. \quad (7.67)$$

Константе  $C_2$  и  $C_3$  дате су са (6.50) и (6.51).

Према општем изразу за брзину (7.61) и изразу за притисак у првој (7.66) и другој апроксимацији (7.67) брзина за стишљиво неизотермско струјање кроз прстенасту микроцев при малим Рејнолдсовим бројевима је:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{p_0^2 - 1}{2p_0\beta(z-1)} C_1(r) + \text{Kn}_r \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p_0^2 - 1}{2p_0^2\beta(z-1)} \left[ \frac{1}{p_0} C_2 C_3 C_1(r) + C_2(r) \right]. \quad (7.68)$$

### Решења за нестишљиво струјање гаса

Овде су дата решења за стационарно дозвучно струјање гаса са клизањем у микроцеви прстенастог попречног пресека, код кога се стишљивост може занемарити. Оваква претпоставка може бити оправдана при малим вредностима Маховог броја. При нестишљивом

струјању густина је константна и целокупна смештена у првој апроксимацији:

$$\rho_0 = 1, \quad (7.69)$$

$$\rho_1 = 0. \quad (7.70)$$

За случај када је познат масени проток ( $\dot{m}_0 = R_1 + R_2$ ,  $\dot{m}_1 = 0$ ) из интегралних облика једначине континуитета за прву (7.46) и другу апроксимацију (7.54), добијају се диференцијалне једначине за прву и другу апроксимацију притиска:

- прва апроксимација:

$$p'_0 = 32\beta C_2, \quad (7.71)$$

- друга апроксимација:

$$p'_1 = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p'_0}{p_0} C_2 C_3, \quad (7.72)$$

са константама  $C_2$  и  $C_3$  дефинисаним релацијама (6.50) и (6.51). Из добијених диференцијалних једначина (7.71) и (7.72) заједно са вредностима притиска на излазу из цеви (7.51), (7.59) уз добијено решење за поље температуре (7.60) следи поље притиска за неизотермско струјање разређеног гаса у прстенастој микроцеви када се стишљивост занемарује:

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} C_2 C_3 \ln p_0, \quad (7.73)$$

где је решење за прву апроксимацију притиска линеарно:

$$p_0 = 1 + 32\beta (z - 1) C_2. \quad (7.74)$$

Иако се разматра струјање код кога се стишљивост занемарује расподела притиска дуж цеви није линеарна (7.73). Нелинеарност је последица утицаја разређености гаса, где решење за прву апроксимацију представља линеарну расподелу притиска дуж цеви.

Укључујући добијено решење за поље притиска (7.73), као и решење за температуру (7.60), у општи израз за брзину (7.61) добија се да је поље брзине при неизотермском

струјању разређеног гаса у прстенастој микроцеви када се стишљивост занемарује:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{p_0 - 1}{\beta(z - 1)} C_1(r) + \text{Kn}_r \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p_0 - 1}{\beta(z - 1)} \left[ C_2 C_3 C_1(r) + \frac{1}{p_0} C_2(r) \right]. \quad (7.75)$$

При струјању разређеног гаса при малим Рејнолдсовим бројевима неизотермност не долази до изражаја ни у случају стишљивог струјања, ни у случају када се стишљивост може занемарити (7.60).

### 7.3.2 Струјање гаса у микроцевима прстенастог попречног пресека при великим Рејнолдсовим бројевима

Карактеристичне величине при неизотермском струјању разређеног гаса кроз прстенасту микроцев при великим Рејнолдсовим бројевима представљене су са по две апроксимације, као и за случај малих Рејнолдсових бројева (7.39)-(7.43). Уводећењем пертурбационих редова (7.39)-(7.43) у систем бездимензијских једначина (7.25)-(7.28), (7.34)-(7.37) и издвајањем чланови истог реда, тј. степена параметра  $\varepsilon$ , добија се систем једначина за сваку апроксимацију. При томе су уврштене вредности параметара  $m$  и  $n$  за велике Рејнолдсове бројеве:  $m = 2/3$  и  $n = 2/3$ . На овај начин у добијеним системима једначина у другој апроксимацији јављају се сви чланови система једначина: провођење топлоте, притисна и вискозна сила, инерција, конвекција, рад услед ширења, дисипација, укључујући клизање и температурски скок у граничним условима:

$$\varepsilon^0 : \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_0 V_0) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 u_0) = 0, \quad (7.76)$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r T_0^a \frac{\partial T_0}{\partial r} \right), \quad (7.77)$$

$$\frac{dp_0}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( T_0^a r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right), \quad (7.78)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} 2\rho_0 u_0 r \, dr = \dot{m}_0, \quad (7.79)$$

$$T_0|_{r=R_1} = 1, \quad (7.80)$$

$$T_0|_{r=R_2} = 1, \quad (7.81)$$

$$u_0|_{r=R_1} = 0, \quad (7.82)$$



$$u_0|_{r=R_2} = 0, \quad (7.83)$$

$$p_0|_{z=1} = 1, \quad (7.84)$$

$$\varepsilon^n : \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_0 V_1 + r \rho_1 V_0) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) = 0, \quad (7.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Pr} \gamma}{4 \beta} \rho_0 \left( 2V_0 \frac{\partial T_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial T_0}{\partial z} \right) &= \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( T_0^a \frac{\partial T_1}{\partial r} + a T_1 T_0^{a-1} \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) \right) + \\ &+ \text{Pr} \gamma \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left( \frac{u_0}{4\beta} \frac{dp_0}{dz} + T_0^a \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (7.86)$$

$$\frac{\gamma}{\eta} \rho_0 \left( 2V_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) + \frac{dp_1}{dz} = \frac{4\beta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( T_0^a \frac{\partial u_1}{\partial r} + a T_1 T_0^{a-1} \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \right), \quad (7.87)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} 2 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) r dr = \dot{m}_1, \quad (7.88)$$

$$T_1|_{r=R_1} = - \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{T_0^{a+0,5}}{p_0} \frac{\partial T_0}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.89)$$

$$T_1|_{r=R_2} = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{4\kappa}{\kappa + 1} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{T_0^{a+0,5}}{p_0} \frac{\partial T_0}{\partial r} \Big|_{r=R_2}, \quad (7.90)$$

$$u_1|_{r=R_1} = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 2 \frac{T_0^{a+0,5}}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.91)$$

$$u_1|_{r=R_2} = - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} 2 \frac{T_0^{a+0,5}}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=R_2}, \quad (7.92)$$

$$p_1|_{z=1} = 0. \quad (7.93)$$

Систем једначина за прву апроксимацију (7.44)-(7.51) исти је као систем једначина за прву апроксимацију за мале Рејнолдсове бројеве (7.77)-(7.84). Стога ће и добијена решења за прву апроксимацију код ова два случаја бити једнака. Додатак у случају великих Рејнолдсових бројева, у погледу потребних величина за добијање друге апроксимације, је попречна компонента брзине. Наиме, у једначинама за другу апроксимацију за велике Рејнолдсове бројеве фигурише и попречна брзина  $V_0$  која се добија из диференцијалног облика једначина количине кретања за прву апроксимацију (7.76) заједно са условима  $V_0|_{r=R_1} = 0$  и  $V_0|_{r=R_2} = 0$ :

$$V_0 = \frac{1}{128\beta r \ln \frac{R_2}{R_1}} \left( \frac{\rho'_0 p'_0}{\rho_0} + p''_0 \right) \left[ r^2 \left( (2R_1^2 - r^2) \ln \frac{R_2}{R_1} + C_1 \left( 2 \ln \frac{r}{R_1} - 1 \right) \right) - R_1^2 \left( R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} + C_1 \right) \right]. \quad (7.94)$$

Поступак добијања решења за другу апроксимацију, као и код прве апроксимације, полази од једначине енергије (7.86) која, заједно са граничним условима за температуру на унутрашњем (7.89) и спољашњем зиду микроцеви (7.90), даје решење за другу апроксимацију температуре. Решење за поље температуре је:

$$T = T_0 + \text{Kn}_r T_1 = 1 + \text{Kn}_r^2 \text{Re}_r^2 \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa \beta^2 \pi} p_0'^2 C_4(r), \quad (7.95)$$

где је  $C_1$  константа дефинисана са (6.47), док је  $C_4(r)$ :

$$C_4(r) = \frac{1}{256} \left( C_1 \left( C_1 \ln \frac{R_2}{r} + (R_1^2 + R_2^2 - 2r^2) \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^2} - (r^2 - R_1^2)^2 \right). \quad (7.96)$$

Одређивање друге апроксимације брзине полази од једначине количине кретања за  $z$  правац за другу апроксимацију (7.87) са граничним условима клизања гаса на унутрашњем (7.91) и спољашњем зиду (7.92).

Заједно са већ одређеном првом апроксимацијом, укључујући и добијено решење за поље температуре (7.95), прва и друга апроксимација дају поље брзине при неизотермском струјању разређеног гаса кроз микроцев прстенастог попречног пресека при великим Рејнолдсовим бројевима:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{p'_0}{\beta} C_1(r) + \frac{\text{Kn}_r}{\beta} \left[ p'_1 C_1(r) + \frac{2 - \sigma_v p'_0}{\sigma_v p_0} C_2(r) + \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 p'_0}{73728 \pi \beta^2 \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^3} \left( \rho_0 p_0'' C_3(r) - \frac{a p_0'^2 \text{Pr} (\kappa - 1)}{2 \kappa \ln \frac{R_2}{R_1}} C_5(r) \right) \right], \quad (7.97)$$

где су  $C_1(r)$ ,  $C_2(r)$ ,  $C_3(r)$  редом дате изразима (6.45), (6.46), (6.68). Функција  $C_5(r)$  је

функција попречне координате  $r$ :

$$\begin{aligned}
C_5(r) = & 36C_1^3 \ln \frac{r}{R_1} \ln \frac{R_1}{R_2} \ln(R_1 R_2) + 18C_1^2 \left( 2(r^2 - R_1^2) \ln \frac{R_1}{R_2} \ln(R_1 R_2) + \right. \\
& \left. + \left( -3C_1 + 4(R_1^2 \ln R_1 - R_2^2 \ln R_2) + 2r^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \ln(R_1 R_2) \right) \ln \frac{r}{R_1} \right) \ln \frac{R_2}{R_1} - \\
& 9C_1^2 \left( 6(r^2 - R_1^2) + 3(R_1^2 + R_2^2) \ln \frac{r}{R_1} + 8R_1^2 \ln R_1 + 4r^2 ((-2 + \ln r) \ln r - (\ln R_1)^2) \right) \cdot \\
& \cdot \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^2 - C_1 (-9(r^2 - R_1^2)(r^2 - 3R_1^2 - 4R_2^2) + 2(9r^4 - 18r^2(R_1^2 + R_2^2) + \\
& + 11(R_1^4 + R_1^2 R_2^2 + R_2^4)) \ln \frac{r}{R_1} \right) \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^3 + \\
& + 2(R_1^2 - r^2)(2r^4 - 7r^2 R_1^2 + 11R_1^4) \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^4. \tag{7.98}
\end{aligned}$$

Диференцијална једначина за другу апроксимацију притиска следи из интегралног облика једначине континуитета за другу апроксимацију (7.88).

