

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Владимир Р. Зарић

УСЛОВНА ОПТИМИЗАЦИЈА  
ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМА  
АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА  
ПРИМЕНОМ ПОТПУНЕ ПРЕНОСНЕ  
ФУНКЦИЈЕ

докторска дисертација

Београд, 2022

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Vladimir R. Zarić

CONDITIONAL OPTIMIZATION OF  
DISCRETE-TIME CONTROL SYSTEMS USING THE  
FULL TRANSFER FUNCTION

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2022

---

МЕНТОР:

- др Радиша Јовановић, редовни професор,  
Машински факултет Универзитета у Београду

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

- др Радиша Јовановић, редовни професор,  
Машински факултет Универзитета у Београду
- др Драган Лазић, редовни професор,  
Машински факултет Универзитета у Београду
- др Милан Ристановић, редовни професор,  
Машински факултет Универзитета у Београду
- др Срђан Рибар, ванредни професор,  
Машински факултет Универзитета у Београду
- др Драган Пршић, ванредни професор  
Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву Универзитета у Крагу-  
јевцу

Датум одбране:

---

*Изјаве захвалности*

Неизмерно се захваљујем проф. др Радиши Јовановићу на преузетим обавезама ментора, на бројним саветима, стрпљењу, неограниченом поверењу и његовој истрајности у заједничком раду.

Такође, посебну захвалност дугујем проф. др Зорану Бучевцу на увођењу у научни рад, на одабиру теме, на издвојеном времену, стручној помоћи и несебичној моралној подршци.

Захваљујем се пријатељима и колегама на корисним саветима.

Најтоплије се захваљујем својој породици на разумевању, подршци и важним животним лекцијама.

Београд, август 2022. године

*Аутор*

---

# УСЛОВНА ОПТИМИЗАЦИЈА ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМА АУТОМАТСКОГ УПРАВЉАЊА ПРИМЕНОМ ПОТПУНЕ ПРЕНОСНЕ ФУНКЦИЈЕ

## Резиме

У оквиру докторске дисертације истражује се синтеза управљачког система пропорционално-диференцијално-сумарног (ПДС) типа на основу карактеристичног полинома потпуне преносне функције. Потпуна преносна функција омогућава да се добију тачни резултати у погледу скраћивања једнаких нула и полова, добијања карактеристичног полинома и одређивања потпуног одзива система. На почетку се одређује област релативне стабилности у простору подешљивих параметара управљачког система тако да степен пригушења  $\zeta$  има унапред захтевану вредност. То је урађено у случају два подешљива параметра на примерима ПД и ПС управљачких система. Осим тога, пронађена је област релативне стабилности у случају три подешљива параметра ПДС управљачког система. У наредном кораку се спроводи метода условне оптимизације при чему се користи израз за грешку излазне величине који узима у обзир истовремено дејство нултих почетних услова и спољашњег улаза, а што је омогућено применом потпуне преносне функције. На тај начин се проналазе оптимални параметри линеарних управљачких система ПДС типа за које индекс перформансе, у облику суме квадрата грешака, има минималну вредност.

У другом делу дисертације претходно развијена метода условне оптимизације линеарних дискретних система се проширује и примењује на класу нелинеарних дискретних система, у облику Такаги-Сугено (ТС) фази система. У ту сврху је искоришћена особина ТС фази система да се динамика нелинеарног система може изразити помоћу неколико линеарних (линеаризованих) система. Нелинеарни Такаги-Сугено фази модел, који веродостојно описује понашање система на целом простору излаза, се добија интерполацијом неколико линеарних математичких модела. Извршена је синтеза управљачког система типа паралелно расподељеног управљања (PDC) који користи исте функције припадности као и нелинеарни Такаги-Сугено модел објекта. Овакав управљачки систем интерполира неколико локалних линеарних управљачких система. Захваљујући теорији потпуне преносне функције, разматра се најопштији и најреалистичнији случај условне оптимизације локалних линеарних управљачких система, при чему је грешка резултат истовременог деловања нултих почетних услова и спољашњег улаза. Одређени су оптимални параметри за три линеарна пропорционално-сумарна (ПС) контролера при нултим и ненултим почетним условима, уважавајући захтев да сви појединачни затворени системи имају захтевани степен пригушења  $\zeta$ . Урађена је синтеза PDC контролера који користи исте функције припадности као и фази ТС модел објекта, у два случаја. У првом случају, PDC контролер је састављен од три локална линеарна ПС контролера чији су параметри одређени при нултим почетним условима. У другом случају, PDC контролер чине линеарни контролери чији су параметри одређени при ненултим почетним условима.

Кључне речи: дискретни системи аутоматског управљања, синтеза у тродимензионом простору, релативна стабилност, потпуна преносна функција, условна стабилизација и оптимизација, Такаги-Сугено, фази управљање, паралелно расподељено управљање.

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Аутоматско управљање

УДК број: 681.511:519.718(043.3)

---

# CONDITIONAL OPTIMIZATION OF DISCRETE-TIME CONTROL SYSTEMS USING THE FULL TRANSFER FUNCTION

## Summary

The doctoral dissertation investigates the synthesis of a proportional-difference-sum (PDS) type control system based on the characteristic polynomial of the full transfer function. The full transfer function makes it possible to obtain accurate results in terms of cancellation of equal zeros and poles, obtaining the characteristic polynomial and determining the full response of the system. At the beginning, the relative stability area in the space of adjustable parameters of the control system is determined so that damping coefficient  $\zeta$  has the value required in advance. This was done in the case of two adjustable parameters using the examples of PD and PS control systems. In addition, an area of relative stability was found in the case of three adjustable parameters of the PDS control system. In the next step, the method of conditional optimization is implemented using an expression for the output error that includes the simultaneous influence of nonzero initial conditions and the external output, which is made possible by applying a full transfer function. Thus, the optimal parameters of the PDS type linear control systems are found for which the performance index, in the form of the sum of squared errors, has a minimum value.

In the second part of the dissertation, the previously developed method of conditional optimization of linear discrete systems is extended and applied to the class of nonlinear discrete systems, in the form of Takagi-Sugeno (TS) fuzzy systems. For this purpose, the property of the TS fuzzy system was used that the dynamics of a nonlinear system can be expressed using several linear (linearized) systems. The nonlinear Takagi-Sugeno fuzzy model, which credibly describes the behavior of the system over the entire output space, is obtained by interpolating several linear mathematical models. A synthesis of a PDC (parallel distributed compensation) control system using the same membership functions as the nonlinear Takagi-Sugeno fuzzy model of the plant was performed. Such control system interpolates several local linear control systems. Thanks to the theory of the complete transfer function, the most general and realistic case of conditional optimization of the local linear control systems is considered, where the output error is the result of the simultaneous action of nonzero initial conditions and external input. The optimal parameters for three local linear proportional-sum (PS) controllers at zero and nonzero initial conditions were determined, considering the requirement that all individual closed systems have the required damping coefficient  $\zeta$ . Synthesis of a PDC controller that uses the same membership functions as the fuzzy TS plant model is made in two cases. In the first case, the PDC controller is composed of three local linear PS controllers whose parameters are determined at zero initial conditions. In the second case, the PDC controller consists of linear controllers whose parameters are determined at nonzero initial conditions.

Key words: Discrete-time control systems, three parameters synthesis, relative stability, full transfer function, conditional stabilization and optimization, Takagi-Sugeno, fuzzy control, parallel distributed compensation.

Scientific area: Mechanical engineering

Narrow scientific area: Control engineering

UDC number: 681.511:519.718(043.3)

# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>1</b>
1.1	Кратак преглед докторске дисертације по поглављима . . . . .	1
1.2	Циљ и задатак рада . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Условна оптимизација линеарних дискретних система</b>	<b>5</b>
1.3	Преглед стања у области . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Класе објеката и њихови математички модели</b>	<b>11</b>
2.1	<i>УИ</i> објекти . . . . .	11
2.1.1	Математички модел у тоталним координатама . . . . .	11
2.1.2	Жељени режим . . . . .	12
2.1.3	Математички модел по одступањима . . . . .	12
2.2	<i>УСИ</i> објекти . . . . .	13
2.2.1	Математички модел у тоталним координатама . . . . .	13
2.2.2	Жељени режим . . . . .	13
2.2.3	Математички модел по одступањима . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Управљачки системи и њихови математички модели</b>	<b>15</b>
3.1	Преглед могућих управљачких система . . . . .	15
3.2	Пропорционално-диференчно (ПД) дејство . . . . .	17
3.2.1	Математички модели ( <i>УИ</i> , <i>УСИ</i> ) у тоталним координатама . . . . .	17
3.2.2	Математички модели ( <i>УИ</i> , <i>УСИ</i> ) по одступањима . . . . .	18
3.3	Пропорционално-сумарно (ПС) дејство . . . . .	19
3.3.1	Математички модели ( <i>УИ</i> , <i>УСИ</i> ) у тоталним координатама . . . . .	19
3.3.2	Математички модели ( <i>УИ</i> , <i>УСИ</i> ) по одступањима . . . . .	22
3.4	Пропорционално-диференчно-сумарно (ПДС) дејство . . . . .	23
3.4.1	Математички модели ( <i>УИ</i> , <i>УСИ</i> ) у тоталним координатама . . . . .	23
3.4.2	Математички модели ( <i>УИ</i> , <i>УСИ</i> ) по одступањима . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Математички модел затвореног система аутоматског управљања</b>	<b>26</b>
4.1	<i>УИ</i> систем . . . . .	26
4.1.1	Математички модел по одступањима . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Потпуна преносна функција: ненулти почетни услови</b>	<b>31</b>
5.1	Општа дефиниција и одређивање $\Pi(z)$ : ненулти почетни услови . . . . .	31
5.2	Дефиниција и одређивање $\Pi(z)$ за <i>УИ</i> систем: ненулти почетни услови . . . . .	32
5.3	Недегенеративне матрице . . . . .	35

<b>6</b>	<b>Релативна стабилност, условна оптимизација и синтеза управљачког система: ненулти почетни услови</b>	<b>37</b>
6.1	Временски и комплексан домен, параметарска равна: ненулти почетни услови . . . . .	37
6.2	Критеријуми оптималности у комплексном домену . . . . .	40
6.3	Условна оптимизација управљаног објекта у параметарској равни: ненулти почетни услови . . . . .	43
6.4	Докази теорема . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Примена нове теорије условне оптимизације на линеарним дискретним системима</b>	<b>46</b>
7.1	Симулациони пример синтезе ПДС алгоритма управљања: нулти и ненулти почетни услови . . . . .	46
7.1.1	Математички модел објекта . . . . .	46
7.1.2	Математички модел управљачког система . . . . .	46
7.1.3	Математички модел затвореног система . . . . .	46
7.1.4	Потпуна преносна матрица . . . . .	47
7.1.5	Релативна стабилност . . . . .	48
7.1.6	Индекс перформансе . . . . .	50
7.1.7	Дискусија симулационих резултата . . . . .	52
7.2	Експериментални пример синтезе ПС алгоритма управљања: нулти и ненулти почетни услови . . . . .	54
7.2.1	Математички модел објекта . . . . .	54
7.2.2	Математички модел управљачког система . . . . .	55
7.2.3	Математички модел затвореног система . . . . .	55
7.2.4	Потпуна преносна функција . . . . .	55
7.2.5	Релативна стабилност . . . . .	57
7.2.6	Индекс перформансе . . . . .	58
7.2.7	Дискусија експерименталних резултата . . . . .	61
7.3	Експериментални пример синтезе ПД алгоритма управљања: нулти и ненулти почетни услови . . . . .	63
7.3.1	Математички модел објекта . . . . .	63
7.3.2	Математички модел управљачког система . . . . .	64
7.3.3	Математички модел затвореног система . . . . .	64
7.3.4	Потпуна преносна функција . . . . .	64
7.3.5	Релативна стабилност . . . . .	65
7.3.6	Индекс перформансе . . . . .	66
7.3.7	Дискусија експерименталних резултата . . . . .	69
<b>2</b>	<b>Условна оптимизација нелинеарних дискретних система</b>	<b>72</b>
<b>8</b>	<b>Фази управљање и моделовање</b>	<b>73</b>
8.1	Преглед литературе релевантне за други део дисертације . . . . .	74
8.2	Такаги-Сугено фази системи . . . . .	77
8.3	Паралелно расподељено управљање . . . . .	78
8.4	Оптимизациони алгоритам сивих вукова . . . . .	78
8.5	Примена ТС моделовања, оптимизације и PDC управљања . . . . .	79
8.5.1	Опис система термотунела . . . . .	80



---

8.5.2	Такаги-Сугено модел заснован на линеарним моделима (ТС-ПОЧ) . . . . .	81
8.5.3	Оптимизација Такаги-Сугено модела (ТС-ОПТ) . . . . .	82
8.5.4	Синтеза управљачког система . . . . .	84
8.5.5	Још експерименталних резултата . . . . .	85
8.5.6	Дискусија резултата . . . . .	88
<b>9</b>	<b>Примена нове теорије условне оптимизације на нелинеарним дискретним системима</b>	<b>90</b>
9.1	Експериментални пример условне оптимизације PDC управљачког система . . . . .	90
9.1.1	Такаги-Сугено модел мотора једносмерне струје базиран на линеарним моделима . . . . .	91
9.1.2	Условна оптимизација под дејством ненултих почетних услова	93
9.1.3	Синтеза управљачког система . . . . .	100
9.1.4	Симулациони и експериментални резултати . . . . .	101
9.2	Симулациони пример условне оптимизације PDC управљачког система	103
<b>10</b>	<b>Закључак</b>	<b>107</b>
	<b>Литература</b>	<b>109</b>

# Списак слика

4.1	Структурни дијаграм затвореног система аутоматског управљања са јединичном негативном повратном спрегом. . . . .	26
6.1	Потпуни блок дијаграм затвореног система аутоматског управљања са једном излазном величином и једном поремећајном величином. . .	40
6.2	Еквивалентни потпуни блок дијаграм система. . . . .	43
7.1	Површина константног степена пригушења $\zeta = 0,7$ у $\alpha\beta\gamma$ параметарском простору. . . . .	50
7.2	Површина константног степена пригушења са приказаним минималним вредностима индекса перформансе у случају ненултих и нултих почетних услова. . . . .	52
7.3	Јединични одскочни одзиви система у случају ненултих (нова теорија) и нултих (класична теорија) почетних услова. . . . .	53
7.4	Увеличан део слике 7.3. . . . .	53
7.5	Област константног степена пригушења $\zeta = 0,7$ у $\alpha\beta$ параметарској равни. . . . .	58
7.6	Крива константног степена пригушења са неколико унетих вредности индекса перформансе при ненултим почетним условима; * оптималне вредности параметара $\alpha$ и $\beta$ , $(\alpha_{opt\_nenulti}, \beta_{opt\_nenulti}) = (13,9371, 60,052)$ . . . . .	60
7.7	Крива константног степена пригушења са неколико унетих вредности индекса перформансе при нултим почетним условима (класични приступ); * оптималне вредности параметара $\alpha$ и $\beta$ , су $(\alpha_{opt\_nulti}, \beta_{opt\_nulti}) = (14,0891, 0,0662)$ . . . . .	60
7.8	Експериментални 0,6 одскочни одзиви са оптималним параметрима добијеним на основу нове теорије (плав одзив који започиње из ненултих почетних услова) и на основу класичне теорије (црвени одзив који започиње из ненултих и зелени који започиње из нултих почетних услова). . . . .	61
7.9	Увеличан део слике 7.8. . . . .	62
7.10	Верификација дискретног модела објекта. . . . .	63
7.11	Област константног степена пригушења $\zeta = 0,7$ у $\alpha\beta$ параметарској равни. . . . .	66
7.12	Крива константног степена пригушења са неколико унетих вредности индекса перформансе при ненултим почетним условима; * оптималне вредности параметара $\alpha$ и $\beta$ , $(\alpha_{opt\_nenulti}, \beta_{opt\_nenulti}) = (49,5726, 9,4586)$ . . . . .	68
7.13	Крива константног степена пригушења са неколико унетих вредности индекса перформансе при нултим почетним условима (класични приступ); * оптималне вредности параметара $\alpha$ и $\beta$ , су $(\alpha_{opt\_nulti}, \beta_{opt\_nulti}) = (11,0438, 9,8749)$ . . . . .	69

7.14	Експериментални 0,7 одскочни одзиви постигнути на основу нове теорије (плава крива која започиње из ненултих почетних услова) и на основу класичне теорије (црвена крива која започиње из нултих почетних услова). . . . .	70
7.15	Увеличан део слике 7.14. . . . .	70
7.16	Управљачки сигнали. . . . .	71
8.1	Експериментална инсталација термотунела компаније Quanser. . . . .	80
8.2	Функције припадности. . . . .	82
8.3	Улазни сигнал за оптимизацију модела. . . . .	82
8.4	Оптимизоване функције припадности. . . . .	83
8.5	Поређење почетног и оптимизованог ТС модела. . . . .	83
8.6	Поређење PDC-ОПТ и ПС контролера око 57 [°C]. . . . .	85
8.7	Поређење PDC контролера са почетним (ТС-ПОЧ) и оптимизованим (ТС-ОПТ) моделом објекта. . . . .	86
8.8	Поређење PDC контролера са почетним (ТС-ПОЧ) и оптимизованим (ТС-ОПТ) ТС моделима објекта. . . . .	87
8.9	Управљачки сигнали. . . . .	87
8.10	Поређење PDC контролера са почетним (ТС-ПОЧ) и оптимизованим (ТС-ОПТ) моделима објекта. . . . .	88
9.1	Функције припадности. . . . .	92
9.2	Крива константног степена пригушења $\zeta = 0,7$ у $\alpha\beta$ параметарској равни. . . . .	96
9.3	Крива константног степена пригушења са нанетим оптималним вредностима при ненултим и нултим почетним условима. . . . .	99
9.4	Симулациони и експериментални резултати одскочних одзива пројектованих PDC контролера који узимају у обзир нулте и ненулте почетне услове. . . . .	101
9.5	Симулациони и експериментални резултати управљачких сигнала пројектованих PDC контролера који узимају у обзир нулте и ненулте почетне услове. . . . .	102
9.6	Систем спрегнутих резервоара. . . . .	103
9.7	Функције припадности идентификованог нелинеарног ТС фази модела објекта. . . . .	105
9.8	Одзиви услед PDC управљања и једног линеарног ПС контролера. . . . .	105
9.9	Управљачки сигнали PDC контролера и једног линеарног ПС контролера. . . . .	106

# Списак табела

8.1	Линеарни модели и номиналне вредности. . . . .	81
8.2	Вредности прескока за различите одскочне одзиве. . . . .	86
9.1	Линеарни модели и номиналне вредности. . . . .	91
9.2	Ненулти почетни услови и оптималне вредности. . . . .	100
9.3	Нулти почетни услови и оптималне вредности. . . . .	100
9.4	Линеарни модели и номиналне вредности. . . . .	104
9.5	Линеарни модели у простору стања. . . . .	104
9.6	Вредности параметара ПС контролера. . . . .	104

# Глава 1

## Увод

### 1.1 Кратак преглед докторске дисертације по поглављима

Уводна глава ове дисертације пружа основне поставке проблема које дисертација разматра. Дате су предности и мане приступа синтезе у улазно-излазном простору у односу на синтезу система у простору стања. Такође, на крају је дат и селективан и хронолошки преглед литературе и досадашњих резултата на пољу изучавања условне оптимизације временски континуалних и дискретних линеарних система аутоматског управљања.

Друга глава се бави разматрањем различитих класа објеката аутоматског управљања. Посматрају се улаз-излаз (УИ) математички модели објеката као и улаз-стање-излаз (УСИ) математички модели објекта. За обе ове класе су дати њихови модели у тоталним координатама, у жељеном радном режиму као и по одступањима.

У трећој глави је приказан преглед могућих управљачких система у УИ и УСИ облику. Пажња је посвећена управљачким системима различитог реда пропорционално-диференчно-сумарног (ПДС) типа од којих су неки примењени на конкретним примерима у каснијим поглављима. Њихови математички модели су дати у тоталним координатама и по одступањима.

Четврта глава је посвећена затвореном систему аутоматског управљања. У њој су обједињени математички модел објекта и математички модел управљачког система како би се добио математички модел целог система јер се на основу њега уочава карактеристични полином целог система који је неопходан и од круцијалног значаја за разматрања у наредним поглављима.

Пета глава говори о потпуној преносној функцији која је од фундаменталног значаја за ову дисертацију. Дата је њена општа дефиниција и поступак одређивања као и поступак одређивања за УИ систем. Након тога је представљен значај недегенеративне матрице за скраћивање једнаких нула и полова.

Шеста глава објашњава поступак одређивања области (равни) релативне стабилности тако да затворен систем аутоматског управљања има унапред захтевани степен пригушења. У овој дисертацији, постојећа метода, која важи за два подешљива параметра, је проширена и уопштена тако да је дат поступак за одређивање области (површине) релативне стабилности при чему су непозната три подешљива параметра. Затим је приказан поступак условне оптимизације при чему грешка излазне величине у изразу за индекс перформансе, у облику суме квадрата грешака, истовремено узима у обзир дејство ненултих почетних услова и спољашњег улаза.

У седмој глави приказана је примена метода развијених у овој дисертацији на конкретним примерима линеарних система. Најпре је извршена условна оптимизација и одређени оптимални параметри ПДС управљачког система првог реда и дати су симулациони резултати поређења класичне теорије која узима у обзир нулте почетне услове са новом теоријом која узима у обзир ненулта почетне услове. Експериментална верификација предложене методе извршена је на реалном објекту - мотору једносмерне струје, при чему је најпре одређен његов линеарни математички модел. Методом условне оптимизације су одређени оптимални параметри ПС управљачког система нултог реда и приказано је побољшање које се добија применом нове теорије у односу на класичну. На крају, у последњем примеру ове главе, развијена методологија условне оптимизације спроведена је на истом реалном објекту, само је овог пута идентификован линеарни модел и изабран ПД управљачки систем првог реда. Симулациони и експериментални резултати, као и у претходном примеру, показују предности нове теорије у односу на класичну у реалном случају када објект крене са радом из ненулта почетних услова.

Осма глава разматра дискретне Такаги-Сугено (ТС) фази системе који представљају класу нелинеарних дискретних система, и чија је основна карактеристика да интерполирају динамику неколико линеарних или линеаризованих система. Пројектован је почетни ТС фази модел у коме су функције припадности равномерно распоређене са центрима у номиналним тачкама појединачних линеарних математичких модела објекта термотунела. Почетни ТС фази модел објекта је оптимизован метахеуристичким алгоритмом сиви вукови тако да параметри у премисама фази правила имају оптималне вредности. Затим је урађена синтеза нелинеарног дискретног паралелно расподељеног управљања (PDC) које користи исте функције припадности као и ТС фази модел објекта. На крају су извршена поређења одзива објекта управљаног локалним линеарним ПС контролером и PDC контролером који користи почетни ТС фази модел као и PDC контролера који користи оптимални ТС фази модел. Осим на одскочном одзиву, ефикасност развијене методе је тестирана на проблему праћења променљиве задате вредности и на проблему компензације дејства поремећаја.

У деветој глави је теорија условне оптимизације при ненулта почетним условима за линеарне дискретне системе најпре примењена и експериментално верификована на сервомотору једносмерне струје као објекту управљања, при чему је пројектован нелинеарни дискретни PDC контролер кога чине три локална линеарна ПС управљачка система првог реда. Захваљујући теорији потпуне преносне функције извршено је поређење рада система при ненулта и нулта почетним условима при чему је остварен мањи индекс перформансе у случају примене нове теорије. Осим овог експерименталног истраживања урађен је и симулациони пример нелинеарног дискретног ТС фази модела објекта спрегнутих резервоара којима се управља помоћу нелинеарног дискретног PDC контролера који се састоји од три појединачна оптимална локална линеарна ПС управљачка система нултог реда. Сви резултати указују на то да је метода развијена у овој дисертацији потпунија од класичне зато што узима у обзир ненулта почетне услове из којих објект започиње свој рад. Класична метода даје параметре који би требало да буду оптимални за све почетне услове што очигледно није испуњено.

У последњој тематској, десетој глави изложени су основни закључци ове докторске дисертације.

## 1.2 Циљ и задатак рада

Циљ ове дисертације је, у првом кораку, да се алгебарском методом, на квалитативно другачији начин, одреди област подешљивих параметара који гарантују да систем има задат степен пригушења. Ова област релативне стабилности се одређује на основу карактеристичног полинома потпуне преносне функције  $P(z)$ . Ово се разликује од одговарајуће класичне процедуре у којој се користи карактеристични полином класичне преносне функције  $W(z)$ , који у општем случају могу да се разликују. Због ове разлике примена новог приступа гарантује исправан скуп подешљивих параметара који обезбеђују захтеван степен пригушења затвореног система аутоматског управљања. Одређени параметри још увек не гарантују задовољавајуће понашање система.

Из овог разлога, у другом кораку, избор подешљивих параметара, из скупа који је одређен у претходном кораку, се врши на основу додатног критеријума оптималности који подразумева да индекс перформансе, у облику суме квадрата грешака, има минималну вредност. У изразу за индекс перформансе фигурише грешка која у себи истовремено садржи утицај вектора улаза и ненултих почетних услова, за разлику од класичног приступа у коме је израз за грешку само узимао у обзир дејство вектора улаза. Ова разлика у односу на класични приступ је у складу са употребом карактеристичног полинома потпуне преносне матрице система.

Ово се може исказати и другачије: циљ ове дисертације је да открије и уведе квалитативно нови начин за условну оптимизацију линеарних стационарних временски дискретних система у два корака. У првом кораку одређује се област релативне стабилности (подешљиви параметри контролера за које ће систем имати захтеван степен пригушења) на основу новооткривеног карактеристичног полинома потпуне преносне матрице система, [1]. У другом кораку, коначан избор подешљивих параметара се врши на основу минималне вредности индекса перформансе у коме фигурише грешка која истовремено узима у обзир сва деловања на систем: вектор улаза и ненулте почетне услове.

У другом делу дисертације разматра се примена фази система у реализацији нелинеарних дискретних управљачких система. У ту сврху користи се Такаги-Сугено тип фази система за моделовање и управљање чија је основна идеја да се нелинеарна динамика система може моделовати кроз неколико линеарних подсистема. Наиме, Такаги-Сугено нелинеарни модел динамичког система представља нелинеарну интерполацију неколико линеарних математичких модела, и он описује динамику система на целом простору излаза, односно стања. Надаље, применом савремених интелигентних техника оптимизације, претежно метахеуристичких, одређују се оптималне вредности параметара фази модела система, уз присуство ограничења. Врши се синтеза управљачког система типа паралелно расподељеног управљања (PDC) који користи исте функције припадности као и нелинеарни Такаги-Сугено модел објекта, чиме се његова синтеза своди на синтезу неколико линеарних управљачких система у простору излаза. Осим тога, разматра се и синтеза класичних управљачких алгоритама управљања ПДС типа у контексту примене Такаги-Сугено фази система за моделовање и управљање дискретних система. Коначно, резултати добијени претходно описаним поступцима искоришћени су за синтезу Такаги-Сугено фази система у коме линеарни подсистеми представљају оптималне линеарне системе, за дату номиналну тачку, добијене условном оптимизацијом заснованој на концепту потпуне преносне функције. Очекује се да добијени систем управљања поседује квалитетније динамичко понашање у смислу

изабраног индекса перформансе, користећи предности оба поступка у односу на одговарајуће класичне алгоритме.

Као закључак, циљ предложене дисертације је синтеза управљачких система за две класе динамичких система, линеарне и нелинеарне дискретне системе. Предложени алгоритми управљања за линеарне системе користе по први пут концепт потпуне преносне функције у поступку условне оптимизације, а у циљу остваривања динамичког понашања са унапред дефинисаним показатељем у виду захтеваног степена пригушења затвореног система. Резултати добијени за линеарне системе се кроз Такаги-Сугено фази системе потом користе за синтезу управљачких система нелинеарних дискретних система, а кроз различите алгоритме оптимизације. Добијени резултати најпре су верификовани симулацијом на цифарском рачунару, а потом и кроз практичну реализацију, на реалним објектима, као што су мотор једносмерне струје, систем спрегнутих резервоара и струјно-термички процес.



## Део 1

# Условна оптимизација линеарних дискретних система

## 1.3 Преглед стања у области

Добро је познато да је стабилност неопходна али не и довољна карактеристика система за његово задовољавајуће понашање. Остваривање додатних захтева за задато динамичко понашање било је актуелна тема педесетих и шездесетих година прошлог века. Суштински проблем био је постављање полова преносне функције целог система у одговарајућу област  $s$ , односно  $z$  комплексне равни као резултат избора одговарајућих параметара управљачког система. Тиме је обезбеђена релативна стабилност система. Најчешће се локација полова одређује на основу захтеваног степена пригушења  $\zeta$  и/или времена смирења  $\sigma$ .

Пионирски рад на овом проблему у параметарској равни су спровели Вишнеградски [2], Нејмарк [3] и Д. Митровић који је развио графоаналитичку методу за два непозната параметра за континуалне и дискретне системе аутоматског управљања [4], [5], [6]. Касније је ова метода постала јако позната и цитирана у литератури под називом “Митровићева метода”. Прва два коефицијента карактеристичног полинома су била два непозната параметра.

Драгослав Шиљак је генерализовао Митровићеву методу тако што је дозволио да било која два коефицијента карактеристичног полинома буду подешљиви параметри [7], и мало након тога, независно један од другог, Шиљак [8] и Грујић [9] су развили методу по којој је могуће да неки коефицијенти карактеристичног полинома буду линеарно зависни од два подешљива параметра. Касније је Шиљак третирао линеарну зависност од два подешљива параметра [10], [11], свих коефицијената карактеристичног полинома што је основа алгебарске методе, док је у раду [12] разматрао анализу и синтезу нелинеарних система у параметарској равни. Сви ови приступи су имали своје недостатке. Ти недостаци се огледају у томе што нису узимали у обзир нуле преносне функције јер и оне утичу на квалитет динамичког понашања система.

Претходну мањкавост превазишао је Шиљак [8] где је успоставио концепт условне оптимизације у параметарској равни. То је учинио тако што је осим релативне стабилности увео додатни захтев за понашање система што је минимална вредност индекса перформансе у виду интеграла квадрата грешака. Оптимизацијом се одређују два подешљива параметра. У литератури је ова метода позната под називом условна параметарска оптимизација. На овај начин се постиже да систем буде релативно стабилан са захтеваним степеном пригушења и/или временом смирења и да при томе истовремено интеграл квадрата грешака има најмању вредност.

Грујић је отишао корак даље у [13], [14] тако што је дозволио да сви коефицијенти преносне функције затвореног система (коефицијенти у бројиоцу и имениоцу) буду линеарно зависни од два подешљива параметра. На овај начин је спојио условну оптимизацију са другим аспектом предложеним од стране Ракића [15], а ради се о импулсном одзиву система израчунатог на основу резидијума преносне функције тог система. Одговарајуће рекурентне формуле су развијене за пресликавање  $s$  комплексне равни у параметарску раван, затим за израчунавање резидијума преносне функције и најзад за израчунавање индекса перформансе на бази претходно израчунатих резидијума. Формуле су биле једноставне и знатно погодније за примену на рачунару у односу на постојеће.

На другој страни, приближно у истом периоду претходног века, на потпуно другачији начин Калман је направио значајан прогрес у оптимизацији линеарних дискретних система [16], [17]. Сличност његове методе са претходно разматраном условном оптимизацијом је у томе што опет постоје параметри контролера који се оптимизују па је због тога природно нешто рећи и о његовој методи. Калман је

развио методу матричне синтезе алгоритма управљања,

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{K} \in \mathcal{R}^{m \times n}, \quad (1.1)$$

на основу Понтрјагиновог принципа максимума и Белмановог динамичког програмирања, без ограничења на број елемената матрице  $\mathbf{K}$ , тј. без обзира на број управљачких величина и величина стања. Овде се опет примећује подударење са посматраном методом условне оптимизације у овој дисертацији јер и она укључује више параметара - конкретно два и три параметра. Његов огроман допринос је у томе што метода представља матричну синтезу свих управљачких величина истовремено. Чувени дискретни Калманов регулатор је проистекао из ове методе, што је охрабрило многе истраживаче да наставе истраживања у овом правцу. Критеријум оптималности код Калмана је у облику суме две квадратне форме,

$$J = \sum_{k=0}^{+\infty} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R}\mathbf{u}(k)]. \quad (1.2)$$

Прва квадратна форма са симетричном позитивно полуодређеном матрицом  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ , изражава квалитет динамичког понашања објекта док друга квадратна форма са симетричном позитивно одређеном матрицом  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$ , представља утрошак енергије управљачког система. Највећи проблем у свему овоме је квалитетан избор матрица  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ .

Деценијама уназад па до данашњег дана управљање објектом класичним управљачким алгоритмима је остало актуелно и истраживачи се свакодневно баве овим изазовом. Многи од њих су се бавили одређивањем стабилизујућих ПИД појачања у параметарском простору. На пример, Ксу и др. [18] су разматрали дискретне системе на бази претходних резултата добијених за континуалне системе. Кил и др. [19] су проучавали дискретни систем тако што су груписали корене карактеристичног полинома у кружницу унутар јединичне чиме су добили брз систем код кога прелазни процес траје јако кратко. Тантарис и др. [20] су се бавили дискретним контролером првог реда са три подешљива параметра. Ли и др. [21] су разматрали континуалне системе знајући само фреквентни одзив објекта и број корена карактеристичног полинома лоцираних у десној половини комплексне равни. Маташу [22] је искористио Танов и Кронекеров метод за континуалне системе и онда изабрао један пар параметара на основу раније познате методе. Слично, и други аутори су се бавили одређивањем области стабилности у параметарском простору. Грајзина и Полјак [23], [24] су то учинили за континуалне и дискретне системе у простору стања. Грајзина и др. [25] су урадили преглед стања параметарске синтезе система почевши у прошлости од Вишњеградског па преко Нејмарка до данас, за континуалне системе (једноструко и вишеструко преносне) са освртом на скорашња побољшања и новим резултатима везаним за домен стабилности у параметарском простору, узимајући у обзир аспект непрецизности параметара, робустности,  $H_\infty$  критеријума, итд. Кипнис и Нигматулин [26] су третирали триномну дискретну једначину са два кашњења и дали критеријум за тестирање Љапуновљеве стабилности који зависи од вредности параметара као и уопштење концепта Љапуновљеве стабилности са новим  $r$ -концептом стабилности. Неки аутори су истраживали оптимизацију параметара ПИД контролера. Падула и Висиоли [27] су користили класични и фракциони ПИД контролер и индекс перформансе у облику интеграла апсолутне грешке. Барбоса и Исус [28] су проучавали фракциони ПИД контролер и метахеуристички оптимизациони алгоритам инспирисан птицом и воћном мушицом при чему су користили индекс перформансе у различитим облицима.

У свом пионирском раду Фелдбаум [29] је започео истраживање прелазног процеса линеарних система при ненултим почетним условима. Након овога, истраживања у овом правцу су избледела па је се под прелазним процесом подразумевао одзив система при нултим почетним условима и при јединичној одскочној функцији улазне величине. Поновну актуелност овој теми донео је Измаилов у раду [30] где је показао да су велика одступања трајекторија од координатног почетка неизбежна ако су полови затвореног система померени много лево у комплексној равни. Полјак и др. у раду [31] настављају са изучавањем прелазног процеса код система са ненултим почетним условима које су Фелдбаум и Измаилов започели. То чине тако што су предложили прецизнију процену амплитуде прескока и показали су да се утицај великих одступања може видети за различите локације полова. Такође су се бавили одређивањем горње границе одступања коришћењем поступка линеарних матричних неједначина (LMI).

У овој дисертацији се условна оптимизација спроводи на основу карактеристичног полинома потпуне преносне матрице који се у општем случају може разликовати од карактеристичног полинома класичне преносне матрице. Прецизније речено, то је карактеристични полином потпуне преносне матрице која је недегенеративна по врстама [1], [32], [33]. У циљу синтезе управљачког система који ради у реалним радним условима, користи се нови облик индекса перформансе. То је сума квадрата грешака у најопштијем случају кад на систем делују вектор улаза и ненулти почетни услови.

Иако се на први поглед тема чини застарелом, мотивација за њеним даљим усавршавањем је у жељи да се представи нови, одговарајући начин за условну стабилизацију и оптимизацију дискретних система узимајући у обзир нове резултате везане за потпуну преносну матрицу [1], [32], [33] којом је разрешена деценијама дуга контроверза. Зашто се одредити за условну оптимизацију а не за Калманов регулатор? Оба приступа имају своје предности и недостатке. Значајно побољшање у предложеној новој условној оптимизацији је у томе што је број непознатих параметара повећан на три и у томе што је контролер динамички за разлику од статичког Калмановог регулатора. Поред тога, алгоритам управљања зависи од мерљиве излазне физичке величине за разлику од управљања код Калмановог регулатора које често зависи од немерљивих математичких величина стања. Притом, Калманов регулатор не узима у обзир поремећајну величину. Да би се израчунала матрица појачања  $\mathbf{K}$  Калмановог регулатора неопходно је решити нелинеарну матричну Рикатијеву једначину што је још увек, упркос постојању савремених рачунара, отежавајућа околност. Исто тако код Калмановог регулатора компликовано је извршити правилан избор матрица  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ . Када су величине стања немерљиве примењује се процедура естимације. Условна оптимизација гарантује релативну стабилност док Калманов регулатор то не чини. Такође, код Калмановог регулатора при преласку са дискретне једначине понашања у простор стања може се искористити математички алгоритам за усвајање величина стања при чему оне немају физичког смисла. Тада вектор величина стања система  $\mathbf{x}(k)$  у себи садржи управљање  $\mathbf{u}(k)$  као свој улаз, тј.  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$ . Затим Калманов алгоритам управљања  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$  повлачи да је  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ .

Преглед још неких радова који се баве оптимизацијом у ужем смислу следи у наставку. Формулација поступка за добијање решења након минималног времена применом линеарног програмирања дата је у [34]. Циљ је одредити управљање  $u(k)$  које ће да “доведе” објект у равнотежно стање за што мање тренутака одабирања. Алгоритам често има могућност да укаже на то да ли је добијено решење јединствено. У [35] приказан је приступ математичког програмирања за рачунску

реализацију оптималног управљања нелинеарних дискретних система. Интервали одабирања могу претходно бити познати или непознати. Метода може укључити додатна ограничења по питању простора стања, управљања или временског интервала. У општем случају ограничења могу бити нелинеарна, у виду једначина или неједначина. Поред детерминистичких разматрани су и стохастички системи. Рад [36] приказује ефикасну методу за решавање минимално-време минимална-енергија проблема оптимизације линеарних стационарних дискретних система. То се постиже на основу итеративног алгоритма заснованог на линеарном програмирању. Алгоритам нуди побољшање у виду захтевања мањег меморијског простора. Колев је у [37] представио итеративни поступак за решавање проблема управљања при минималном утрошку енергије (горива). Поступак се заснива на симплекс методи из линеарног програмирања и захтева коначан број итерација. Успостављени су потребни и довољни услови за јединственост решења. Обједињен приступ решавању три уобичајена проблема оптимизације линеарних система са општим ограничењима дат је у [38]. Та три проблема су: проблем оптималног времена, проблем оптималне енергије (горива) на коначном временском интервалу као и проблем оптималног времена уз ограничења по питању енергије. Развој методе унутрашње тачке (interior-point methods) пуно је допринео решавању конвексних оптимизационих проблема. У [39] је приказано како се примарни-дуални метод унутрашње тачке (primal-dual interior-point method) на ефикасан начин може користити за решавање проблема робустног оптималног управљања са потенцијалним применама на моделско предиктивно управљање (MPC). Циљ рада [40] је да уведе нумерички метод за оптимално управљање линеарних система коришћењем квадратног програмирања (quadratic programming). Карактеристике ове методе су у томе да су све неопходне једначине сведене на рекурентне једначине и да су матрице, неопходне за израчунавање коефицијената у рекурентним једначинама, израчунате преко матричног рачуна. У раду [41] урађена је синтеза оптималног линеарног дискретног управљачког система коришћењем дискретног принципа минимума. Приказани су квантитативни и квалитативни утицаји избора периоде одабирања на перформансе затвореног система. Процедура је применљива на линеарне, стационарне објекте чији је математички модел потпуно управљив и осмотрив. Аутори су у [42] формулисали локализовани LQR (LLQR) проблем оптималног управљања и аналитичким путем дошли до оптималног контролера. Показано је да LLQR оптимални контролер, са ограничењем по питању времена смирења, може остварити сличне перформансе као  $\mathcal{H}_2$  оптимални контролер без ограничења. Такође су увели управљачку шему хоризонт типа за локализовано расподељене системе у којима је утицај сваког локалног поремећаја просторно и временски ограничен. Такви системи имају ограничења у виду скупа линеарних једначина и резултујући тест остваривости се може решити локалним и расподељеним начином. Принцип оптимизације у простору излаза заснован на учењу са подршком (reinforcement learning) за дискретне системе на које делују поремећајне величине приказан је у [43]. Неопходни математички модел је одређен на основу измерених улазно-излазних података. Виегас и др. [44] су адресирали проблем расподељене синтезе контролера за линеарне дискретне системе. Изведена ја еквивалентна формулација која се састоји у оптимизацији стационарног решења матричне диференце једначине одакле су проистекла два алгоритма за прорачун расподељеног појачања. Први метод се састоји из корак по корак оптимизације споменуте матричне диференце једначине што омогућава брзо израчунавање стабилешућих појачања величина стања. Други алгоритам оптимизује исту матричну једначину на коначном временском интервалу и тако минимизује функцију циља управљања како се

временски интервал повећава. Мао [45] је показао да се континуалне нестабилне хибридне стохастичке диференцијалне једначине могу стабилизovati са дискретним контролером, док су се раније, у ову сврху, користили континуални контролери. Методе за синтезу робустних нелинеарних контролера за линеарне системе са ограничењима по величинама стања и по управљању представљене су у [46]. Ху и др. су у [47] проучавали проблеме дискретних система који се тичу робустног и робустно-оптималног управљања. Извршена је синтеза контролера тако да систем остварује минималну функцију циља за дати LQ проблем. Показано је да претходни проблеми имају решење уколико систем матричних неједначина има решења. Рад [48] показује како се временски дискретан LQ метод примењује при синтези контролера за управљање брзином и обсервера величина стања. Дат је начин избора матричних тежинских коефицијената индекса перформансе. Надаље, упоређени су резултати мерења проистекли при коришћењу десетобитног и шеснаестобитног A/D (D/A) конвертера. Решење проблема оптимизације за дискретне линеарне хибридне системе са ограничењима засновано на квадратној или линеарној функцији циља проучавано је у [49]. У првом делу рада су дате основне теоријске поставке структуре оптималне повратне спреге по стањима. У другом делу је описано како се може конструисати споменути оптимални закон управљања комбиновањем приступа мултипараметарског и динамичког програмирања.

Предмет истраживања првог дела ове дисертације је линеарни стационарни дискретни објект. На експерименту су примењена два класична алгорита управљања: пропорционално-сумарно (ПС) и пропорционално-диференчно (ПД) управљање. На симулационом примеру је реализовано пропорционално-диференчно-сумарно (ПДС) управљање. Предложена метода условне оптимизације омогућава синтезу управљачког система са два или три подешљива параметра. Обезбеђена је релативна стабилност система на основу задатог степена пригушења применом карактеристичног полинома потпуне преносне функције а не класичне преносне функције. Оптимални параметри су одређени из параметарског простора/равни тако да индекс перформансе у виду суме квадрата грешака има минималну вредност. При томе се користи израз за грешку који истовремено укључује дејство вектора улаза и произвољних почетних услова на објект.

Дисертација се бави изучавањем дискретних система због тренутне актуелне праксе по којој се дигитални рачунари готово искључиво користе као корекциони орган управљачког система.

Илустративни примери су дати како би се уочила разлика у понашању система између класичног и предложеног новог приступа. Разлике су приказане на симулационим резултатима и резултатима проистеклим из практичних експеримената.

# Глава 2

## Класе објеката и њихови математички модели

### 2.1 УИ објекти

Као резултат моделовања различитих врста физичких система могу се добити линеарне или нелинеарне диференцијалне једначине у којима фигуришу физичке величине посматраних система и једначине које дају њихову међусобну зависност, при чему су неки од система описани и системом диференцијалних једначина. Споменуте диференцијалне једначине се могу изразити и на други начин, са аспекта улазних и излазних величина система тј. са аспекта теорије система управљања. Динамичко понашање система може се описати диференцијалним једначинама различитог реда, али је за проучавање динамичких особина система довољно познавати диференцијалну једначину најнижег реда која довољно тачно описује динамику система.

Системи чији је математички модел исказан диференцијалном једначином понашања скраћено се називају УИ (улазно – излазни) системи. Ова скраћеница упућује да је систем описан у улазно излазном домену, јер диференцијална једначина управо и показује зависност између улазних и излазних величина и њихових извода.

#### 2.1.1 Математички модел у тоталним координатама

Диференцна једначина понашања једноструко преносног објекта у развијеном облику је:

$$\begin{aligned} & a_{nO}X_i(k+n) + a_{(n-1)O}X_i(k+n-1) + \dots + a_{1O}X_i(k+1) + a_{0O}X_i(k) = \\ & = b_{0O}U_O(k) + \dots + b_{(m-1)O}U_O(k+m-1) + b_{mO}U_O(k+m), \quad a_{nO} = 1, \quad m \leq n. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Једначина понашања једноструко преносног објекта у компактном облику је:

$$\mathbf{A}_O^{(n)} \mathbf{X}_i^n = \mathbf{B}_O^{(m)} \mathbf{U}_O^m, \quad (2.2)$$

при чему су

$$\mathbf{A}_O^{(n)} = [ a_{0O} \quad a_{1O} \quad \dots \quad a_{nO} ], \quad \mathbf{B}_O^{(m)} = [ b_{0O} \quad b_{1O} \quad \dots \quad b_{mO} ], \quad (2.3)$$

проширене матрице коефицијената, док су

$$\mathbf{X}_i^n = [ X_i(k) \quad X_i(k+1) \quad \dots \quad X_i(k+n) ]^T, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{U}_O^m = [ U_O(k) \quad U_O(k+1) \quad \dots \quad U_O(k+m) ]^T, \quad (2.5)$$

проширени вектор излаза и улаза, следствено.

### 2.1.2 Жељени режим

Једначина понашања (2.1) важи за било који радни режим па и за задати радни режим:

$$\begin{aligned} & a_{nO}X_{iz}(k+n) + a_{(n-1)O}X_{iz}(k+n-1) + \cdots + a_{1O}X_{iz}(k+1) + a_{0O}X_{iz}(k) = \\ & = b_{0O}U_{NO}(k) + \cdots + b_{(m-1)O}U_{NO}(k+m-1) + b_{mO}U_{NO}(k+m), \quad a_{nO} = 1, \quad m \leq n. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Слично је и са једначином понашања у компактном облику (2.2):

$$\mathbf{A}_O^{(n)} \mathbf{X}_{iz}^n = \mathbf{B}_O^{(m)} \mathbf{U}_{NO}^m, \quad m \leq n, \quad (2.7)$$

при чему су,

$$\mathbf{X}_{iz}^n = [ X_{iz}(k) \quad X_{iz}(k+1) \quad \cdots \quad X_{iz}(k+n) ]^T, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{U}_{NO}^m = [ U_{NO}(k) \quad U_{NO}(k+1) \quad \cdots \quad U_{NO}(k+m) ]^T. \quad (2.9)$$

### 2.1.3 Математички модел по одступањима

Имајући у виду дефиницију одступања излазне величине објекта,  $x_{iO} = x_i - x_{iz}$ , и одступања улазне величине објекта,  $u_O = U_O - U_{NO}$ , уз помоћ једначина (2.1) и (2.6) (од једначине (2.1) се одузме једначина (2.6)) добија се једначина понашања објекта изражена преко одступања, прво у развијеном облику:

$$\begin{aligned} & a_{nO} [X_i(k+n) - X_{iz}(k+n)] + a_{(n-1)O} [X_i(k+n-1) - X_{iz}(k+n-1)] + \cdots + \\ & + a_{1O} [X_i(k+1) - X_{iz}(k+1)] + a_{0O} [X_i(k) - X_{iz}(k)] = \\ & = b_{0O} [U_O(k) - U_{NO}(k)] + \cdots + b_{(m-1)O} [U_O(k+m-1) - U_{NO}(k+m-1)] + \\ & + b_{mO} [U_O(k+m) - U_{NO}(k+m)], \quad a_{nO} = 1, \quad m \leq n, \end{aligned} \quad (2.10)$$

односно,

$$\begin{aligned} & a_{nO}x_i(k+n) + a_{(n-1)O}x_i(k+n-1) + \cdots + a_{1O}x_i(k+1) + a_{0O}x_i(k) = \\ & b_{0O}u_O(k) + \cdots + b_{(m-1)O}u_O(k+m-1) + b_{mO}u_O(k+m), \quad a_{nO} = 1, \quad m \leq n, \end{aligned} \quad (2.11)$$

а потом и у компактном облику:

$$\mathbf{A}_O^{(n)} [\mathbf{X}_i^n - \mathbf{X}_{iz}^n] = \mathbf{B}_O^{(m)} [\mathbf{U}_O^m - \mathbf{U}_{NO}^m], \quad m \leq n, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{A}_O^{(n)} \mathbf{x}_i^n = \mathbf{B}_O^{(m)} \mathbf{u}_O^m, \quad m \leq n. \quad (2.13)$$

Наставља се разматрање једноструко преносног линеарног стационарног дискретног објекта у најопштијем случају. Описан је диференцом једначином понашања,

$$\begin{aligned} & a_{\nu O}x_i(k+\nu) + a_{(\nu-1)O}x_i(k+\nu-1) + \cdots + a_{1O}x_i(k+1) + a_{0O}x_i(k) = \\ & = b_{0O}u_O(k) + \cdots + b_{(\mu-1)O}u_O(k+\mu-1) + b_{\mu O}u_O(k+\mu), \\ & a_{\nu O} = 1, \quad \nu \in \mathcal{N}, \quad \mu \in \mathcal{N}_0, \quad \mu \leq \nu, \end{aligned} \quad (2.14)$$

при чему је  $k \in \mathcal{N}_0$ ,  $x_i(k+j) \in \mathcal{R}$  излазна величина објекта у тренутку  $k+j$ ,  $\forall j = 0, 1, 2, \dots, \nu$ ,  $u_O(k+j) \in \mathcal{R}$  је улаз објекта у тренутку  $k+j$ ,  $\forall j = 0, 1, 2, \dots, \mu$ ,  $\mu \leq \nu$ ,  $a_{jO} \in \mathcal{R}$ ,  $\forall j = 0, 1, 2, \dots, \nu$  и  $b_{jO} \in \mathcal{R}$ ,  $\forall j = 0, 1, 2, \dots, \mu$  су реални бројеви. Једначина (2.14) је добијена на основу Љапуновљеве трансформације координата, тј.  $x_i = X_i - X_{iz}$  је одступање излазне величине објекта од његове задате вредности



$X_{iz}$ , а  $u_O = U_O - U_{ON}$  је одступање улазне величине објекта од његове номиналне вредности  $U_{ON}$ .

Компактни облик једначине (2.14) је [32], [1], [33],

$$\mathbf{A}_O^{(\nu)} \mathbf{x}_i^\nu = \mathbf{B}_O^{(\mu)} \mathbf{u}_O^\mu, \quad (2.15)$$

где су  $\mathbf{A}_O^{(\nu)}$  и  $\mathbf{B}_O^{(\mu)}$  проширене матрице коефицијената,

$$\mathbf{A}_O^{(\nu)} = [ a_{00} \ a_{10} \ \cdots \ a_{\nu 0} ], \quad \mathbf{B}_O^{(\mu)} = [ b_{00} \ b_{10} \ \cdots \ b_{\mu 0} ], \quad (2.16)$$

и  $\mathbf{x}_i^\nu$  и  $\mathbf{u}_O^\mu$  су проширени вектор излаза и улаза [1], [33],

$$\mathbf{x}_i^\nu = [ x_{iO}(k) \ x_{iO}(k+1) \ \cdots \ x_{iO}(k+\nu) ]^T, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{u}_O^\mu = [ u_O(k) \ u_O(k+1) \ \cdots \ u_O(k+\mu) ]^T. \quad (2.18)$$

## 2.2 УСИ објекти

Једначина стања је изражена у облику линеарне диференцне једначине првог реда са константним коефицијентима, а једначина излаза у облику диференцне једначине нултог реда. Претходне две једначине представљају опис динамичког понашања система у простору стања који се другачије назива УСИ (улазно - стање - излазни) простор.

### 2.2.1 Математички модел у тоталним координатама

Диференцна једначина стања и излаза једнострукно преносног објекта су:

$$\mathbf{X}_O(k+1) = \mathbf{A}_O \mathbf{X}_O(k) + \mathbf{b}_O U_O(k), \quad (2.19)$$

$$X_i(k) = \mathbf{c}_O \mathbf{X}_O(k) + d_O U_O(k), \quad (2.20)$$

при чему су,

$$\mathbf{A}_O = [a_{Oij}] \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{b}_O = [b_{O0} \ b_{O1} \ \cdots \ b_{On}]^T \in \mathcal{R}^n, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{c}_O = [c_{O0} \ c_{O1} \ \cdots \ c_{On}] \in \mathcal{R}^n, \quad d_O \in \mathcal{R}^1. \quad (2.22)$$

### 2.2.2 Жељени режим

Једначине стања и излаза (2.19), (2.20) важе за било који радни режим па самим тим и за задати радни режим:

$$\mathbf{X}_{NO}(k+1) = \mathbf{A}_O \mathbf{X}_{NO}(k) + \mathbf{b}_O U_{NO}(k), \quad (2.23)$$

$$X_{iz}(k) = \mathbf{c}_O \mathbf{X}_{NO}(k) + d_O U_{NO}(k). \quad (2.24)$$

### 2.2.3 Математички модел по одступањима

Имајући у виду дефиниције одступања, излазне величине објекта,  $x_{iO} = X_i - X_{iz}$ , улазне величине објекта,  $u_O = U_O - U_{NO}$ , и вектора стања објекта,  $\mathbf{x}_O = \mathbf{X}_O - \mathbf{X}_{NO}$ , уз помоћ једначина (2.19) и (2.23) (од једначине (2.19) се одузме једначина (2.23)) добија се једначина стања објекта изражена преко одступања:

$$\mathbf{X}_O(k+1) - \mathbf{X}_{NO}(k+1) = \mathbf{A}_O [\mathbf{X}_O(k) - \mathbf{X}_{NO}(k)] + \mathbf{b}_O [U_O - U_{NO}], \quad (2.25)$$

$$\mathbf{x}_O(k+1) = \mathbf{A}_O \mathbf{x}_O(k) + \mathbf{b}_O u_O, \quad (2.26)$$

односно помоћу једначина (2.20) и (2.24) (од једначине (2.20) се одузме једначина (2.24)) добија се једначина излаза објекта изражена преко одступања:

$$X_i(k) - X_{iz}(k) = \mathbf{c}_O [\mathbf{X}_O(k) - \mathbf{X}_{NO}(k)] + d_O [U_O - U_{NO}], \quad (2.27)$$

$$x_i(k) = \mathbf{c}_O \mathbf{x}_O(k) + d_O u_O. \quad (2.28)$$

# Глава 3

## Управљачки системи и њихови математички модели

### 3.1 Преглед могућих управљачких система

Разматра се најопштији класични линеарни стационарни дискретни контролер пропорционално-диференчно-сумарног (ПДС) дејства чија је УИ једначина, изражена преко коначних разлика, следећег облика:

$$T_\eta^\eta \frac{1}{T_\eta} \Delta^\eta u(k) + \dots + T_1 \frac{1}{T} \Delta u(k) + u(k) = K\varepsilon(k) + K_D \frac{1}{T} \Delta \varepsilon(k) + K_S T \sum_{i=0}^{i=k-1} \varepsilon(i). \quad (3.1)$$

Претходна једначина може се средити и написати у облику диферендне једначине уколико сумарно (С) дејство постоји,

$$\sum_{j=0}^{\eta+1} \sum_{\substack{i=0, j=0 \\ i=j-1, j \neq 0}}^{\eta} T^i \frac{1}{T^i} \binom{i+1}{i+1-j} (-1)^{i+1-j} u(k+j) = \sum_{j=0}^2 K_j \varepsilon(k+j), \quad (3.2)$$

$$K_0 = \frac{K_D}{T} + K_S T - K, \quad K_1 = K - \frac{2K_D}{T}, \quad K_2 = \frac{K_D}{T}, \quad (3.3)$$

а ако сумарно дејство не постоји ( $K_S = 0$ ),

$$\sum_{j=0}^{\eta} \sum_{i=j}^{\eta} T^i \frac{1}{T^i} \binom{i}{i-j} (-1)^{i-j} u(k+j) = \sum_{j=0}^1 K_j \varepsilon(k+j), \quad (3.4)$$

$$K_0 = K - \frac{K_D}{T}, \quad K_1 = \frac{K_D}{T}. \quad (3.5)$$

Компактан облик једначина (3.2) гласи,

$$\mathbf{A}_C^{(\eta+1)} \mathbf{u}^{\eta+1} = \mathbf{B}_C^{(2)} \varepsilon^2, \quad \text{ако сумарно дејство постоји,} \quad (3.6)$$

при чему су  $\mathbf{A}_C^{(\eta+1)}$  и  $\mathbf{B}_C^{(2)}$  проширене матрице коефицијената контролера,

$$\mathbf{A}_C^{(\eta+1)} = [ a_{0C} \quad a_{1C} \quad \dots \quad a_{(\eta+1)C} ], \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B}_C^{(2)} = [ b_{0C} \quad b_{1C} \quad b_{2C} ], \quad (3.8)$$

а сами коефицијенти су

$$a_{0C} = \sum_{i=0}^{\eta} T_i^i \frac{1}{T^i} (-1)^{i+1}, \quad (3.9)$$

$$a_{1C} = \sum_{i=0}^{\eta} T_i^i \frac{1}{T^i} \binom{i+1}{i} (-1)^i, \quad (3.10)$$

$$a_{2C} = \sum_{i=1}^{\eta} T_i^i \frac{1}{T^i} \binom{i+1}{i-1} (-1)^{i-1}, \quad (3.11)$$

⋮

$$a_{(\eta+1)C} = \sum_{i=\eta}^{\eta} T_i^i \frac{1}{T^i} \binom{i+1}{i-\eta} (-1)^{i-\eta} = \frac{T_\eta^\eta}{T^\eta}, \quad (3.12)$$

$$b_{0C} = \left( \frac{K_D}{T} + K_S T - K \right), \quad b_{1C} = \left( K - \frac{2K_D}{T} \right), \quad b_{2C} = \frac{K_D}{T}. \quad (3.13)$$

Проширени вектори контролера су

$$\mathbf{u}^{\eta+1} = [ u(k) \quad u(k+1) \quad \cdots \quad u(k+\eta+1) ]^T, \quad (3.14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^2 = [ \varepsilon(k) \quad \varepsilon(k+1) \quad \varepsilon(k+2) ]^T. \quad (3.15)$$

Компактан облик једначине (3.4) је

$$\mathbf{A}_C^{(\eta)} \mathbf{u}^\eta = \mathbf{B}_C^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^1, \quad \text{ако сумарно дејство не постоји } (K_S = 0), \quad (3.16)$$

при чему су проширене матрице коефицијената контролера

$$\mathbf{A}_C^{(\eta)} = [ a_{0C} \quad a_{1C} \quad \cdots \quad a_{\eta C} ], \quad \mathbf{B}_C^{(1)} = [ b_{0C} \quad b_{1C} ], \quad (3.17)$$

док су коефицијенти

$$a_{0C} = \sum_{i=0}^{\eta} T_i^i \frac{1}{T^i} (-1)^i, \quad (3.18)$$

$$a_{1C} = \sum_{i=1}^{\eta} T_i^i \frac{1}{T^i} \binom{i}{i-1} (-1)^{i-1}, \quad (3.19)$$

⋮

$$a_{\eta C} = \sum_{i=\eta}^{\eta} T_i^i \frac{1}{T^i} \binom{i}{i-\eta} (-1)^{i-\eta} = \frac{T_\eta^\eta}{T^\eta}; \quad (3.20)$$

$$b_{0C} = \left( K - \frac{K_D}{T} \right), \quad b_{1C} = \frac{K_D}{T}. \quad (3.21)$$

Проширени вектори контролера у овом случају имају облик

$$\mathbf{u}^\eta = [ u(k) \quad u(k+1) \quad \cdots \quad u(k+\eta) ]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^1 = [ \varepsilon(k) \quad \varepsilon(k+1) ]^T. \quad (3.22)$$

Из једначина (3.6) и (3.16) следе различити специјални случајеви који су приказани у наставку и неки од њих се користе у примерима касније у докторату.

## 3.2 Пропорционално-диференчно (ПД) дејство

### 3.2.1 Математички модели (*УИ*, *УСИ*) у тоталним координатама

#### *УИ* управљачки систем

У свим наредним случајевима се полази од једначине у којој фигуришу коначне разлике. Циљ је одредити диференцну једначину и  $\mathcal{Z}$  преносну функцију управљачког система.

Нултог реда:

$$U(k) = K\mathcal{E}(k) + K_D \frac{1}{T} \Delta \mathcal{E}(k), \quad (3.23)$$

$$TU(k) = KT\mathcal{E}(k) + K_D \Delta \mathcal{E}(k), \quad (3.24)$$

$$TU(z) = KT\mathcal{E}(z) + K_D(z-1)\mathcal{E}(z), \quad (3.25)$$

$$W_{US}(z) = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{KT + K_D(z-1)}{T}, \quad z_1^0 = 1 - \frac{K}{K_D}T, \text{ не може да буде једнако један,} \quad (3.26)$$

$$TU(k) = KT\mathcal{E}(k) + K_D[\mathcal{E}(k+1) - \mathcal{E}(k)], \quad (3.27)$$

$$TU(k) = (KT - K_D)\mathcal{E}(k) + K_D\mathcal{E}(k+1). \quad (3.28)$$

Првог реда:

$$T_1 \frac{1}{T} \Delta U(k) + U(k) = K\mathcal{E}(k) + K_D \frac{1}{T} \Delta \mathcal{E}(k), \quad (3.29)$$

$$T_1 \Delta U(k) + TU(k) = KT\mathcal{E}(k) + K_D \Delta \mathcal{E}(k), \quad (3.30)$$

$$T_1(z-1)U(z) + TU(z) = KT\mathcal{E}(z) + K_D(z-1)\mathcal{E}(z), \quad (3.31)$$

$$W_{US}(z) = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{KT + K_D(z-1)}{T_1(z-1) + T}, \quad z_1^* = 1 - \frac{T}{T_1} \text{ не може да буде једнако } 1, \quad (3.32)$$

$$z_1^0 = 1 - \frac{K}{K_D}T \text{ не може да буде једнако један,} \quad (3.33)$$

$$T_1[U(k+1) - U(k)] + TU = KT\mathcal{E}(k) + K_D[\mathcal{E}(k+1) - \mathcal{E}(k)], \quad (3.34)$$

$$T_1U(k+1) + (T - T_1)U(k) = (KT - K_D)\mathcal{E}(k) + K_D\mathcal{E}(k+1). \quad (3.35)$$

Другог реда:

$$T_2^2 \frac{1}{T^2} \Delta^2 U(k) + T_1 \frac{1}{T} \Delta U(k) + U(k) = K\mathcal{E}(k) + K_D \frac{1}{T} \Delta \mathcal{E}(k), \quad (3.36)$$

$$T_2^2 \Delta^2 U(k) + T_1 T \Delta U(k) + T^2 U(k) = KT^2 \mathcal{E}(k) + K_D T \Delta \mathcal{E}(k), \quad (3.37)$$

$$T_2^2(z-1)^2 U(z) + T_1 T(z-1)U(z) + T^2 U(z) = KT^2 \mathcal{E}(z) + K_D T(z-1)\mathcal{E}(z), \quad (3.38)$$

$$W_{US}(z) = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{KT^2 + K_D T(z-1)}{T_2^2(z-1)^2 + T_1 T(z-1) + T^2}, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} T_2^2 [U(k+2) - 2U(k+1) + U(k)] + T_1 T [U(k+1) - U(k)] + T^2 U(k) &= \\ &= KT^2 \mathcal{E}(k) + K_D T [\mathcal{E}(k+1) - \mathcal{E}(k)], \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} T_2^2 U(k+2) + (T_1 T - 2T_2^2) U(k+1) + (T_2^2 - T_1 T + T^2) U(k) &= \\ &= T(KT - K_D)\mathcal{E}(k) + K_D T \mathcal{E}(k+1). \end{aligned} \quad (3.41)$$

### УСИ управљачки систем

Сада се на основу добијених диференцијалних једначина понашања одређују математички модели управљачких система у простору стања на основу првог општег алгоритма.

Првог реда:

$$T_1 U(k+1) + (T - T_1) U(k) = (KT - K_D) \mathcal{E}(k) + K_D \mathcal{E}(k+1), \quad (3.42)$$

$$U(k+1) + \left( \frac{T - T_1}{T_1} \right) U(k) = \left( \frac{KT - K_D}{T_1} \right) \mathcal{E}(k) + \frac{K_D}{T_1} \mathcal{E}(k+1), \quad (3.43)$$

$$X_{US}(k+1) = A_{US} X_{US}(k) + b_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.44)$$

$$U(k) = c_{US} X_{US}(k) + d_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.45)$$

$$A_{US} = \frac{T_1 - T}{T_1}, \quad b_{US} = b_0 - a_0 b_1 = \frac{T}{T_1} \left( K - \frac{K_D}{T_1} \right), \quad c_{US} = 1, \quad d_{US} = \frac{K_D}{T_1}, \quad (3.46)$$

$$X_{US}(k+1) = \frac{T_1 - T}{T_1} X_{US}(k) + \frac{T}{T_1} \left( K - \frac{K_D}{T_1} \right) \mathcal{E}(k), \quad (3.47)$$

$$U(k) = X_{US}(k) + \frac{K_D}{T_1} \mathcal{E}(k). \quad (3.48)$$

Другог реда:

$$\begin{aligned} T_2^2 U(k+2) + (T_1 T - 2T_2^2) U(k+1) + (T_2^2 - T_1 T + T^2) U(k) = \\ = T(KT - K_D) \mathcal{E}(k) + K_D T \mathcal{E}(k+1), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} U(k+2) + \left( \frac{T_1 T - 2T_2^2}{T_2^2} \right) U(k+1) + \left( \frac{T_2^2 - T_1 T + T^2}{T_2^2} \right) U(k) = \\ = \frac{T(KT - K_D)}{T_2^2} \mathcal{E}(k) + \frac{K_D T}{T_2^2} \mathcal{E}(k+1), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{X}_{US}(k+1) = \mathbf{A}_{US} \mathbf{X}_{US}(k) + \mathbf{b}_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.51)$$

$$U(k) = \mathbf{c}_{US} \mathbf{X}_{US}(k) + d_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.52)$$

$$\mathbf{A}_{US} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{T_1 T}{T_2^2} & 1 \\ \frac{T_1 T - T^2}{T_2^2} - 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{US} = \begin{bmatrix} \frac{K_D T}{T_2^2} \\ \frac{T(KT - K_D)}{T_2^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{US} = [1 \quad 0], \quad d_{US} = 0, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{X}_{US}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 - \frac{T_1 T}{T_2^2} & 1 \\ \frac{T_1 T - T^2}{T_2^2} - 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{US}(k) + \begin{bmatrix} \frac{K_D T}{T_2^2} \\ \frac{T(KT - K_D)}{T_2^2} \end{bmatrix} \mathcal{E}(k), \quad (3.54)$$

$$U(k) = [1 \quad 0] \mathbf{X}_{US}(k). \quad (3.55)$$

### 3.2.2 Математички модели (УИ, УСИ) по одступањима

У овом случају у математичким моделима фигуришу одступања величина која се обележавају малим словима.