Даље се разматрају два случаја неизотермског струјања разређеног гаса кроз микроцев прстенастог попречног пресека при великим Рејнолдсовим бројевима: стишљиво и струјање када се стишљивост занемарује. Како решења за температуру (7.95) и брзину (7.97) не зависе директно од вредности густине, то су општа решења која важе за оба случаја. До разлике у решењима за поље брзине и температуре за стишљиво и нестишљиво долази услед различите расподеле притиска за ова два струјања.

### Решења за стишљиво струјање гаса

Као што је објашњено у случају неизотермског стишљивог струјања гаса кроз микроцев при великим Рејнолдсовим бројевима код микроцеви у поглављу 5.3.2, прва и друга апроксимација густине су:

$$\rho_0 = p_0, \tag{7.99}$$

$$\rho_1 = p_1 - p_0 T_1. \tag{7.100}$$

Из једначина континуитета у интегралном облику (7.79), (7.88) заједно са добијеним апроксимацијама густине (7.99), (7.100), добијају се диференцијалне једначине за притисак при стишљивом неизотермском струјању разређеног гаса кроз прстенасту микроцев за

случај великих Рејнолдсових бројева:

- прва апроксимација:

$$p_0 p'_0 = 32\beta C_2, \quad (7.101)$$

- друга апроксимација:

$$(p_0 p_1)' = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} p'_0 C_2 C_3 + \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 C_2^3 p'_0}{6\pi p_0 (R_1 + R_2) \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^4} \left( C_4 + \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa} (a + 1) C_5 \right), \quad (7.102)$$

где је константа  $C_4$  дата изразом (6.71), а константа  $C_5$  је:

$$\begin{aligned} C_5 = C_1 & \left[ 24 C_1^3 \ln \frac{R_1}{R_2} \ln (R_1 R_2) + \right. \\ & + 6 C_1^2 \left( -6 C_1 + 8 (R_1^2 \ln R_1 - R_2^2 \ln R_2) + 3 (R_1^2 + R_2^2) \ln \frac{R_1}{R_2} \ln (R_1 R_2) \right) \ln \frac{R_2}{R_1} + \\ & + 3 C_1 (13 (-R_1^4 + R_2^4) + 12 (R_1^4 \ln R_1 - R_2^4 \ln R_2)) \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \\ & \left. + 2 (-13 (R_1^6 - R_2^6) - 9 R_1^2 R_2^2 C_1) \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 12 (R_1^2 + R_2^2) (R_1^4 + R_2^4) \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (7.103)$$

Ово решење је добијено за познату вредност масеног протока која је тада садржана у првој апроксимацији, односно  $\dot{m}_0 = R_1 + R_2$ ,  $\dot{m}_1 = 0$ .

Добијене диференцијалне једначине (7.101), (7.102), заједно са условима за притисак на излазу из цеви за прву (7.84) и другу апроксимацију (7.93), могуће је решити аналитичким путем. Следи поље притиска при стишљивом неизотермском струјању разређеног гаса кроз прстенасту микроцев при великим Рејнолдсовим бројевима:

$$\begin{aligned} p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r & \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left( 1 - \frac{1}{p_0} \right) C_2 C_3 + \right. \\ & \left. + \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 C_2^3 \ln p_0}{6\pi p_0 (R_1 + R_2) \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^4} \left( C_4 + \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa} (a + 1) C_5 \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.104)$$

Прва апроксимација притиска  $p_0$  иста је као прва апроксимација при малим Рејнолдсовим бројевима (7.67).

На основу општег решења за поље температуре (7.95) и добијеног поља притиска за стишљиво струјање (7.104), следи да је температура при стишљивом неизотермском струјању при великим Рејнолдсовим бројевима:

$$T = T_0 + \text{Kn}_r T_1 = 1 + \text{Kn}_r^2 \text{Re}_r^2 \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{4\kappa\beta^2\pi} \left( \frac{p_0^2 - 1}{p_0(z-1)} \right)^2 C_4(r), \quad (7.105)$$

са  $C_4(r)$  дефинисаним релацијом (7.96).

Укључујући добијено поље притиска за стишљиво струјање (7.104) у опште решење за поље брзине (7.97), добија се да је поље брзине за стишљиво неизотермско струјање разређеног гаса при великим Рејнолдсовим бројевима:

$$\begin{aligned} u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = & \frac{p_0^2 - 1}{2p_0\beta(z-1)} C_1(r) + \frac{\text{Kn}_r}{\beta} \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p_0^2 - 1}{2p_0^2(z-1)} C_2(r) + \right. \\ & + \frac{16\beta C_2^2 C_1(r)}{3p_0^3} \left( 6C_3 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} - \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 C_2^2 (\ln p_0 - 1)}{\pi(R_1 + R_2) \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^4} \left( C_4 + \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa} (a + 1) C_5 \right) \right) + \\ & + \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 (p_0^2 - 1)}{147456\pi p_0 (z-1) \beta^2 \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^3} \left( -\frac{(p_0^2 - 1)^2}{4p_0^2 (z-1)^2} C_3(r) - \right. \\ & \left. \left. \frac{a \text{Pr} (\kappa - 1)}{8\kappa \ln \frac{R_2}{R_1}} \left( \frac{p_0^2 - 1}{p_0(z-1)} \right)^2 C_5(r) \right) \right], \quad (7.106) \end{aligned}$$

где су  $C_1(r)$ ,  $C_2(r)$ ,  $C_3(r)$  и  $C_5(r)$  редом дефинисане релацијама (6.45), (6.46), (6.68), (7.98).

Уврштавајући добијено решење за поље притиска и у израз за попречну компоненту брзине (7.94) добија се  $V_0 = 0$ .

### Решења за нестишљиво струјање гаса

Са константном густином која је целокупна садржана у првој апроксимацији, код нестишљивог неизотермског струјања кроз прстенасту микроцев при великим Рејнолдсовим

бројевима, апроксимације густине су исте као и при малим Рејнолдсовим бројевима (7.69), (7.70). Претпоставка о занемареној стишљивости може се оправдати малим вредностима Маховог броја.

Диференцијалне једначине поља притиска добијају се из интегралних облика једначина континуитета (7.79), (7.88), узимајући у обзир густине (7.69), (7.70) за случај када је масени проток познат ( $\dot{m}_0 = R_1 + R_2$ ,  $\dot{m}_1 = 0$ ):

- прва апроксимација:

$$p'_0 = 32\beta C_2, \quad (7.107)$$

- друга апроксимација:

$$p'_1 = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p'_0}{p_0} C_2 C_3 + \frac{a \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \text{Pr}}{\kappa \pi} (\kappa - 1) C_5 C_6 p'_0, \quad (7.108)$$

где је константа  $C_6$  :

$$C_6 = \frac{1}{6C_1 (R_1 - R_2)^2 \left( C_1 + (R_1^2 + R_2^2) \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^3 \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (7.109)$$

Уз познате вредности прве и друге апроксимације притиска на излазу из цеви (7.84) и (7.93), диференцијалне једначине поља притиска (7.107) и (7.108) дају решење за притисак при неизотермском струјању разређеног гаса кроз микроцев прстенастог попречног пресека при великим Рејнолдсовим бројевима када је стишљивост занемарена:

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} C_2 C_3 \ln p_0 + \frac{a \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \text{Pr}}{\kappa \pi} (\kappa - 1) C_5 C_6 (p_0 - 1) \right], \quad (7.110)$$

где је решење за прву апроксимацију притиска исто као при малим Рејнолдсовим бројевима (7.74).

Уз добијено решење за поље притиска (7.110), из општег решења за температуру (7.95), следи да је температура при неизотермском струјању при великим Рејнолдсовим

бројевима када је стишљивост занемарена:

$$T = T_0 + \text{Kn}_r T_1 = 1 + \text{Kn}_r^2 \text{Re}_r^2 \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa \beta^2 \pi} \left( \frac{p_0 - 1}{z - 1} \right)^2 C_4(r), \quad (7.111)$$

где је  $C_4(r)$  дефинисано релацијом (7.96).

На исти начин, из општег решења за брзину (7.97), добија се брзина при неизотермском струјању при великим Рејнолдсовим бројевима када је стишљивост занемарена:

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{p_0 - 1}{(z - 1)\beta} C_1(r) + \frac{\text{Kn}_r}{\beta} \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p_0 - 1}{(z - 1)p_0} C_2(r) + 32\beta C_2 C_1(r) \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{C_2 C_3}{p_0} + \frac{a \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \text{Pr}}{\kappa \pi} (\kappa - 1) C_5 C_6 \right) - \frac{a \text{Kn}_r \text{Re}_r^2 \text{Pr} (\kappa - 1)}{147456\pi \beta^2 \kappa} \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^4 \left( \frac{p_0 - 1}{z - 1} \right)^3 C_5(r) \right], \quad (7.112)$$

где  $C_1(r)$ ,  $C_2(r)$  и  $C_5(r)$  дефинисане релацијама (6.45), (6.46) и (7.98).

Добија се да је попречна компонента брзине (7.94), и када је стишљивост занемарена, једнака нули  $V_0 = 0$ .

## 7.4 Анализа резултата

У овом поглављу приказују се резултати за неизотермско струјање разређеног гаса са константним температурама зидова микроцеви прстенастог попречног пресека. Струјање разређеног гаса је осносиметрично дозвучно стационарно и изазвано разликом притисака између улазног и излазног пресека цеви. Анализирају се резултати за струјање при малим и великим Рејнолдсовим бројевима, за стишљиво струјање и за случај када се стишљивост занемарује.

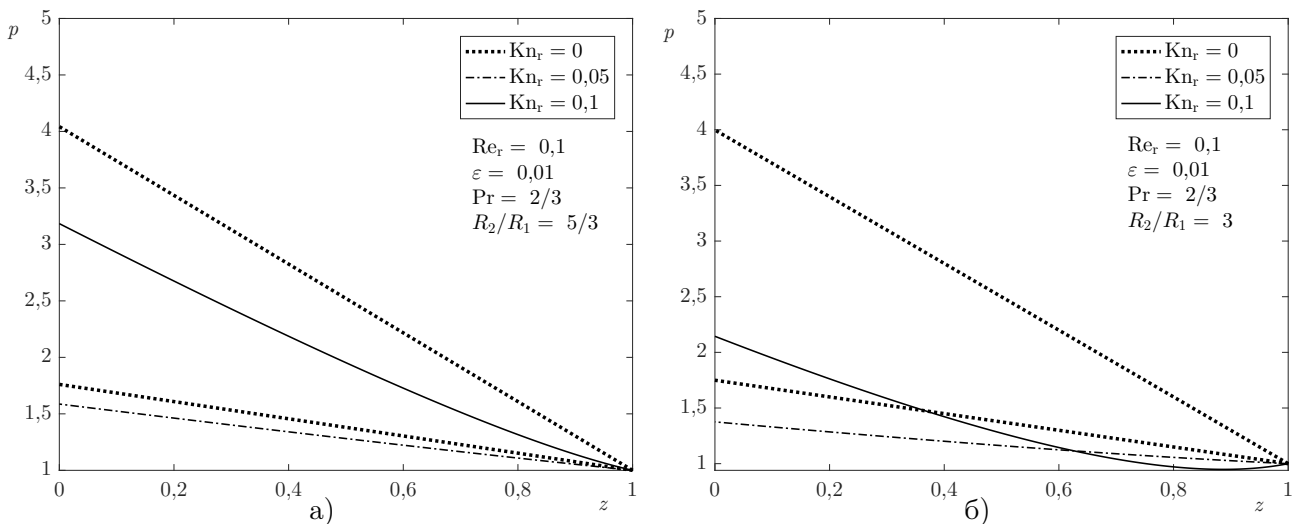
Димензијском анализом закључено је да је, за одређивање свих величина у струјном пољу, неопходно задати однос спољашњег и унутрашњег полупречника  $R_2/R_1$ , затим референтну вредност Кнудсеновог и Рејнолдсовог броја и вредност малог параметра  $\varepsilon$ . Уз ове задате вредности следи референтни Махов број  $\text{Ma}_r$  и параметри  $\eta, \gamma, \beta$  (поглавља 7.2.1 и 7.2.2).

Коришћен је коефицијент акомодације за дифузну рефлексију  $\sigma_v = 1$  и идеалну размену енерије између гаса и зида  $\sigma_T = 1$ , и за унутрашњи и за спољашњи зид.

### 7.4.1 Анализа резултата за мале Рејнолдсове бројеве

Резултати за мале Рејнолдсове бројеве дати су за једноатомски гас  $\kappa = 5/3$  и за Прантлов број  $Pr = 2/3$ .

Разматрани случај обухвата прстенасту микроцев са међусобно једнаким температурама зидова које су константне. Изабрана референтна температура једнака је температури зидова и износи  $\tilde{T}_w$ . У случају малих Рејнолдсових бројева овај случај своди се на изотермски, што је показано решењем за температурско поље (7.60). Неизотермност долази до изражаја само при великим Рејнолдсовим бројевима.



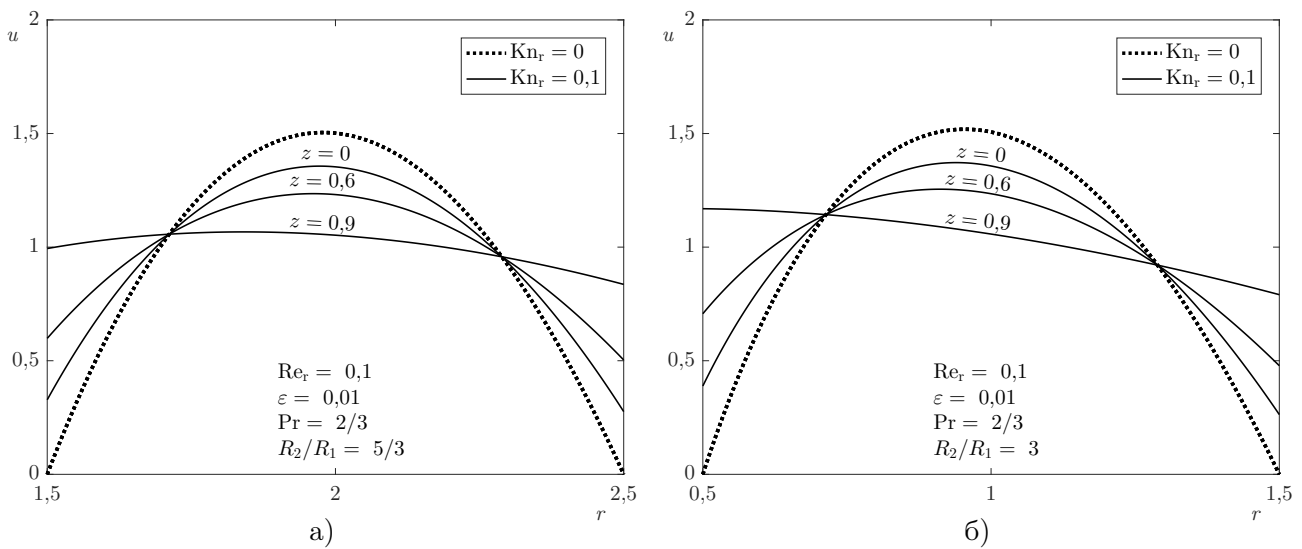
**Слика 7.2:** Распдела притиска за континуум ( $Kn_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,05$  и  $Kn_r = 0,1$ ) (7.73): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

Из наведеног следи да се решења добијена за неизотермско стишљиво струјање кроз прстенасту микроцев при малим Рејнолдсовим бројевима (поглавље 7.3.1) поклапају са решењима за изотермско стишљиво струјање кроз прстенасту микроцев при малим Рејнолдсовим бројевима (поглавље 6.3.1). Следи да је израз за поље притиска за мале Рејнолдсове бројеве код стишљивог неизотермског струјања (7.66), као и (7.67), исти као и изрази добијени за изотермско стишљиво струјање (6.52), (6.53), стога је расподела притиска дуж микроцеви већ приказана на слици 6.2. На исти начин, поклапају се и брзине за неизотермско (7.61) и изотермско (6.44) стишљиво струјање при малим Рејнолдсовим



бројевима. Профили брзине приказани у три попречна пресека за изотермско струјање приказани су на слици 6.3.

У случају континуума када се при неизотермском струјању занемари стишљивост добија се линеарна расподела притиска дуж микроцеви (слика 7.2). Пораст референтног Кнудсеновог броја доводи до мањих вредности притиска дуж микроцеви. Раст односа спољашњег и унутрашњег полупречника  $R_2/R_1$  такође доводи до нижег притиска у микроцеви, нарочито при већим вредностима референтног Кнудсеновог броја.

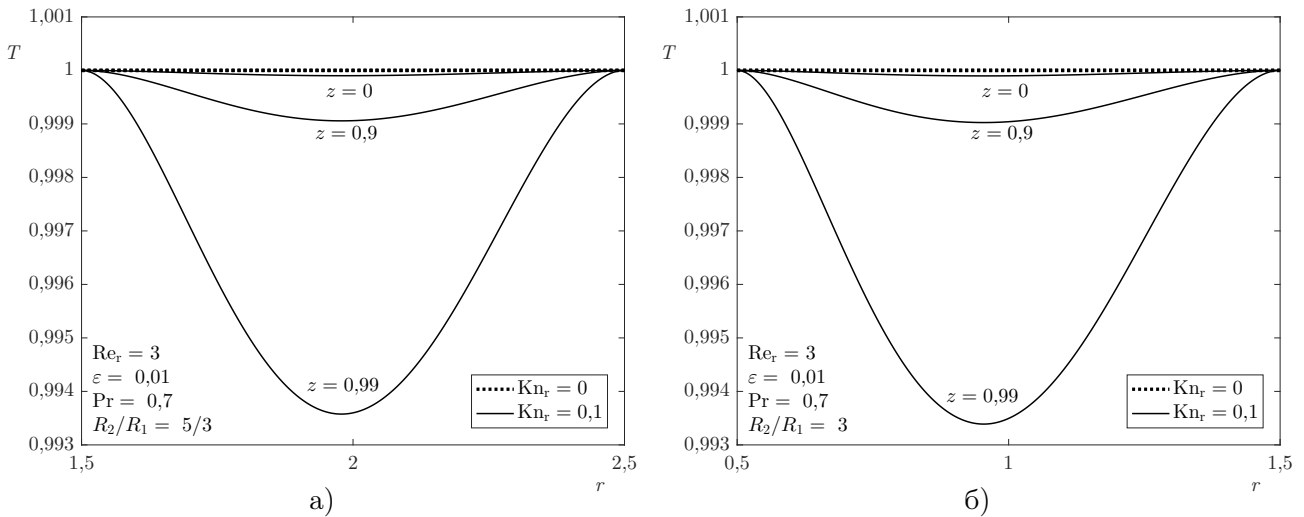


**Слика 7.3:** Профили брзине за континуум ( $Kn_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,1$ ) (7.75): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

Према (7.75) профил брзине за случај континуума при занемареној стишљивости за мале Рејнолдсове бројеве не мења се дуж микроцеви (слика 7.3). Ово је последица линеарне расподеле притиска у случају континуума при нестишљивом струјању гаса (7.74). Брзина, која обухвата утицај клизања, приказана је у три попречна пресека. Када се занемари стишљивост, вредност брзине у области на половини растојања између унутрашњег и спољашњег цилиндра цеви се смањује са порастом подужне координате, односно од улаза ка излазу из цеви. Када је у питању брзина гаса на зидовима, тј. брзина клизања, обрнут је случај: брзина на зидовима расте у смеру струјања. Профил брзине је асиметричан и већа је вредност брзине гаса на унутрашњем зиду. Утицај односа спољашњег и унутрашњег полупречника на профил брзине израженији је на излазу из цеви. Са порастом овог односа расте асиметрија профила брзине (слика 7.3 б)).

## 7.4.2 Анализа и валидација резултата за велике Рејнолдсове бројеве

У циљу поређења са резултатима из литературе који су добијени за двоатомски гас, изабран је Прантлов број  $Pr = 0,7$  и однос топлотних капацитета  $\kappa = 7/5$ .