#### УИ управљачки систем

Првог реда:

Из једначине (3.16) за  $\eta = 1$  и  $K_S = 0$ , добијамо,

$$T_1 u(k+1) + (T - T_1) u(k) = (KT - K_D) \varepsilon(k) + K_D \varepsilon(k+1), \quad (3.56)$$

$$\mathbf{A}_C^{(1)} \mathbf{u}^1 = \mathbf{B}_C^{(1)} \varepsilon^1, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{A}_C^{(1)} = [ a_{0C} \ a_{1C} ], \quad \mathbf{B}_C^{(1)} = [ b_{0C} \ b_{1C} ], \quad a_{0C} = T - T_1, \quad a_{1C} = 1, \quad (3.58)$$

$$b_{0C} = (KT - K_D), \quad b_{1C} = K_D. \quad (3.59)$$

Другог реда:

$$\begin{aligned} T_2^2 u(k+2) + (T_1 T - 2T_2^2) u(k+1) + (T_2^2 - T_1 T + T^2) u = \\ = T(KT - K_D) \varepsilon(k) + K_D T \varepsilon(k+1). \end{aligned} \quad (3.60)$$

### УСИ управљачки систем

Првог реда:

$$x_{US}(k+1) = \frac{T_1 - T}{T_1} x_{US}(k) + \frac{T}{T_1} \left( K - \frac{K_D}{T_1} \right) \varepsilon(k), \quad (3.61)$$

$$u(k) = x_{US}(k) + \frac{K_D}{T_1} \varepsilon(k). \quad (3.62)$$

Другог реда:

$$\mathbf{x}_{US}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 - \frac{T_1 T}{T_2^2} & 1 \\ \frac{T_1 T - T^2}{T_2^2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{US}(k) + \begin{bmatrix} \frac{K_D T}{T_2^2} \\ \frac{T(KT - K_D)}{T_2^2} \end{bmatrix} \varepsilon(k), \quad (3.63)$$

$$u(k) = [ 1 \ 0 ] \mathbf{x}_{US}(k). \quad (3.64)$$

## 3.3 Пропорционално-сумарно (ПС) дејство

### 3.3.1 Математички модели (УИ, УСИ) у тоталним координатама

#### УИ управљачки систем

Нултог реда:

$$U(k) = K \mathcal{E}(k) + K_S T \sum_{j=0}^{j=k-1} \mathcal{E}(j), \quad (3.65)$$

$$U(z) = K \mathcal{E}(z) + K_S T \frac{1}{z-1} \mathcal{E}(z), \quad (3.66)$$

$$W_{US}(z) = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} = K + \frac{K_S T}{z-1} = \frac{K(z-1) + K_S T}{z-1}, \quad (3.67)$$

$$(z-1)U(z) = [K(z-1) + K_S T] \mathcal{E}(z), \quad (3.68)$$

$$U(k+1) - U(k) = (K_S T - K) \mathcal{E}(k) + K \mathcal{E}(k+1). \quad (3.69)$$

Првог реда:

$$T_1 \frac{1}{T} \Delta U(k) + U(k) = K\mathcal{E}(k) + K_S T \sum_{j=0}^{j=k-1} \mathcal{E}(j), \quad (3.70)$$

$$T_1 \Delta U(k) + T U(k) = K T \mathcal{E}(k) + K_S T^2 \sum_{j=0}^{j=k-1} \mathcal{E}(j), \quad (3.71)$$

$$T_1(z-1)U(z) + T U(z) = K T \mathcal{E}(z) + K_S T^2 \frac{1}{z-1} \mathcal{E}(z), \quad (3.72)$$

$$W_{US}(z) = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{K T (z-1) + K_S T^2}{(z-1)[T_1(z-1) + T]}, \quad (3.73)$$

$$T_1(z-1)^2 U(z) + T(z-1)U(z) = K T (z-1) \mathcal{E}(z) + K_S T^2 \mathcal{E}(z), \quad (3.74)$$

$$T_1 U(k+2) + (T - 2T_1) U(k+1) + (T_1 - T) U(k) = T(K_S T - K) \mathcal{E}(k) + K T \mathcal{E}(k+1). \quad (3.75)$$

Другог реда:

$$T_2^2 \frac{1}{T^2} \Delta^2 U(k) + T_1 \frac{1}{T} \Delta U(k) + U(k) = K \mathcal{E}(k) + K_S T \sum_{j=0}^{j=k-1} \mathcal{E}(j), \quad (3.76)$$

$$T_2^2 \Delta^2 U(k) + T_1 T \Delta U(k) + T^2 U(k) = T^2 K \mathcal{E}(k) + K_S T^3 \sum_{j=0}^{j=k-1} \mathcal{E}(j), \quad (3.77)$$

$$T_2^2(z-1)^2 U(z) + T_1 T(z-1)U(z) + T^2 U(z) = T^2 K \mathcal{E}(z) + K_S T^3 \frac{1}{z-1} \mathcal{E}(z), \quad (3.78)$$

$$W_{US}(z) = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{T^2 K (z-1) + K_S T^3}{(z-1)[T_2^2(z-1)^2 + T_1 T(z-1) + T^2]}, \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} T_2^2(z-1)^3 U(z) + T_1 T(z-1)^2 U(z) + T^2(z-1)U(z) = \\ = K T^2 (z-1) \mathcal{E}(z) + K_S T^3 \mathcal{E}(z), \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} T_2^2 U(k+3) + (T_1 T - 3T_2^2) U(k+2) + (3T_2^2 - 2T_1 T + T^2) U(k+1) + \\ + (T_1 T - T_2^2 - T^2) U(k) = T^2 (K_S T - K) \mathcal{E}(k) + K T^2 \mathcal{E}(k+1). \end{aligned} \quad (3.81)$$

### УСИ управљачки систем

Нултог реда:

$$U(k+1) - U(k) = (K_S T - K) \mathcal{E}(k) + K \mathcal{E}(k+1), \quad (3.82)$$

$$X_{US}(k+1) = A_{US} X_{US}(k) + b_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.83)$$

$$U(k) = c_{US} X_{US}(k) + d_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.84)$$

$$A_{US} = 1, \quad b_{US} = b_0 - a_0 b_1 = K_S T, \quad c_{US} = 1, \quad d_{US} = K, \quad (3.85)$$

$$X_{US}(k+1) = X_{US}(k) + K_S T \mathcal{E}(k), \quad (3.86)$$

$$U(k) = X_{US}(k) + K \mathcal{E}(k), \quad (3.87)$$



Првог реда:

$$T_1 U(k+2) + (T - 2T_1) U(k+1) + (T_1 - T) U(k) = T(K_S T - K) \mathcal{E}(k) + K T \mathcal{E}(k+1), \quad (3.88)$$

$$U(k+2) + \left( \frac{T - 2T_1}{T_1} \right) U(k+1) + \left( \frac{T_1 - T}{T_1} \right) U(k) = \frac{T(K_S T - K)}{T_1} \mathcal{E}(k) + \frac{K T}{T_1} \mathcal{E}(k+1), \quad (3.89)$$

$$\mathbf{X}_{US}(k+1) = \mathbf{A}_{US} \mathbf{X}_{US}(k) + \mathbf{b}_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.90)$$

$$U(k) = \mathbf{c}_{US} \mathbf{X}_{US}(k) + d_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.91)$$

$$\mathbf{A}_{US} = \begin{bmatrix} \frac{2T_1 - T}{T_1} & 1 \\ \frac{T - T_1}{T_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{US} = \begin{bmatrix} \frac{K T}{T_1} \\ \frac{T(K_S T - K)}{T_1} \end{bmatrix}, \quad (3.92)$$

$$\mathbf{c}_{US} = [1 \ 0], \quad d_{US} = 0, \quad (3.93)$$

$$\mathbf{X}_{US}(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{2T_1 - T}{T_1} & 1 \\ \frac{T - T_1}{T_1} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{US}(k) + \begin{bmatrix} \frac{K T}{T_1} \\ \frac{T(K_S T - K)}{T_1} \end{bmatrix} \mathcal{E}(k), \quad (3.94)$$

$$U(k) = [1 \ 0] \mathbf{X}_{US}(k). \quad (3.95)$$

Другог реда:

$$T_2^2 U(k+3) + (T_1 T - 3T_2^2) U(k+2) + (3T_2^2 - 2T_1 T + T^2) U(k+1) + (T_1 T - T_2^2 - T^2) U(k) = T^2 (K_S T - K) \mathcal{E}(k) + K T^2 \mathcal{E}(k+1), \quad (3.96)$$

$$U(k+3) + \left( \frac{T_1 T - 3T_2^2}{T_2^2} \right) U(k+2) + \left( \frac{3T_2^2 - 2T_1 T + T^2}{T_2^2} \right) U(k+1) + \left( \frac{T_1 T - T_2^2 - T^2}{T_2^2} \right) U(k) = \frac{T^2 (K_S T - K)}{T_2^2} \mathcal{E}(k) + \frac{K T^2}{T_2^2} \mathcal{E}(k+1), \quad (3.97)$$

$$\mathbf{X}_{US}(k+1) = \mathbf{A}_{US} \mathbf{X}_{US}(k) + \mathbf{b}_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.98)$$

$$U(k) = \mathbf{c}_{US} \mathbf{X}_{US}(k) + d_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.99)$$

$$\mathbf{A}_{US} = \begin{bmatrix} \frac{3T_2^2 - T_1 T}{T_2^2} & 1 & 0 \\ \frac{2T_1 T - T^2 - 3T_2^2}{T_2^2} & 0 & 1 \\ \frac{T_2^2 + T^2 - T_1 T}{T_2^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{US} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K T^2}{T_2^2} \\ \frac{T^2 (K_S T - K)}{T_2^2} \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

$$\mathbf{c}_{US} = [1 \ 0 \ 0], \quad d_{US} = 0, \quad (3.101)$$

$$\mathbf{X}_{US}(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{3T_2^2 - T_1 T}{T_2^2} & 1 & 0 \\ \frac{2T_1 T - T^2 - 3T_2^2}{T_2^2} & 0 & 1 \\ \frac{T_2^2 + T^2 - T_1 T}{T_2^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{US}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K T^2}{T_2^2} \\ \frac{T^2 (K_S T - K)}{T_2^2} \end{bmatrix} \mathcal{E}(k), \quad (3.102)$$

$$U(k) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{X}_{US}(k). \quad (3.103)$$

### 3.3.2 Математички модели (*УИ*, *УСИ*) по одступањима

#### *УИ* управљачки систем

Нултог реда:

Из једначине (3.6) за  $\eta = 0$  и  $K_D = 0$  проистиче,

$$u(k+1) - u(k) = (K_S T - K) \varepsilon(k) + K \varepsilon(k+1), \quad (3.104)$$

$$\mathbf{A}_C^{(1)} \mathbf{u}^1 = \mathbf{B}_C^{(1)} \varepsilon^1, \quad (3.105)$$

$$\mathbf{A}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{0C} & a_{1C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} b_{0C} & b_{1C} \end{bmatrix}, \quad a_{0C} = -1, \quad a_{1C} = 1, \quad (3.106)$$

$$b_{0C} = (K_S T - K), \quad b_{1C} = K. \quad (3.107)$$

Првог реда:

$$T_1 u(k+2) + (T - 2T_1) u(k+1) + (T_1 - T) u(k) = T(K_S T - K) \varepsilon(k) + K T \varepsilon(k+1). \quad (3.108)$$

Другог реда:

$$\begin{aligned} T_2^2 u(k+3) + (T_1 T - 3T_2^2) u(k+2) + (3T_2^2 - 2T_1 T + T^2) u(k+1) + \\ + (T_1 T - T_2^2 - T^2) u(k) = T^2 (K_S T - K) \varepsilon(k) + K T^2 \varepsilon(k+1). \end{aligned} \quad (3.109)$$

#### *УСИ* управљачки систем

Нултог реда:

$$x_{US}(k+1) = x_{US}(k) + K_S T \varepsilon(k), \quad (3.110)$$

$$u(k) = x_{US}(k) + K \varepsilon(k). \quad (3.111)$$

Првог реда:

$$\mathbf{x}_{US}(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{2T_1 - T}{T_1} & 1 \\ \frac{T - T_1}{T_1} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{US}(k) + \begin{bmatrix} \frac{KT}{T_1} \\ \frac{T(K_S T - K)}{T_1} \end{bmatrix} \varepsilon(k), \quad (3.112)$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{US}(k). \quad (3.113)$$

Другог реда:

$$\mathbf{x}_{US}(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{3T_2^2 - T_1 T}{T_2^2} & 1 & 0 \\ \frac{2T_1 T - T^2 - 3T_2^2}{T_2^2} & 0 & 1 \\ \frac{T_2^2 + T^2 - T_1 T}{T_2^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{US}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{KT^2}{T_2^2} \\ \frac{T^2(K_S T - K)}{T_2^2} \end{bmatrix} \varepsilon(k), \quad (3.114)$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{US}(k). \quad (3.115)$$

## 3.4 Пропорционално-диференчно-сумарно (ПДС) дејство

### 3.4.1 Математички модели (*УИ*, *УСИ*) у тоталним координатама

*УИ* управљачки систем

Првог реда

$$T_1 \frac{1}{T} \Delta U(k) + U(k) = K \mathcal{E}(k) + K_S T \sum_{j=0}^{j=k-1} \mathcal{E}(j) + K_D \frac{1}{T} \Delta \mathcal{E}(k), \quad (3.116)$$

$$T_1 \Delta U(k) + T U(k) = K T \mathcal{E}(k) + K_S T^2 \sum_{j=0}^{j=k-1} \mathcal{E}(j) + K_D \Delta \mathcal{E}(k), \quad (3.117)$$

$$T_1(z-1)U(z) + T U(z) = K T \mathcal{E}(z) + K_S T^2 \frac{1}{z-1} \mathcal{E}(z) + K_D(z-1) \mathcal{E}(z), \quad (3.118)$$

$$W_{US}(z) = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{K T + K_S T^2 \frac{1}{z-1} + K_D(z-1)}{T_1(z-1) + T} = \frac{K T(z-1) + K_S T^2 + K_D(z-1)^2}{T_1(z-1)^2 + T(z-1)}, \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} & [T_1 z^2 + (T - 2T_1)z + (T_1 - T)] U(z) = \\ & = [K_D z^2 + (K T - 2K_D)z + (K_S T^2 + K_D - K T)] \mathcal{E}(z), \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} & T_1 U(k+2) + (T - 2T_1) U(k+1) + (T_1 - T) U(k) = \\ & = (K_S T^2 + K_D - K T) \mathcal{E}(k) + (K T - 2K_D) \mathcal{E}(k+1) + K_D \mathcal{E}(k+2). \end{aligned} \quad (3.121)$$

Другог реда

$$T_2^2 \frac{1}{T^2} \Delta^2 U(k) + T_1 \frac{1}{T} \Delta U(k) + U(k) = K \mathcal{E}(k) + K_S T \sum_{j=0}^{j=k-1} \mathcal{E}(j) + K_D \frac{1}{T} \Delta \mathcal{E}(k), \quad (3.122)$$

$$T_2^2 \Delta^2 U(k) + T_1 T \Delta U(k) + T^2 U(k) = K T^2 \mathcal{E}(k) + K_S T^3 \sum_{j=0}^{j=k-1} \mathcal{E}(j) + K_D T \Delta \mathcal{E}(k), \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} & T_2^2(z-1)^2 U(z) + T_1 T(z-1) U(z) + T^2 U(z) = \\ & = K T^2 \mathcal{E}(z) + K_S T^3 \frac{1}{z-1} \mathcal{E}(z) + K_D T(z-1) \mathcal{E}(z), \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned} W_{US}(z) & = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{K T^2 + K_S T^3 \frac{1}{z-1} + K_D T(z-1)}{T_2^2(z-1)^2 + T_1 T(z-1) + T^2} = \\ & = \frac{K T^2(z-1) + K_S T^3 + K_D T(z-1)^2}{T_2^2(z-1)^3 + T_1 T(z-1)^2 + T^2(z-1)}, \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} & [T_2^2 z^3 + (T_1 T - 3T_2^2) z^2 + (T^2 + 3T_2^2 - 2T_1 T) z + (T_1 T - T_2^2 - T^2)] U(z) = \\ & = [(K_S T^3 + K_D T - K T^2) + (K T^2 - 2K_D T) z + K_D T z^2] \mathcal{E}(z), \end{aligned} \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned} & T_2^2 U(k+3) + (T_1 T - 3T_2^2) U(k+2) + (T^2 + 3T_2^2 - 2T_1 T) U(k+1) + (T_1 T - T_2^2 - T^2) U(k) \\ & = (K_S T^3 + K_D T - K T^2) \mathcal{E}(k) + (K T^2 - 2K_D T) \mathcal{E}(k+1) + K_D T z^2 \mathcal{E}(k+2). \end{aligned} \quad (3.127)$$

**УСИ управљачки систем**

Првог реда:

$$\begin{aligned} & T_1 U(k+2) + (T - 2T_1) U(k+1) + (T_1 - T) U(k) = \\ & = (K_S T^2 + K_D - KT) \mathcal{E}(k) + (KT - 2K_D) \mathcal{E}(k+1) + K_D \mathcal{E}(k+2), \end{aligned} \quad (3.128)$$

$$\begin{aligned} & U(k+2) + \left( \frac{T - 2T_1}{T_1} \right) U(k+1) + \left( \frac{T_1 - T}{T_1} \right) U(k) = \\ & = \left( \frac{K_S T^2 + K_D - KT}{T_1} \right) \mathcal{E}(k) + \left( \frac{KT - 2K_D}{T_1} \right) \mathcal{E}(k+1) + \frac{K_D}{T_1} \mathcal{E}(k+2), \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$\mathbf{X}_{US}(k+1) = \mathbf{A}_{US} \mathbf{X}_{US}(k) + \mathbf{b}_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.130)$$

$$U(k) = \mathbf{c}_{US} \mathbf{X}_{US}(k) + d_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.131)$$

$$\mathbf{A}_{US} = \begin{bmatrix} \frac{2T_1 - T}{T_1} & 1 \\ \frac{T - T_1}{T_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{US} = \begin{bmatrix} \frac{T(T_1 K - K_D)}{T_1^2} \\ \frac{T(T_1 K_S T - T_1 K + K_D)}{T_1^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{US} = [1 \quad 0], \quad d_{US} = \frac{K_D}{T_1}, \quad (3.132)$$

$$\mathbf{X}_{US}(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{2T_1 - T}{T_1} & 1 \\ \frac{T - T_1}{T_1} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{US}(k) + \begin{bmatrix} \frac{T(T_1 K - K_D)}{T_1^2} \\ \frac{T(T_1 K_S T - T_1 K + K_D)}{T_1^2} \end{bmatrix} \mathcal{E}(k), \quad (3.133)$$

$$U(k) = [1 \quad 0] \mathbf{X}_{US}(k) + \frac{K_D}{T_1} \mathcal{E}(k). \quad (3.134)$$

Другог реда:

$$\begin{aligned} & T_2^2 U(k+3) + (T_1 T - 3T_2^2) U(k+2) + (T^2 + 3T_2^2 - 2T_1 T) U(k+1) + (T_1 T - T_2^2 - T^2) U(k) \\ & = (K_S T^3 + K_D T - KT^2) \mathcal{E}(k) + (KT^2 - 2K_D T) \mathcal{E}(k+1) + K_D T z^2 \mathcal{E}(k+2), \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} & U(k+3) + \left( \frac{T_1 T - 3T_2^2}{T_2^2} \right) U(k+2) + \left( \frac{T^2 + 3T_2^2 - 2T_1 T}{T_2^2} \right) U(k+1) + \\ & \left( \frac{T_1 T - T_2^2 - T^2}{T_2^2} \right) U(k) = \left( \frac{K_S T^3 + K_D T - KT^2}{T_2^2} \right) \mathcal{E}(k) + \\ & + \left( \frac{KT^2 - 2K_D T}{T_2^2} \right) \mathcal{E}(k+1) + \frac{K_D T}{T_2^2} \mathcal{E}(k+2), \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$\mathbf{X}_{US}(k+1) = \mathbf{A}_{US} \mathbf{X}_{US}(k) + \mathbf{b}_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.137)$$

$$U(k) = \mathbf{c}_{US} \mathbf{X}_{US}(k) + d_{US} \mathcal{E}(k), \quad (3.138)$$

$$\mathbf{A}_{US} = \begin{bmatrix} \frac{3T_2^2 - T_1 T}{T_2^2} & 1 & 0 \\ \frac{2T_1 T - 3T_2^2 - T^2}{T_2^2} & 0 & 1 \\ \frac{T_2^2 + T^2 - T_1 T}{T_2^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{US} = \begin{bmatrix} \frac{K_D T}{T_2^2} \\ \frac{KT^2 - 2K_D T}{T_2^2} \\ \frac{K_S T^3 + K_D T - KT^2}{T_2^2} \end{bmatrix}, \quad (3.139)$$

$$\mathbf{c}_{US} = [1 \quad 0 \quad 0], \quad d_{US} = 0, \quad (3.140)$$

$$\mathbf{X}_{US}(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{3T_2^2 - T_1 T}{T_2^2} & 1 & 0 \\ \frac{2T_1 T - 3T_2^2 - T^2}{T_2^2} & 0 & 1 \\ \frac{T_2^2 + T^2 - T_1 T}{T_2^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}_{US}(k) + \begin{bmatrix} \frac{K_D T}{T_2^2} \\ \frac{KT^2 - 2K_D T}{T_2^2} \\ \frac{K_S T^3 + K_D T - KT^2}{T_2^2} \end{bmatrix} \mathcal{E}(k), \quad (3.141)$$

$$U(k) = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{X}_{US}(k). \quad (3.142)$$

### 3.4.2 Математички модели (*УИ*, *УСИ*) по одступањима

#### *УИ* управљачки систем

Првог реда:

Када се у једначину (3.6) уврсти  $\eta = 1$  добија се,

$$\begin{aligned} & T_1 u(k+2) + (T - 2T_1) u(k+1) + (T_1 - T) u(k) = \\ & = (K_S T^2 + K_D - KT) \varepsilon(k) + (KT - 2K_D) \varepsilon(k+1) + K_D \varepsilon(k+2), \end{aligned} \quad (3.143)$$

$$\mathbf{A}_C^{(2)} \mathbf{u}^2 = \mathbf{B}_C^{(2)} \varepsilon^2, \quad \mathbf{A}_C^{(2)} = [ a_{0C} \quad a_{1C} \quad a_{2C} ], \quad \mathbf{B}_C^{(1)} = [ b_{0C} \quad b_{1C} \quad b_{2C} ], \quad (3.144)$$

$$a_{0C} = \frac{T_1 - T}{T}, \quad a_{1C} = \frac{T - 2T_1}{T}, \quad a_{2C} = \frac{T_1}{T}, \quad b_{0C} = \left( \frac{K_D}{T} + K_S T - K \right), \quad (3.145)$$

$$b_{1C} = \left( K - \frac{2K_D}{T} \right), \quad b_{2C} = \frac{K_D}{T}. \quad (3.146)$$

Другог реда:

$$\begin{aligned} & T_2^2 u(k+3) + (T_1 T - 3T_2^2) u(k+2) + (T^2 + 3T_2^2 - 2T_1 T) u(k+1) + (T_1 T - T_2^2 - T^2) u(k) \\ & = (K_S T^3 + K_D T - KT^2) \varepsilon(k) + (KT^2 - 2K_D T) \varepsilon(k+1) + K_D T \varepsilon(k+2). \end{aligned} \quad (3.147)$$

#### *УСИ* управљачки систем

Првог реда:

$$\mathbf{x}_{US}(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{2T_1 - T}{T_1} & 1 \\ \frac{T - T_1}{T_1} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{US}(k) + \begin{bmatrix} \frac{T(T_1 K - K_D)}{T_1^2} \\ \frac{T(T_1 K_S T - T_1 K + K_D)}{T_1^2} \end{bmatrix} \varepsilon(k), \quad (3.148)$$

$$u(k) = [ 1 \quad 0 ] \mathbf{x}_{US}(k) + \frac{K_D}{T_1} \varepsilon(k). \quad (3.149)$$

Другог реда:

$$\mathbf{x}_{US}(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{3T_2^2 - T_1 T}{T_2^2} & 1 & 0 \\ \frac{2T_1 T - 3T_2^2 - T^2}{T_2^2} & 0 & 1 \\ \frac{T_2^2 + T^2 - T_1 T}{T_2^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{US}(k) + \begin{bmatrix} \frac{K_D T}{T_2^2} \\ \frac{KT^2 - 2K_D T}{T_2^2} \\ \frac{K_S T^3 + K_D T - KT^2}{T_2^2} \end{bmatrix} \varepsilon(k), \quad (3.150)$$

$$u(k) = [ 1 \quad 0 \quad 0 ] \mathbf{x}_{US}(k). \quad (3.151)$$

# Глава 4

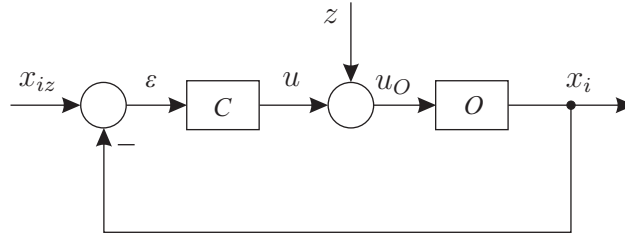
## Математички модел затвореног система аутоматског управљања

### 4.1 УИ систем

Математички модел затвореног система у УИ облику се добија тако што се обједине УИ математички модел објекта и УИ математички модел управљачког система.

#### 4.1.1 Математички модел по одступањима

Структурни дијаграм затвореног система приказан је на слици 4.1.



Слика 4.1: Структурни дијаграм затвореног система аутоматског управљања са јединичном негативном повратном спрегом.

УИ математички модел целог система се добија комбинацијом једначине (2.15) и једначине одговарајућег контролера у зависности од његовог типа и реда. Ако се искористе једначина (2.15) и општа једначина контролера (3.6) или (3.16) у зависности од тога да ли сумарно (C) дејство постоји или не, добија се,

$$\mathbf{A}^{(\nu+\eta+1)} \mathbf{x}_i^{\nu+\eta+1} = \mathbf{B}^{(\mu+\eta+1)} \mathbf{x}_u^{\mu+\eta+1}, \quad \forall k \in \mathcal{N}_0, \quad \nu \geq 1, \quad 0 \leq \mu \leq \nu, \quad \eta \geq 0, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{A}^{(\nu+\eta+1)} = \begin{bmatrix} a_0(K, K_D, K_S) & a_1(K, K_D, K_S) & \cdots & a_{\nu+\eta+1}(K, K_D, K_S) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$a_j(K, K_D, K_S) = \underbrace{\sum_{q=0}^{\eta+1} \sum_{r=0}^{\nu} a_{qC} a_{rO}}_{r+q=j} + \underbrace{\sum_{q=0}^2 \sum_{r=0}^{\mu} b_{qC}(K, K_D, K_S) b_{rO}}_{r+q=j}, \quad (4.3)$$

$$j = 0, 1, \dots, \nu + \eta + 1, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{B}^{(\mu+\eta+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0(K, K_D, K_S) & \mathbf{B}_1(K, K_D, K_S) & \cdots & \mathbf{B}_{\mu+\eta+1}(K, K_D, K_S) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B}_j(K, K_D, K_S) = \left[ \begin{array}{c} \sum_{q=0}^2 \sum_{r=0}^{\mu} b_{qC}(K, K_D, K_S) b_{rO} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{r+q=j} \end{array} \quad \sum_{q=0}^{\eta+1} \sum_{r=0}^{\mu} a_{qC} b_{rO} \right], \quad (4.6)$$

$$j = 0, 1, \dots, \mu + \eta + 1, \quad \mathbf{x}_u = [x_{iz} \quad z]^T, \quad (4.7)$$

ако сумарно (C) дејство постоји, односно

$$\mathbf{A}^{(\nu+\eta)} \mathbf{x}_i^{\nu+\eta} = \mathbf{B}^{(\mu+\eta)} \mathbf{x}_u^{\mu+\eta}, \quad \forall k \in \mathcal{N}_0, \quad \nu \geq 1, \quad 0 \leq \mu \leq \nu, \quad \eta \geq 0, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{A}^{(\nu+\eta)} = [a_0(K, K_D) \quad a_1(K, K_D) \quad \dots \quad a_{\nu+\eta}(K, K_D)], \quad (4.9)$$

$$a_j(K, K_D) = \underbrace{\sum_{q=0}^{\eta} \sum_{r=0}^{\nu} a_{qC} a_{rO}}_{r+q=j} + \underbrace{\sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^{\mu} b_{qC}(K, K_D) b_{rO}}_{r+q=j}, \quad j = 0, 1, \dots, \nu + \eta, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{B}^{(\mu+\eta)} = [\mathbf{B}_0(K, K_D) \quad \mathbf{B}_1(K, K_D) \quad \dots \quad \mathbf{B}_{\mu+\eta}(K, K_D)], \quad (4.11)$$

$$\mathbf{B}_j(K, K_D) = \left[ \begin{array}{c} \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^{\mu} b_{qC}(K, K_D) b_{rO} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{r+q=j} \end{array} \quad \sum_{q=0}^{\eta} \sum_{r=0}^{\mu} a_{qC} b_{rO} \right], \quad j = 0, 1, \dots, \mu + \eta, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{x}_u = [x_{iz} \quad z]^T, \quad (4.13)$$

у случају да сумарно (C) дејство не постоји.

Општи УИ математички модел система у компактном облику је,

$$\mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{x}_i^n = \mathbf{B}^{(m)}(\cdot) \mathbf{x}_u^m, \quad \forall k \in \mathcal{N}_0, \quad m \leq n, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{A}^{(n)}(\cdot) = [a_0(\cdot) \quad a_1(\cdot) \quad \dots \quad a_n(\cdot)], \quad \mathbf{B}^{(m)}(\cdot) = [\mathbf{B}_0(\cdot) \quad \mathbf{B}_1(\cdot) \quad \dots \quad \mathbf{B}_m(\cdot)], \quad (4.15)$$

$$\mathbf{x}_i^n = [x_i(k) \quad x_i(k+1) \quad \dots \quad x_i(k+n)]^T, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{x}_u^m = [\mathbf{x}_u^T(k) \quad \mathbf{x}_u^T(k+1) \quad \dots \quad \mathbf{x}_u^T(k+m)]^T. \quad (4.17)$$

где  $a_j(\cdot)$ ,  $\mathbf{B}_j(\cdot)$ ,  $n$  и  $m$  зависе од типа и реда контролера како је већ показано,

$$a_j(\cdot) = a_j(\alpha, \beta) = b_j\alpha + c_j\beta + d_j, \quad \alpha = K, \quad \beta = K_D \vee K_S, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad \text{или} \quad (4.18)$$

$$a_j(\cdot) = a_j(\alpha, \beta, \gamma) = b_j\alpha + c_j\beta + d_j\gamma + e_j, \quad \alpha = K, \quad \beta = K_D, \quad \gamma = K_S, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{B}_j(\cdot) = \mathbf{B}_j(\alpha, \beta) \quad \text{или} \quad \mathbf{B}_j(\alpha, \beta, \gamma), \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (4.20)$$

Параметри  $\alpha$ ,  $\beta$ , и  $\gamma$  су подешљиви параметри контролера и одређују се на основу методе условне оптимизације.

У наставку се из једначине (4.8) или (4.1) изводе специјални случајеви.

### Затворени САУ

У наставку је у општем облику приказан поступак за одређивање преносне функције затвореног система и свих коефицијената диференчне једначине уколико је објект управљан са:

ПД управљачки систем првог реда

Диференчна једначина понашања објекта у општем облику је

$$O : a_{nO}x_i(k+n) + a_{(n-1)O}x_i(k+n-1) + \dots + a_{1O}x_i(k+1) + a_{0O}x_i(k) = b_{0O}u_O(k) + \dots + b_{(m-1)O}u_O(k+m-1) + b_{mO}u_O(k+m), \quad a_{nO} = 1, \quad m \leq n. \quad (4.21)$$

Даљим сређивањем се добија:

$$W_O(z) = \frac{\sum_{k=0}^{k=m} b_{kO} z^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kO} z^k} = \frac{b_{mO} z^m + b_{(m-1)O} z^{m-1} + \dots + b_{1O} z + b_{0O}}{a_{nO} z^n + a_{(n-1)O} z^{n-1} + \dots + a_{1O} z + a_{0O}}, \quad (4.22)$$

$$A_O^{(n)} \mathbf{x}_i^n = B_O^{(m)} \mathbf{u}_O^m, \quad m \leq n, \quad (4.23)$$

$$A_O^{(n)} = [ a_{0O} \ a_{1O} \ \dots \ a_{nO} ], \quad B_O^{(m)} = [ b_{0O} \ b_{1O} \ \dots \ b_{mO} ], \quad (4.24)$$

$$\mathbf{x}_i^n = [ x_i(k) \ x_i(k+1) \ \dots \ x_i(k+n) ]^T, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{u}_O^m = [ u_O(k) \ u_O(k+1) \ \dots \ u_O(k+m) ]^T. \quad (4.26)$$

Диференца једначина понашања ПД управљачког система првог реда је

$$US : T_1 u(k+1) + (T - T_1) u(k) = (KT - K_D) \varepsilon(k) + K_D \varepsilon(k+1), \quad (4.27)$$

и даље се добија

$$W_{US}(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{[(KT - K_D) + K_D z]}{[T_1 z + (T - T_1)]}, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} X_i(z) &= \frac{W_O(z)}{1 + W_{US}(z) W_O(z)} Z(z) + \frac{W_{US}(z) W_O(z)}{1 + W_{US}(z) W_O(z)} X_{iz}(z) = \\ &= \frac{[T_1 z + (T - T_1)] \sum_{k=0}^{k=m} b_{kO} z^k}{\sum_{k=0}^{k=n} [a_{kO} T_1 z^{k+1} + a_{kO} (T - T_1) z^k] + \sum_{k=0}^{k=m} [b_{kO} (KT - K_D) z^k + b_{kO} K_D z^{k+1}]} Z(z) + \\ &+ \frac{[(KT - K_D) + K_D z] \sum_{k=0}^{k=m} b_{kO} z^k}{[T_1 z + (T - T_1)] \sum_{k=0}^{k=n} a_{kO} z^k + [(KT - K_D) + K_D z] \sum_{k=0}^{k=m} b_{kO} z^k} X_{iz}(z), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{k=0}^{k=n+1} [a_{(k-1)O} T_1 + b_{(k-1)O} K_D + a_{kO} (T - T_1) + b_{kO} (KT - K_D)] z^k \right\} X_i(z) = \\ &\left\{ \sum_{k=0}^{m+1} [b_{(k-1)O} K_D + b_{kO} (KT - K_D)] z^k \right\} X_{iz}(z) + \left\{ \sum_{k=0}^{m+1} [b_{(k-1)O} T_1 + b_{kO} (T - T_1)] z^k \right\} Z(z) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$a_{-1O} = 0, \quad b_{-1O} = 0, \quad a_{(n+1)O} = 0, \quad b_{(n+1)O} = 0, \quad (4.31)$$

$$b_{kO} = 0, \quad k = m+1, m+2, \dots, n, \quad m \leq n, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{k=0}^{k=n+1} [a_{(k-1)O} T_1 + b_{(k-1)O} K_D + a_{kO} (T - T_1) + b_{kO} (KT - K_D)] z^k \right\} X_i(z) = \\ &= \left[ \sum_{k=0}^{m+1} [b_{(k-1)O} K_D + b_{kO} (KT - K_D)] z^k \quad \sum_{k=0}^{m+1} [b_{(k-1)O} T_1 + b_{kO} (T - T_1)] z^k \right] \mathbf{X}_u(z), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{X}_u(z) = \begin{bmatrix} X_{iz}(z) \\ Z(z) \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$



$$\text{ЗСАУ : } \sum_{k=0}^{n+1} a_k(\alpha, \beta) z^k X_i(z) = \sum_{k=0}^{m+1} B_k(\alpha, \beta) z^k \mathbf{X}_u(z), \quad \alpha = K, \beta = K_D, \quad (4.35)$$

$$a_k(\alpha, \beta) = [a_{(k-1)O}T_1 + b_{(k-1)O}K_D + a_{kO}(T - T_1) + b_{kO}(KT - K_D)], \quad \forall k = 0, \dots, n+1, \quad (4.36)$$

$$B_k(\alpha, \beta) = [ [b_{(k-1)O}K_D + b_{kO}(KT - K_D)] \quad [b_{(k-1)O}T_1 + b_{kO}(T - T_1)] ], \quad (4.37)$$

$$\forall k = 0, \dots, m+1. \quad (4.38)$$

$$\text{ЗСАУ у компактном облику : } A^{(n+1)} \mathbf{x}_i^{n+1} = B^{(m+1)} \mathbf{x}_u^{m+1}, \quad m \leq n, \quad (4.39)$$

при чему су проширене матрице коефицијената

$$A^{(n+1)} = [ a_0(\alpha, \beta) \quad a_1(\alpha, \beta) \quad \dots \quad a_{n+1}(\alpha, \beta) ], \quad (4.40)$$

$$B^{(m+1)} = [ B_0(\alpha, \beta) \quad B_1(\alpha, \beta) \quad \dots \quad B_{(m+1)}(\alpha, \beta) ], \quad (4.41)$$

и проширени вектори излаза и улаза

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = [ x_i(k) \quad x_i(k+1) \quad \dots \quad x_i(k+n+1) ]^T, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{x}_u^{m+1} = [ \mathbf{x}_u^T(k) \quad \mathbf{x}_u^T(k+1) \quad \dots \quad \mathbf{x}_u^T(k+m+1) ]^T. \quad (4.43)$$

На сличан начин се у општем облику одређују преносне функције и сви коефицијенти диференцне једначине затвореног система у случају да је објект управљан са:

ПС управљачки систем нултог реда

Опис објекта је исти као што је то приказано једначинама (4.21)-(4.26). Диференцна једначина понашања ПС управљачког система нултог реда је

$$US : u(k+1) - u(k) = (K_S T - K) \varepsilon(k) + K \varepsilon(k+1), \quad (4.44)$$

и даљим сређивањем се добија

$$W_{US}(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{[(K_S T - K) + Kz]}{(z-1)}, \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} X_i(z) &= \frac{W_O(z)}{1 + W_{US}(z) W_O(z)} Z(z) + \frac{W_{US}(z) W_O(z)}{1 + W_{US}(z) W_O(z)} X_{iz}(z) = \\ &= \frac{(z-1) \sum_{k=0}^{k=m} b_{kO} z^k}{\sum_{k=0}^{k=n} (a_{kO} z^{k+1} - a_{kO} z^k) + \sum_{k=0}^{k=m} [b_{kO} (K_S T - K) z^k + b_{kO} K z^{k+1}]} Z(z) + \\ &+ \frac{[(K_S T - K) + Kz] \sum_{k=0}^{k=m} b_{kO} z^k}{\sum_{k=0}^{k=n} (a_{kO} z^{k+1} - a_{kO} z^k) + \sum_{k=0}^{k=m} [b_{kO} (K_S T - K) z^k + b_{kO} K z^{k+1}]} X_{iz}(z), \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n+1} [a_{(k-1)O} + b_{(k-1)O}K - a_{kO} + b_{kO}(K_S T - K)] z^k \right\} X_i(z) = \left\{ \sum_{k=0}^{k=m+1} [b_{(k-1)O}K + b_{kO}(K_S T - K)] z^k \right\} X_{iz}(z) + \left\{ \sum_{k=0}^{m+1} [b_{(k-1)O} - b_{kO}] z^k \right\} Z(z), \quad (4.47)$$

$$a_{-1O} = 0, \quad b_{-1O} = 0, \quad a_{(n+1)O} = 0, \quad b_{(n+1)O} = 0, \quad (4.48)$$

$$b_{kO} = 0, \quad k = m+1, m+2, \dots, n, \quad m \leq n, \quad (4.49)$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n+1} [a_{(k-1)O} + b_{(k-1)O}K - a_{kO} + b_{kO}(K_S T - K)] z^k \right\} X_i(z) = \left[ \sum_{k=0}^{k=m+1} [b_{(k-1)O}K + b_{kO}(K_S T - K)] z^k \quad \sum_{k=0}^{m+1} [b_{(k-1)O} - b_{kO}] z^k \right] \mathbf{X}_u(z), \quad (4.50)$$

$$\mathbf{X}_u(z) = \begin{bmatrix} X_{iz}(z) \\ Z(z) \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

$$\text{ЗСАУ: } \sum_{k=0}^{n+1} a_k(\alpha, \beta) z^k X_i(z) = \sum_{k=0}^{m+1} B_k(\alpha, \beta) z^k \mathbf{X}_u(z), \quad \alpha = K, \quad \beta = K_S, \quad (4.52)$$

$$a_k(\alpha, \beta) = [a_{(k-1)O} + b_{(k-1)O}K - a_{kO} + b_{kO}(K_S T - K)], \quad \forall k = 0, \dots, n+1, \quad (4.53)$$

$$B_k(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} [b_{(k-1)O}K + b_{kO}(K_S T - K)] & [b_{(k-1)O} - b_{kO}] \end{bmatrix}, \quad \forall k = 0, \dots, m+1. \quad (4.54)$$

$$\text{ЗСАУ у компактном облику: } A^{(n+1)} \mathbf{x}_i^{n+1} = B^{(m+1)} \mathbf{x}_u^{m+1}, \quad m \leq n, \quad (4.55)$$

при чему су

$$A^{(n+1)} = [a_0(\alpha, \beta) \quad a_1(\alpha, \beta) \quad \dots \quad a_{n+1}(\alpha, \beta)], \quad (4.56)$$

$$B^{(m+1)} = [B_0(\alpha, \beta) \quad B_1(\alpha, \beta) \quad \dots \quad B_{(m+1)}(\alpha, \beta)], \quad (4.57)$$

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = [x_i(k) \quad x_i(k+1) \quad \dots \quad x_i(k+n+1)]^T, \quad (4.58)$$

$$\mathbf{x}_u^{m+1} = [\mathbf{x}_u^T(k) \quad \mathbf{x}_u^T(k+1) \quad \dots \quad \mathbf{x}_u^T(k+m+1)]^T. \quad (4.59)$$

На основу претходног извођења следи да је УИ математички модел система у компактном облику:

$$\mathbf{A}^{(\nu+1)} \mathbf{x}_i^{\nu+1} = \mathbf{B}^{(\mu+1)} \mathbf{x}_u^{\mu+1}, \quad \forall k \in \mathcal{N}_0, \quad \mu \leq \nu, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{A}^{(\nu+1)} = [a_0(K, K_S) \quad a_1(K, K_S) \quad \dots \quad a_{\nu+1}(K, K_S)], \quad (4.61)$$

$$a_j(K, K_S) = \underbrace{\sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^{\nu} a_{qC} a_{rO}}_{r+q=j} + \underbrace{\sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^{\mu} b_{qC}(K, K_S) b_{rO}}_{r+q=j}, \quad j = 0, 1, \dots, \nu+1, \quad (4.62)$$

$$\mathbf{B}^{(\mu+1)} = [\mathbf{B}_0(K, K_S) \quad \mathbf{B}_1(K, K_S) \quad \dots \quad \mathbf{B}_{\mu+1}(K, K_S)], \quad (4.63)$$

$$\mathbf{B}_j(K, K_S) = \begin{bmatrix} \underbrace{\sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^{\mu} b_{qC}(K, K_S) b_{rO}}_{r+q=j} & \underbrace{\sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^{\mu} a_{qC} b_{rO}}_{r+q=j} \end{bmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, \mu+1. \quad (4.64)$$

Због предугачких израза, изоставља се приказивање поступка за добијање облика затвореног система за остале случајеве управљачких система.