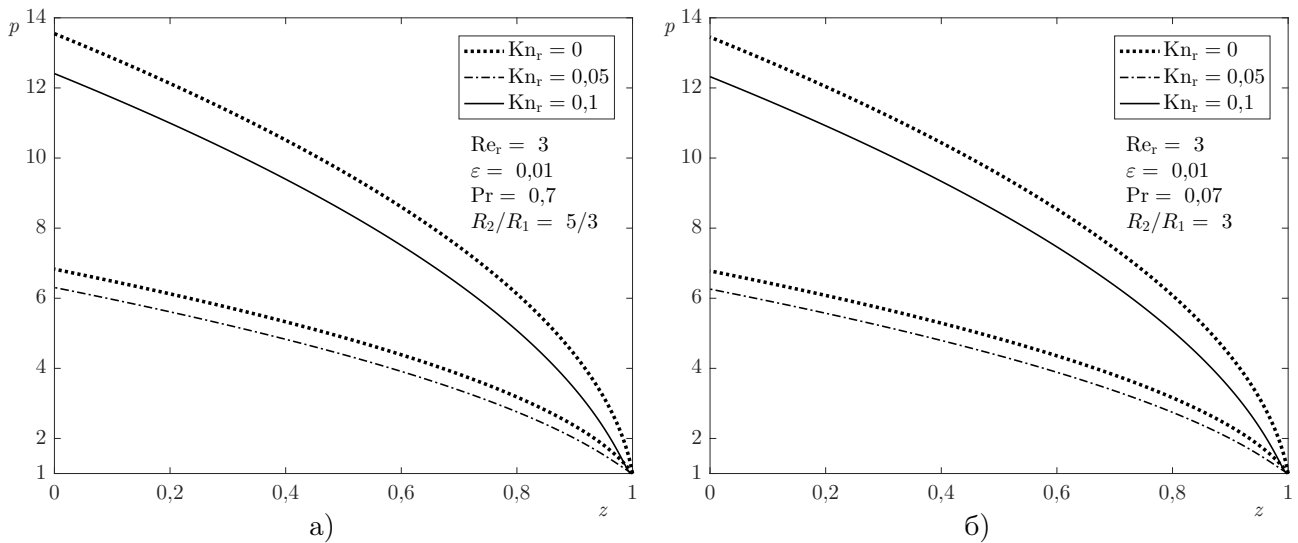
**Слика 7.4:** Профили температуре у различитим попречним пресецима за континуум ( $Kn_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,1$ ) (7.105): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

Температура за стишљиво струјање при великим Рејнолдсовим бројевима дата је у три попречна пресека. За случај континуума профил температуре је константан (тачкаста линија на слици 7.4). Температура гаса на зиду једнака је температури зида дуж целе цеви. Односно, гранични услов температурског скока у прве две апроксимације није дошао до изражаја. Са слике 7.4 се види да температура у области на половини растојања између унутрашњег и спољашњег цилиндра цеви опада са порастом подужне координате. Као и код брзине, повећање односа спољашњег и унутрашњег полупречника доводи до веће асиметрије профила температуре.

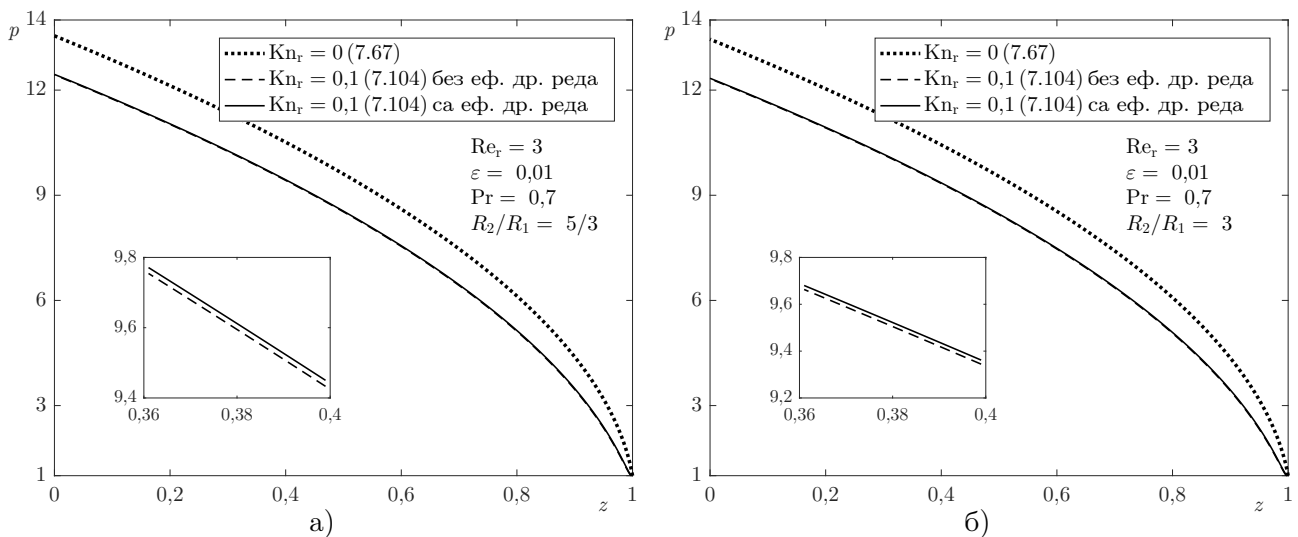
Вредност притиска дуж микроцеви прстенастог попречног пресека нижа је када се разређеност узме у обзир (слика 7.5). Повећање односа  $R_2/R_1$  доводи до снижавања притиска дуж микроцеви, што је очигледније код веће разређености.

Анализа утицаја разређености на поље притиска приказана је на слици 7.6. У случају неизотермског струјања, разређеност, као и у претходним случајевима, доводи до мањег притиска у односу на случај када је разређеност занемарена при истом масеном протоку. На овој слици приказан је и утицај ефеката другог реда (инерције, конвекције, рада услед

ширења и дисипације) на расподелу притиска. Ефекти другог реда доводе до пораста притиска дуж микроцеви.



**Слика 7.5:** Расподела притиска дуж микроцеви за континуум ( $Kn_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,05$  и  $Kn_r = 0,1$ ) (7.104): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

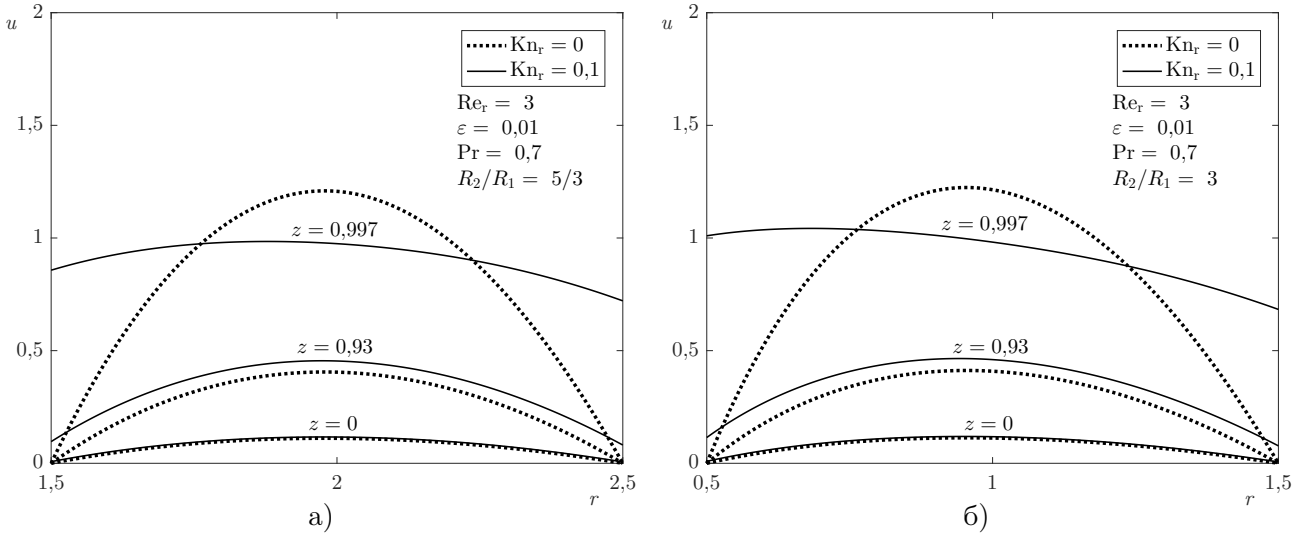


**Слика 7.6:** Расподела притиска дуж микроцеви за континуум  $Kn_r = 0$  (7.67) и струјање са клизањем  $Kn_r = 0,1$  са и без ефеката другог реда (7.104): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

На слици 7.7 приказани су профили брзине у три попречна пресека. Клизање гаса на зидовима цеви расте од улаза ка излазу из цеви. Повећањем односа спољашњег и унутрашњег полупречника повећава се и асиметричност профила брзине, што је веома изражено у излазном попречном пресеку.

Утицај промене односа  $R_2/R_1$  на поље брзине при неизотермском стишљивом струјању кроз прстенасту микроцев исти је као при малим Рејнолдсовим бројевима и исти као у

раду [100]. У поглављу 6.4.2 наведено је да је профил брзине близак симетричном профи-  
лу за  $R_2/R_1 \approx 1$ , односно профилу брзине за струјање између паралелних плоча, што су  
Тахери и др. такође показали у раду [101].



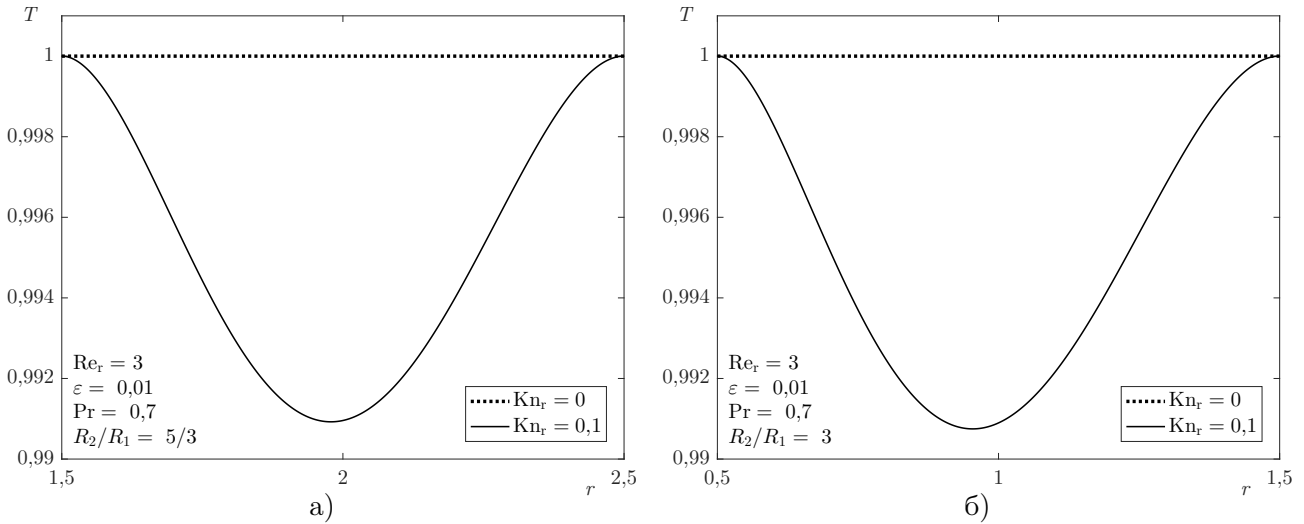
**Слика 7.7:** Профили брзине у различитим попречним пресецима за континуум ( $\text{Kn}_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $\text{Kn}_r = 0,1$ ) (7.114): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

Ако се претпостави да динамичка вискозност и топлотна проводљивост не зависе од температуре, што је оправдано с обзиром на мале температурске разлике по попречном пресеку, оправдано је користити једноставније решење за поље притиска и брзине које следи из решења (7.104) и (7.114) када је  $a = 0$ :