# Глава 5

## Потпуна преносна функција: ненулти почетни услови

### 5.1 Општа дефиниција и одређивање $\Pi(z)$ : ненулти почетни услови

Суштинска основа дисертације су нови, недавно објављени резултати истраживања за линеарне континуалне и дискретне системе. Они се састоје од новог приступа теорији система и управљања: потпуне преносне матрице. Овај приступ је откривен у [33] и даље развијан у [50], [51] везано за линеарне континуалне системе и проширен за линеарне дискретне системе у [1]. Овај нови концепт омогућава решавање многих проблема у теорији система и управљања који су били деценијама нерешени у класичној теорији линеарних система и који су доста важни: контроверзно неслагање између дефиниције класичне преносне функције (матрице) и дефиниције стабилности система. Сада је то превазиђено. Осим тога, прецизно и јасно правило за скраћивање истих нула и полова је откривено и доказано. Контроверза која се тиче стабилности система је у томе што је стабилност, по дефиницији, динамичка карактеристика система у **слободном** радном режиму и при **ненултим** почетним условима а испитивана је помоћу преносне функције која је дефинисана у **принудном** радном режиму при **нултим** почетним условима. Ова контрадикторност је, очигледно, неприхватљива.

У општем случају и у реалним условима систем је под истовременим дејством вектора спољашњег улаза и ненултих почетних услова. Почетни услови садрже и изражавају целокупну историју деловања вектора улаза на систем до почетног тренутка. Почетни услови су непредвидиви, непознати и незанемарљиви. Као и вектор улаза тако и почетни услови у исто време делују на систем и њихов утицај се осликава на одзив система у временском домену. Потпуна преносна матрица описује у  $z$ -комплексном домену како се споменута два дејства преносе на одзив система у временском домену. Било који динамички систем, чак и најједноставнији, преноси ова дејства тако да има своју потпуну преносну матрицу.

**Пример 5.1** *Разматра се веома једноставан систем представљен диференцијалном једначином понашања (5.1):*

$$x_i(k+1) = x_u(k). \quad (5.1)$$

*Применом  $z$ -трансформације на једначину (5.1) добија се:*

$$zX_i(z) - zx_i(0) = X_u(z) \implies X_i(z) = \Pi(z) \begin{bmatrix} X_u(z) \\ x_i(0) \end{bmatrix}, \quad \Pi(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{z}{z} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Ово показује да матрица  $\Pi(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z} & \frac{z}{z} \end{bmatrix}$  описује у  $z$ -комплексном домену како систем у временском домену преноси улаз  $x_u(k)$  и почетне услове  $x_i(0)$  на његов излаз. Матрица  $\Pi(z)$  назива се потпуном преносном функцијом система.

Посматра се улаз-излаз (УИ) систем у општем облику, описан са (5.3):

$$\sum_{r=0}^{r=\nu} \mathbf{A}_r \mathbf{x}_i(k+r) = \sum_{r=0}^{r=\mu} \mathbf{B}_r \mathbf{x}_u(k+r), \quad \det \mathbf{A}_\nu \neq 0, \quad \forall k \in \mathcal{N}_0, \quad \nu \geq 1, \quad 0 \leq \mu \leq \nu, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{A}_r \in \mathcal{R}^{N \times N}, \quad \mathbf{B}_r \in \mathcal{R}^{N \times M}, \quad \mathbf{x}_u \in \mathcal{R}^M, \quad \mathbf{x}_i \in \mathcal{R}^N, \quad (5.4)$$

где су  $\mathbf{x}_u \in \mathcal{R}^M$  и  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{R}^N$  вектор улаза и вектор излаза, следствено.

Да би било могуће дати прецизну, општу дефиницију потпуне преносне матрице  $\Pi(z)$  и одредити је, за систем (5.3) користи се компактни рачун. Основу овог компактног рачуна чине следеће проширене матрице система,

$$\mathbf{A}^{(\nu)} = [\mathbf{A}_0 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_\nu] \in \mathcal{R}^{N \times (\nu+1)N}, \quad \mathbf{B}^{(\mu)} = [\mathbf{B}_0 \quad \cdots \quad \mathbf{B}_\mu] \in \mathcal{R}^{N \times (\mu+1)M}, \quad (5.5)$$

заједно са проширеним векторима улаза и излаза,

$$\mathbf{x}_u^\mu(k) = [\mathbf{x}_u^T(k) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_u^T(k+\mu)]^T \in \mathcal{R}^{(\mu+1)M}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{x}_i^\nu(k) = [\mathbf{x}_i^T(k) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_i^T(k+\nu)]^T \in \mathcal{R}^{(\nu+1)N}, \quad (5.7)$$

као и са следећим матричним функцијама,

$$\mathbf{S}_i^{(r)}(z) = [z^0 \mathbf{I}_i \quad z^1 \mathbf{I}_i \quad z^2 \mathbf{I}_i \quad \cdots \quad z^r \mathbf{I}_i]^T \in \mathcal{C}^{i(r+1) \times i}, \quad (r, i) \in \{(\mu, M), (\nu, N)\}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{Z}_r^{(\varsigma)}(z) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_r & \mathbf{O}_r & \mathbf{O}_r & \cdots & \mathbf{O}_r \\ z^1 \mathbf{I}_r & \mathbf{O}_r & \mathbf{O}_r & \cdots & \mathbf{O}_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_r^{\varsigma-0} \mathbf{I}_r & z_r^{\varsigma-1} \mathbf{I}_r & z_r^{\varsigma-2} \mathbf{I}_r & \cdots & z^1 \mathbf{I}_r \end{bmatrix}, & \varsigma \geq 1, \\ \text{није дефинисано за } \varsigma < 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{Z}_r^{(\varsigma)}(z) \in \mathcal{C}^{(\varsigma+1)r \times \varsigma r}, \quad (\varsigma, r) \in \{(\mu, M), (\nu, N)\}.$$

Овакво компактно означавање, обезбеђује веома једноставан, јасан и елегантан математички запис (5.10) УИ система (5.3):

$$\mathbf{A}^{(\nu)} \mathbf{x}_i^\nu(k) = \mathbf{B}^{(\mu)} \mathbf{x}_u^\mu(k), \quad \forall k \in \mathcal{N}_0. \quad (5.10)$$

## 5.2 Дефиниција и одређивање $\Pi(z)$ за УИ систем: ненулти почетни услови

Прецизна и општа дефиниција потпуне преносне матрице за линеарне дискретне системе изражене преко УИ математичког модела је, према [1],

**Дефиниција 5.1** Потпуна улаз-излаз (УИ) преносна матрица линеарног стационарног дискретног динамичког улаз-излаз система (5.10), означена са  $\Pi(z)$ ,  $\Pi(z) \in \mathcal{C}^{N \times (M+\varsigma)}$ , је комплексна матрична вредност потпуне улаз-излаз (УИ) преносне матрице система  $\Pi(\cdot)$ ,  $\Pi(\cdot) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{N \times (M+\varsigma)}$ . То је матрична функција комплексне променљиве  $z$  таква да једнозначно одређује  $Z$ -трансформацију  $\mathbf{X}_i(z)$  излаза

система  $\mathbf{x}_i(k)$  као хомогене линеарне функције од  $Z$ -трансформације  $\mathbf{X}_u(z)$  вектора улаза  $\mathbf{x}_u(k)$  за произвољно одступање  $\mathbf{x}_u(k)$ , за произвољне почетне вредности вектора  $\mathbf{x}_{u0}^{\mu-1}$  и  $\mathbf{x}_{i0}^{\nu-1}$  проширеног вектора улаза  $\mathbf{x}_u^{\mu-1}(k)$ , и проширеног вектора излаза  $\mathbf{x}_i^{\nu-1}(k)$  у тренутку одабирања  $k = 0$ , следствено,

$$\mathbf{X}_i(z) = \mathbf{\Pi}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u^T(z) & (\mathbf{x}_{u0}^{\mu-1})^T & (\mathbf{x}_{i0}^{\nu-1})^T \end{bmatrix}^T. \quad (5.11)$$

Потпуна преносна матрица има исте карактеристике као класична преносна матрица  $\mathbf{W}(z)$ :

- Одређена је редом, димензијом, структуром и параметрима;
- Независна је од вектора улаза као и од почетних услова;
- Представља инваријантну динамичку карактеристику система у комплексном домену.

Одређивање потпуне преносне матрице УИ система (5.10) дефинисано је наредном теоремом,

### Теорема 5.1 [1]

а) Потпуна УИ преносна матрица  $\mathbf{\Pi}(z)$  УИ система (5.10) гласи,

$$\begin{aligned} & \text{Ако је } \mu \geq 1, \text{ онда } \mathbf{\Pi}(z) = \mathbf{\Pi}_D^{-1}(z)\mathbf{\Pi}_N(z) = \\ & = \left( \mathbf{A}^{(\nu)}\mathbf{S}_N^{(\nu)}(z) \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(\mu)}\mathbf{S}_M^{(\mu)}(z) & -\mathbf{B}^{(\mu)}\mathbf{Z}_M^{(\mu)}(z) & \mathbf{A}^{(\nu)}\mathbf{Z}_N^{(\nu)}(z) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(z) & \underbrace{\mathbf{W}_{x_{u0}}(z) \quad \mathbf{W}_{x_{i0}}(z)}_{\mathbf{W}_0(z)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_0(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{x_{u0}}(z) & \mathbf{W}_{x_{i0}}(z) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} & \text{Ако је } \mu = 0, \text{ онда је } \mathbf{\Pi}(z) = \mathbf{\Pi}_D^{-1}(z)\mathbf{\Pi}_N(z) = \left( \mathbf{A}^{(\nu)}\mathbf{S}_N^{(\nu)}(z) \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}^{(\nu)}\mathbf{Z}_N^{(\nu)}(z) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(z) & \mathbf{W}_{x_{i0}}(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_{x_{i0}}(z) = \mathbf{W}_0(z). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Одавде произилази

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}_i(z) = \mathbf{\Pi}(z) \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u^T(z) & (\mathbf{x}_{u0}^{\mu-1})^T & (\mathbf{x}_{i0}^{\nu-1})^T \end{bmatrix}^T & \text{ако је } \mu \geq 1, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u^T(z) & (\mathbf{x}_{i0}^{\nu-1})^T \end{bmatrix}^T & \text{ако је } \mu = 0 \end{cases} = \\ & = \mathbf{\Pi}(z)\mathbf{V}(z), \quad \mathbf{V}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{C}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{u0}^{\mu-1} \\ \mathbf{x}_{i0}^{\nu-1} \end{bmatrix}, & \text{ако је } \mu \geq 1, \\ \mathbf{x}_{i0}^{\nu-1}, & \text{ако је } \mu = 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

при чему су,

б)  $\mathbf{\Pi}_D(z)$  полиномијална матрица у имениоцу и  $\mathbf{\Pi}_N(z)$  полиномијална матрица у бројиоцу,

$$\mathbf{\Pi}_D(z) = \left( \mathbf{A}^{(\nu)}\mathbf{S}_N^{(\nu)}(z) \right), \quad (5.15)$$

$$\mathbf{\Pi}_N(z) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(\mu)}\mathbf{S}_M^{(\mu)}(z) & -\mathbf{B}^{(\mu)}\mathbf{Z}_M^{(\mu)}(z) & \mathbf{A}^{(\nu)}\mathbf{Z}_N^{(\nu)}(z) \end{bmatrix} & \text{ако је } \mu \geq 1, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{A}^{(\nu)}\mathbf{Z}_N^{(\nu)}(z) \end{bmatrix} & \text{ако је } \mu = 0, \end{cases}. \quad (5.16)$$

c)  $\mathbf{W}(z)$  је УИ преносна матрица (у односу на спољашњи улаз) система (5.10) и износи,

$$\mathbf{W}(z) = \left( \mathbf{A}^{(\nu)} \mathbf{S}_N^{(\nu)}(z) \right)^{-1} \mathbf{B}^{(\mu)} \mathbf{S}_M^{(\mu)}(z). \quad (5.17)$$

d)  $\mathbf{W}_{x_{u0}}(z)$  је класична преносна матрица система (5.10) у односу на проширени вектор почетних услова улаза  $\mathbf{x}_{u0}^{\mu-1}$  дата као,

$$\mathbf{W}_{x_{u0}}(z) = \left( \mathbf{A}^{(\nu)} \mathbf{S}_N^{(\nu)}(z) \right)^{-1} \begin{cases} -\mathbf{B}^{(\mu)} \mathbf{Z}_M^{(\mu)}(z), & \text{ако је } \mu \geq 1 \\ \mathbf{O}, & \text{ако је } \mu = 0 \end{cases}. \quad (5.18)$$

e)  $\mathbf{W}_{x_{i0}}(z)$  је преносна матрица система (5.10) у односу на проширени вектор почетних услова излаза  $\mathbf{x}_{i0}^{\nu-1}$ , и има следећи облик,

$$\mathbf{W}_{x_{i0}}(z) = \left( \mathbf{A}^{(\nu)} \mathbf{S}_N^{(\nu)}(z) \right)^{-1} \mathbf{A}^{(\nu)} \mathbf{Z}_N^{(\nu)}(z). \quad (5.19)$$

f)  $\mathbf{W}_0(z)$  је преносна матрица система (5.10) у односу на вектор свих почетних услова  $\mathbf{C}_0$  и износи,

$$\mathbf{W}_0(z) = \left( \mathbf{A}^{(\nu)} \mathbf{S}_N^{(\nu)}(z) \right)^{-1} \begin{cases} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{(\mu)} \mathbf{Z}_M^{(\mu)}(z) & \mathbf{A}^{(\nu)} \mathbf{Z}_N^{(\nu)}(z) \end{bmatrix}, & \mu \geq 1, \\ \mathbf{A}^{(\nu)} \mathbf{Z}_N^{(\nu)}(z), & \mu = 0 \end{cases}. \quad (5.20)$$

Коришћење свега претходног и употреба потпуне преносне матрице би била немогућа без компактног рачуна, па је због тога значај његовог открића и увођења очигледан. Исто тако, компактни рачун обезбеђује развој концепта стања у линеарним системима [1], [33], затим у нелинеарним системима [52], као и у концептима управљивости и осмотривости [50] и, најзад при развоју теорије пратљивости и праћења [52].

УИ потпуна преносна матрица  $\Pi(z)$  улаз-излаз (УИ) система (5.10) је,

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \Pi_D^{-1}(z) \Pi_N(z) = \left[ \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(n)}(z) \right]^{-1} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(m)}(\cdot) \mathbf{S}_2^{(m)}(z) & -\mathbf{B}^{(m)}(\cdot) \mathbf{Z}_2^{(m)}(z) & \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{Z}_1^{(n)}(z) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\Pi_D(z) = \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(n)}(z), \quad (5.22)$$

$$\Pi_N(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(m)}(\cdot) \mathbf{S}_2^{(m)}(z) & -\mathbf{B}^{(m)}(\cdot) \mathbf{Z}_2^{(m)}(z) & \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{Z}_1^{(n)}(z) \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

тако да

$$\mathbf{W}(z) = \left[ \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(n)}(z) \right]^{-1} \left[ \mathbf{B}^{(m)}(\cdot) \mathbf{S}_2^{(m)}(z) \right], \quad (5.24)$$

$$\mathbf{W}_{x_{u0}}(z) = - \left[ \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(n)}(z) \right]^{-1} \left[ \mathbf{B}^{(m)}(\cdot) \mathbf{Z}_2^{(m)}(z) \right], \quad (5.25)$$

$$\mathbf{W}_{x_{i0}}(z) = \left[ \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(n)}(z) \right]^{-1} \left[ \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{Z}_1^{(n)}(z) \right], \quad (5.26)$$

$$\mathbf{W}_0(z) = \left[ \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(n)}(z) \right]^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{(m)}(\cdot) \mathbf{Z}_2^{(m)}(z) & \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{Z}_1^{(n)}(z) \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

где је  $\mathbf{A}^{(n)}(\cdot)$  једнако  $\mathbf{A}^{(n)}(\alpha, \beta)$  или  $\mathbf{A}^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma)$  и  $\mathbf{B}^{(m)}(\cdot)$  је једнако  $\mathbf{B}^{(m)}(\alpha, \beta)$  или  $\mathbf{B}^{(m)}(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Онда  $Z$ -трансформација  $X_i(z)$  излазне величине  $x_i(k)$  износи,

$$\begin{aligned} X_i(z) &= \Pi(z) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u^T(z) & (\mathbf{x}_{u0}^{m-1})^T & (\mathbf{x}_{i0}^{n-1})^T \end{bmatrix}^T = \\ &= \Pi(z) \mathbf{V}(z), \quad \mathbf{V}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{c}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{u0}^{m-1} \\ \mathbf{x}_{i0}^{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

## 5.3 Недегенеративне матрице

Концепт недегенеративне потпуне преносне матрице уведен је и развијен у [32], [33] за континуалне линеарне системе и даље је проширен за дискретне линеарне системе у [1]. Према [1] (Деф.6.1, п.104; Лем.6.1, п.108), једнака нула и пол, заједнички за све елементе потпуне преносне матрице  $\mathbf{\Pi}(z)$  ( $\mathbf{\Pi}(z)$  је вектор врста) система (4.14) не утичу на карактер одзива система. Овакве нуле и полови могу се скратити уколико постоје, и на такав начин се одређује недегенеративна по врстама (rnd) потпуна преносна матрица  $\mathbf{\Pi}_{rnd}(z)$ . Скраћене нуле и полови морају бити истог реда у свим елементима од  $\mathbf{\Pi}(z)$ . Ово је нови, јасан, прецизан критеријум за скраћивање нула и половина који проистиче из новог концепта недегенеративне потпуне преносне матрице система. Овиме су решене све недоумице у вези скраћивања једнаких нула и половина.

Једина одговарајућа преносна матрица, која није контроверзна, за испитивање Љапуновљеве стабилности, је  $\mathbf{W}_0(z)$  која проистиче из  $\mathbf{\Pi}_{rnd}(z)$ , тј.  $\mathbf{W}_{ornd}(z)$ .

С друге стране, засновано на [1] (Одељак 8.4) карактеристични полином  $\Delta(z)$  система (4.14) одређен је са

$$\Delta(z) = \det \mathbf{\Pi}_D(z) = \det \left[ \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(n)}(z) \right] = \det \left[ \sum_{j=0}^{j=n} a_j(\cdot) z^j \right], \quad (5.29)$$

где су  $a_j(\cdot)$  заправо  $a_j(\alpha, \beta)$  или  $a_j(\alpha, \beta, \gamma)$ . Слично као код испитивања Љапуновљеве стабилности система, тако и при одређивању релативне стабилности једини адекватан карактеристични полином је онај који потиче од потпуне преносне матрице недегенеративне по врстама, тј.,  $\Delta_{\mathbf{\Pi}_{rnd}}(z)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{\Pi}_{rnd}}(z) &= \det [\mathbf{\Pi}_D(z)]_{\mathbf{\Pi}_{rnd}} = \det \left[ \mathbf{A}^{(n)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(n)}(z) \right]_{\mathbf{\Pi}_{rnd}} = \\ &= \sum_{j=0}^{j=l} \bar{a}_j(\cdot) z^j, \quad l \leq n, \quad \bar{a}_j(\cdot) = \bar{a}_j(\alpha, \beta) \quad \text{или} \quad \bar{a}_j(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\bar{a}_j(\alpha, \beta) = \bar{b}_j\alpha + \bar{c}_j\beta + \bar{d}_j, \quad \bar{a}_j(\alpha, \beta, \gamma) = \bar{b}_j\alpha + \bar{c}_j\beta + \bar{d}_j\gamma + \bar{e}_j. \quad (5.31)$$

Такав карактеристични полином се назива карактеристичним полиномом система [1], тј. карактеристичним полиномом потпуне преносне матрице система, односно још прецизније карактеристичним полиномом потпуне преносне матрице недегенеративне по врстама. У општем случају, другачији је од оног што се добија класичним приступом.

**Дефиниција 5.2** *Карактеристични полином система (4.14) је карактеристични полином његове потпуне преносне матрице недегенеративне по врстама  $\mathbf{\Pi}_{rnd}(z)$ .*

Следећи пример илуструје да карактеристични полином који потиче од класичне преносне функције  $W(z)$  и од потпуне преносне функције  $\mathbf{\Pi}(z)$  могу да се разликују.

**Пример 5.2** *Задати систем*

$$\mathbf{A}^{(2)} \mathbf{x}_i^2 = \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{x}_u^2, \quad (5.32)$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0,15 & 0,2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,8 & -6,3 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

$$\mathbf{x}_i^2 = \begin{bmatrix} x_i(k) & x_i(k+1) & x_i(k+2) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{x}_u^2 = \begin{bmatrix} x_u(k) & x_u(k+1) & x_u(k+2) \end{bmatrix}^T, \quad (5.34)$$

има следећу преносну функцију  $W(z)$ ,

$$W(z) = \frac{(z - 0, 3)(z - 6)}{(z - 0, 3)(z + 0, 5)}. \quad (5.35)$$

Има исту нулу  $z^0$  и пол  $z^*$ ,  $z^0 = z^* = 0, 3$ . Они не утичу на импулсни одзив система при свим нултим почетним условима. Недегенеративни облик  $W_{nd}(z)$  од  $W(z)$  износи,

$$W_{nd}(z) = \frac{(z - 6)}{(z + 0, 5)}, \quad (5.36)$$

одакле проистиче карактеристични полином у именуоцу преносне функције  $W(z)$  система,

$$\Delta_{W_{nd}}(z) = z + 0, 5. \quad (5.37)$$

С друге стране потпуна преносна функција система износи,

$$\Pi(z) = \frac{1}{(z - 0, 3)(z + 0, 5)} \begin{bmatrix} (z - 0, 3)(z - 6) & -z(z - 6, 3) & -z & z(z + 0, 2) & z \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

и она је очигледно недегенеративна по врстама,  $\Pi(z) = \Pi_{rnd}(z)$ . Због тога није исправно скратити пол и нулу. Из ове потпуне преносне функције недегенеративне по врстама  $\Pi_{rnd}(z)$  произилази карактеристични полином целог система,

$$\Delta_{\Pi_{rnd}}(z) = (z - 0, 3)(z + 0, 5). \quad (5.39)$$



# Глава 6

## Релативна стабилност, условна оптимизација и синтеза управљачког система: ненулти почетни услови

### 6.1 Временски и комплексан домен, параметарска равн: ненулти почетни услови

Формално гледано, процедура одређивања непознатих подешљивих параметара како би се одредила област релативне стабилности је слична класичној теорији познатој из литературе [14], [11] али је суштинска разлика у томе што се користи карактеристична једначина потпуне преносне матрице недегенеративне по врстама. Полази се од те једначине написане у компактном облику,

$$\Delta_{\Pi_{rnd}}(z) = \bar{\mathbf{A}}^{(l)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(l)}(z) = 0, \quad (6.1)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^{(l)} = [ \bar{a}_0(\cdot) \quad \bar{a}_1(\cdot) \quad \cdots \quad \bar{a}_l(\cdot) ]. \quad (6.2)$$

Комплексни број  $z$ ,

$$z = \rho_z \zeta_z + i \rho_z \sqrt{1 - \zeta_z^2}, \quad 0 \leq \rho_z = |z| < 1, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (6.3)$$

$$\zeta_z = \cos \phi, \quad \phi = \arg z, \quad 0 \leq |\zeta_z| \leq 1, \quad (6.4)$$

је замењен у (6.1) тако да се резултујућа једначина може представити помоћу две једначине, у случају да су реални и имагинарни део једнаки нули,

$$\alpha_{\mathbf{T}}^{(l)} \mathbf{S}_1^{(l)}(\rho_z) = 0, \quad (6.5)$$

$$\alpha_{\mathbf{T}}^{(l)} = [ \alpha_{\mathbf{T},0}(\cdot, \zeta_z) \quad \alpha_{\mathbf{T},1}(\cdot, \zeta_z) \quad \cdots \quad \alpha_{\mathbf{T},l}(\cdot, \zeta_z) ], \quad \mathbf{S}_1^{(l)}(\rho_z) = [ \rho_z^0 \quad \rho_z^1 \quad \cdots \quad \rho_z^l ]^T, \quad (6.6)$$

$$\alpha_{\mathbf{T},j}(\cdot, \zeta_z) = \bar{a}_j(\cdot) \mathbf{T}_j(\zeta_z), \quad j = 0, 1, \dots, l, \quad \zeta_z = \text{const.} \wedge (\cdot) = \text{const.} \implies \quad (6.7)$$

$$\alpha_{\mathbf{T},j}(\cdot, \zeta_z) = \text{const.}, \quad \mathbf{T}_j(\zeta_z) = \cos(j \arccos \zeta_z), \quad (6.8)$$

$$\alpha_{\mathbf{U}}^{(l)} \mathbf{S}_1^{(l)}(\rho_z) = 0, \quad (6.9)$$

$$\alpha_{\mathbf{U}}^{(l)} = [ \alpha_{\mathbf{U},0}(\cdot, \zeta_z) \quad \alpha_{\mathbf{U},1}(\cdot, \zeta_z) \quad \cdots \quad \alpha_{\mathbf{U},l}(\cdot, \zeta_z) ], \quad (6.10)$$

$$\alpha_{\mathbf{U},j}(\cdot, \zeta_z) = \bar{a}_j(\cdot) \mathbf{U}_j(\zeta_z), \quad j = 0, 1, \dots, l; \quad \zeta_z = \text{const.} \wedge (\cdot) = \text{const.} \implies \quad (6.11)$$

$$\alpha_{\mathbf{U},j}(\cdot, \zeta_z) = \text{const.}, \quad \mathbf{U}_j(\zeta_z) = \sin(j \arccos \zeta_z), \quad (6.12)$$

где  $T_j(\zeta_z)$  и  $U_j(\zeta_z)$  представљају Чебишевљеве функције прве и друге врсте, следствено. Вредности ових функција за различите  $j$  се могу пронаћи у разним таблицама из литературе, на пример у [10]. Једначине (6.5), (6.9) се записују у другом облику након замене израза за  $\bar{a}_j(\cdot)$ ,

$$\alpha \bar{B}_1(\rho_z, \zeta_z) + \beta \bar{C}_1(\rho_z, \zeta_z) + \bar{D}_1(\rho_z, \zeta_z) = 0, \quad (6.13)$$

$$\alpha \bar{B}_2(\rho_z, \zeta_z) + \beta \bar{C}_2(\rho_z, \zeta_z) + \bar{D}_2(\rho_z, \zeta_z) = 0, \quad (6.14)$$

или

$$\alpha \bar{B}_1(\rho_z, \zeta_z) + \beta \bar{C}_1(\rho_z, \zeta_z) + \gamma \bar{D}_1(\rho_z, \zeta_z) + \bar{E}_1(\rho_z, \zeta_z) = 0, \quad (6.15)$$

$$\alpha \bar{B}_2(\rho_z, \zeta_z) + \beta \bar{C}_2(\rho_z, \zeta_z) + \gamma \bar{D}_2(\rho_z, \zeta_z) + \bar{E}_2(\rho_z, \zeta_z) = 0, \quad (6.16)$$

где су,

$$\bar{B}_1(\rho_z, \zeta_z) = \beta_{\mathbf{T}}^{(l)}(\zeta_z) \mathbf{S}_1^{(l)}(\rho_z), \quad \bar{B}_2(\rho_z, \zeta_z) = \beta_U^{(l)}(\zeta_z) \mathbf{S}_1^{(l)}(\rho_z), \quad (6.17)$$

$$\beta_{\mathbf{T}}^{(l)} = [ \beta_{\mathbf{T},0}(\zeta_z) \quad \beta_{\mathbf{T},1}(\zeta_z) \quad \cdots \quad \beta_{\mathbf{T},l}(\zeta_z) ], \quad (6.18)$$

$$\beta_U^{(l)} = [ \beta_{U,0}(\zeta_z) \quad \beta_{U,1}(\zeta_z) \quad \cdots \quad \beta_{U,l}(\zeta_z) ], \quad (6.19)$$

$$\beta_{\mathbf{T},j}(\zeta_z) = \bar{b}_j \mathbf{T}_j(\zeta_z), \quad \beta_{U,j}(\zeta_z) = \bar{b}_j U_j(\zeta_z), \quad j = 0, 1, \dots, l,$$

$$\zeta_z = \text{const.} \implies \beta_{\mathbf{T},j}(\zeta_z) = \text{const.} \wedge \beta_{U,j}(\zeta_z) = \text{const.}$$

$$\bar{C}_1(\rho_z, \zeta_z) = \theta_{\mathbf{T}}^{(l)}(\zeta_z) \mathbf{S}_1^{(l)}(\rho_z), \quad \bar{C}_2(\rho_z, \zeta_z) = \theta_U^{(l)}(\zeta_z) \mathbf{S}_1^{(l)}(\rho_z), \quad (6.20)$$

$$\theta_{\mathbf{T}}^{(l)} = [ \theta_{\mathbf{T},0}(\zeta_z) \quad \theta_{\mathbf{T},1}(\zeta_z) \quad \cdots \quad \theta_{\mathbf{T},l}(\zeta_z) ], \quad (6.21)$$

$$\theta_U^{(l)} = [ \theta_{U,0}(\zeta_z) \quad \theta_{U,1}(\zeta_z) \quad \cdots \quad \theta_{U,l}(\zeta_z) ], \quad (6.22)$$

$$\theta_{\mathbf{T},j}(\zeta_z) = \bar{c}_j \mathbf{T}_j(\zeta_z), \quad \theta_{U,j}(\zeta_z) = \bar{c}_j U_j(\zeta_z), \quad j = 0, 1, \dots, l,$$

$$\zeta_z = \text{const.} \implies \theta_{\mathbf{T},j}(\zeta_z) = \text{const.} \wedge \theta_{U,j}(\zeta_z) = \text{const.}$$

$$\bar{D}_1(\rho_z, \zeta_z) = \delta_{\mathbf{T}}^{(l)}(\zeta_z) \mathbf{S}_1^{(l)}(\rho_z), \quad \bar{D}_2(\rho_z, \zeta_z) = \delta_U^{(l)}(\zeta_z) \mathbf{S}_1^{(l)}(\rho_z), \quad (6.23)$$

$$\delta_{\mathbf{T}}^{(l)} = [ \delta_{\mathbf{T},0}(\zeta_z) \quad \delta_{\mathbf{T},1}(\zeta_z) \quad \cdots \quad \delta_{\mathbf{T},l}(\zeta_z) ], \quad (6.24)$$

$$\delta_U^{(l)} = [ \delta_{U,0}(\zeta_z) \quad \delta_{U,1}(\zeta_z) \quad \cdots \quad \delta_{U,l}(\zeta_z) ], \quad (6.25)$$

$$\delta_{\mathbf{T},j}(\zeta_z) = \bar{d}_j \mathbf{T}_j(\zeta_z), \quad \delta_{U,j}(\zeta_z) = \bar{d}_j U_j(\zeta_z), \quad j = 0, 1, \dots, l,$$

$$\zeta_z = \text{const.} \implies \delta_{\mathbf{T},j}(\zeta_z) = \text{const.} \wedge \delta_{U,j}(\zeta_z) = \text{const.}$$

$$\bar{E}_1(\rho_z, \zeta_z) = \varepsilon_{\mathbf{T}}^{(l)}(\zeta_z) \mathbf{S}_1^{(l)}(\rho_z), \quad \bar{E}_2(\rho_z, \zeta_z) = \varepsilon_U^{(l)}(\zeta_z) \mathbf{S}_1^{(l)}(\rho_z), \quad (6.26)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{T}}^{(l)} = [ \varepsilon_{\mathbf{T},0}(\zeta_z) \quad \varepsilon_{\mathbf{T},1}(\zeta_z) \quad \cdots \quad \varepsilon_{\mathbf{T},l}(\zeta_z) ], \quad (6.27)$$

$$\varepsilon_U^{(l)} = [ \varepsilon_{U,0}(\zeta_z) \quad \varepsilon_{U,1}(\zeta_z) \quad \cdots \quad \varepsilon_{U,l}(\zeta_z) ], \quad (6.28)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{T},j}(\zeta_z) = \bar{e}_j \mathbf{T}_j(\zeta_z), \quad \varepsilon_{U,j}(\zeta_z) = \bar{e}_j U_j(\zeta_z), \quad j = 0, 1, \dots, l,$$

$$\zeta_z = \text{const.} \implies \varepsilon_{\mathbf{T},j}(\zeta_z) = \text{const.} \wedge \varepsilon_{U,j}(\zeta_z) = \text{const.}$$

Решавањем једначина (6.13), (6.14) добија се,

$$\alpha = \frac{\bar{C}_1 \bar{D}_2 - \bar{C}_2 \bar{D}_1}{\bar{B}_1 \bar{C}_2 - \bar{B}_2 \bar{C}_1}, \quad (6.29)$$

$$\beta = \frac{\bar{B}_2 \bar{D}_1 - \bar{B}_1 \bar{D}_2}{\bar{B}_1 \bar{C}_2 - \bar{B}_2 \bar{C}_1}. \quad (6.30)$$

Решење једначина (6.15), (6.16) није јединствено због тога што фигуришу три непозната подешљива параметра  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , а постоје само две једначине. Једначине (6.15), (6.16) могу се решити по било која два параметра, нпр.  $\alpha$  и  $\beta$  тако да они зависе не само од  $\rho_z$  и  $\zeta_z$  већ и од трећег слободног параметра  $\gamma$ . У том случају решење добија облик,

$$\alpha = \frac{\bar{C}_1 (\gamma \bar{D}_2 + \bar{E}_2) - \bar{C}_2 (\gamma \bar{D}_1 + \bar{E}_1)}{\bar{B}_1 \bar{C}_2 - \bar{B}_2 \bar{C}_1}, \quad (6.31)$$

$$\beta = \frac{\bar{B}_2 (\gamma \bar{D}_1 + \bar{E}_1) - \bar{B}_1 (\gamma \bar{D}_2 + \bar{E}_2)}{\bar{B}_1 \bar{C}_2 - \bar{B}_2 \bar{C}_1}. \quad (6.32)$$

Ово значи да се слободни параметар  $\gamma$  бира произвољно или се може варирати са одређеним кораком након чега се процедура наставља као да постоје само два непозната подешљива параметра.

За константне вредности  $\rho_z$ ,  $0 \leq \rho_z = \text{const.} < 1$ ,  $0 \leq |\zeta_z| \leq 1$  добија се област константног времена смирења у параметарском простору.

При разматрању релативне стабилности у односу на константан степен пригушења  $\zeta$  важи,  $0 \leq \zeta = \text{const.} \leq 1$ , варира се природна фреквенција  $\omega_n$ ,  $z$ -комплексни број у једначини (6.1) се замењује са  $e^{sT}$ ,  $z = e^{sT}$  у складу са његовом дефиницијом и  $s$ -комплексни број се замењује са  $-\omega_n \zeta + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ,  $s = -\omega_n \zeta + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . Одавде проистиче следеће,

$$\rho_z = e^{-\omega_n \zeta T}, \quad (6.33)$$

$$\zeta_z = \cos \omega_n T \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (6.34)$$

Након замене израза (6.33), (6.34) у (6.17)-(6.26) добија се,

$$\bar{B}_1(\omega_n, \zeta) = \beta_T^{(l)}(\omega_n, \zeta) \mathbf{S}_1^{(l)}(e^{-\omega_n \zeta T}), \quad \bar{B}_2(\omega_n, \zeta) = \beta_U^{(l)}(\omega_n, \zeta) \mathbf{S}_1^{(l)}(e^{-\omega_n \zeta T}), \quad (6.35)$$

$$\beta_T^{(l)}(\omega_n, \zeta) = [\beta_{T,0}(\omega_n, \zeta) \quad \beta_{T,1}(\omega_n, \zeta) \quad \cdots \quad \beta_{T,l}(\omega_n, \zeta)], \quad (6.36)$$

$$\beta_U^{(l)}(\omega_n, \zeta) = [\beta_{U,0}(\omega_n, \zeta) \quad \beta_{U,1}(\omega_n, \zeta) \quad \cdots \quad \beta_{U,l}(\omega_n, \zeta)], \quad (6.37)$$

$$\beta_{T,j}(\omega_n, \zeta) = \bar{b}_j \mathbf{T}_j(\omega_n, \zeta), \quad \beta_{U,j}(\omega_n, \zeta) = \bar{b}_j \mathbf{U}_j(\omega_n, \zeta), \quad j = 0, 1, \dots, l, \quad (6.38)$$

$$\zeta = \text{const.} \implies \beta_{T,j}(\omega_n, \zeta) = \beta_{T,j}(\omega_n) \wedge \beta_{U,j}(\omega_n, \zeta) = \beta_{U,j}(\omega_n), \quad (6.39)$$

$$\mathbf{T}_j(\omega_n, \zeta) = \cos j \left( \omega_n T \sqrt{1 - \zeta^2} \right), \quad \mathbf{U}_j(\omega_n, \zeta) = \sin j \left( \omega_n T \sqrt{1 - \zeta^2} \right), \quad (6.40)$$

$$\bar{C}_1(\omega_n, \zeta) = \theta_T^{(l)}(\omega_n, \zeta) \mathbf{S}_1^{(l)}(e^{-\omega_n \zeta T}), \quad \bar{C}_2(\omega_n, \zeta) = \theta_U^{(l)}(\omega_n, \zeta) \mathbf{S}_1^{(l)}(e^{-\omega_n \zeta T}), \quad (6.41)$$

$$\theta_T^{(l)}(\omega_n, \zeta) = [\theta_{T,0}(\omega_n, \zeta) \quad \theta_{T,1}(\omega_n, \zeta) \quad \cdots \quad \theta_{T,l}(\omega_n, \zeta)], \quad (6.42)$$

$$\theta_U^{(l)}(\omega_n, \zeta) = [\theta_{U,0}(\omega_n, \zeta) \quad \theta_{U,1}(\omega_n, \zeta) \quad \cdots \quad \theta_{U,l}(\omega_n, \zeta)], \quad (6.43)$$

$$\theta_{T,j}(\omega_n, \zeta) = \bar{c}_j \mathbf{T}_j(\omega_n, \zeta), \quad \theta_{U,j}(\omega_n, \zeta) = \bar{c}_j \mathbf{U}_j(\omega_n, \zeta), \quad j = 0, 1, \dots, l,$$

$$\zeta = \text{const.} \implies \theta_{T,j}(\omega_n, \zeta) = \theta_{T,j}(\omega_n) \wedge \theta_{U,j}(\omega_n, \zeta) = \theta_{U,j}(\omega_n),$$

$$\bar{D}_1(\omega_n, \zeta) = \delta_T^{(l)}(\omega_n, \zeta) \mathbf{S}_1^{(l)}(e^{-\omega_n \zeta T}), \quad \bar{D}_2(\omega_n, \zeta) = \delta_U^{(l)}(\omega_n, \zeta) \mathbf{S}_1^{(l)}(e^{-\omega_n \zeta T}), \quad (6.44)$$

$$\delta_T^{(l)}(\omega_n, \zeta) = [\delta_{T,0}(\omega_n, \zeta) \quad \delta_{T,1}(\omega_n, \zeta) \quad \cdots \quad \delta_{T,l}(\omega_n, \zeta)], \quad (6.45)$$

$$\delta_U^{(l)}(\omega_n, \zeta) = [\delta_{U,0}(\omega_n, \zeta) \quad \delta_{U,1}(\omega_n, \zeta) \quad \cdots \quad \delta_{U,l}(\omega_n, \zeta)], \quad (6.46)$$

$$\delta_{T,j}(\omega_n, \zeta) = \bar{d}_j \mathbf{T}_j(\omega_n, \zeta), \quad \delta_{U,j}(\omega_n, \zeta) = \bar{d}_j \mathbf{U}_j(\omega_n, \zeta), \quad j = 0, 1, \dots, l,$$

$$\zeta = \text{const.} \implies \delta_{T,j}(\omega_n, \zeta) = \delta_{T,j}(\omega_n) \wedge \delta_{U,j}(\omega_n, \zeta) = \delta_{U,j}(\omega_n),$$

$$\bar{E}_1(\omega_n, \zeta) = \varepsilon_T^{(l)}(\omega_n, \zeta) \mathbf{S}_1^{(l)}(e^{-\omega_n \zeta T}), \quad \bar{E}_2(\omega_n, \zeta) = \varepsilon_U^{(l)}(\omega_n, \zeta) \mathbf{S}_1^{(l)}(e^{-\omega_n \zeta T}), \quad (6.47)$$

$$\varepsilon_T^{(l)}(\omega_n, \zeta) = [\varepsilon_{T,0}(\omega_n, \zeta) \quad \varepsilon_{T,1}(\omega_n, \zeta) \quad \cdots \quad \varepsilon_{T,l}(\omega_n, \zeta)], \quad (6.48)$$

$$\varepsilon_U^{(l)}(\omega_n, \zeta) = [\varepsilon_{U,0}(\omega_n, \zeta) \quad \varepsilon_{U,1}(\omega_n, \zeta) \quad \cdots \quad \varepsilon_{U,l}(\omega_n, \zeta)], \quad (6.49)$$

$$\varepsilon_{T,j}(\omega_n, \zeta) = \bar{d}_j \mathbf{T}_j(\omega_n, \zeta), \quad \varepsilon_{U,j}(\omega_n, \zeta) = \bar{d}_j U_j(\omega_n, \zeta), \quad j = 0, 1, \dots, l,$$

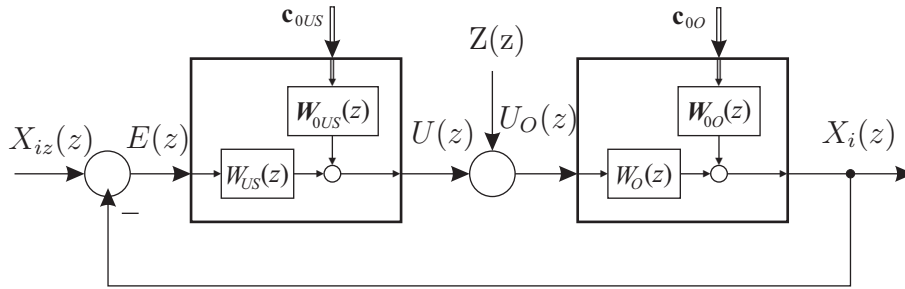
$$\zeta = \text{const.} \implies \varepsilon_{T,j}(\omega_n, \zeta) = \varepsilon_{T,j}(\omega_n) \wedge \varepsilon_{U,j}(\omega_n, \zeta) = \varepsilon_{U,j}(\omega_n),$$

Сада, изрази (6.35)-(6.49) заједно са (6.29), (6.30) или (6.31), (6.32) омогућавају да се одреди област константног степена пригушења  $\zeta$  из  $s$ -комплексне равни у  $\alpha\beta$  параметарској равни у виду криве, односно у виду површине у  $\alpha\beta\gamma$  параметарском простору. При томе се бројчане вредности природне (сопствене, непригушене) фреквенције мењају са одређеним кораком.

При употреби израза (6.31) и (6.32) вредности за  $\gamma$  се мењају с одређеним кораком како би се добила површина.

## 6.2 Критеријуми оптималности у комплексном домену

На слици 6.1 приказан је затворен систем аутоматског управљања који има једну излазну управљану величину  $x_i$  и две улазне променљиве величине: задату вредност излазне величине  $x_{iz}$  и поремећај  $z$  (подразумевају се и вектори почетних услова управљачког система  $\mathbf{c}_{0US}$  и објекта  $\mathbf{c}_{0O}$  који су такође спољашња дејства на систем), где је  $W_{US}(z)$  преносна функција управљачког система у односу на његову улазну величину - грешку управљане величине  $\varepsilon$  и  $\mathbf{W}_{0US}(z)$  је преносна матрица управљачког система у односу на његов вектор почетних услова,  $W_O(z)$  је преносна функција објекта у односу на његову улазну величину  $u_O$ , и  $\mathbf{W}_{0O}(z)$  је преносна матрица објекта у односу на његов вектор почетних услова.



Слика 6.1: Потпуни блок дијаграм затвореног система аутоматског управљања са једном излазном величином и једном поремећајном величином.

**Став 6.1**  $Z$ -трансформација  $X_i(z)$  управљане величине  $x_i$  одређена је са:

$$\begin{aligned} X_i(z) = & \frac{W_O(z) W_{US}(z)}{1 + W_O(z) W_{US}(z)} X_{iz}(z) + \frac{W_O(z)}{1 + W_O(z) W_{US}(z)} Z(z) + \\ & + \frac{W_O(z)}{1 + W_O(z) W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0US}(z) \mathbf{c}_{0US} + \frac{1}{1 + W_O(z) W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0O}(z) \mathbf{c}_{0O}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

**Доказ.** На основу потпуног блок дијаграма затвореног система аутоматског управљања приказаног на слици 6.1 следи:

$$X_i(z) = W_O(z) U_O(z) + \mathbf{W}_{0O}(z) \mathbf{c}_{0O}, \quad (6.51)$$

$$U_O(z) = U(z) + Z(z),$$

$$U(z) = W_{US}(z) E(z) + \mathbf{W}_{0US}(z) \mathbf{c}_{0O}, \quad (6.52)$$

$$E(z) = X_{iz}(z) - X_i(z). \quad (6.53)$$

Елиминисањем свих величина које су различите од спољашњих дејстава на систем и излазне величине, а то су  $U_O(z)$ ,  $U(z)$  и  $E(z)$  добија се:

$$\begin{aligned} X_i(z) [1 + W_O(z) W_{US}(z)] &= W_O(z) W_{US}(z) X_{iz}(z) + W_O(z) Z(z) + \\ &+ W_O(z) \mathbf{W}_{0US}(z) \mathbf{c}_{0US} + \mathbf{W}_{0O}(z) \mathbf{c}_{0O}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Одавде следи (6.50) чиме се доказ завршава. ■

На основу израза (6.50) закључује се да затворен систем аутоматског управљања остварује четири основна преноса сигнала: пренос дејства задате вредности управљане величине  $x_{iz}$  на стварну вредност управљане величине  $x_i$ , што је исказано преносном функцијом по задатој вредности:

$$W_{X_{iz}}(z) = \frac{X_i(z)}{X_{iz}(z)} = \frac{W_O(z) W_{US}(z)}{1 + W_O(z) W_{US}(z)}, \quad (6.55)$$

пренос дејства поремећаја  $z$  на управљану величину  $x_i$  што је изражено преносном функцијом по поремећају:

$$W_Z(z) = \frac{X_i(z)}{Z(z)} = \frac{W_O(z)}{1 + W_O(z) W_{US}(z)}, \quad (6.56)$$

пренос дејства вектора почетних услова управљачког система  $\mathbf{c}_{0US}$  на управљану величину  $x_i$  што је изражено преносном матрицом по вектору почетних услова управљачког система:

$$\mathbf{W}_0^{US}(z) = \frac{W_O(z)}{1 + W_O(z) W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0US}(z), \quad (6.57)$$

$$X_i(z) = \mathbf{W}_0^{US}(z) \mathbf{c}_{0US}, \quad (6.58)$$

и пренос дејства вектора почетних услова објекта  $\mathbf{c}_{0O}$  на управљану величину  $x_i$  што је изражено преносном матрицом по вектору почетних услова објекта:

$$\mathbf{W}_0^O(z) = \frac{1}{1 + W_O(z) W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0O}(z), \quad (6.59)$$

$$X_i(z) = \mathbf{W}_0^O(z) \mathbf{c}_{0O}. \quad (6.60)$$

Поред наведена четири основна преноса дејства, затворен систем аутоматског управљања са слике 6.1 остварује и сложене преносе дејства: пренос дејства вектора улаза  $\mathbf{x}_u$  при чему вектор улаза за компоненте има улазне величине  $z$  и  $x_{iz}$ ,

$$\mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} z \\ x_{iz} \end{bmatrix},$$

на стварну вредност управљане величине  $x_i$ , што је исказано преносном матрицом по вектору улаза:

$$\mathbf{W}(z) = \begin{bmatrix} W_Z(z) & W_{X_{iz}}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} & \frac{W_O(z)W_{US}(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} \end{bmatrix}, \quad (6.61)$$

$$X_i(z) = \mathbf{W}(z) \mathbf{X}_u(z), \quad (6.62)$$

пренос дејства вектора свих почетних услова  $\mathbf{c}_0$  на управљану величину  $x_i$  што је изражено преносном матрицом по вектору укупних почетних услова:

$$\mathbf{W}_0(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0^{US}(z) & \mathbf{W}_0^O(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0US}(z) & \frac{1}{1+W_O(z)W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0O}(z) \end{bmatrix}, \quad (6.63)$$

$$X_i(z) = \mathbf{W}_0(z) \mathbf{c}_0, \quad \mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{0US} \\ \mathbf{c}_{0O} \end{bmatrix}, \quad (6.64)$$

и најзад пренос дејства вектора свих дејстава на управљану величину  $x_i$  што је изражено потпуном преносном матрицом посматраног затвореног система аутоматског управљања по вектору свих дејстава:

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \begin{bmatrix} W(z) & W_0(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_Z(z) & W_{X_{iz}}(z) & \mathbf{W}_0^{US}(z) & \mathbf{W}_0^O(z) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} & \frac{W_{US}(z)W_O(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} & \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0US}(z) & \frac{1}{1+W_O(z)W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0O}(z) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$X_i(z) = \Pi(z) \mathbf{X}_{u, \mathbf{c}_0}(z). \quad (6.66)$$

Поред промене управљане величине од интереса је одредити и промену њене грешке  $\varepsilon$ . На основу једначине (6.50) добија се да је  $Z$ -трансформација  $E(z)$  грешке управљане величине одређена са:

$$\begin{aligned} E(z) &= X_{iz}(z) - X_i(z) = X_{iz}(z) - \left[ \frac{W_O(z)W_{US}(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} X_{iz}(z) + \right. \\ &+ \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} Z(z) + \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0US}(z) \mathbf{c}_{0US} + \\ &\left. + \frac{1}{1+W_O(z)W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0O}(z) \mathbf{c}_{0O} \right]. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Даљим сређивањем добијеног израза добија се коначан израз за  $E(z)$ :

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{1+W_O(z)W_{US}(z)} X_{iz}(z) - \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} Z(z) - \\ &- \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0US}(z) \mathbf{c}_{0US} - \frac{1}{1+W_O(z)W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0O}(z) \mathbf{c}_{0O}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Једначина (6.68) показује да грешка  $\varepsilon$  управљане величине настаје услед дејства поремећаја  $z$ , вектора почетних услова управљачког система  $\mathbf{c}_{0US}$ , вектора почетних услова објекта  $\mathbf{c}_{0O}$  и задате вредности управљане величине  $x_{iz}$ . Тако се укупна грешка  $\varepsilon$  управљане величине састоји од грешке  $\varepsilon_z$  настале услед дејства поремећаја, грешке  $\varepsilon_{\mathbf{c}_{0US}}$  настале услед дејства вектора почетних услова управљачког система, грешке  $\varepsilon_{\mathbf{c}_{0O}}$  настале услед дејства вектора почетних услова објекта, и грешке  $\varepsilon_{x_{iz}}$  која потиче од задате вредности управљане величине:

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_z(k) + \varepsilon_{\mathbf{c}_{0US}}(k) + \varepsilon_{\mathbf{c}_{0O}}(k) + \varepsilon_{x_{iz}}(k), \quad (6.69)$$

при чему су њихове  $Z$ -трансформације на основу (6.68) и (6.69) дефинисане са:

$$E_Z(z) = -\frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} Z(z), \quad (6.70)$$

$$E_{\mathbf{c}_{0US}}(z) = -\frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0US}(z) \mathbf{c}_{0US}, \quad (6.71)$$

$$E_{\mathbf{c}_{0O}}(z) = -\frac{1}{1 + W_O(z)W_{US}(z)} \mathbf{W}_{0O}(z) \mathbf{c}_{0O}, \quad (6.72)$$

$$E_{X_{iz}}(z) = \frac{1}{1 + W_O(z)W_{US}(z)} X_{iz}(z). \quad (6.73)$$

Према (6.68) и (6.69) следи да се израчунавање укупне грешке  $E(z)$  спроводи израчунавањем појединачних међусобно независних грешака  $E_Z(z)$ ,  $E_{\mathbf{c}_{0US}}(z)$ ,  $E_{\mathbf{c}_{0O}}(z)$  и  $E_{x_{iz}}(z)$  на основу израза (6.70) до (6.73).

### 6.3 Условна оптимизација управљаног објекта у параметарској равни: ненулти почетни услови

Користи се индекс перформансе  $J$  у облику суме квадрата грешака,

$$J = \sum_{k=0}^{k=\infty} \varepsilon^2(k), \quad \varepsilon(k) = x_{iz}(k) - x_i(k), \quad (6.74)$$

при чему израз за грешку  $\varepsilon$  истовремено зависи од свих дејстава на систем: спољашњег улаза и ненултих почетних услова. То је много природније и реалније у пракси него да на грешку  $\varepsilon$  утиче само спољашњи улаз. Ово је квалитативна разлика у односу на класичну методу.

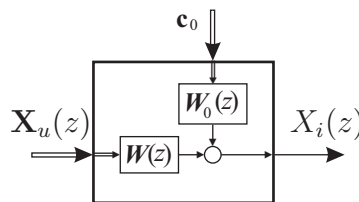
Потпуни блок дијаграм [1] система приказан је на слици 6.1.

Са блок дијаграма се лако уочава,

$$\begin{aligned} X_i(z) &= \Pi(z) \mathbf{V}(z) = \begin{bmatrix} \frac{W_O(z)W_C(z)}{1+W_O(z)W_C(z)} \\ \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_C(z)} \\ \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0C}^T(z) \\ \frac{1}{1+W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0O}^T(z) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{c}_{0C} \\ \mathbf{c}_{0O} \end{bmatrix} = \\ &= [\mathbf{W}(z) \quad \mathbf{W}_0(z)] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{c}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_u(z) = \begin{bmatrix} X_{iz}(z) \\ Z(z) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.75)$$

$$E(z) = X_{iz}(z) - X_i(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+W_O(z)W_C(z)} \\ -\frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_C(z)} \\ -\frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0C}^T(z) \\ -\frac{1}{1+W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0O}^T(z) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{c}_{0C} \\ \mathbf{c}_{0O} \end{bmatrix}. \quad (6.76)$$

Из (6.75) следи еквивалентни потпуни блок дијаграм система који је приказан на слици 6.2.



Слика 6.2: Еквивалентни потпуни блок дијаграм система.

**Теорема 6.1** *Ако је статичка грешка  $\varepsilon_s$  система једнака нули,  $\varepsilon_s = 0$ , да би вредност индекса перформансе  $J$  (6.74) била минимална, потребно је и довољно да вредност израза,*

$$\sum_i \operatorname{Res} [E(z) E(z^{-1}) z^{-1}] \Big|_{z=z_i^* - \text{пол од } E(z)z^{-1}}, \quad (6.77)$$

*има минималну вредност, где је  $Z$ -трансформација  $E(z)$  грешке  $\varepsilon(k)$  одређена са (6.76).*

Треба имати још у виду и да уколико статичка грешка  $\varepsilon_s$  није једнака нули,  $\varepsilon_s \neq 0$ , онда индекс перформансе  $J$  има неограничену вредност. Због тога грешка у изразу (6.74) треба бити замењена са модификованом грешком  $\bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon_s$ , тако да је индекс перформансе одређен са,

$$J = \sum_{k=0}^{k=\infty} \bar{\varepsilon}^2(k), \quad \bar{\varepsilon}(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon_s = x_{iz}(k) - x_i(k) - \varepsilon_s. \quad (6.78)$$

**Теорема 6.2** *Ако је статичка грешка  $\varepsilon_s$  система различита од нуле,  $\varepsilon_s \neq 0$ , да би вредност индекса перформансе  $J$  (6.78) била минимална, потребно је и довољно да вредност израза*

$$\sum_i \operatorname{Res} [\bar{E}(z) \bar{E}(z^{-1}) z^{-1}] \Big|_{z=z_i^* - \text{пол од } \bar{E}(z)z^{-1}}, \quad (6.79)$$

*буде такође минимална, где је  $Z$ -трансформација  $\bar{E}(z)$  модификоване грешке  $\bar{\varepsilon}(k)$  одређена са (6.76) и (6.78).*

Поставља се питање како пронаћи скуп подешљивих, непознатих параметара за које је вредност индекса перформансе минимална? Вредности индекса перформансе се нумерички израчунавају за сваку тачку параметарског простора која формира област константног степена пригушења. Након тога, лако је издвојити минималну вредност индекса перформансе и препознати вредности подешљивих параметара који јој одговарају. Треба уочити да је боље одредити више области релативних стабилности за различите вредности степена пригушења  $\zeta$ . Након тога се, на раније описан начин, одреди минимална вредност индекса перформансе (локална) за сваку појединачну криву (за свако  $\zeta$ ). На крају се уочи минимална вредност индекса перформансе (глобална) између свих локалних и ишчитају вредности подешљивих параметара којима је дефинисана ова тачка којој одговара глобални минимум.

## 6.4 Докази теорема

Овде су дати докази теорема из претходног потпоглавља.

**Доказ теореме 6.1.** Применом дискретне верзије Парсевалове теореме [53], [54] на израз (6.74), следи комплексни облик,

$$J = \frac{1}{2\pi j} \oint_C E(z) E(z^{-1}) z^{-1} dz, \quad (6.80)$$

где је  $C$  јединична кружница, или било каква кружница унутар ROC (регион конвергенције) од  $E(z)$  [55] са центром у координатном почетку, док су сви полови



од  $E(z)$  унутар  $C$ . Полови од  $E(z)$  су исти као полови потпуне преносне матрице система, који јесу унутар  $C$  јер је систем релативно стабилан и постоји додатни пол од улазне величине. Због тога се треба побринути да су полови улаза такође унутар  $C$ . Даље, применом добро познате Кошијеве теореме о резидијумима на једначину (6.80) добија се,

$$J = \sum_i \operatorname{Res} [E(z) E(z^{-1}) z^{-1}] \Big|_{z=z_i^* - \text{пол од } E(z)z^{-1}}. \quad (6.81)$$

У случају да се систем налази под истовременим деловањем свих утицаја, спољашњег улаза и ненултих почетних услова, потпуни блок дијаграм система је приказан на слици 6.1. На основу потпуног блок дијаграма,  $Z$ -трансформација грешке  $E(z)$  се може лако одредити, као што је то показано у (6.76).

**Неопходност:** Претпоставимо да индекс перформансе  $J$  има минималну вредност  $J = J_{min}$ . Према (6.81) индекс перформансе  $J$  је једнак изразу (6.77). То повлачи да израз (6.77) такође има минималну вредност, са  $Z$ -трансформацијом грешке  $E(z)$  дефинисане са (6.76).

**Довољност:** Претпоставимо да израз (6.77) има минималну вредност. Према (6.81), индекс перформансе  $J$  једнак је изразу (6.77). То повлачи да индекс перформансе  $J$  такође има минималну вредност са  $Z$ -трансформацијом грешке  $E(z)$  дефинисаном са (6.76). ■

**Доказ теореме 6.2.** Доказ ове теореме изводи се на сличан начин као теореме 6.1. Једина разлика је у томе што се уместо  $Z$ -трансформације грешке  $E(z)$ , користи  $Z$ -трансформација модификоване грешке  $\bar{E}(z)$  која је дефинисана са (6.78). ■

# Глава 7

## Примена нове теорије условне оптимизације на линеарним дискретним системима

### 7.1 Симулациони пример синтезе ПДС алгоритма управљања: нулти и ненулти почетни услови

У овом поглављу, остварени резултати су приказани на математичком примеру.

#### 7.1.1 Математички модел објекта

Нека је објект описан следећом једначином,

$$\mathbf{A}_O^{(1)} \mathbf{x}_i^1 = \mathbf{B}_O^{(1)} \mathbf{u}_O^1, \quad \mathbf{A}_O^{(1)} = \begin{bmatrix} -1,5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_O^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{x}_i^1 = \begin{bmatrix} x_{iO}(k) & x_{iO}(k+1) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u}_O^1 = \begin{bmatrix} u_O(k) & u_O(k+1) \end{bmatrix}^T. \quad (7.2)$$

#### 7.1.2 Математички модел управљачког система

Објектом се управља ПДС контролером првог реда,

$$\mathbf{A}_C^{(2)} \mathbf{u}^2 = \mathbf{B}_C^{(2)} \varepsilon^2, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{A}_C^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1-0,01}{0,01} & \frac{T-2T_1}{T} & \frac{T_1}{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 & -199 & 100 \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

$$\mathbf{B}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{K_D}{T} + K_S T - K & K - \frac{2K_D}{T} & \frac{K_D}{T} \end{bmatrix} = \quad (7.5)$$

$$= \begin{bmatrix} 100K_D + 0,01K_S - K & K - 200K_D & 100K_D \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

$$T_1 = 1s, \quad T = 0,01s.$$

#### 7.1.3 Математички модел затвореног система

Математички модел целог система у компактном облику је,

$$\mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{x}_i^3 = \mathbf{B}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{x}_u^3, \quad \forall k \in \mathcal{N}_0, \quad \alpha = K, \quad \beta = K_D, \quad \gamma = K_S, \quad (7.7)$$

при чему су

$$\mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} a_0(\alpha, \beta, \gamma) & a_1(\alpha, \beta, \gamma) & a_2(\alpha, \beta, \gamma) & a_3(\alpha, \beta, \gamma) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0,01\alpha + \beta + & 0,005\alpha - 1, 5\beta + \\ +0,0001\gamma - & +0,00005\gamma + & 0,005\alpha - 3, 49 & 1 + 0,5\beta \\ -1,485 & +3,975 & & \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^T(\alpha, \beta, \gamma) \\ \mathbf{B}_1^T(\alpha, \beta, \gamma) \\ \mathbf{B}_2^T(\alpha, \beta, \gamma) \\ \mathbf{B}_3^T(\alpha, \beta, \gamma) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} [-0,01\alpha + \beta + 10^{-4}\gamma & 0,99]^T \\ [0,005\alpha - 1,5\beta + 0,00005\gamma & -1,495]^T \\ [0,005\alpha & 0,005]^T \\ [0,5\beta & 0,5]^T \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} -0,01\alpha + \beta + 10^{-4}\gamma \\ 0,99 \\ 0,005\alpha - 1,5\beta + 0,00005\gamma \\ -1,495 \\ 0,005\alpha \\ 0,005 \\ 0,5\beta \\ 0,5 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\mathbf{x}_i^3 = [x_i(k) \quad x_i(k+1) \quad x_i(k+2) \quad x_i(k+3)]^T, \quad (7.10)$$

$$\mathbf{x}_u^3 = [\mathbf{x}_u^T(k) \quad \mathbf{x}_u^T(k+1) \quad \mathbf{x}_u^T(k+2) \quad \mathbf{x}_u^T(k+3)]^T, \quad \mathbf{x}_u = [x_{iz} \quad z]^T. \quad (7.11)$$

#### 7.1.4 Потпуна преносна матрица

Потпуна преносна матрица се одређује на начин како је то претходно приказано у поглављу 5. У наставку следи процедура за овај конкретан пример.