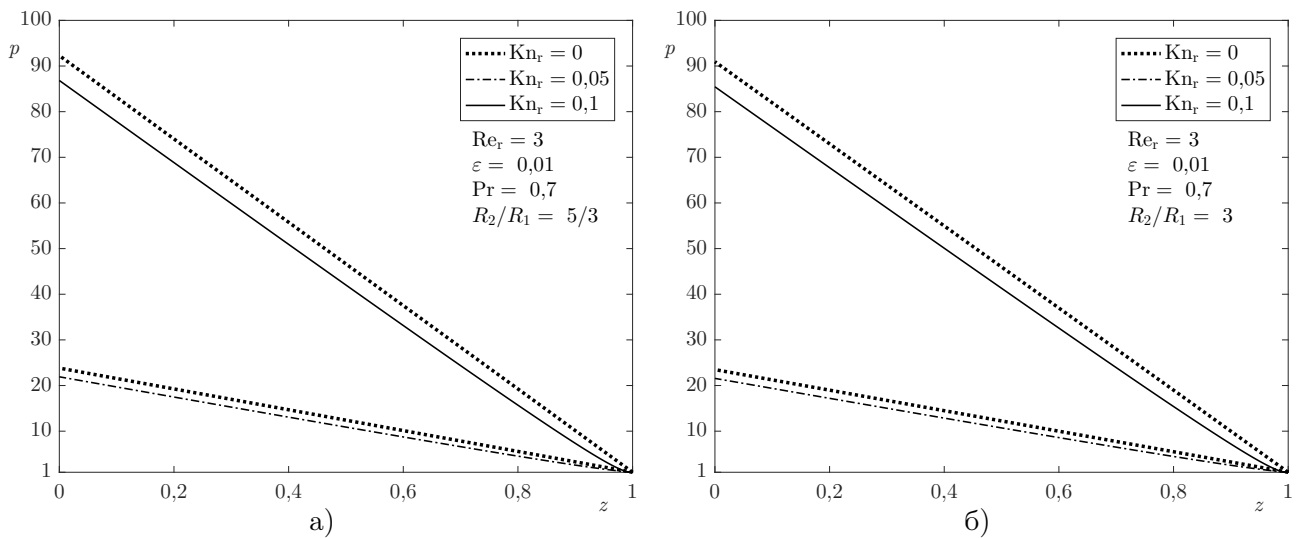
$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left( 1 - \frac{1}{p_0} \right) C_2 C_3 + \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 C_2^3 \ln p_0}{6\pi p_0 (R_1 + R_2) \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^4} \left( C_4 + \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa} C_5 \right) \right], \quad (7.113)$$

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{p_0^2 - 1}{2p_0\beta(z-1)} C_1(r) + \frac{\text{Kn}_r}{\beta} \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p_0^2 - 1}{2p_0^2(z-1)} C_2(r) + \frac{16\beta C_2^2 C_1(r)}{3p_0^3} \left( 6C_3 \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} - \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 C_2^2 (\ln p_0 - 1)}{\pi(R_1 + R_2) \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^4} \left( C_4 + \text{Pr} \frac{\kappa - 1}{\kappa} C_5 \right) \right) \right] +$$

$$\left. - \frac{\text{Kn}_r \text{Re}_r^2 (p_0^2 - 1)^3 C_3(r)}{589824 \pi p_0^3 (z - 1)^3 \beta^2 \left( \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^3} \right] \quad (7.114)$$



**Слика 7.8:** Профили температуре за континуум ( $\text{Kn}_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $\text{Kn}_r = 0,1$ ) (7.111): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

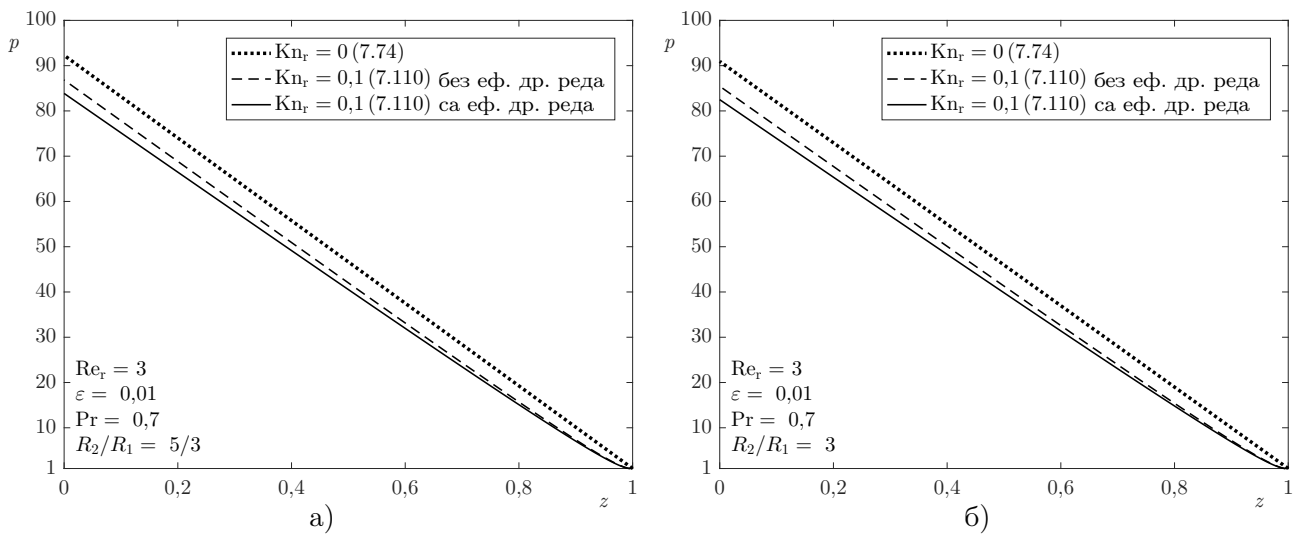


**Слика 7.9:** Распедела притиска дуж микроцеви за континуум ( $\text{Kn}_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $\text{Kn}_r = 0,05$  и  $\text{Kn}_r = 0,1$ ) (7.110): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

На слици 7.8 приказан је профил температуре за нестишљиво струјање при великим Рејнолдсовим бројевима. Показује се да је температура у случају континуума константна, а када се разређеност узме у обзир профил температуре се мења по попречном пресеку. С обзиром на то да се узима да је густина константна нема промене температуре дуж

цеви. Као и код стишљивог струјања, гранични услов температурског скока није дошао до изражаја. Повећање односа  $R_2/R_1$  доводи до ниже вредност температуре и повећава асиметрију профила, као и у случају када се стишљивост узима у обзир.

На слици 7.9 приказана је расподела притиска дуж микроцеви. У случају континуума расподела притиска дуж микроцеви је линеарна, док разређеност доводи појаве нелинеарности и смањења притиска. Пораст односа спољашњег и унутрашњег полупречника  $R_2/R_1$ , доводи до снижавања притиска, као у случају стишљивог струјања. Овај утицај је израженији при већим вредностима референтног Кнудсеновог броја ( $Kn_r = 0,1$ ).

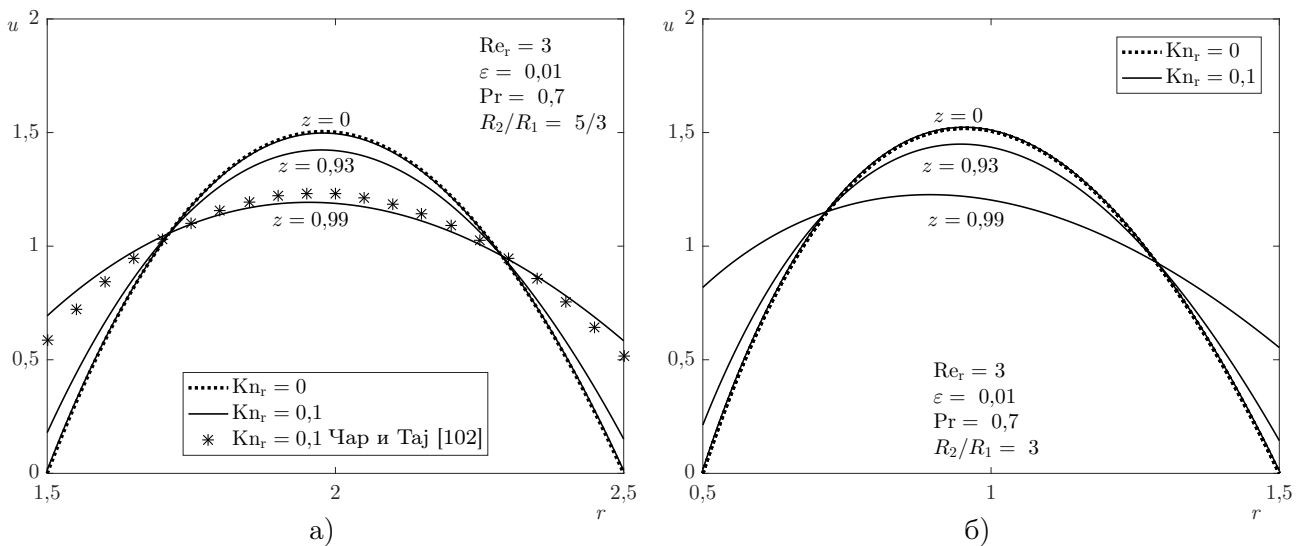


**Слика 7.10:** Расподела притиска дуж микроцеви за континуум ( $Kn_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $Kn_r = 0,1$ ) са и без ефеката другог реда (7.110): а)  $R_2/R_1 = 5/3$ ; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

На слици 7.10 приказан је утицај ефеката другог реда. Пуном линијом приказан је случај када је узета у обзир само разређеност, испрекиданом случај када су осим разређености узети у обзир и ефекти другог реда - инерција, конвекција, рад услед ширења и дисипација. Утицај разређености снижава вредност притиска дуж микроцеви. Ефекти инерције, конвекције, рада услед ширења и дисипације додатно снижавају притисак дуж микроцеви, што је разлика у односу на стишљиво струјање. Слични закључци су изведени и при неизотермском струјању у микроцеви када се стишљивост занемарује (5.9 б)), што се слаже са решењима Асака и Хонга [98].

Профил брзине за неизотермско струјање при великим Рејнолдсовим бројевима када је стишљивост занемарена се не мења дуж микроцеви у случају континуума (слика 7.11). Као при малим Рејнолдсовим бројевима, ово је последица линеарне расподеле притиска

у подужном правцу. Профил брзине који узима у обзир утицај разређености, инерције, конвекције, рада услед ширења и вискозности, опада од улаза ка излазу из цеви у области на половини растојања између унутрашњег и спољашњег цилиндра цеви. На зидовима је обрнут случај, односно брзина клизања расте од улаза ка излазу из цеви. На слици 7.11 је приказан и утицај односа  $R_2/R_1$  на поље брзине. Повећање односа повећава асиметрију профила брзине, што највише долази до изражаја у излазном попречном пресеку. Утицај односа  $R_2/R_1$  на поље брзине исти је као и у случају када је стишљивост узета у обзир, што се поклапа и са резултатима добијеним у раду Тахерија и Страттрапа [100] и Тахерија и др. [101]. Поређење профила брзине у излазном попречном пресеку са профилем брзине за исте услове струјања Чара и Таја [102] показује добро слагање.