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \Pi_D^{-1}(z) \Pi_N(z) = [\mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{S}_1^{(3)}(z)]^{-1} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{S}_2^{(3)}(z) & -\mathbf{B}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{Z}_2^{(3)}(z) & \mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{Z}_1^{(3)}(z) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\mathbf{S}_1^{(3)}(z) = [1 \quad z \quad z^2 \quad z^3]^T, \quad \mathbf{S}_2^{(3)}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z & 0 & z^2 & 0 & z^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & z^2 & 0 & z^3 \end{bmatrix}^T, \quad (7.13)$$

$$\mathbf{Z}_2^{(3)}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z^2 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 & z & 0 & 0 \\ z^3 & 0 & z^2 & 0 & z & 0 \\ 0 & z^3 & 0 & z^2 & 0 & z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_1^{(3)}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ z^2 & z & 0 \\ z^3 & z^2 & z \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{S}_1^{(3)}(z) = \\ &= (1 + 0,5\beta)z^3 + (0,005\alpha - 3,49)z^2 + (0,005\alpha - 1,5\beta + 0,00005\gamma + 3,975)z + \\ &\quad + (-0,01\alpha + \beta + 0,0001\gamma - 1,485), \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\mathbf{B}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{S}_2^{(3)}(z) = \begin{bmatrix} 0,5\beta z^3 + 0,005\alpha z^2 + \\ + (0,005\alpha - 1,5\beta + 0,00005\gamma)z + \\ + (-0,01\alpha + \beta + 10^{-4}\gamma) \\ 0,5z^3 + 0,005z^2 - 1,495z + 0,99 \end{bmatrix}^T, \quad (7.16)$$

$$-\mathbf{B}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{Z}_2^{(3)}(z) = - \begin{bmatrix} 0,5\beta z^3 + 0,005\alpha z^2 + \\ + (0,005\alpha - 1,5\beta + 0,00005\gamma)z \\ 0,5z^3 + 0,005z^2 - 1,495z \\ 0,005\alpha z + 0,5\beta z^2 \\ 0,005z + 0,5z^2 \\ 0,5\beta z \\ 0,5z \end{bmatrix}^T, \quad (7.17)$$

$$\mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{Z}_1^{(3)}(z) = \begin{bmatrix} (1 + 0,5\beta)z^3 + (0,005\alpha - 3,49)z^2 + (0,005\alpha - 1,5\beta + 0,00005\gamma + 3,975)z \\ (1 + 0,5\beta)z^2 + (0,005\alpha - 3,49)z \\ (1 + 0,5\beta)z \end{bmatrix}^T, \quad (7.18)$$

$$\Pi(z) = \frac{1}{\begin{pmatrix} (1 + 0,5\beta)z^3 + \\ + (0,005\alpha - 3,49)z^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (0,005\alpha - 1,5\beta + \\ + 0,00005\gamma + \\ + 3,975)z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,01\alpha + \beta + \\ + 0,0001\gamma - \\ -1,485 \end{pmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 0,5\beta z^3 + 0,005\alpha z^2 + (0,005\alpha - 1,5\beta + 0,00005\gamma)z + \\ + (-0,01\alpha + \beta + 10^{-4}\gamma) \\ 0,5z^3 + 0,005z^2 - 1,495z + 0,99 \\ -0,5\beta z^3 - 0,005\alpha z^2 - (0,005\alpha - 1,5\beta + 0,00005\gamma)z \\ -0,5z^3 - 0,005z^2 + 1,495z \\ -0,5\beta z^2 - 0,005\alpha z \\ -0,5z^2 - 0,005z \\ -0,5\beta z \\ -0,5z \\ (1 + 0,5\beta)z^3 + (0,005\alpha - 3,49)z^2 + (0,005\alpha - 1,5\beta + 0,00005\gamma + 3,975)z \\ (1 + 0,5\beta)z^2 + (0,005\alpha - 3,49)z \\ (1 + 0,5\beta)z \end{bmatrix}^T. \quad (7.19)$$

Потпуна преносна матрица је недегенеративна по врстама па је, на основу тога, карактеристични полином система

$$(0,5\beta + 1)z^3 + (0,005\alpha - 3,49)z^2 + (0,005\alpha - 1,5\beta + 0,00005\gamma + 3,975)z + (-0,01\alpha + \beta + 0,0001\gamma - 1,485).$$

### 7.1.5 Релативна стабилност

Карактеристична једначина система је,

$$(0,5\beta + 1)z^3 + (0,005\alpha - 3,49)z^2 + (0,005\alpha - 1,5\beta + 0,00005\gamma + 3,975)z + (-0,01\alpha + \beta + 0,0001\gamma - 1,485) = \\ = \bar{a}_3(\alpha, \beta, \gamma)z^3 + \bar{a}_2(\alpha, \beta, \gamma)z^2 + \bar{a}_1(\alpha, \beta, \gamma)z + \bar{a}_0(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad (7.20)$$

$$\bar{a}_j(\alpha, \beta, \gamma) = \bar{b}_j\alpha + \bar{c}_j\beta + \bar{d}_j\gamma + \bar{e}_j, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (7.21)$$

Да би се одредила површина са вредностима подешљивих параметара у  $\alpha\beta\gamma$  параметарском простору за које систем има константно време смирења, бира се константна вредност  $\rho_z$ ,  $0 \leq \rho_z = \text{const.} < 1$ ,  $0 \leq |\zeta_z| \leq 1$ , и користе изрази (6.31) и

(6.32), где су,

$$\bar{B}_1(\rho_z, \zeta_z) = -0,01 + 0,005\rho_z \cos(\arccos \zeta_z) + 0,005\rho_z^2 \cos(2 \arccos \zeta_z), \quad (7.22)$$

$$\bar{B}_2(\rho_z, \zeta_z) = 0,005\rho_z \sin(\arccos \zeta_z) + 0,005\rho_z^2 \sin(2 \arccos \zeta_z), \quad (7.23)$$

$$\bar{C}_1(\rho_z, \zeta_z) = 1 - 1,5\rho_z \cos(\arccos \zeta_z) + 0,5\rho_z^3 \cos(3 \arccos \zeta_z), \quad (7.24)$$

$$\bar{C}_2(\rho_z, \zeta_z) = -1,5\rho_z \sin(\arccos \zeta_z) + 0,5\rho_z^3 \sin(3 \arccos \zeta_z), \quad (7.25)$$

$$\bar{D}_1(\rho_z, \zeta_z) = 0,0001 + 0,00005\rho_z \cos(\arccos \zeta_z), \quad (7.26)$$

$$\bar{D}_2(\rho_z, \zeta_z) = 0,00005\rho_z \sin(\arccos \zeta_z), \quad (7.27)$$

$$\bar{E}_1(\rho_z, \zeta_z) = -1,485 + 3,975\rho_z \cos(\arccos \zeta_z) - 3,49\rho_z^2 \cos(2 \arccos \zeta_z) + \quad (7.28)$$

$$+ \rho_z^3 \cos(3 \arccos \zeta_z), \quad (7.29)$$

$$\bar{E}_2(\rho_z, \zeta_z) = 3,975\rho_z \sin(\arccos \zeta_z) - 3,49\rho_z^2 \sin(2 \arccos \zeta_z) + \rho_z^3 \sin(3 \arccos \zeta_z). \quad (7.30)$$

Да би се разматрала релативна стабилност система у односу на константан степен пригушења  $\zeta$ ,  $0 \leq \zeta = \text{const.} \leq 1$  и природну (сопствену, непригушену) фреквенцију  $\omega_n$  одговарајућег континуалног објекта, замени се  $\rho_z$  и  $\zeta_z$  са

$$\rho_z = e^{-\omega_n \zeta T} = e^{-0,01\omega_n \zeta}, \quad (7.31)$$

$$\zeta_z = \cos \omega_n T \sqrt{1 - \zeta^2} = \cos 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (7.32)$$

ШТО ДОВОДИ ДО,

$$\rho_z^j = e^{-j0,01\omega_n \zeta}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} T_j \left( \cos 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) &= \cos \left( j \arccos \left[ \cos 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right] \right) = \\ &= \cos \left( 0,01j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right), \quad j = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} U_j \left( \cos 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) &= \sin \left( j \arccos \left[ \cos 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right] \right) = \\ &= \sin \left( 0,01j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right), \quad j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Да би се одредила површина константног степена пригушења у параметарском простору  $\alpha\beta\gamma$  бира се константна вредност  $\zeta$ ,  $0 \leq \zeta = \text{const.} \leq 1$ , међају се вредности природне фреквенције  $\omega_n$  са одређеним кораком и користе изрази (6.31) и (6.32) при чему су

$$\begin{aligned} \bar{B}_1(\omega_n, \zeta) &= -0,01 + 0,005e^{-0,01\omega_n \zeta} \cos \left( 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) + \\ &+ 0,005e^{-0,02\omega_n \zeta} \cos \left( 0,02\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right), \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\bar{B}_2(\omega_n, \zeta) = 0,005e^{-0,01\omega_n \zeta} \sin \left( 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) + 0,005e^{-0,02\omega_n \zeta} \sin \left( 0,02\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right), \quad (7.37)$$

$$\bar{C}_1(\omega_n, \zeta) = 1 - 1,5e^{-0,01\omega_n \zeta} \cos \left( 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right) + 0,5e^{-0,03\omega_n \zeta} \cos \left( 0,03\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right), \quad (7.38)$$

$$\bar{C}_2(\omega_n, \zeta) = -1,5e^{-0,01\omega_n\zeta} \sin\left(0,01\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + 0,5e^{-0,03\omega_n\zeta} \sin\left(0,03\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right), \quad (7.39)$$

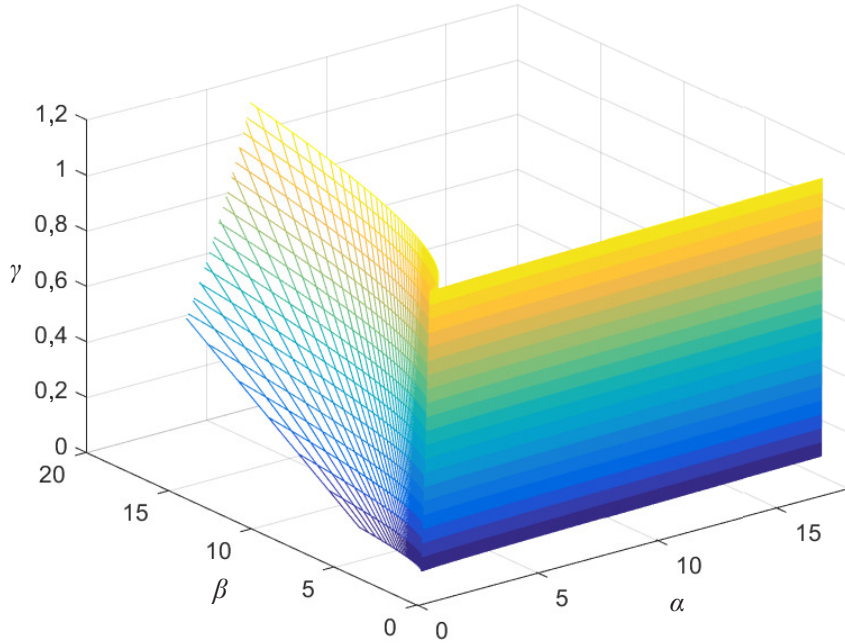
$$\bar{D}_1(\omega_n, \zeta) = 0,0001 + 0,00005e^{-0,01\omega_n\zeta} \cos\left(0,01\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right), \quad (7.40)$$

$$\bar{D}_2(\omega_n, \zeta) = 0,00005e^{-0,01\omega_n\zeta} \sin\left(0,01\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right), \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_1(\omega_n, \zeta) = & -1,485 + 3,975e^{-0,01\omega_n\zeta} \cos\left(0,01\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) - \\ & -3,49e^{-0,02\omega_n\zeta} \cos\left(0,02\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + e^{-0,03\omega_n\zeta} \cos\left(0,03\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right), \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_2(\omega_n, \zeta) = & 3,975e^{-0,01\omega_n\zeta} \sin\left(0,01\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) - 3,49e^{-0,02\omega_n\zeta} \sin\left(0,02\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + \\ & + e^{-0,03\omega_n\zeta} \sin\left(0,03\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right). \end{aligned} \quad (7.43)$$

Област константног степена пригушења  $\zeta = 0,7$  у параметарском простору  $\alpha\beta\gamma$  приказана је на слици 7.1.



Слика 7.1: Површина константног степена пригушења  $\zeta = 0,7$  у  $\alpha\beta\gamma$  параметарском простору.

### 7.1.6 Индекс перформансе

Као мера квалитета динамичког понашања изабран је индекс перформансе у облику суме квадрата грешака.

Из једначине објекта (7.1) следи,

$$\begin{aligned} X_i(z) &= \begin{bmatrix} \frac{0,5z+1}{(z-1,5)} & \frac{-0,5z}{(z-1,5)} & \frac{z}{(z-1,5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_O(z) \\ u_O(0) \\ x_i(0) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} W_O(z) & \mathbf{W}_{0O}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_O(z) \\ \mathbf{c}_{0O} \end{bmatrix}, \implies \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$W_O(z) = \frac{(0,5z+1)}{(z-1,5)}, \quad \mathbf{W}_{0O}(z) = \begin{bmatrix} \frac{-0,5z}{(z-1,5)} & \frac{z}{(z-1,5)} \end{bmatrix}, \quad (7.45)$$

$$\mathbf{c}_{0O} = \begin{bmatrix} u_O(0) \\ x_i(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) + z(0) \\ x_i(0) \end{bmatrix}. \quad (7.46)$$

Из једначине контролера (7.3) следи,

$$U(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,01(z-1)\alpha + (z-1)^2\beta + 10^{-4}\gamma}{(z^2-1,99z+0,99)} \\ \frac{-0,01z\alpha - (z-2)z\beta}{z^2-1,99z+0,99} \\ \frac{-\beta z}{z^2-1,99z+0,99} \\ \frac{(z-1,99)z}{z^2-1,99z+0,99} \\ \frac{z}{z^2-1,99z+0,99} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} E(z) \\ \varepsilon(0) \\ \varepsilon(1) \\ u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \\ = [W_C(z) \quad \mathbf{W}_{0C}(z)] \begin{bmatrix} E(z) \\ \mathbf{c}_{0C} \end{bmatrix}, \implies \quad (7.47)$$

$$W_C(z) = \frac{0,01(z-1)\alpha + (z-1)^2\beta + 10^{-4}\gamma}{(z^2-1,99z+0,99)}, \quad (7.48)$$

$$\mathbf{W}_{0C}(z) = \begin{bmatrix} \frac{-0,01z\alpha - (z-2)z\beta}{z^2-1,99z+0,99} & \frac{-\beta z}{z^2-1,99z+0,99} & \frac{(z-1,99)z}{z^2-1,99z+0,99} & \frac{z}{z^2-1,99z+0,99} \end{bmatrix}, \quad (7.49)$$

$$\mathbf{c}_{0C} = \begin{bmatrix} \varepsilon^1(0) \\ \mathbf{u}^1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ \varepsilon(1) \\ u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{iz}(0) - x_i(0) \\ x_{iz}(1) - x_i(1) \\ u(0) \\ u(1) \end{bmatrix}. \quad (7.50)$$

Употребом једначина (6.76) и (7.44)-(7.50) добија се,

$$E(z) = \begin{bmatrix} \frac{(z^2-1,99z+0,99)(z-1,5)}{(z^2-1,99z+0,99)(z-1,5) + (0,5z+1)[0,01(z-1)\alpha + (z-1)^2\beta + 10^{-4}\gamma]} \\ \frac{(z^2-1,99z+0,99)(z-1,5) + (0,5z+1)[0,01(z-1)\alpha + (z-1)^2\beta + 10^{-4}\gamma]}{(z^2-1,99z+0,99)(z-1,5) + (0,5z+1)[0,01(z-1)\alpha + (z-1)^2\beta + 10^{-4}\gamma]} \\ \frac{z(0,5z+1)\beta}{(z^2-1,99z+0,99)(z-1,5) + (0,5z+1)[0,01(z-1)\alpha + (z-1)^2\beta + 10^{-4}\gamma]} \\ \frac{-(0,5z+1)(z-1,99)z}{(z^2-1,99z+0,99)(z-1,5) + (0,5z+1)[0,01(z-1)\alpha + (z-1)^2\beta + 10^{-4}\gamma]} \\ \frac{-z(0,5z+1)}{(z^2-1,99z+0,99)(z-1,5) + (0,5z+1)[0,01(z-1)\alpha + (z-1)^2\beta + 10^{-4}\gamma]} \\ \frac{0,5z(z^2-1,99z+0,99)}{(z^2-1,99z+0,99)(z-1,5) + (0,5z+1)[0,01(z-1)\alpha + (z-1)^2\beta + 10^{-4}\gamma]} \\ \frac{-z(z^2-1,99z+0,99)}{(z^2-1,99z+0,99)(z-1,5) + (0,5z+1)[0,01(z-1)\alpha + (z-1)^2\beta + 10^{-4}\gamma]} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X_{iz}(z) \\ Z(z) \\ x_{iz}(0) - x_i(0) \\ x_{iz}(1) - x_i(1) \\ u(0) \\ u(1) \\ u(0) + z(0) \\ x_i(0) \end{bmatrix}. \quad (7.51)$$

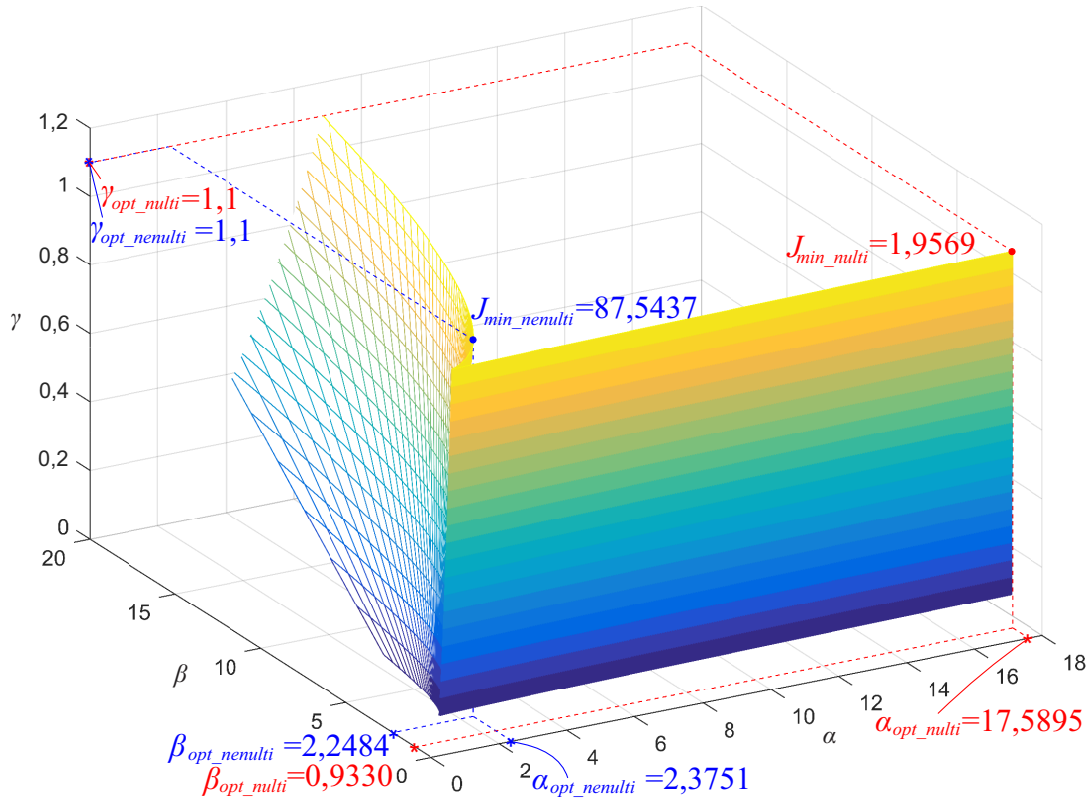
На основу израза (6.77) и (7.51) вредности индекса перформансе су израчуане за 29700 тачака, при следећим почетним условима:  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0,2$ ,  $x_i(0) = 2$ ,  $x_i(1) = 1,9$ ,  $x_{iz}(0) = 1$ ,  $x_{iz}(1) = 1$ ,  $z(0) = 0$ , али је само минимална вредност од њих приказана на површини константног степена пригушења, као што се може видети на слици 7.2. Скуп оптималних вредности параметара  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , који обезбеђују оптималну (минималну) вредност индекса перформансе  $J_{min\_nenulti} = 87,5437$ ,

је  $\alpha_{opt\_nenulti} = 2,3751$ ,  $\beta_{opt\_nenulti} = 2,2484$ ,  $\gamma_{opt\_nenulti} = 1,1$ . У сврху приказивања јасне разлике између предложеног новог и класичног приступа, вредности индекса перформансе су израчунате и за случај свих нултих почетних услова, опет за свих 29700 тачака.

Минимална вредност добијена у овом случају је такође приказана на површини константног степена пригушења као што се то може видети на слици 7.2. Минимална вредност индекса перформансе (према класичној теорији) је  $J_{min\_nulti} = 1,9569$  док су оптималне вредности параметара  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  једнаке  $\alpha_{opt\_nulti} = 17,5895$ ,  $\beta_{opt\_nulti} = 0,9330$ ,  $\gamma_{opt\_nulti} = 1,1$ .

Добијена су два скупа оптималних параметара, при ненултим и нултим почетним условима, која су различита,

$$(\alpha_{opt\_nenulti}, \beta_{opt\_nenulti}, \gamma_{opt\_nenulti}) = (2,3751, 2,2484, 1,1) \neq (17,5895, 0,9330, 1,1) = (\alpha_{opt\_nulti}, \beta_{opt\_nulti}, \gamma_{opt\_nulti}). \quad (7.52)$$



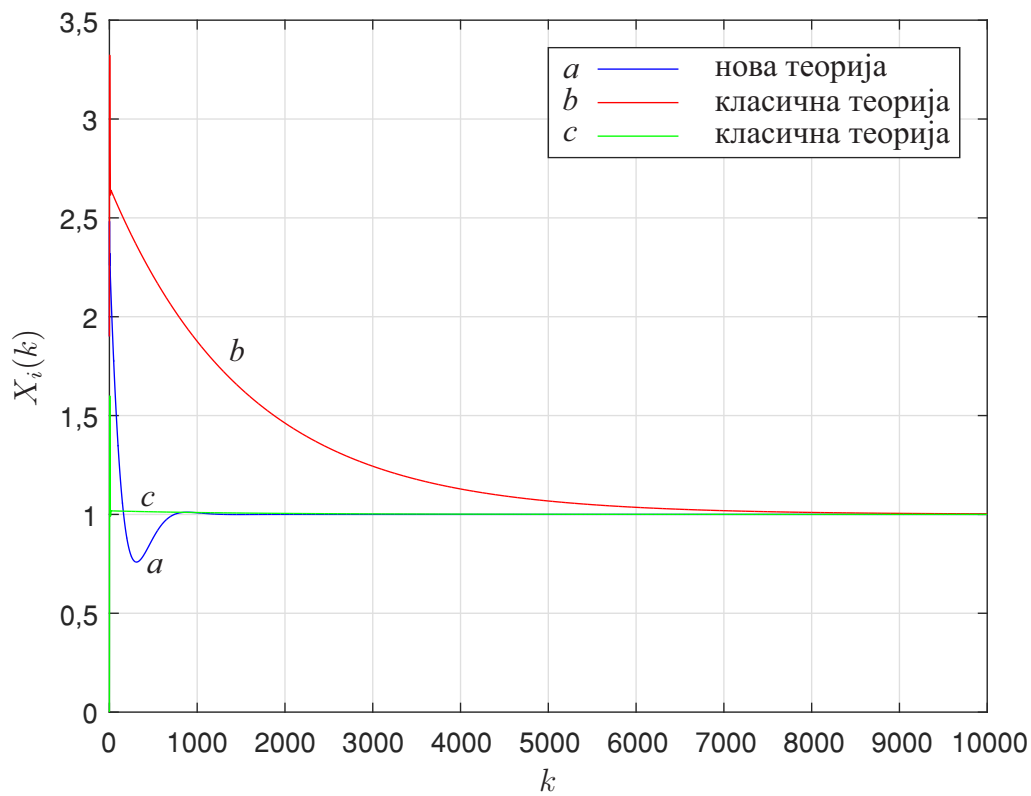
Слика 7.2: Површина константног степена пригушења са приказаним минималним вредностима индекса перформансе у случају ненултих и нултих почетних услова.

### 7.1.7 Дискусија симулационих резултата

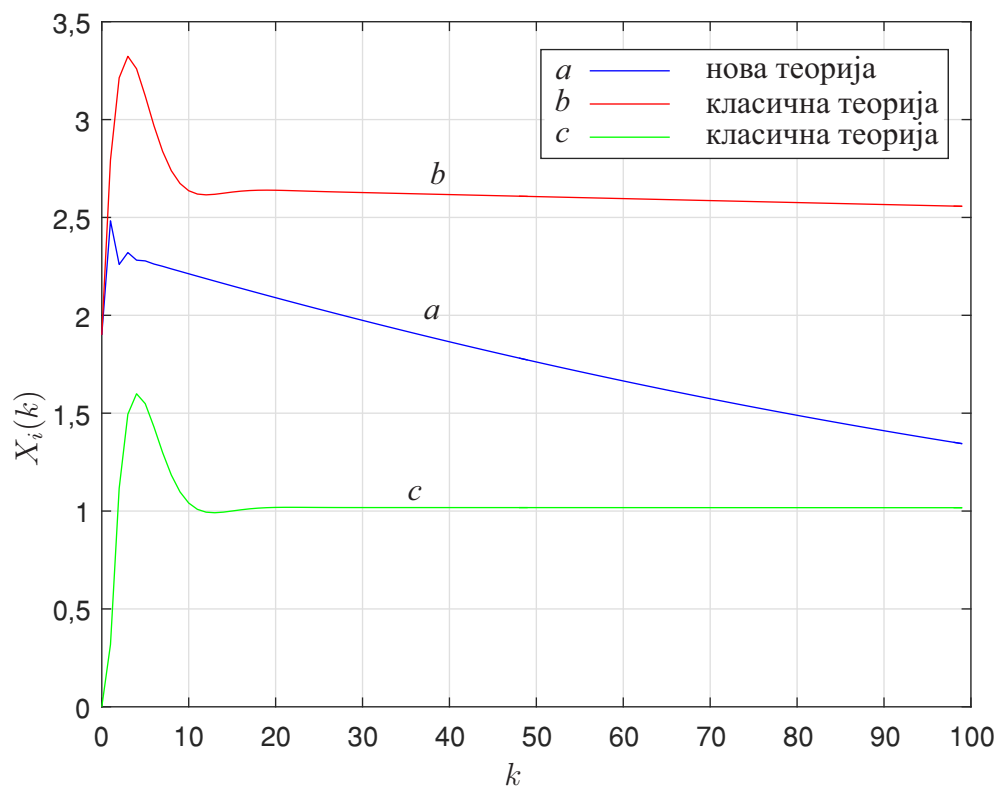
Јединични одскочни одзиви система у оба случаја приказани су на слици 7.3. Увеличан део слике 7.3 за тренутке одабирања  $0 \leq k \leq 100$  приказан је на слици 7.4 како би се боље видело да плави и црвени одзив крећу из ненултих почетних услова док зелени одзив креће из нултих почетних услова.



7.1. Симулациони пример синтезе ПДС алгоритма управљања: нулти и ненулти почетни услови



Слика 7.3: Јединични одскочни одзиви система у случају ненултих (нова теорија) и нултих (класична теорија) почетних услова.



Слика 7.4: Увеличан део слике 7.3.

Поставља се питање какво поређење између класичног и новог приступа условне оптимизације има смисла. Откривена и предложена нова условна оптимизација узима у обзир ненулте почетне услове. Оптималне вредности непознатих подешљивих параметара се добијају узимајући у обзир ненулте почетне услове и зависе од њих. Јединични одскочни одзив система плаве боје на слици 7.3 настао је на основу оптималних параметара добијених применом нове теорије и ти параметри су у важности само за коришћене конкретне ненулте почетне услове.

Класична условна оптимизација подразумева нулте почетне услове. Оптималне вредности подешљивих параметара су добијене под претпоставком да су почетни услови једнаки нули и те вредности оптималних параметара се третирају као универзално оптималне за било који радни режим и било које почетне услове. Јединични одскочни одзив система црвене боје на слици 7.3 је настао на основу оптималних параметара добијених применом класичне теорије. Како се ти параметри сматрају универзално оптималним, симулацију започињемо из истих ненултих почетних услова који су коришћени при примени нове теорије (одзив плаве боје на слици 7.3). Због типа дејства управљачког система очекује се да плави и црвени јединични одскочни одзив имају статичку грешку једнаку нули. Са слике се може видети да црвени одзив (*b*) споро тежи задатој вредности. Закључак је да је плави одзив (*a*), добијен на основу нове теорије, много бољи у односу на црвени, што је очигледно када се погледа слика 7.3. Црвеном одзиву треба пуно више времена да достигне задату вредност у случају да крене из ненултих почетних услова.

Међутим, уколико систем започне са радом из нултих почетних услова (зелена крива (*c*) такође на слици 7.3) онда су оптимални параметри добијени на основу класичне теорије одговарајући и добија се добар одзив јер се приликом примене класичне теорије користе нулти почетни услови.

## 7.2 Експериментални пример синтезе ПС алгоритма управљања: нулти и ненулти почетни услови

### 7.2.1 Математички модел објекта

Експеримент је изведен на Quanser ротационом серво мотору једносмерне струје, SRV02. Овај модел мотора је опремљен са оптичким енкодером за мерење позиције и тахометром за мерење угаоне брзине. За аквизицију и управљање у реалном времену користи се Q8-USB аквизициона карта у Windows окружењу са Matlab/Simulink и QUARC@ софтвером за управљање у реалном времену.

Предложена метода синтезе експериментално је примењена и тестирана на споменутом серво мотору са додатним оптерећењем. У случају занемаривања постојећих нелинеарних ефеката (брзинског трења, зоне неосетљивости, зазора) могуће је одредити линеарни математички модел објекта који у задовољавајућој мери описује понашање серво мотора у околини номиналне тачке. Тај математички модел је дат у виду диференцијалне једначине понашања,

$$J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) = \frac{\eta_g \eta_m k_t K_g}{R_m} U(t), \quad (7.53)$$

при чему су  $\theta(t)$  угао (позиција) додатног оптерећења,  $J$  је укупни момент инерције који се одражава на оптерећење,  $B$  је коефицијент вискозног трења,  $U(t)$  је улазни напон мотора,  $R_m$  је отпорност намотаја мотора,  $k_t$  је константа обртног момента мотора [Nm/A],  $\eta_m$  је степен корисног дејства мотора,  $\eta_g$  је степен корисног дејства зупчастог преноса и  $K_g$  је укупни преносни однос зупчаника. У наведеном

моделу претпоставља се да је индуктивност много мања од отпорности па је стога занемарена.

За номиналне вредности параметара објекта  $J = 0,0021$  [kgm<sup>2</sup>],  $B = 0,084$  [Nms/rad],  $R_m = 2,6$  [Ω],  $k_t = 0,0077$  [Nm/A],  $\eta_m = 0,69$ ,  $\eta_g = 0,9$  и  $K_g = 70$ , избором излазне величине  $x_i = \theta$  и улазне  $u_O = U$  као и периоде одабирања  $T = 0,01$  [s] добија се временски дискретан УИ модел објекта у облику,

$$\mathbf{A}_O^{(2)} \mathbf{x}_i^2 = \mathbf{B}_O^{(1)} \mathbf{u}_O^1, \quad \mathbf{A}_O^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,6746 & -1,6746 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_O^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,00232852 & 0,002653 \end{bmatrix}, \quad (7.54)$$

$$\mathbf{x}_i^2 = \begin{bmatrix} x_i(k) & x_i(k+1) & x_i(k+2) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u}_O^1 = \begin{bmatrix} u_O(k) & u_O(k+1) \end{bmatrix}^T. \quad (7.55)$$

### 7.2.2 Математички модел управљачког система

Нека се објектом (7.54) управља ПС контролером нултог реда,

$$\mathbf{A}_C^{(1)} \mathbf{u}^1 = \mathbf{B}_C^{(1)} \varepsilon^1, \quad (7.56)$$

$$\mathbf{A}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} K_S T - K & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01K_S - K & K \end{bmatrix}, \quad T = 0,01 \text{ [s]}. \quad (7.57)$$

### 7.2.3 Математички модел затвореног система

Цео затворен систем аутоматског управљања може се представити у компактном облику,

$$\mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_i^3(k) = \mathbf{B}^{(2)}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_u^2(k), \quad \forall k \in \mathcal{N}_0, \quad \alpha = K, \quad \beta = K_S, \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta) &= \begin{bmatrix} a_0(\alpha, \beta) & a_1(\alpha, \beta) & a_2(\alpha, \beta) & a_3(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0,00232852\alpha + & -3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + & 0,002653\alpha - & \\ +0,00232852 \cdot 10^{-2}\beta - & +2,653 \cdot 10^{-5}\beta + & -2,6746 & 1 \\ -0,6746 & +2,3492 & & \end{bmatrix}, \quad (7.59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(2)}(\alpha, \beta) &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0(\alpha, \beta) & \mathbf{B}_1(\alpha, \beta) & \mathbf{B}_2(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,3285 \cdot 10^{-3}\alpha + & -0,00232852 \\ +2,3285 \cdot 10^{-5}\beta & \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} -3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + & -3,2448 \cdot 10^{-4} \\ +2,653 \cdot 10^{-5}\beta & \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} 0,002653\alpha & 0,002653 \end{bmatrix}^T \end{bmatrix}^T, \quad (7.60) \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_i^3(k) = \begin{bmatrix} x_i(k) & x_i(k+1) & x_i(k+2) & x_i(k+3) \end{bmatrix}^T, \quad (7.61)$$

$$\mathbf{x}_u^2(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u^T(k) & \mathbf{x}_u^T(k+1) & \mathbf{x}_u^T(k+2) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} x_{iz} & z \end{bmatrix}^T. \quad (7.62)$$

### 7.2.4 Потпуна преносна функција

При одређивању потпуне преносне функције користе се изрази из поглавља 5.

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \Pi_D^{-1}(z) \Pi_N(z) = \left[ \mathbf{A}^{(3)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(3)}(z) \right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \left[ \mathbf{B}^{(2)}(\cdot) \mathbf{S}_2^{(2)}(z) \quad -\mathbf{B}^{(2)}(\cdot) \mathbf{Z}_2^{(2)}(z) \quad \mathbf{A}^{(3)}(\cdot) \mathbf{Z}_1^{(3)}(z) \right], \quad (7.63) \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_1^{(3)}(z) = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{S}_2^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & z^2 \end{bmatrix}^T, \quad (7.64)$$

$$\mathbf{Z}_2^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ z^2 & 0 & z & 0 \\ 0 & z^2 & 0 & z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_1^{(3)}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ z^2 & z & 0 \\ z^3 & z^2 & z \end{bmatrix}, \quad (7.65)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}^{(3)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(3)}(z) = \\ & = z^3 + (0,002653\alpha - 2,6746)z^2 + (-3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,653 \cdot 10^{-5}\beta + 2,3492)z + \\ & \quad + (-0,00232852\alpha + 0,00232852 \cdot 10^{-2}\beta - 0,6746), \end{aligned} \quad (7.66)$$

$$\mathbf{B}^{(2)}(\cdot) \mathbf{S}_2^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} 0,002653\alpha z^2 + (-3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,653 \cdot 10^{-5}\beta)z + (-2,3285 \cdot 10^{-3}\alpha + 2,3285 \cdot 10^{-5}\beta) & \\ 0,002653z^2 - 3,2448 \cdot 10^{-4}z - 0,00232852 & \end{bmatrix}^T, \quad (7.67)$$

$$-\mathbf{B}^{(2)}(\cdot) \mathbf{Z}_2^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} -0,002653\alpha z^2 - (-3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,653 \cdot 10^{-5}\beta)z & \\ -0,002653z^2 + 3,2448 \cdot 10^{-4}z & \\ -0,002653\alpha z & \\ -0,002653z & \end{bmatrix}^T, \quad (7.68)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}^{(3)}(\cdot) \mathbf{Z}_1^{(3)}(z) = \\ & = \begin{bmatrix} z^3 + (0,002653\alpha - 2,6746)z^2 + (-3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,653 \cdot 10^{-5}\beta + 2,3492)z & \\ z^2 + (0,002653\alpha - 2,6746)z & \\ z & \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (7.69)$$

$$\begin{aligned} & \Pi(z) = \\ & = \frac{1}{z^3 + (0,002653\alpha - 2,6746)z^2 + (-3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,653 \cdot 10^{-5}\beta + 2,3492)z + (-0,00232852\alpha + 0,00232852 \cdot 10^{-2}\beta - 0,6746)} \cdot \\ & \quad \cdot \begin{bmatrix} 0,002653\alpha z^2 + (-3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,653 \cdot 10^{-5}\beta)z - 2,3285 \cdot 10^{-3}\alpha + 2,3285 \cdot 10^{-5}\beta & \\ 0,002653z^2 - 3,2448 \cdot 10^{-4}z - 0,00232852 & \\ -0,002653\alpha z^2 - (-3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,653 \cdot 10^{-5}\beta)z & \\ -0,002653z^2 + 3,2448 \cdot 10^{-4}z & \\ -0,002653\alpha z & \\ -0,002653z & \\ z^3 + (0,002653\alpha - 2,6746)z^2 + (-3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,653 \cdot 10^{-5}\beta + 2,3492)z & \\ z^2 + (0,002653\alpha - 2,6746)z & \\ z & \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (7.70)$$

Потпуна преносна матрица је недегенеративна по врстама тако да је карактеристични полином система

$$z^3 + (0,002653\alpha - 2,6746)z^2 + (-3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,653 \cdot 10^{-5}\beta + 2,3492)z + (-0,00232852\alpha + 0,00232852 \cdot 10^{-2}\beta - 0,6746).$$

### 7.2.5 Релативна стабилност

Карактеристична једначина система је,

$$z^3 + (0,002653\alpha - 2,6746)z^2 + (-3,2448 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,653 \cdot 10^{-5}\beta + 2,3492)z + (-0,00232852\alpha + 0,00232852 \cdot 10^{-2}\beta - 0,6746) = \bar{a}_3(\alpha, \beta)z^3 + \bar{a}_2(\alpha, \beta)z^2 + \bar{a}_1(\alpha, \beta)z + \bar{a}_0(\alpha, \beta) = 0, \quad (7.71)$$

$$\bar{a}_j(\alpha, \beta) = \bar{b}_j\alpha + \bar{c}_j\beta + \bar{d}_j, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (7.72)$$

У циљу добијања области константног времена смирења у  $\alpha\beta$  параметарској равни потребно је узети константну вредност  $\rho_z$ ,  $0 \leq \rho_z = \text{const.} < 1$ ,  $0 \leq |\zeta_z| \leq 1$  и употребити изразе (6.29) и (6.30) при чему су,

$$\bar{B}_1(\rho_z, \zeta_z) = -0,00232852 - 3,2448 \cdot 10^{-4}\rho_z \cos(\arccos \zeta_z) + 0,002653\rho_z^2 \cos(2 \arccos \zeta_z), \quad (7.73)$$

$$\bar{B}_2(\rho_z, \zeta_z) = -3,2448 \cdot 10^{-4}\rho_z \sin(\arccos \zeta_z) + 0,002653\rho_z^2 \sin(2 \arccos \zeta_z), \quad (7.74)$$

$$\bar{C}_1(\rho_z, \zeta_z) = 0,00232852 \cdot 10^{-2} + 2,653 \cdot 10^{-5}\rho_z \cos(\arccos \zeta_z), \quad (7.75)$$

$$\bar{C}_2(\rho_z, \zeta_z) = 2,653 \cdot 10^{-5}\rho_z \sin(\arccos \zeta_z), \quad (7.76)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_1(\rho_z, \zeta_z) &= \\ &= -0,6746 + 2,3492\rho_z \cos(\arccos \zeta_z) - 2,6746\rho_z^2 \cos(2 \arccos \zeta_z) + \rho_z^3 \cos(3 \arccos \zeta_z), \end{aligned} \quad (7.77)$$

$$\bar{D}_2(\rho_z, \zeta_z) = 2,3492\rho_z \sin(\arccos \zeta_z) - 2,6746\rho_z^2 \sin(2 \arccos \zeta_z) + \rho_z^3 \sin(3 \arccos \zeta_z), \quad (7.78)$$

$$T_j(\zeta_z) = \cos(j \arccos \zeta_z), \quad U_j(\zeta_z) = \sin(j \arccos \zeta_z). \quad (7.79)$$

Уколико се разматра релативна стабилност у односу на захтевани степен пригушења  $\zeta$ ,  $0 \leq \zeta = \text{const.} \leq 1$  и природну фреквенцију  $\omega_n$  одговарајућег континуалног система онда се  $\rho_z$  и  $\zeta_z$  замењују са,

$$\rho_z = e^{-\omega_n \zeta T} = e^{-0,01\omega_n \zeta}, \quad \zeta_z = \cos \omega_n T \sqrt{1 - \zeta^2} = \cos 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (7.80)$$

што даје

$$\rho_z^j = e^{-j0,01\omega_n \zeta}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (7.81)$$

$$\begin{aligned} T_j\left(\cos 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\right) &= \cos\left(j \arccos\left[\cos 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\right]\right) = \\ &= \cos\left(0,01j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\right), \quad j = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (7.82)$$

$$\begin{aligned} U_j\left(\cos 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\right) &= \sin\left(j \arccos\left[\cos 0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\right]\right) = \\ &= \sin\left(0,01j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\right), \quad j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7.83)$$

Да би се добила област константног степена пригушења у  $\alpha\beta$  параметарској равни бира се константна вредност  $\zeta$ ,  $0 \leq \zeta = \text{const.} \leq 1$ , мења се природна фреквенција  $\omega_n$  са одређеним кораком и користе изрази (6.29) и (6.30) где су,

$$\begin{aligned} \bar{B}_1(\omega_n, \zeta) &= -0,01 + 0,005e^{-0,01\omega_n \zeta} \cos\left(0,01\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\right) + \\ &+ 0,005e^{-0,02\omega_n \zeta} \cos\left(0,02\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\right), \end{aligned} \quad (7.84)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_2(\omega_n, \zeta) = & -3,2448 \cdot 10^{-4} e^{-0,01\omega_n\zeta} \sin\left(0,01\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + \\ & + 0,002653 e^{-0,02\omega_n\zeta} \sin\left(0,02\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right), \end{aligned} \quad (7.85)$$

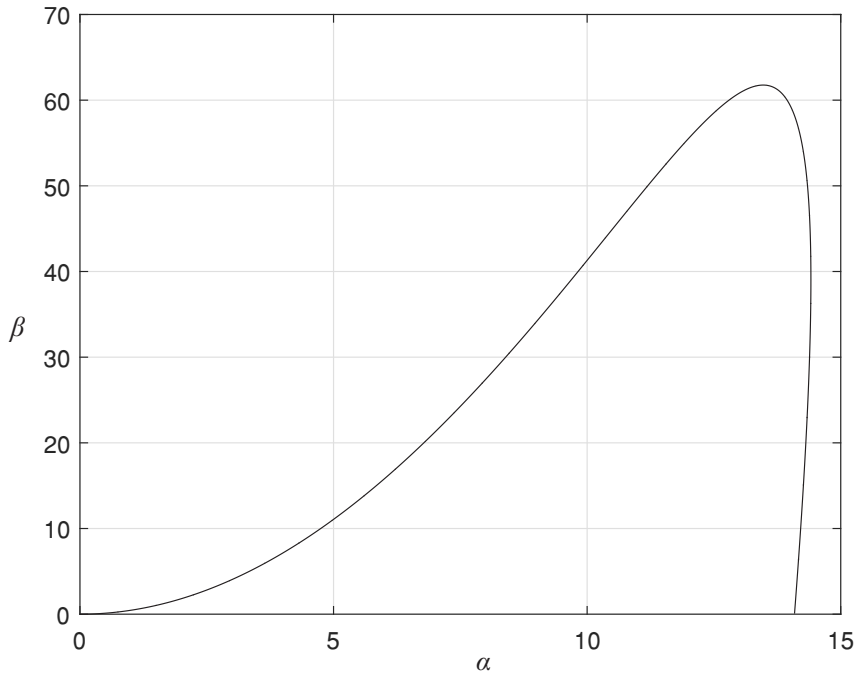
$$\bar{C}_1(\omega_n, \zeta) = 0,00232852 \cdot 10^{-2} + 2,653 \cdot 10^{-5} e^{-0,01\omega_n\zeta} \cos\left(0,01\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right), \quad (7.86)$$

$$\bar{C}_2(\omega_n, \zeta) = 2,653 \cdot 10^{-5} e^{-0,01\omega_n\zeta} \sin\left(0,01\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right), \quad (7.87)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_1(\omega_n, \zeta) = & -0,6746 + \\ & + 2,3492 e^{-0,01\omega_n\zeta} \cos\left(0,01\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) - 2,6746 e^{-0,02\omega_n\zeta} \cos\left(0,02\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + \\ & + e^{-0,03\omega_n\zeta} \cos\left(0,03\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right), \end{aligned} \quad (7.88)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_2(\omega_n, \zeta) = & 2,3492 e^{-0,01\omega_n\zeta} \sin\left(0,01\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) - \\ & - 2,6746 e^{-0,02\omega_n\zeta} \sin\left(0,02\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + e^{-0,03\omega_n\zeta} \sin\left(0,03\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right). \end{aligned} \quad (7.89)$$

Област константног степена пригушења у  $\alpha\beta$  параметарској равни за  $\zeta = 0,7$  приказана је на слици 7.5.



Слика 7.5: Област константног степена пригушења  $\zeta = 0,7$  у  $\alpha\beta$  параметарској равни.

### 7.2.6 Индекс перформансе

Индекс перформансе је у облику суме квадрата грешака. Траже се оптималне вредности подешљивих параметара за које индекс перформансе има минималну вредност.

Једначина објекта (7.54) доводи до,

$$X_i(z) = \begin{bmatrix} \frac{0,002653z+0,00232852}{z^2-1,6746z+0,6746} & \frac{-0,002653z}{z^2-1,6746z+0,6746} & \frac{z^2-1,6746z}{z^2-1,6746z+0,6746} & \frac{z}{z^2-1,6746z+0,6746} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_O(z) \\ u_O(0) \\ x_i(0) \\ x_i(1) \end{bmatrix} = [W_O(z) \quad \mathbf{W}_{0O}(z)] \begin{bmatrix} U_O(z) \\ \mathbf{c}_{0O} \end{bmatrix}, \implies \quad (7.90)$$

$$W_O(z) = \frac{0,002653z + 0,00232852}{z^2 - 1,6746z + 0,6746}, \quad (7.91)$$

$$\mathbf{W}_{0O}(z) = \begin{bmatrix} \frac{-0,002653z}{z^2-1,6746z+0,6746} & \frac{z^2-1,6746z}{z^2-1,6746z+0,6746} & \frac{z}{z^2-1,6746z+0,6746} \end{bmatrix}, \quad (7.92)$$

$$\mathbf{c}_{0O} = \begin{bmatrix} u_O(0) \\ x_i(0) \\ x_i(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ x_i(0) \\ x_i(1) \end{bmatrix}. \quad (7.93)$$

Из једначине контролера (7.56, 7.57) следи,

$$U(z) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(z-1)+0,01\beta}{z-1} & \frac{-\alpha z}{z-1} & \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(z) \\ \varepsilon(0) \\ u(0) \end{bmatrix} = [W_C(z) \quad \mathbf{W}_{0C}(z)] \begin{bmatrix} E(z) \\ \mathbf{c}_{0C} \end{bmatrix}, \implies \quad (7.94)$$

$$W_C(z) = \frac{\alpha(z-1) + 0,01\beta}{z-1}, \quad \mathbf{W}_{0C}(z) = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha z}{z-1} & \frac{z}{z-1} \end{bmatrix}, \quad (7.95)$$

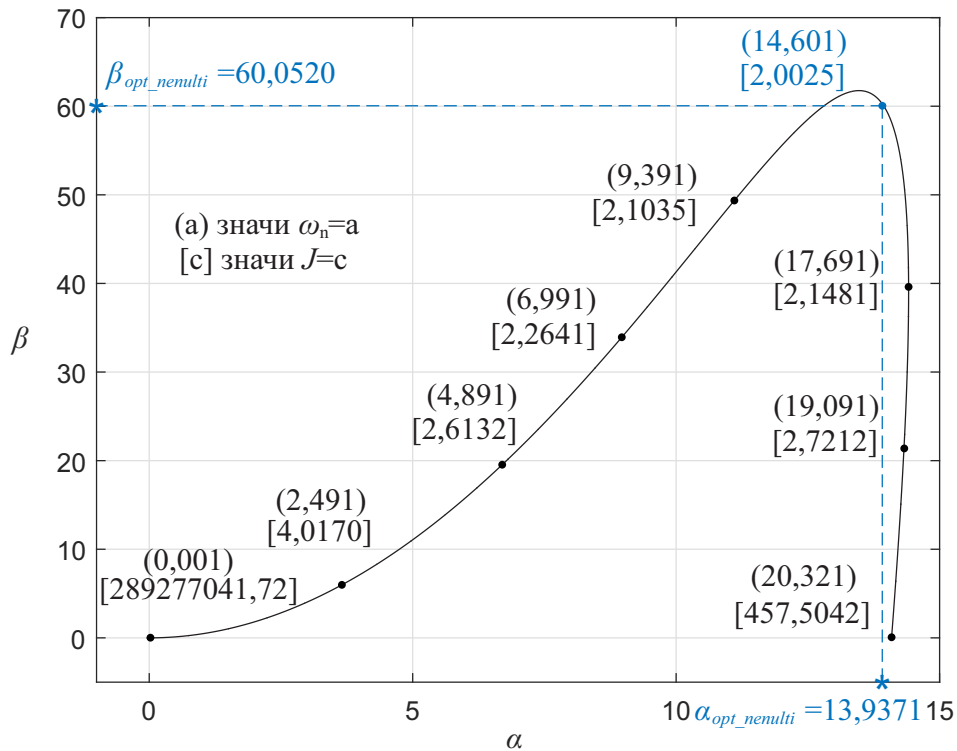
$$\mathbf{c}_{0C} = \begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{iz}(0) - x_i(0) \\ u(0) \end{bmatrix}. \quad (7.96)$$

Из једначина (6.76) и (7.90)-(7.96) добија се,

$$E(z) = \begin{bmatrix} \frac{(z^2-1,6746z+0,6746)(z-1)}{(z^2-1,6746z+0,6746)(z-1)+(0,002653z+0,00232852)[\alpha(z-1)+0,01\beta]} \\ \frac{(0,002653z+0,00232852)(z-1)\alpha z}{\{(z^2-1,6746z+0,6746)(z-1)+(0,002653z+0,00232852)[\alpha(z-1)+0,01\beta]\}(z-1)} \\ \frac{-(0,002653z+0,00232852)(z-1)z}{\{(z^2-1,6746z+0,6746)(z-1)+(0,002653z+0,00232852)[\alpha(z-1)+0,01\beta]\}(z-1)} \\ \frac{(0,002653z+0,00232852)(z-1)\cdot 0,002653z}{\{(z^2-1,6746z+0,6746)(z-1)+(0,002653z+0,00232852)[\alpha(z-1)+0,01\beta]\}(z^2-1,6746z+0,6746)} \\ \frac{-(0,002653z+0,00232852)(z-1)(z^2-1,6746z)}{\{(z^2-1,6746z+0,6746)(z-1)+(0,002653z+0,00232852)[\alpha(z-1)+0,01\beta]\}(z^2-1,6746z+0,6746)} \\ \frac{-(0,002653z+0,00232852)(z-1)z}{\{(z^2-1,6746z+0,6746)(z-1)+(0,002653z+0,00232852)[\alpha(z-1)+0,01\beta]\}(z^2-1,6746z+0,6746)} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X_{iz}(z) \\ x_{iz}(0) - x_i(0) \\ u(0) \\ u(0) \\ x_i(0) \\ x_i(1) \end{bmatrix}. \quad (7.97)$$

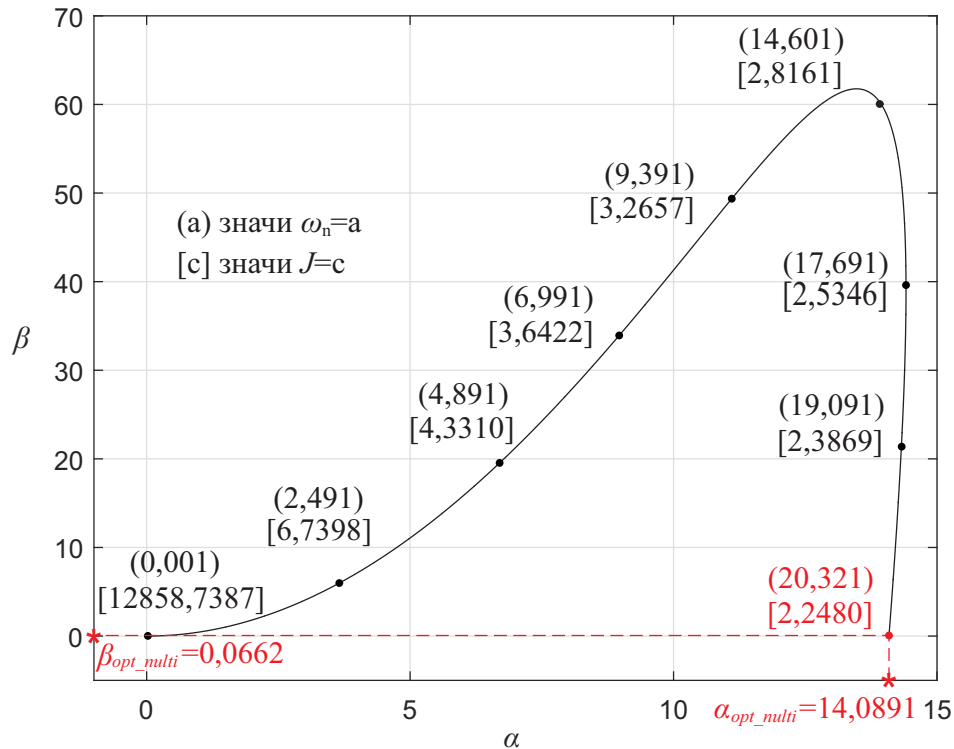
Узимањем у обзир ненултих почетних услова  $u(0) = 0, 1$ ,  $x_i(0) = 0, 2$ ,  $x_i(1) = 0, 226$ ,  $x_{iz}(0) = 0$  вредности индекса перформансе су израчунате за 2033 тачке док су само неке од њих унете на криву константног степена пригушења као што се види на слици 7.6. Ненулти почетни услови су ишчитани након 1,27 секунди током којих је мотор радио у отвореном колу при напону од 1,6 [V]. Скуп оптималних вредности параметара  $\alpha$ ,  $\beta$  који обезбеђују оптималну (минималну) вредност индекса перформансе  $J_{min\_nenulti} = 2,0025$  су  $\alpha_{opt\_nenulti} = 13,9371$ ,  $\beta_{opt\_nenulti} = 60,0520$ .

7.2. Експериментални пример синтезе ПС алгоритма управљања: нулти и ненулти почетни услови



Слика 7.6: Крива константног степена пригушења са неколико унетих вредности индекса перформансе при ненултим почетним условима; \* оптималне вредности параметара  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $(\alpha_{opt\_nenulti}, \beta_{opt\_nenulti}) = (13,9371, 60,052)$ .

Вредности индекса перформансе су израчунате и при нултим почетним условима опет за 2033 тачке, како би се уочила разлика у резултатима приликом примене класичног и новог приступа.



Слика 7.7: Крива константног степена пригушења са неколико унетих вредности индекса перформансе при нултим почетним условима (класични приступ); \* оптималне вредности параметара  $\alpha$  и  $\beta$ , су  $(\alpha_{opt\_multi}, \beta_{opt\_multi}) = (14,0891, 0,0662)$ .

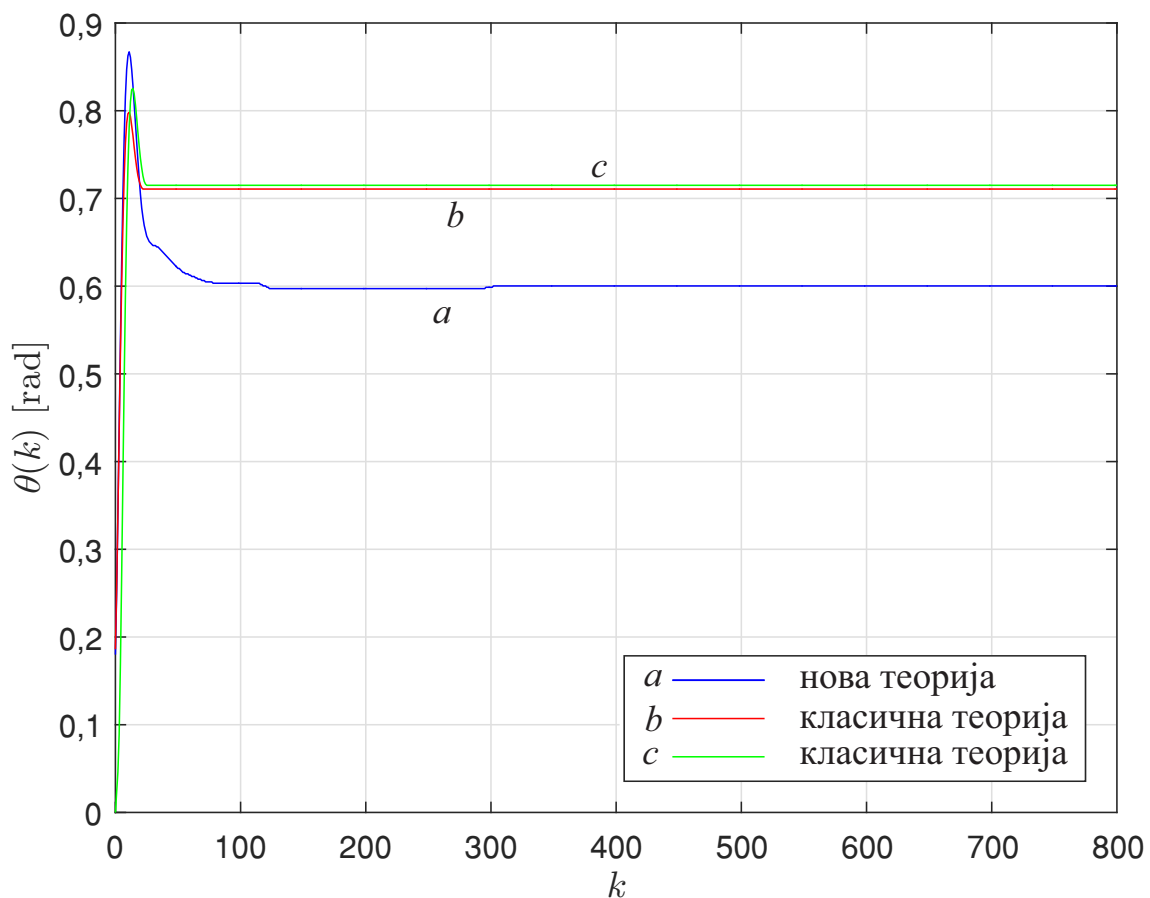


Неке од ових вредности су нанете на криву константног степена пригушења као што се може видети на слици 7.7. Оптималне вредности параметара  $\alpha$  и  $\beta$  одређене при нултим почетним условима, које дају оптималну вредност индекса перформансе  $J_{min\_multi} = 2,2480$ , су  $\alpha_{opt\_multi} = 14,0891$ ,  $\beta_{opt\_multi} = 0,0662$ .

### 7.2.7 Дискусија експерименталних резултата

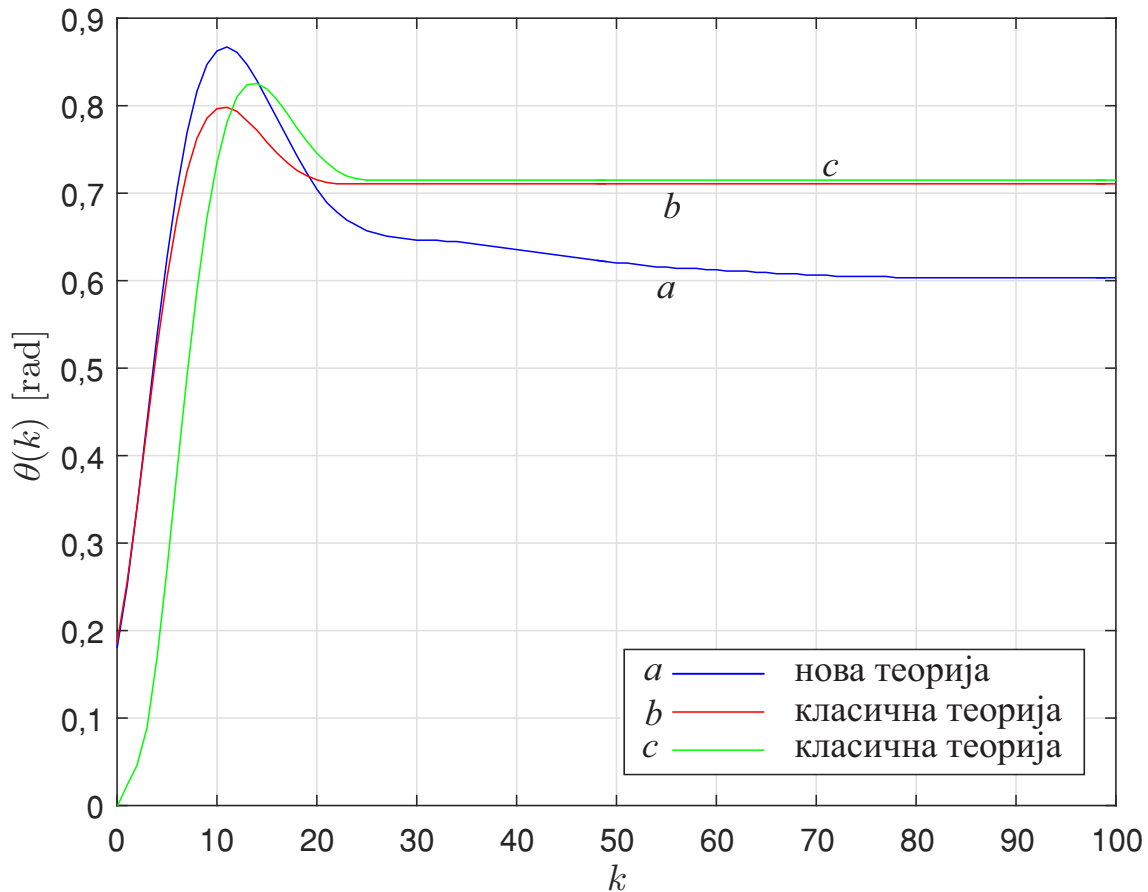
Приказани су експериментални резултати одзива серво мотора при оптималним параметрима  $\alpha$ ,  $\beta$  одређеним при нултим и ненултим почетним условима.

Експериментални 0,6 одскочни одзиви за случај ненултих (нова теорија) и нултих (класична теорија) почетних услова су приказани на слици 7.8. На почетку систем ради у отвореном колу да би се постигли ненулти почетни услови а након тога започиње рад система у затвореном колу.



Слика 7.8: Експериментални 0,6 одскочни одзиви са оптималним параметрима добијеним на основу нове теорије (плав одзив који започиње из ненултих почетних услова) и на основу класичне теорије (црвени одзив који започиње из ненултих и зелени који започиње из нултих почетних услова).

Увеличан део слике 7.8 за тренутке одабирања  $0 \leq k \leq 100$  приказан је на слици 7.9 како би се јасно видела разлика између плавог и црвеног одзива који започињу из ненултих и зеленог одзива који започиње из нултих почетних услова.



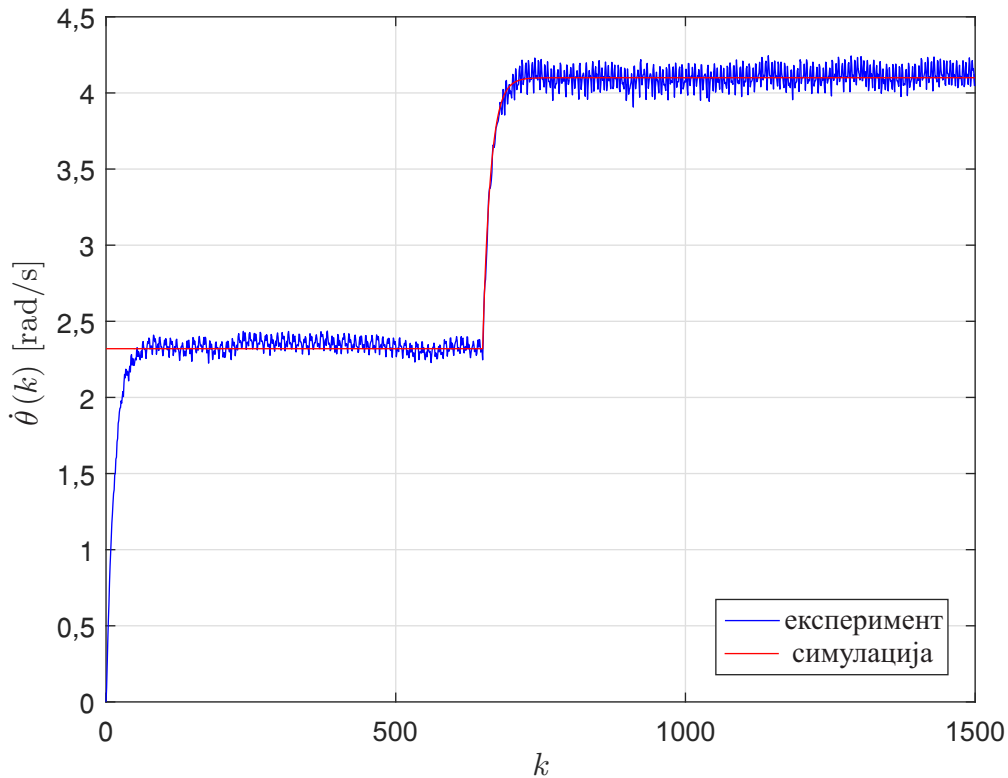
Слика 7.9: Увеличан део слике 7.8.

Треба напоменути да је плави експериментални одзив добијен на основу оптималних параметара проистеклих из примене нове теорије који важе само за конкретне ненулте почетне услове. Црвени одзив је добијен применом оптималних параметара израчунатих на основу класичне теорије, према којој су ти параметри универзално оптимални и важећи за било које почетне услове. Да би поређење имало смисла црвени одзив започиње из истих ненултих почетних услова као и плави одзив. Види се да је плави одзив бољи од црвеног јер има много мању суму квадрата грешака што је и био критеријум оптималности. Ово иде у прилог новој теорији за разлику од класичне. У случају зеленог и црвеног одзива стварна вредност не достиже задату, међутим то нема везе са концептима условне оптимизације (новим и класичним). То је последица следећих појава. Експерименти су изведени на реалном систему који је нелинеаран по својој природи. Нелинеарне појаве (статичко и Кулоново трење) су најизраженији при нултој угаоној брзини, тј. када је позиција  $\theta(k)$  константна. Тада је енергија коју доноси управљање недовољна за покретање мотора (због великог статичког трења) па је потребно време како би се та енергија акумулирала на бази сумарног дејства примењеног алгоритма управљања и тиме остварило покретање.

## 7.3 Експериментални пример синтезе ПД алгоритма управљања: нулти и ненулти почетни услови

### 7.3.1 Математички модел објекта

У питању је исти објект као што је то био случај у одељку 7.2. Овога пута, линеарни математички модел објекта одређен је идентификацијом на основу снимљених улазно излазних података. Првих 1,3 секунде или 650  $k$  мотор ради у отвореном колу при номиналном улазном напону  $U_N$  од 1,5 [V]. У тренутку одабирања 651  $k$  објекту се доводи јединична одскочна промена напона тј. напон се мења са 1,5 на 2,5 [V]. Као последицу ове промене напона добија се аperiодична промена угаоне брзине на основу које се може одредити математички модел објекта првог реда. Математички модел по позицији се одређује интеграљењем претходно добијеног математичког модела по брзини. Овај одзив система у отвореном колу приказан је на слици 7.10



Слика 7.10: Верификација дискретног модела објекта.

На основу Љапуновљеве трансформације координата следи  $\theta = \Theta - \Theta_z$  и  $u = U - U_N$ . Избором одступања угла као излазне величине  $x_i = \theta$  и одступања напона као улазне величине објекта  $u_O = u$  добија се диференцна једначина понашања објекта по одступањима при периоди одабирања  $T = 0,002$  секунде,

$$x_i(k+2) - 1,9311x_i(k+1) + 0,9311x_i(k) = 0,0001242u_O(k+1) + 0,0001212u_O(k). \quad (7.98)$$

Компактни облик једначине (7.98) је,

$$\mathbf{A}_O^{(2)} \mathbf{x}_i^2 = \mathbf{B}_O^{(1)} \mathbf{u}_O^1, \quad \mathbf{A}_O^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,9311 & -1,9311 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_O^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,0001212 & 0,0001242 \end{bmatrix}, \quad (7.99)$$

$$\mathbf{x}_i^2 = \begin{bmatrix} x_i(k) & x_i(k+1) & x_i(k+2) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u}_O^1 = \begin{bmatrix} u_O(k) & u_O(k+1) \end{bmatrix}^T. \quad (7.100)$$

### 7.3.2 Математички модел управљачког система

$$\mathbf{A}_C^{(1)} \mathbf{u}_O^1 = \mathbf{B}_C^{(1)} \varepsilon^1, \quad (7.101)$$

$$\mathbf{A}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,998 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,002K - K_d & K_d \end{bmatrix}, \quad T = 0,002 \text{ секунде.} \quad (7.102)$$

### 7.3.3 Математички модел затвореног система

Цео затворен систем аутоматског управљања може се представити у компактном облику,

$$\mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_i^3(k) = \mathbf{B}^{(2)}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_u^2(k), \quad \forall k \in \mathcal{N}_0, \quad \alpha = K, \quad \beta = K_D, \quad (7.103)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta) &= \begin{bmatrix} a_0(\alpha, \beta) & a_1(\alpha, \beta) & a_2(\alpha, \beta) & a_3(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2,4250 \cdot 10^{-7}\alpha - & 2,4834 \cdot 10^{-7}\alpha - & 1,2417 \cdot 10^{-4}\beta - & \\ -1,2125 \cdot 10^{-4}\beta - & -2,9214 \cdot 10^{-6}\beta + & -2,9291 & 1 \\ -0,9292 & +2,8583 & & \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.104)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(2)}(\alpha, \beta) &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0(\alpha, \beta) & \mathbf{B}_1(\alpha, \beta) & \mathbf{B}_2(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,4250 \cdot 10^{-7}\alpha & -1,2101 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} 2,4834 \cdot 10^{-7}\alpha - \\ -2,9214 \cdot 10^{-6}\beta \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} 1,2417 \cdot 10^{-4}\beta & 1,2417 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}^T \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.105)$$

$$\mathbf{x}_i^3(k) = \begin{bmatrix} x_i(k) & x_i(k+1) & x_i(k+2) & x_i(k+3) \end{bmatrix}^T, \quad (7.106)$$

$$\mathbf{x}_u^2(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u^T(k) & \mathbf{x}_u^T(k+1) & \mathbf{x}_u^T(k+2) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} x_{iz} & z \end{bmatrix}^T. \quad (7.107)$$

### 7.3.4 Потпуна преносна функција

Одређивање потпуне преносне функције у овом примеру се изводи на основу општих израза из поглавља 5.