**Слика 7.11:** Профили брзине у различитим микроцеви за континуум ( $\text{Kn}_r = 0$ ) и струјање са клизањем ( $\text{Kn}_r = 0.1$ ) (7.112): а)  $R_2/R_1 = 5/3$  и поређење са [102]; б)  $R_2/R_1 = 3$ .

Ако се претпостави да динамичка вискозност и топлотна проводљивост не зависе од температуре, из решења (7.110), (7.112) следи решење за поље притиска и брзине када је  $a = 0$ :

$$p = p_0 + \text{Kn}_r p_1 = p_0 + \text{Kn}_r \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} C_2 C_3 \ln p_0 \right], \quad (7.115)$$

$$u = u_0 + \text{Kn}_r u_1 = \frac{p_0 - 1}{(z - 1)\beta} C_1(r) + \frac{\text{Kn}_r}{\beta} \left[ \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{p_0 - 1}{(z - 1)p_0} C_2(r) + 32\beta C_2 C_1(r) \left( \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \frac{C_2 C_3}{p_0} \right) \right]. \quad (7.116)$$

## 8 Закључак

У овој докторској дисертацији анализирано је и решено неколико различитих модела струјања гаса кроз микроцеви и коаксијалне микроцеви. Решења су добијена за услове изотермског струјања и за неке проблеме неизотермског струјања гаса.

Мотивација за истраживање струјања разређеног гаса у микроцевима последица је све веће распрострањености и широке примене микро-електро-механичких система, који често као елементе садрже микроцеви. Због тога је изучавање струјања гаса у микроцевима различите геометрије и различитих температурских услова веома значајно и предмет је рада ове докторске дисертације.

Како је код струјања гаса кроз микроцеви дужина слободног пута молекула реда величине пречника микроцеви, струјање гаса се мора разматрати као разређено. У свим случајевима разматраним у овом раду струјање гаса је дозвучно, осносиметрично и стационарно. У циљу анализе утицаја стишљивости, осим решења за стишљиво струјање гаса, добијена су и решења за случајеве када се стишљивост занемарује.

Аналитичка решења су добијена за изотермско струјање гаса кроз микроцев променљивог попречног пресека. Променљивост попречног пресека је линеарна, па су анализирани случајеви струјања гаса кроз дивергентну, конвергентну, као и кроз цев константног попречног пресека. У случајевима који се баве струјањима гаса између две коаксијалне микроцеви, тј. кроз прстенасти попречни пресек, променљивост попречног пресека није узета у обзир. За поменуте геометрије добијена су решења за случај изотермског струјања гаса, као и за случај неизотермског струјања гаса. У оквиру неизотермских проблема решења су добијена за константну и униформну температуру зидова. Осим тога, анализиран је режим струјања при малим Рејнолдсовим бројевима и великим Рејнолдсовим бројевима, када се осим разређености узимају у обзир и остали ефекти другог реда. У случају изотермског струјања то је инерција, а у случају неизотермског, осим инерције, јавља се и: конвекција, дисипација и рад услед ширења.

У овој дисертацији је анализирано струјање разређеног гаса кроз микроцеви за област



струјања гаса са клизањем, где су вредности Кнудсеновог броја у опсегу  $0,001 \leq Kn < 0,1$ . Може се показати да се у овој области разређености може применити макроскопски приступ за решавање проблема. Односно, постојање Кнудсеновог слоја - слоја у близини зида у којем је гас ван равнотеже, може се узети у обзир макроскопским приступом, граничним условом клизања гаса на зиду за поље брзине и граничним условом температурског скока гаса на зиду за поље температуре. Ови гранични услови се користе за добијање решења из система једначина који чине једначина континуитета, једначина количине кретања, једначина стања идеалног гаса и у случају неизотермског струјања и једначине енергије. Овде коришћена једначина количине кретања и једначина енергије произилази из макроскопског приступа, али се могу извести и из кинетичке теорије гасова и тачности су реда величине Кнудсеновог броја. С обзиром на то да су ове једначине истог реда тачности као и коришћени гранични услови оправдано је њихово коришћење.

У циљу добијања општих решења систем једначина се трансформише у бездимензијски облик. При томе референтне величине су изабране за излазни пресек микроцеви, чиме се обезбеђује да се у комплетном струјном пољу остане у области струјања са клизањем и да не дође до загушења. Решења су добијена за одређене услове струјања који омогућавају свођење једначина на једноставнији облик. Претпостављено је да је дужина цеви знатно већа од пречника или, у случају струјања између два коаксијална микроцилиндра, од растојања између њих, што омогућава дефинисање малог параметра епсилон  $\varepsilon = D/L$ ,  $D \ll L$ . Како се ради о дозвучном струјању са клизањем претпостављено је да су референтни Махов и Кнудсенов број реда величине степена малог параметра  $\varepsilon$ . На тај начин једначине су изражене у функцији од малог параметра  $\varepsilon$ , што омогућава анализу значаја појединих чланова у једначинама за случај малих и великих Рејнолдсових бројева.

Решења за притисак, брзину и температуру претпостављена су у облику пертурбационих редова по референтном Кнудсеновом броју. Увођењем ових пертурбационих решења у бездимензијски систем једначина и граничних услова и издвајањем чланова одговарајућег степена малог параметра добијају се системи једначина са граничним условима. Број система једначина одговара броју апроксимација. Прва апроксимација представља решење за услове континуума. Друга апроксимација узима у обзир разређеност и остале ефекте другог реда, ако за разматрани проблем долазе до изражаја. Системи једначина са граничним условима, који дају решења за одговарајуће апроксимације, решавају се сукцесивно

један за другим.

Струјање гаса у микроцевима и процепима коаксијалних микроцеви остварује се услед разлике притисака на улазу и излазу. При оваквом струјању постоји потреба да се одреди масени проток за познат однос притисака на улазу и излазу или да се за познати масени проток одреди однос притисака на улазу и излазу који до њега доводи. У докторату су добијена решења за оба приступа.

Димензијском анализом је закључено да је за приказ резултата потребно задати три величине, овде је одабрано да то буде мали параметар  $\varepsilon$ , референтни Кнудсенов и референтни Рејнолдсов број. Када се анализирају случајеви струјања кроз цеви променљивог попречног пресека потребно је задати и однос улазног и излазног пречника, а за прстенасте микроцеви је потребно задати и однос спољашњег и унутрашњег пречника. Решења добијена у докторату омогућавају анализу утицаја наведених параметара на поље притиска, брзине и температуре.

Решење за прву апроксимацију притиска, брзине и температуре, у случају неизотермског струјања, су добијена аналитички. Апроксимације вишег реда су за неке случајеве струјања добијене аналитички или нумерички, применом методе Рунге-Кута. Резултати су поређени са одговарајућим аналитичким [90], [98], [102] и нумеричким решењима [93], [94] доступним у литератури и показано је добро слагање. Како су решења за струјање кроз микроцеви и коаксијалне микроцеви у литератури дата за нестишљиво струјање [98], [102], у докторату су добијена решења и за случај када се стишљивост занемарује. То је осим поређења са резултатима из литературе омогућило и анализу утицаја стишљивости.

У докторату је за проблем неизотермског струјања гаса узета у обзир зависност динамичке вискозности и топлотне проводљивости од температуре. У добијеним решењима за услов константне температуре зида, иако постоји промена температуре у гасу, она је веома мала, па је утицај зависности коефицијента вискозности и топлотне проводљивости од температуре мали. Због тога су дата и решења за случај када су коефицијенти динамичке вискозности и провођења топлоте константни.

Основни допринос доктората је у добијеним аналитичким решењима за поље притиска, брзине и температуре за различите услове струјања у кружним и прстенастим микроцевима. Осим тога решења добијена у докторату дају допринос у валидацији примене

пертурбационе методе у области струјања разређеног гаса у проблемима оносиметричних струјања. Добијена решења су лако применљива и поновљива. Како је њихова поузданост валидирана поређењем са резултатима других аутора, примењена метода се може користити за добијање решења и за неке друге услове струјања, као и за потврђивање тачности нумеричких и експерименталних резултата.

Добијени резултати охрабрују и у погледу праваца будућег рада. Пертурбациона метода може се применити и на случајеве другачијих температурских граничних услова, као што је постојање градијента температуре у правцу струјања што доводи до ефекта термичког пузања, као и различитих услова температурског флукса на зиду. Код прстенасте микроцеви могући су различити гранични услови на сваком од зидова.

# Литература

- [1] Gad-el-Hak, M., Ed., 2006, "The MEMS Handbook - Introduction and Fundamentals", Taylor & Francis Group.
- [2] Feynman, R. P., 1960, "There's Plenty of Room at the Bottom", Engineering and Science, **23**(5), pp. 22-36.
- [3] Sandia National Laboratories, n.d., sa <http://mems.sandia.gov>, pristupano 06.07.2020.
- [4] Berkeley Sensor and Actuator Center, n.d., sa <http://bsac.berkeley.edu>, pristupano: 09.07.2022.
- [5] Bhansali, S. and Vasudev, A., Eds., 2012, "MEMS for Biomedical Applications", Woodhead Publishing Limited, Cambridge, UK.
- [6] Kraft, M. and White, N. M., Eds., 2013, "MEMS for Automotive and Aerospace Applications", Woodhead Publishing Limited, Cambridge, UK.
- [7] Unmanned Systems Technology, sa <https://www.unmannedsystemstechnology.com/>, pristupano: 06.07.2022.
- [8] Prime Faraday Partnership, 2002, "An Introduction to MEMS (Micro-Electromechanical Systems)", Loughborough University, UK.
- [9] Ting, L. H. and Sniadecki, N. J., 2011, "Biological Microelectromechanical Systems (BioMEMS) Devices", Comprehensive Biomaterials, **3**, pp. 257-276.
- [10] Nuxoll, E., 2013, "BioMEMS in Drug Delivery", Advances Drug Delivery Reviews, **65**(11-12), pp. 1611-1625.
- [11] Ashraf, M. W., Tayyaba, S. and Afzulpurkar, N., 2011, "Micro Electromechanical Systems (MEMS) Based Microfluidic Devices for Biomedical Application", International Journal of Molecular Sciences, **12**(6), pp. 3648-3704.
- [12] Zhang, J. X. J. and Hoshino, K., 2014, "Microfluidics and Micro Total Analytical

- Systems”, *Molecular Sensors and Nanodevices*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, pp. 103-168.
- [13] Karthik, V., Karuna, B., Kumar Senthil, P., Saravanan, A. and Hemavathy, R. V., 2022, “Development of Lab-on-Chip Biosensor for the Detection of Toxic Heavy Metals: A Review”, *Chemosphere*, **299**, p. 134427.
- [14] Sengupta, J., Adhikari, A. and Hussain, C. M., 2021, “Graphene-Based Analytical Lab-on-Chip Devices for Detection of Viruses: A Review”, *Carbon Trends*, **4**, pp. 100072.
- [15] Prakash, S. and Yeom, J., 2014, “Lab-on-a-Chip and Fluid Manipulation Applications”, *Nanofluidics and Microfluidics*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, pp. 171-239.
- [16] Verma, N. and Pandya, A., 2022, “Challenges and Opportunities in Micro/Nanofluidic and Lab-on-a-Chip”, *Progress in Molecular Biology and Translational Science*, **186**(1), pp. 289-302.
- [17] Rajabi, M., Roxhed, N., Shafagh, R. Z., Haraldson, T., Fischer, A. C., Wijngaart, W. Stemme, G. and Niklaus, F., 2016, “Flexible and Stretchable Microneedle Patches with Integrated Rigid Stainless Steel Microneedles for Transdermal Biointerfacing”, *PLoS ONE*, **11**(12), p. e0166330.
- [18] Protechnology Japan, sa <http://protechnology.jp>, pristupano: 06.07.2022.
- [19] Rachkovskij, D. A., Kussul, E. M. and Talayev, S.A., 1998, “Heat Exchange in Short Microtubes and Micro Heat Exchangers with Low Hydraulic Losses”, *Microsystem Technologies*, **4**(3), pp. 151-158.
- [20] David Doty, F., Hosford, G. and Spitzmesser, J.B., 1991, “The Microtube Strip Heat Exchanger”, *Heat Transfer Engineering*, **12**(3), pp. 31-41.
- [21] Han, Y., Liu, Y., Li, M. and Huang, J., 2012, “A Review of Development of Micro-Channel Heat Exchanger Applied in Air-Conditioning System”, 2nd International Conference on Advances in Energy Engineering (ICAEE2011), *Energy Procedia*, **14**, pp. 148-153.
- [22] Ohadi, M., Choo, K., Dessiatoun, S. and Cetegen, E., 2013, “Next Generation Microchannel Heat Exchangers”, *SpringerBriefs in Thermal Engineering and Applied*

Science, Springer.

- [23] Atrey, M. D., Ed., 2020, “Cryocoolers Theory and Applications”, Springer Nature Switzerland AG, Cham, Germany.
- [24] Honeywell Aerospace, sa <http://aerospace.honeywell.com>, pristupano: 25.10.2022.
- [25] Beskok, A. and Karniadakis, G. E., 1999, “A Model for Flows in Channels, Pipes and Ducts at Micro and Nano Scales”, *Microscale Thermophysical Engineering*, **3**, pp. 43-77.
- [26] Agrawal, A., 2011, “A Comprehensive Review on Gas Flow in Microchannels”, *International Journal of Micro-Nano Scale Transport*, **2**(1), pp. 1-40.
- [27] Colin, S., 2012, “Gas Microflows in the Slip Flow Regime: A Critical Review on Convective Heat Transfer”, *Journal of Heat Transfer*, **134**(2), p. 020908.
- [28] Sharipov, F. and Seleznev, V., 1998, “Data on Internal Rarefied Gas Flows”, *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, **27**(3), pp. 657-706.
- [29] Salman, B. H. , Mohammed, H. A., Munisamy, K. M. and Kherbeet, A. S., 2013, “Characteristics of Heat Transfer and Fluid Flow in Microtube and Microchannel Using Conventional Fluids and Nanofluids: A Review”, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, **28**, pp. 848-880.
- [30] Zhang, W. M., Meng, G. and Wei, X., 2012, “A Review on Slip Models for Gas Microflows”, *Microfluidics and Nanofluidics*, **13**, pp. 845-882.
- [31] Sharipov, F. M. and Seleznev, V. D., 1994, “Rarefied Gas Flow Through a Long Tube at Any Pressure Ratio”, *Journal of Vacuum Science & Technology A*, **12**, pp. 2933–2935.
- [32] Graur, I. and Sharipov, F., 2008, “Gas Flow Through an Elliptical Tube Over the Whole Range of the Gas Rarefaction”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **27**, pp. 335-345.
- [33] Titarev, V. A., 2013, “Rarefied gas flow in a circular pipe of finite length”, *Vacuum*, **94**, pp. 92-103.
- [34] Tsimpoukis, A. and Valougeorgis, D., 2018, “Rarefied isothermal gas flow in a long circular tube due to oscillating pressure gradient”, *Microfluidics and Nanofluidics*, **22**(5), pp. 1-13.

- [35] Akbari, M., Sinton, D. and Bahrami, M., 2010, "Laminar Fully Developed Flow in Periodically Converging-Diverging Microtubes", *Heat Transfer Engineering*, **31**(8), pp. 628-634.
- [36] Radenković, D., Milićev, S. and Stevanovic, N., 2016, "Rarefied Gas Flow in Microtubes at Low Reynolds Numbers", *FME Transactions*, **44**, pp. 10–15.
- [37] Duan, Z. and Muzychka, Y. S., 2007, "Slip flow in elliptic microchannels", *International Journal of Thermal Sciences*, **46**, pp. 1104-1111.
- [38] Ewart, T., Perrier, P., Graur, I. and Meolans, J. G., 2006, "Mass Flow Rate Measurements in Gas Micro Flows", *Experiments in Fluids*, **41**, pp. 487-498.
- [39] Zhao, Q., Yue, X. and Wang, F., 2012, "Experimental Study of the Real Gas Flow in Microtubes", *Advanced Materials Research*, **496**, pp. 347-350.
- [40] Sun, W., Kakac, S. and Yazicioglu, A. G., 2007, "A Numerical Study of Single-Phase Convective Heat Transfer in Microtubes for Slip Flow", *International Journal of Thermal Sciences*, **46**(11), pp. 1084-1094.
- [41] Kim, T. W. and Park, T. S., 2019, "Size effect on compressible flow and heat transfer in microtube with rarefaction and viscous dissipation", *Numerical Heat Transfer, Part A*, **76**(11), pp. 871-888.
- [42] Hong, C., Asako, Y., Faghri, M. and Lee, J., 2009, "Poiseuille Number Correlations for Gas Slip Flow in Microtubes", *Numerical Heat Transfer, Part A*, **56**, pp. 785-806.
- [43] Zhao, H., 2001, "The Numerical Solution of Gaseous Slip Flows in Microtubes", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **28**(4), pp. 585-594.
- [44] Aziz, A. and Niedbalski, N., 2011, "Thermally Developing Microtube Gas Flow with Axial Conduction and Viscous Dissipation", *International Journal of Thermal Sciences*, **50**(3), pp. 332-340.
- [45] Xiao, N., Elsnab, J. and Ameen, T., 2009, "Microtube Gas Flows with Second-Order Slip Flow and Temperature Jump Boundary Conditions". *International Journal of Thermal Sciences*, **48**, pp. 243-251.
- [46] Kushwaha, H. M. and Sahu, S. K., 2014, "Analysis of Gaseous Flow in a Micropipe with

- Second Order Velocity Slip and Temperature Jump Boundary Conditions”, *Heat and Mass Transfer*, **50**(12), pp. 1649-1659.
- [47] Tunc, G. and Bayazitoglu, Y., 2001, “Heat Transfer in Microtubes with Viscous Dissipation”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **44**, pp. 2395-2403.
- [48] Hong, C., Asako, Y., Ueno, I. and Motosuke, M., 2014, “Total Temperature Measurement of Laminar Gas Flow at Microtube Outlet: Cooled From the Wall”, *Heat Transfer Engineering*, **35**(2), pp. 142-149.
- [49] Hemadri, V., Biradar, G. S., Shah, N., Garg, R., Bhandarkar, U.V. and Agrawal, A., 2018, “Experimental Study of Heat Transfer in Rarefied Gas Flow in a Circular Tube with Constant Wall Temperature”, *Experimental Thermal and Fluid Science*, **93**, pp. 326–333.
- [50] Reynolds, O., 1879, “On Certain Dimensional Properties of Matter in the Gaseous State”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **170**, pp. 727-845.
- [51] Sharipov, F., 1996, “Rarefied Gas Flow Through a Long Tube at Any Temperature Ratio”, *Journal of Vacuum Science & Technology A*, **14**(4), pp. 2627-2635.
- [52] Graur, I. and Sharipov, F., 2009, “Non-isothermal flow of rarefied gas through a long pipe with elliptic cross section”, *Microfluid Nanofluid*, **6**, pp. 267-275.
- [53] Sharipov, F. and Bertoldo, G., 2005, “Rarefied gas flow through a long tube of variable radius”, *Journal of Vacuum Science & Technology A*, **23**(3), pp. 531-533.
- [54] Cardenas, M. R., Graur, I., Perrier, P. and Meolans, J. G., 2011, “Thermal Transpiration Flow: A Circular Cross-Section Microtube Submitted to a Temperature Gradient”, *Physics of fluids*, **23**, pp. 031702-1-4.
- [55] Porodnov, B. T., Kulev, A. N. and Tuchvetov, F. T., 1978, “Thermal Transpiration in a Circular Capillary with a Small Temperature Difference”, *Journal of Fluid Mechanics*, **88**(4), pp. 609-622.
- [56] Graetz, L., 1883, “Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten (On the thermal conductivity of liquids, part 1)”, *Annalen der Physik und Chemie*, **18**, pp. 79-94.
- [57] Graetz, L., 1885, “Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten (On the thermal



- conductivity of liquids, part 2)", *Annalen der Physik und Chemie*, **25**, pp. 337-357.
- [58] Nusselt, W., 1910, "Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge (The dependence of the heat-transfer coefficient on the tube length)", *VDIZ*, **54**, pp. 1154-1158.
- [59] Shah, R. K., Ed., 1978, "Laminar Flow Forced Convection in Ducts: A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data", Academic Press.
- [60] Barron, R. F., Wang, X. M., Ameel, T. A. and Warrington, R. O., 1997, "The Graetz Problem Extended to Slip-Flow", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **40**(8), pp. 1817-1823.
- [61] Barron, R. F., Wang, X. M., Warrington, R. O. and Ameel, T. A., 1996, "Evaluation of the Eigenvalue s for the Graetz Problem in Slip-Flow", *The International Communications in Heat and Mass Transfer*, **23**(4), pp. 563-574.
- [62] Larrode, F. E., Housiadas, C. and Drossinos, Y., 2000, "Slip-Flow Heat Transfer in Circular Tubes", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **43**, pp. 2669-2680.
- [63] Ameel, T. A., Barron, R. F., Wang, X. M. and Warrington, R. O., 1997 "Laminar forced convection in a circular tube with constant heat flux and slip flow", *The Microscale Thermophysical Engineering*, **1**, pp. 303-320.
- [64] Aydin, O and Avcı, M., 2006, "Analysis of micro-Graetz problem in a microtube", *Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering*, **10**, pp. 345-358.
- [65] Avcı, M. and Aydin, O., 2018, "Analysis of extended micro-Graetz problem in a microtube", *Sadhana - An Official Journal of the Indian Academy of Sciences*, **43**(105), pp. 1-9.
- [66] Cetin, B., Yazicioglu, A. G. and Kakac, S., 2008, "Fluid flow in microtubes with axial conduction including rarefaction and viscous dissipation", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **35**, pp. 535-544.
- [67] Cetin, B. and Zeinali, S., 2014, "Analysis of Heat Transfer and Entropy Generation for a Low-Peclet-Number Microtube Flow Using a Second-Order Slip Model: an Extended-Graetz Problem", *Journal of Engineering Mathematics*, **89**(1), pp. 13-25.

- [68] Cetin, B., Yazicioglu, A. G. and Kakac, S., 2009, "Slip-flow heat transfer in microtubes with axial conduction and viscous dissipation - An extended Graetz problem", *International Journal of Thermal Sciences*, **48**, pp. 1673-1678.
- [69] Barisik, M., Yazicioglu, A. G., Cetin, B. and Kakac, S., 2015, "Analytical Solution of Thermally Developing Microtube Heat Transfer Including Axial Conduction, Viscous Dissipation, and Rarefaction Effects", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **67**, pp. 81-88.
- [70] Jeong, H. E. and Jeong, J. T., 2006, "Extended Graetz Problem Including Axial Conduction and Viscous Dissipation in Microtube", *Journal of Mechanical Science and Technology*, **20**(1), pp. 158-166.
- [71] Maharjan, D., Hadj-Nacer, M., Ho, M. T., Stefanov, S. K., Graur, I. and Greiner, M., 2015, "Simulation of Heat Transfer Across Rarefied Gas in Annular and Planar Geometries: Comparison of Navier-Stokes, S-Model and DSMC Methods Results", *ASME 2015 13th international conference on nanochannels, microchannels, and minichannels collocated with the ASME 2015 international technical conference and exhibition on packaging and integration of electronic and photonic microsystems Proceedings*, San Francisco, CA, USA, 6-9 July, ICNMM2015-48034, V001T04A032, pp. 1-10.
- [72] Pantazis, S. and Valougeorgis, D., 2010, "Heat Transfer Through Rarefied Gases Between Coaxial Cylindrical Surfaces with Arbitrary Temperature Difference", *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, **29**(6), pp. 494-509.
- [73] Aoki, K., Sone, Y. and Waniguchi, Y., 1998, "A Rarefied Gas Flow Induced by a Temperature Field: Numerical Analysis of the Flow between Two Coaxial Elliptic Cylinders with Different Uniform Temperatures", *Computers & Mathematics with Applications*, **35**(1/2), pp. 15-28.
- [74] Weng, H. C. and Chen, C. K., 2009, "Drag Reduction and Heat Transfer Enhancement Over a Heated Wall of a Vertical Annular Microchannel", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **52**(3-4), pp. 1075-1079.
- [75] Shamshiri, M., Ashrafizaadeh, M. and Shirani, E., 2012, "Investigation of Flow and Heat Transfer Characteristics of Rarefied Gaseous Slip Flow in Nonplanar Micro-Couette

- Configuration”, *International Journal of Thermal Sciences*, **54**, pp. 262-275.
- [76] Duan, Z. and Muzychka, Y. S., 2008, “Slip Flow Heat Transfer in Annular Microchannels With Constant Heat Flux”, *Journal of Heat Transfer*, **130**(9), pp. 092401-1-8.
- [77] Barbera, E. and Brini, F., 2017, “Non-isothermal axial flow of a rarefied gas between two coaxial cylinders”, *Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti - Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, **95**(2), pp. A1-1-12.
- [78] Yuan, Y. and Rahman, S., 2016, “Extended application of lattice Boltzmann method to rarefied gas flow in micro-channels”, *Physica A*, **463**, pp. 25-36.
- [79] Karniadakis, G., Beskok, A. and Aluru, N., 2005, “Microflows and Nanoflows”, Springer-Verlag New York.
- [80] Maxwell, J. C., 1879, “On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **170**, pp. 231–256.
- [81] Stevanović, N., 2004, “Prilog Teoriji Strujanja Razredjenih Gasova u Mikrokanalima”, *Doktorska disertacija*, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet, Beograd.
- [82] Hsia, Y. and Domoto, G., 1983, “An Experimental Investigation of Molecular Rarefaction Effect in Gas-Lubricated Bearings at Ultra Low Clearances”, *Journal of Lubrication Technology*, **105**, pp. 120-130.
- [83] Smoluchowski von Smolan, R. M., 1898, “Ueber Wärmeleitung in verdunnten Gasen”, *Annals of Physics*, **300**, pp. 101–130.
- [84] Stevanović, N. D., 2007, “A New Analytical Solution of Microchannel Gas Flow”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **17**(8), pp. 1695-1702.
- [85] Milićev, S., 2011, “Neizotemska Strujanja Razređenog Gasa u Mikrokanalima”, *Doktorska disertacija*, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu.
- [86] Beskok, A., Karniadakis, G. E. and Trimmer, W., 1996, “Rarefaction and Compressibility Effects in Gas Microflows”, *Journal of Fluids Engineering - Transactions of the ASME*, **118**, pp. 448-456.
- [87] Weng, C. I., Li, W. L. and Hwang, C. C., 1999, “Gaseous Flow in Microtubes at Arbitrary

- Knudsen Numbers”, *Nanotechnology*, **10**, pp. 373-379.
- [88] Guranov, I, Milićev, S. and Stevanović, N., 2021, “Influence of Second Order Effects on Pressure Distribution in Microtubes”, *Proceedings of the 8th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Serbian Society of Mechanics and Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade*, pp. 93-94.
- [89] Stevanović, N. and Milićev, S., 2009, “Inertia Effects in Microbearing Gas Flow”, *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Tribology - SERBIATRIB, Serbian Tribology Society - Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, Belgrade*, pp. 202-207.
- [90] Stevanović, N., 2014, “Osnove Mikrofluidike i Nanofluidike”, *Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu*.
- [91] Guranov, I., Milićev, S. and Stevanović, N., 2018, “An Isothermal Compressible Slip Gas Flow Through Microtube. Book Of Abstracts”, *6th International Conference of Applied Science, Banja Luka*, p. 35.
- [92] Guranov, I., Milićev, S. and Stevanović, N., 2019, “Pressure Distribution in Microtubes with Variable Cross Section”, *Proceedings of the 7th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Serbian Society of Mechanics and Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade*, pp. F1a-1-8.
- [93] Rarefied flow calculator - Rarefied Gas Flow Through a Long Cylindrical Tube, sa <http://fisica.ufpr.br/sharipov/tube.html>, pristupano 27.01.2020.
- [94] Rarefied flow calculator - Rarefied Gas Flow Through a Long Conic Tube, sa <http://fisica.ufpr.br/sharipov/cone.html>, pristupano 27.01.2020.
- [95] Milićev, S. and Stevanović, N., 2013, “A Non-isothermal Couette Slip Gas Flow ”, *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, **56**, pp. 1782-1797.
- [96] Stevanović, N. and Milićev, S., 2010, “A Constant Wall Temperature Microbearing Gas Flow”, *FME Transactions*, **38**, pp. 71-77.
- [97] Milićev, S. and Stevanović, N., 2012, “A Microbearing Gas Flow with Different Walls Temperatures”, *Thermal Science*, **16**(1), pp. 119-132.

- [98] Asako, Y. and Hong, C., 2017, “On Temperature Jump Condition for Slip Flow in a Micro-channel with Constant Wall Temperature”, *International Journal of Thermal Sciences*, **139**, p. 072402.
- [99] Guranov, I., Milićev, S. and Stevanović, N., 2021, “Non-isothermal Rarefied Gas Flow in Microtube with Constant Wall Temperature”, *Advances in Mechanical Engineering*, **13**(11), pp. 1-9.
- [100] Taheri, P. and Struchtrup, H., 2012, “Poiseuille Flow of Moderately Rarefied Gases in Annular Channels”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **55**(4), pp. 1291-1303.
- [101] Taheri, P., Torrilhon, M. and Struchtrup, H., 2009, “Couette and Poiseuille Microflows: Analytical Solutions for Regularized 13-moment Equations”, *Physics of Fluids*, **21**, pp. 017102-1-11.
- [102] Char, M. I. and Tai, B. C., 2010, “Effects of Viscous Dissipation on Slip-Flow Heat Transfer in a Micro Annulus”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **53**(7-8), pp. 1402-1408.

## Биографија аутора

Ива И. Гуранов рођена је 18.09.1986. у Загребу. Основну школу „Свети Сава” у Житишту и средњу Техничку школу у Зрењанину, стекавши звање машински техничар, завршила је са одличним успехом и награђена је дипломама „Вук Стефановић Караџић”.

Машински факултет Универзитета у Београду уписала је 2005. године. Основне студије завршила је 07.07.2008. године, са просечном оценом 9,63. Мастер студије на Модулу за хидроенергетику завршила је 01.10.2010. године са просечном оценом 9,80. Докторске студије на Машинском факултету у Београду уписала је 2010. и положила све испите предвиђене програмом са просечном оценом 10.

Од 01.01.2011. запослена је на Машинском факултету као истраживач-сарадник на пројекту МПНТР Републике Србије ТР35046. На Катедри за механику флуида активно је била укључена у наставни процес и ангажована на одржавању аудиторних и лабораторијских вежби на предмету Механика флуида Б. Учествоје у организацији и одржавању испита на Катедри за механику флуида и редовно се одазива позивима за ангажовање Комисије за дежурства на испитима. У периоду 2014-2016 активно је била укључена у наставни процес и ангажована на одржавању аудиторних вежби и организацији и одржавању испита на предметима: Механика флуида, Механика 1 и 2, Техничка механика, Наука о чврстоћи, Отпорност материјала на Рударско-геолошком факултету у Београду. Учествовала је у еталонирањима мерила протока ваздуха у оквиру Лабораторије за механику флуида Машинског факултета, у периоду 2012-2018.

Познаје програмске језике и пакете: Fortran, Java, JavaScript, Kotlin, Autodesk Inventor, AutoCAD, SolidWorks, MatLab, Wolfram Mathematica, MS Office, Libre Office, Latex, OpenFOAM, Xfig, GIMP, Gnuplot, Octave, SciLab. Служи се енглеским језиком, на почетном нивоу влада немачким језиком.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а \_\_\_\_\_ Ива Гуранов \_\_\_\_\_

број индекса \_\_\_\_\_ Д10/2010 \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

### “Струјања разређеног гаса у микроцевима”

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора \_\_\_\_\_ Ива Гуранов \_\_\_\_\_

Број индекса \_\_\_\_\_ Д10/2010 \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_ Докторске академске студије \_\_\_\_\_

Наслов рада \_\_\_\_\_ "Струјања разређеног гаса у микроцевима" \_\_\_\_\_

Ментори \_\_\_\_\_ др Снежана Милићев, ванредни професор \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ др Невена Стевановић, редовни професор \_\_\_\_\_

Потписани/а \_\_\_\_\_ Ива Гуранов \_\_\_\_\_

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

**“Струјања разређеног гаса у микроцевима”**

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

1. Ауторство - Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.