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \Pi_D^{-1}(z) \Pi_N(z) = \left[ \mathbf{A}^{(3)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(3)}(z) \right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(2)}(\cdot) \mathbf{S}_2^{(2)}(z) & -\mathbf{B}^{(2)}(\cdot) \mathbf{Z}_2^{(2)}(z) & \mathbf{A}^{(3)}(\cdot) \mathbf{Z}_1^{(3)}(z) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.108)$$

$$\mathbf{S}_1^{(3)}(z) = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{S}_2^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & z^2 \end{bmatrix}^T, \quad (7.109)$$

$$\mathbf{Z}_2^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ z^2 & 0 & z & 0 \\ 0 & z^2 & 0 & z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_1^{(3)}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ z^2 & z & 0 \\ z^3 & z^2 & z \end{bmatrix}, \quad (7.110)$$

$$\Pi(z) = \frac{1}{z^3 + (1,2417 \cdot 10^{-4}\beta - 2,9291)z^2 + (2,4834 \cdot 10^{-7}\alpha - 2,9214 \cdot 10^{-6}\beta + 2,8583)z + (2,4250 \cdot 10^{-7}\alpha - 1,2125 \cdot 10^{-4}\beta - 0,9292)} \cdot \begin{bmatrix} 1,2417 \cdot 10^{-4}\beta z^2 + (2,4834 \cdot 10^{-7}\alpha - 2,9214 \cdot 10^{-6}\beta)z + 2,4250 \cdot 10^{-7}\alpha + \\ -1,2125 \cdot 10^{-4}\beta \\ 1,2417 \cdot 10^{-4}z^2 - 2,6730 \cdot 10^{-6}z - 1,2101 \cdot 10^{-4} \\ -1,2417 \cdot 10^{-4}\beta z^2 - (2,4834 \cdot 10^{-7}\alpha - 2,9214 \cdot 10^{-6}\beta)z \\ -1,2417 \cdot 10^{-4}z^2 + 2,6730 \cdot 10^{-6}z \\ -1,2417 \cdot 10^{-4}\beta z \\ -1,2417 \cdot 10^{-4}z \\ z^3 + (1,2417 \cdot 10^{-4}\beta - 2,9291)z^2 + (2,4834 \cdot 10^{-7}\alpha - 2,9214 \cdot 10^{-6}\beta + 2,8583)z \\ z^2 + (1,2417 \cdot 10^{-4}\beta - 2,9291)z \\ z \end{bmatrix}^T. \quad (7.112)$$

### 7.3.5 Релативна стабилност

Потпуна преносна матрица је недегенеративна по врстама тако да је карактеристични полином система

$$z^3 + (1,2417 \cdot 10^{-4}\beta - 2,9291)z^2 + (2,4834 \cdot 10^{-7}\alpha - 2,9214 \cdot 10^{-6}\beta + 2,8583)z + (2,4250 \cdot 10^{-7}\alpha - 1,2125 \cdot 10^{-4}\beta - 0,9292) \equiv a_3(\alpha, \beta)z^3 + a_2(\alpha, \beta)z^2 + a_1(\alpha, \beta)z + a_0(\alpha, \beta), \quad (7.113)$$

$$a_j(\alpha, \beta) = b_j\alpha + c_j\beta + d_j, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (7.114)$$

Да би се добила област константног степена пригушења у  $\alpha\beta$  параметарској равни бира се константна вредност  $\zeta$ ,  $0 \leq \zeta = \text{const.} \leq 1$ , мења се природна фреквенција  $\omega_n$  са одређеним кораком и користе изрази (6.29) и (6.30) где су,

$$B_1(\omega_n, \zeta) = 2,4834 \cdot 10^{-7}e^{-0,002\omega_n\zeta} \cos\left(0,002\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + 2,4250 \cdot 10^{-7}, \quad (7.115)$$

$$B_2(\omega_n, \zeta) = 2,4834 \cdot 10^{-7}e^{-0,002\omega_n\zeta} \sin\left(0,002\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right), \quad (7.116)$$

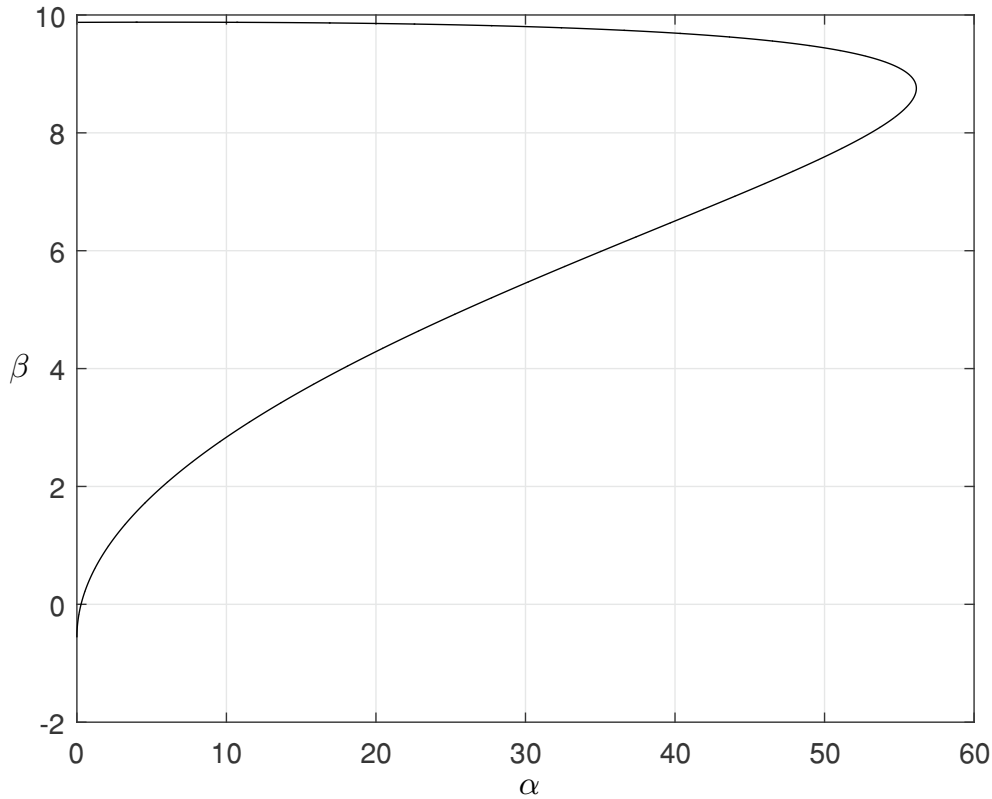
$$C_1(\omega_n, \zeta) = 1,2417 \cdot 10^{-4}e^{-0,004\omega_n\zeta} \cos\left(0,004\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + -2,9214 \cdot 10^{-6}e^{-0,002\omega_n\zeta} \cos\left(0,002\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) - 1,2125 \cdot 10^{-4}, \quad (7.117)$$

$$C_2(\omega_n, \zeta) = 1,2417 \cdot 10^{-4}e^{-0,004\omega_n\zeta} \sin\left(0,004\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + -2,9214 \cdot 10^{-6}e^{-0,002\omega_n\zeta} \sin\left(0,002\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right), \quad (7.118)$$

$$D_1(\omega_n, \zeta) = 2,8583e^{-0,002\omega_n\zeta} \cos\left(0,002\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + -2,9291e^{-0,004\omega_n\zeta} \cos\left(0,004\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + +e^{-0,006\omega_n\zeta} \cos\left(0,006\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) - 0,9292, \quad (7.119)$$

$$\begin{aligned}
 D_2(\omega_n, \zeta) = & 2,8583e^{-0,002\omega_n\zeta} \sin\left(0,002\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + \\
 & -2,9291e^{-0,004\omega_n\zeta} \sin\left(0,004\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + \\
 & +e^{-0,006\omega_n\zeta} \sin\left(0,006\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right). \tag{7.120}
 \end{aligned}$$

Област константног степена пригушења у  $\alpha\beta$  параметарској равни за  $\zeta = 0,7$  приказана је на слици 7.11.



Слика 7.11: Област константног степена пригушења  $\zeta = 0,7$  у  $\alpha\beta$  параметарској равни.

### 7.3.6 Индекс перформансе

Користи се индекс перформансе у облику суме квадрата грешака,

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^2(k), \quad \varepsilon(k) = x_{iz}(k) - x_i(k), \tag{7.121}$$

при чему грешка  $\varepsilon(k)$  узима у обзир деловање ненултих почетних услова и спољашњег улаза. Ово је много природније и реалније него да се сматра да грешка настаје само под дејством спољашњег улаза. Потпуни блок дијаграм система приказан је на слици 6.1. Са те слике, тј. на основу једначине објекта (7.99) лако се добија,

$$\begin{aligned}
 X_i(z) = & \left[ \frac{W_O(z)W_C(z)}{1+W_O(z)W_C(z)} \quad \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_C(z)} \quad \frac{W_O(z)}{1+W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0C}(z) \quad \frac{1}{1+W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0O}(z) \right] \cdot \\
 & \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{c}_{0C} \\ \mathbf{c}_{0O} \end{bmatrix} = \left[ \mathbf{W}(z) \quad \mathbf{W}_0(z) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{c}_0 \end{bmatrix}, \tag{7.122}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_u(z) = \begin{bmatrix} X_{iz}(z) \\ Z(z) \end{bmatrix}, \quad E(z) = X_{iz}(z) - X_i(z), \quad (7.123)$$

$$E(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+W_O(z)W_C(z)} \\ \frac{-W_O(z)}{1+W_O(z)W_C(z)} \\ \frac{-W_O(z)}{1+W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0C}(z) \\ \frac{-1}{1+W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0O}(z) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{c}_{0C} \\ \mathbf{c}_{0O} \end{bmatrix}. \quad (7.124)$$

На основу једначине (7.122) добија се еквивалентни потпуни блок дијаграм система приказан на слици 6.2

Након примене  $Z$  трансформације на једначину објекта (7.98) уз узимање у обзир почетних услова добија се,

$$X_i(z) = [ W_O(z) \quad \mathbf{W}_{0O}(z) ] \begin{bmatrix} U_O(z) \\ \mathbf{c}_{0O} \end{bmatrix}, \quad (7.125)$$

$$W_O(z) = \frac{1,2417 \cdot 10^{-4}z + 1,2125 \cdot 10^{-4}}{z^2 - 1,9311z + 0,9311}, \quad (7.126)$$

$$\mathbf{W}_{0O}(z) = \begin{bmatrix} \frac{-0,002653z}{z^2 - 1,6746z + 0,6746} & \frac{z^2 - 1,6746z}{z^2 - 1,6746z + 0,6746} & \frac{z}{z^2 - 1,6746z + 0,6746} \end{bmatrix}, \quad (7.127)$$

$$\mathbf{c}_{0O} = \begin{bmatrix} u_O(0) \\ x_i(0) \\ x_i(1) \end{bmatrix}. \quad (7.128)$$

Након примене  $Z$  трансформације на једначину контролера (7.101) при узимању у обзир свих почетних услова следи,

$$U(z) = \begin{bmatrix} \frac{\beta z + 0,002\alpha - \beta}{z - 0,998} & \frac{-\beta z}{z - 0,998} & \frac{z}{z - 0,998} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(z) \\ \varepsilon(0) \\ u(0) \end{bmatrix} = [ W_C(z) \quad \mathbf{W}_{0C}(z) ] \begin{bmatrix} E(z) \\ \mathbf{c}_{0C} \end{bmatrix}, \quad (7.129)$$

$$W_C(z) = \frac{\beta z + 0,002\alpha - \beta}{z - 0,998}, \quad \mathbf{W}_{0C}(z) = \begin{bmatrix} \frac{-\beta z}{z - 0,998} & \frac{z}{z - 0,998} \end{bmatrix}, \quad (7.130)$$

$$\mathbf{c}_{0C} = \begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{iz}(0) - x_i(0) \\ u(0) \end{bmatrix}. \quad (7.131)$$

Из једначина (7.124), (7.125) и (7.129) добија се,

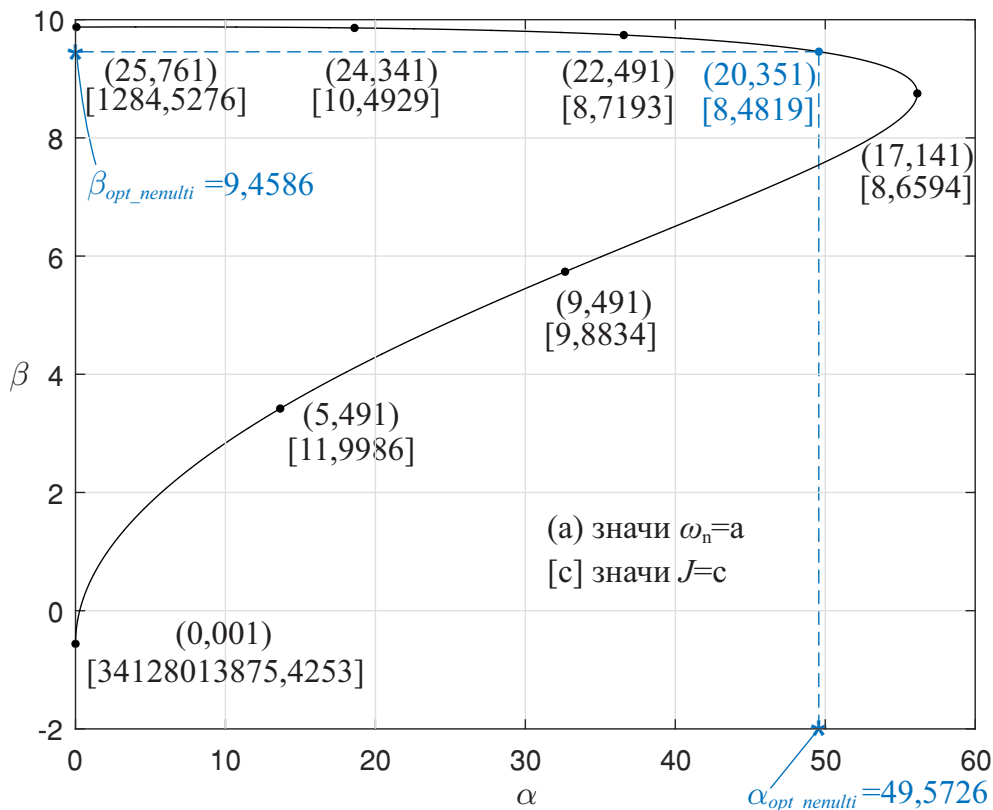
$$E(z) = \begin{bmatrix} \frac{(z-0,998)(z^2-1,9311z+0,9311)}{(1,2417 \cdot 10^{-4}z+1,2125 \cdot 10^{-4})(\beta z+0,002\alpha-\beta)+(z-0,998)(z^2-1,9311z+0,9311)} \\ \frac{(1,2417 \cdot 10^{-4}z+1,2125 \cdot 10^{-4})\beta z}{(1,2417 \cdot 10^{-4}z+1,2125 \cdot 10^{-4})(\beta z+0,002\alpha-\beta)+(z-0,998)(z^2-1,9311z+0,9311)} \\ \frac{-z(1,2417 \cdot 10^{-4}z+1,2125 \cdot 10^{-4})}{(1,2417 \cdot 10^{-4}z+1,2125 \cdot 10^{-4})(\beta z+0,002\alpha-\beta)+(z-0,998)(z^2-1,9311z+0,9311)} \\ \frac{1,2417 \cdot 10^{-4}z(z-0,998)}{(1,2417 \cdot 10^{-4}z+1,2125 \cdot 10^{-4})(\beta z+0,002\alpha-\beta)+(z-0,998)(z^2-1,9311z+0,9311)} \\ \frac{(-z^2+1,9311z)(z-0,998)}{(1,2417 \cdot 10^{-4}z+1,2125 \cdot 10^{-4})(\beta z+0,002\alpha-\beta)+(z-0,998)(z^2-1,9311z+0,9311)} \\ \frac{-z(z-0,998)}{(1,2417 \cdot 10^{-4}z+1,2125 \cdot 10^{-4})(\beta z+0,002\alpha-\beta)+(z-0,998)(z^2-1,9311z+0,9311)} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X_{iz}(z) \\ \varepsilon(0) \\ u(0) \\ u(0) \\ x_i(0) \\ x_i(1) \end{bmatrix}. \quad (7.132)$$

Индекс перформансе може се израчунати као

$$J = \sum_{r=1}^n \operatorname{Res} [E(z)E(z^{-1})z^{-1}] \Big|_{z=z_r^*}, \quad (7.133)$$

где је  $z_r^*$  корен од  $z^{-1}E(z)$ .

Ненулти почетни услови се постижу након 1,27 секунди рада система у отвореном колу. У том периоду напон је  $U = 1,6$  [V]. Коришћењем ненултих почетних услова  $u(0) = 0, 1$ ,  $x_i(0) = 0, 2$ ,  $x_i(1) = 0, 205$ ,  $x_{iz}(0) = 0$  вредности индекса перформансе су израчунате за 2577 тачака и неке од њих су приказане на криви константног степена пригушења на слици 7.12. Минимална вредност индекса перформансе је  $J_{min\_nenulti} = 8,4819$  док су оптимални подешљиви параметри  $\alpha_{opt\_nenulti} = 49,5726$ ,  $\beta_{opt\_nenulti} = 9,4586$ .

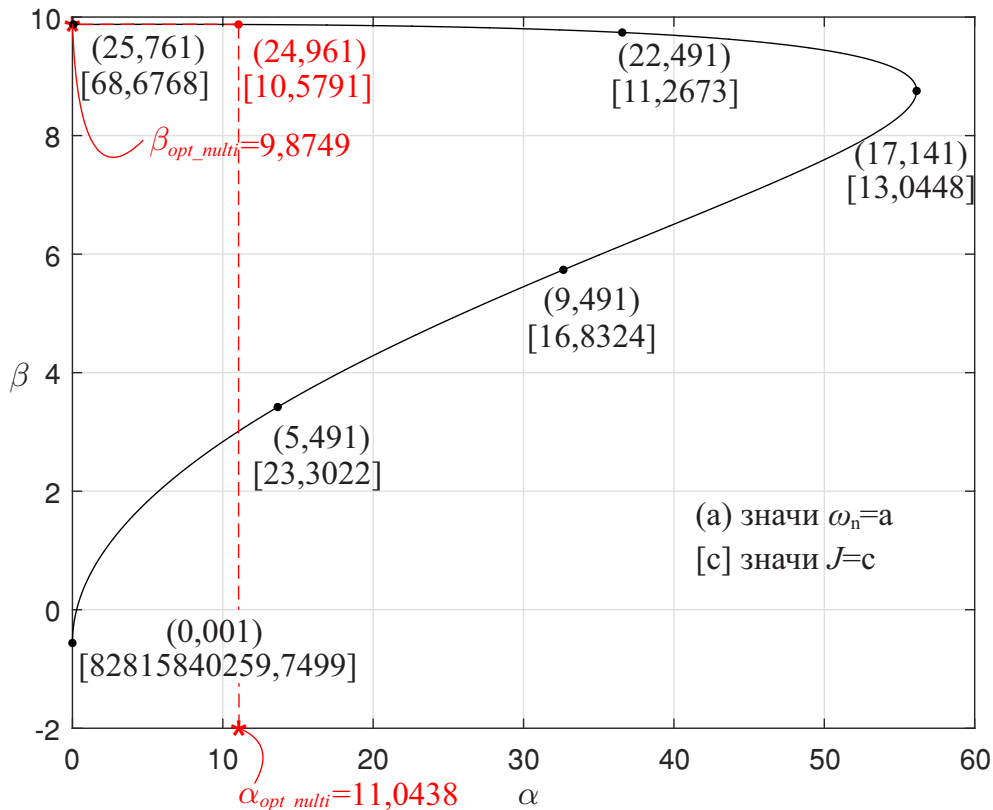


Слика 7.12: Крива константног степена пригушења са неколико унетих вредности индекса перформансе при ненултим почетним условима; \* оптималне вредности параметара  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $(\alpha_{opt\_nenulti}, \beta_{opt\_nenulti}) = (49,5726, 9,4586)$ .

Вредности индекса перформансе су израчунате и при нултим почетним условима исто за 2577 тачака, како би се уочила разлика у резултатима приликом примене класичног и новог приступа.

Неке од ових вредности су нанете на криву константног степена пригушења као што се може видети на слици 7.13. Оптималне вредности параметара  $\alpha$  и  $\beta$  одређене при нултим почетним условима, које дају оптималну вредност индекса перформансе  $J_{min\_nulti} = 10,5791$ , су  $\alpha_{opt\_nulti} = 11,0438$ ,  $\beta_{opt\_nulti} = 9,8749$ .





Слика 7.13: Крива константног степена пригушења са неколико унетих вредности индекса перформансе при нултим почетним условима (класични приступ); \* оптималне вредности параметара  $\alpha$  и  $\beta$ , су  $(\alpha_{opt\_multi}, \beta_{opt\_multi}) = (11,0438, 9,8749)$ .

### 7.3.7 Дискусија експерименталних резултата

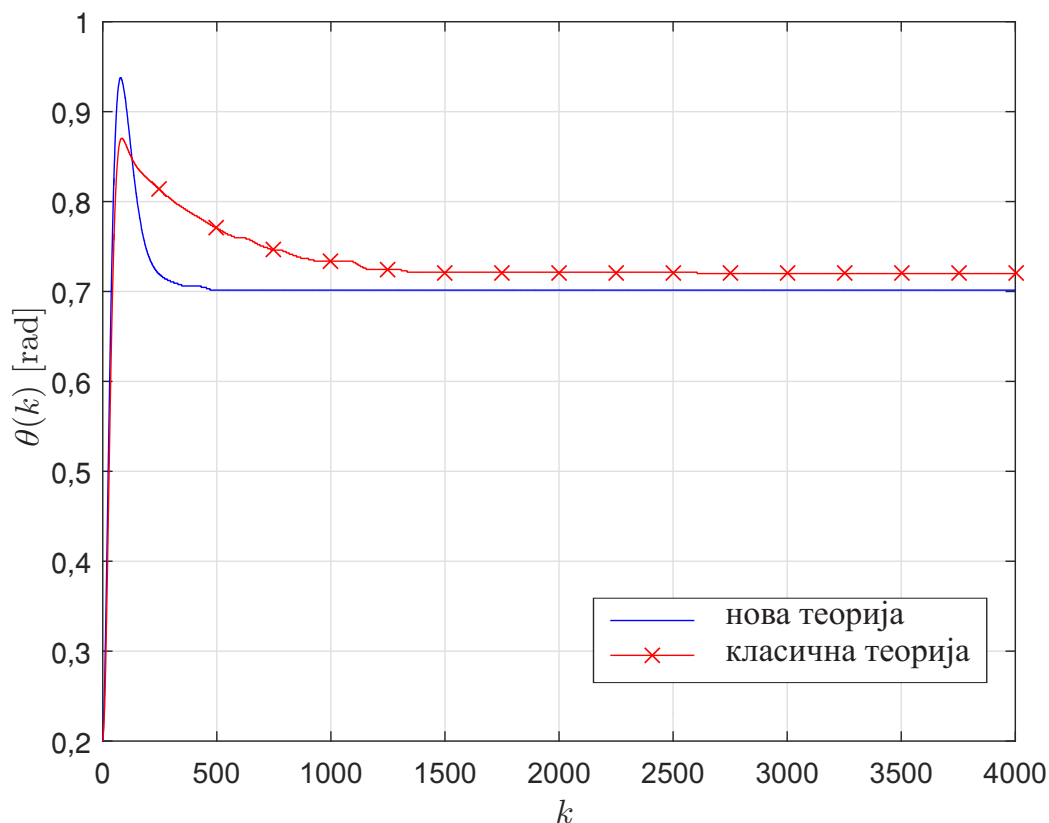
У наставку су дати експериментални резултати остварени за претходне оптималне вредности. Експериментални 0,7 одскачни одзиви за случај ненултих и нултих почетних услова, тј. према новој и класичној теорији, су приказани на слици 7.14.

У почетку систем ради у отвореном колу док се не постигну ненулти почетни услови. Након тога се укључује пројектовани управљачки систем.

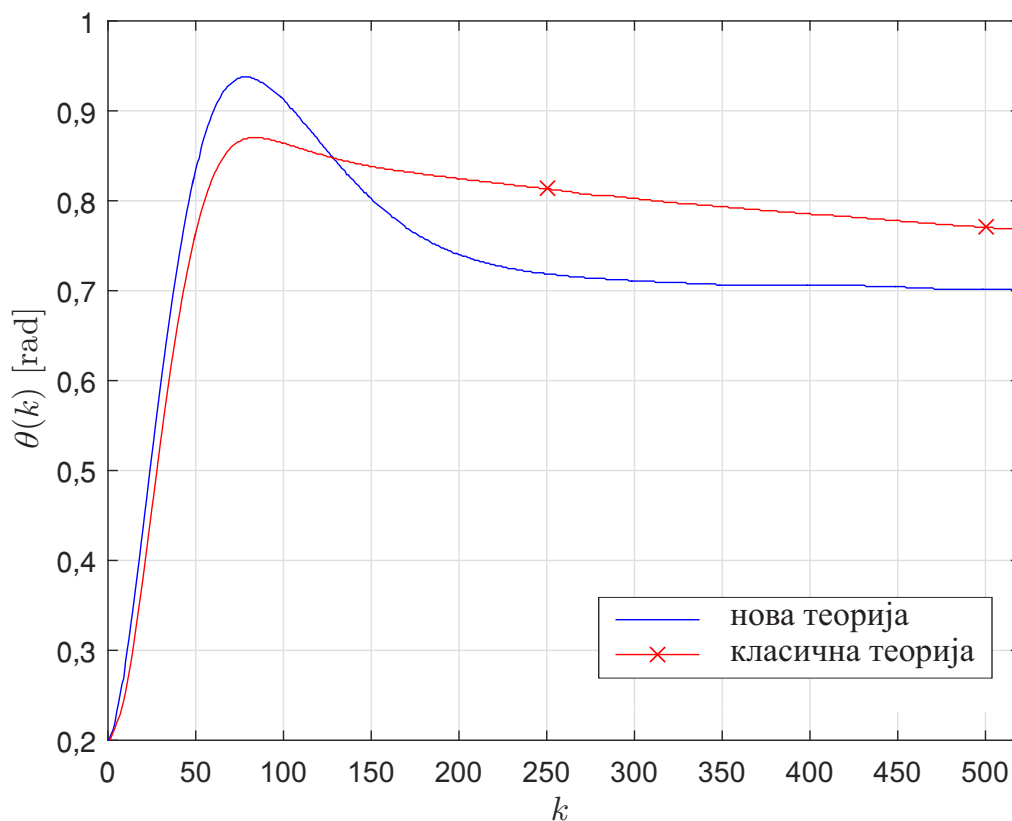
Црвени одзив добијен је на основу оптималних параметара израчунатих помоћу класичне теорије, који би требало да буду универзално оптимални за било које почетне услове. Плави одзив је настао након примене оптималних параметара израчунатих на основу нове теорије и то за конкретне ненулте почетне услове. Да би поређење имало смисла оба одзива започињу из истих ненултих почетних услова. Плави одзив знатно брже достиже задату вредност него што то успева црвени одзив, слика 7.14. Осим тога, одзив проистекао применом нове теорије, која узима у обзир конкретне почетне услове, очигледно остварује мању суму квадрата грешака што је и био критеријум оптималности.

Увеличан део слике 7.14 за  $0 \leq k \leq 520$  приказан је на слици 7.15 да би се јасно видело да плави и црвени одзив крећу из истих ненултих почетних услова.

7.3. Експериментални пример синтезе ПД алгоритма управљања: нулти и ненулти почетни услови

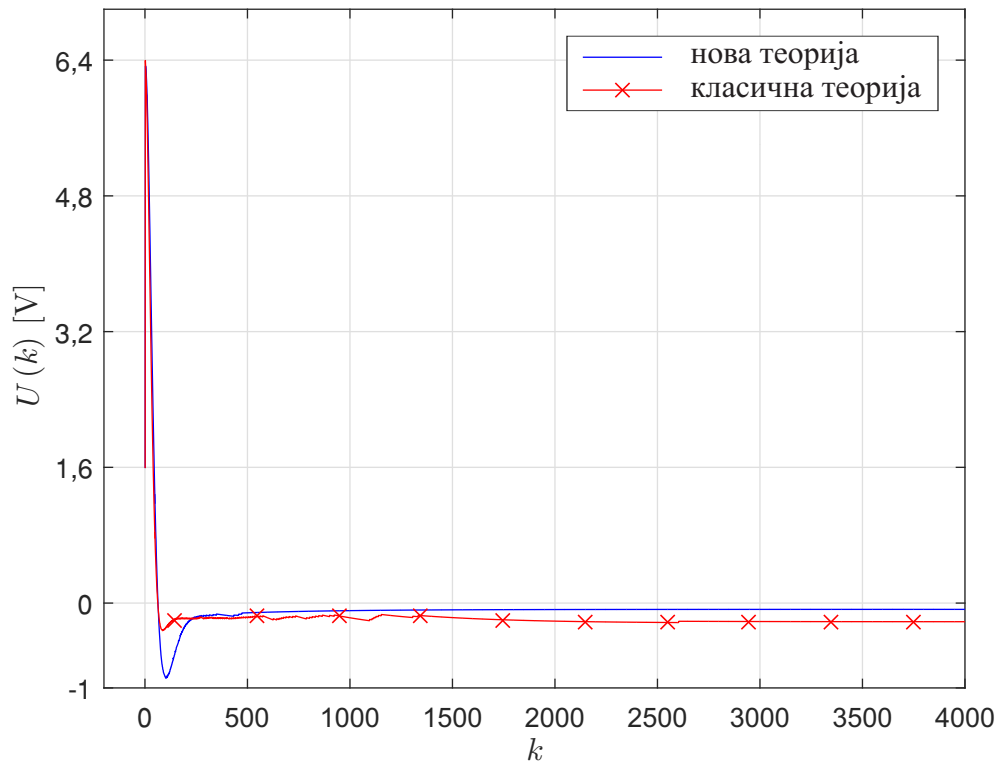


Слика 7.14: Експериментални 0,7 одскачни одзиви постигнути на основу нове теорије (плава крива која започиње из ненултих почетних услова) и на основу класичне теорије (црвена крива која започиње из нултих почетних услова).



Слика 7.15: Увеличан део слике 7.14.

На слици 7.16 приказани су управљачки сигнали за оба одзива. Приметно је да за изабране одскочне промене вредности управљања остају у дозвољеним границама до 10 [V].



Слика 7.16: Управљачки сигнали.

## Део 2

# Условна оптимизација нелинеарних дискретних система

## Глава 8

# Фази управљање и моделовање

У овом делу дисертације разматрају се дискретни Такаги-Сугено (ТС) фази системи као класа нелинеарних дискретних система. Претходни део се бави проучавањем условне оптимизације линеарних дискретних система аутоматског управљања. Методе које су препоручене за линеарне дискретне системе [56, 57] су проширене и примењене на нелинеарне дискретне системе у облику ТС фази система употребом PDC управљања, [58].

Теоријска основа за ово истраживање је, пре свега, концепт потпуне преносне функције дефинисан за линеарне дискретне системе, а затим ТС тип фази система са применама на моделовање, идентификацију и управљање динамичким системима. Потпуна преносна функција, која је уведена и развијена у [1, 32, 33], је решила контроверзу између преносне функције система и тестирања стабилности коришћењем класичне преносне функције. Добро је познато да стабилност система, по дефиницији, представља динамичку особину система у слободном радном режиму при свим нултим улазима и при променљивим, непознатим, произвољним почетним условима. Преносна функција система је дефинисана у принудном радном режиму при свим нултим почетним условима. Концепт потпуне преносне функције примењен је у [56, 57]. У овим радовима одређена је област релативне стабилности при чему затворен линеарни систем има унапред захтевани степен пригушења. Након тога, урађена је условна оптимизација у случајевима ПДС типа линеарних контролера са два и три подешљива параметра. Представљен је нови облик индекса перформансе који је у потпуности компатабилан са употребом потпуне преносне функције. Грешка која фигурише у изразу за индекс перформансе настаје при истовременом деловању спољашњих улаза и ненултих почетних услова.

Засновано на закључку да оптимални параметри одређени при нултим нису оптимални при ненултим почетним условима, у случају линеарних дискретних система, интуитивно се намеће закључак да би нешто слично овоме могло да важи и за нелинеарне дискретне системе. Да би се на нелинеарним системима применила теорија потпуне преносне функције (која важи за линеарне системе) користи се особина ТС фази система да они представљају класу нелинеарних динамичких система састављених од више линеарних (или линеаризованих) подсистема. На овај начин могуће је користити потпуну преносну функцију, дефинисати нове управљачке алгоритме и одредити оптималне параметре контролера при ненултим почетним условима. За разлику од постојећих приступа, у овој дисертацији се примењује нова метода условне оптимизације заснована на потпуној преносној функцији која омогућава да се оптимални параметри одреде у присуству истовременог дејства улаза и ненултих почетних услова.

## 8.1 Преглед литературе релевантне за други део дисертације

У наставку је изложена литература која је од значаја за други део доктората. Најпре је урађен преглед радова проистеклих из првог дела дисертације који се баве проблематиком потпуне преносне функције. Након тога, пажња је посвећена области Такаги-Сугено моделовања и управљања. Затим је урађен преглед неких радова који се баве проучавањем паралелно расподељеног управљања (PDC). Неизбежно је осврнути се на радове који проучавају ПИД алгоритме управљања јер се и у овом делу дисертације користе њихови дискретни еквиваленти оличени у пропорционално-диференцио-сумарном (ПДС) типу управљачких система. Споменуте су различите технике оптимизације од којих је само једна, условна оптимизација, доминантно разматрана у овој дисертацији. На крају су споменути резултати других аутора који су се бавили истраживањем на сличним објектима обрађеним у овом делу дисертације.

Динамички системи су под истовременим утицајем ненултих почетних услова и спољашњег вектора улаза. Нема физичког ни математичког оправдања за занемаривање почетних услова у проблемима оптимизације. Радови [56, 57] приказују нови начин синтезе класичног пропорционално-диференцио-сумарног типа контролера за линеарни математички модел објекта у затвореном колу. Применом теорије потпуне преносне функције приказан је нови поступак условне оптимизације у параметарском простору са два и три подешљива параметра. Употреба потпуне преносне функције омогућава увођење новог облика индекса перформансе у облику суме квадрата грешака у општем, реалном случају при истовременом дејству свих утицаја - ненултих почетних услова и спољашњег улаза. Илустративни симулациони и експериментални резултати потврђују следећи закључак: параметри контролера који су оптимални за понашање система при нултим почетним условима нису оптимални за понашање система при ненултим почетним условима.

У овом делу дисертације примењено је фази моделовање и управљање засновано на Такаги-Сугено фази моделу објекта. Фази модел предложен у раду [59] описан је помоћу фази АКО-ОНДА правила која описују локалне линеарне улазно-излазне релације нелинеарног система. Нека од истраживања и резултати примене Такаги-Сугено типа фази система у решавању проблема моделовања и управљања динамичким системима су дати у [60, 61]. Прегледни рад [62] приказује прошле, садашње и будуће трендове примене овог типа система. Рад [63] описује синтезу фази контролера за управљање излазним напоном конвертера које је засновано на ТС фази моделу. Јединствена метода одређивања ТС фази модела непознатог нелинеарног система на основу експерименталних података приказана је у [64]. Техника синтезе фази контролера, заснована на обсерверу, за нелинеарне временски дискретне сингуларне системе представљене преко ТС фази модела проучавана је у [65]. Многобројне теме које се тичу дискретних Такаги-Сугено фази система обрађене су у литератури, од којих су неке представљене у радовима [66, 67, 58].

Фази логика се на различите начине може искористити у сврху управљања. Један од случајева је PDC управљање. У раду [68] дат је свеобухватни приступ синтези PDC управљања за нелинеарни модел при чему се као специјални случајеви разматрају регулације и серво управљање. У раду [69] конструисан је фази контролер заснован на PDC методи и његов рад је потврђен на експерименталној инсталацији спрегнутих резервоара. Поступак синтезе фази двопроменљивих логичких контролера представљен је у [70]. У [71] приказана је нова модификација оригиналне PDC методе, тако да се осим проблема стабилности, у фази синтези,

разматрају и показатељи квалитета затвореног система аутоматског управљања.

Велика је разноврсност у области анализе и примене ПИД типа управљачких алгоритама. У наставку следе неки од новијих радова. Преглед стања у области урађен је у [72]. Занимљиви резултати представљени су у [73, 74]. Начин синтезе дискретног контролера за дискретни објект приказан је у [73]. У [74] је приказана оптимизација параметара ПИД контролера примењена на једносементном манипулатору која је заснована на параметарској методи. Спецификација перформанси система је изражена кроз континуална ограничења стања у виду неједначина. Као резултат рада [75] проистекла је метода синтезе оптималних ПИД параметара за временски дискретне системе како би се постигли што бољи резултати по питању праћења и компензације дејства поремећаја. За сваки линеарни стационарни објект, [76] се бави изазовом одређивања скупа свих стабилних контролера ПИД типа без параметарског модела. Фреквентна карактеристика и број полова објекта у десној полуравни  $s$ -комплексне равни су једине информације потребне за синтезу, и сви домени стабилности у параметарском простору ПИД типа контролера су одређени на основу граница које су аналитички описане коришћењем методе  $D$  разлагања.

Постоји више примена фази логике које се могу искористити у сврху управљања. Приказ односа између класичног ПИД и фази контролера идентификован је у [77]. Надаље, синтеза дискретног фази контролера је такође урађена при чему су одзиви упоређени са конвенционалним ПИД контролерима.

Преглед различитих техника оптимизације дат је у наставку. Изазов дистрибуиране синтезе контролера за линеарне временски дискретне системе разматран је у [78]. Поређење линеарних и нелинеарних контролере урађено је у [79]. Прецизније речено, робусно подешавање полова дискретног контролера за линеаризовани непоздани политопски модел је упоређено са нелинеарним временски континуалним управљањем заснованом на feedback линеаризацији. Аналитичко решење оптималног проблема локалног линеарног квадратног регулатора (LLQR) развијено је у [80]. Проблеми мултикритеријумске оптимизације при управљању системима сведени су на мултикритеријумске проблеме фази математичког програмирања у [81], и хеуристички алгоритам за решавање формулисаног проблема оптималног управљања развијен је на бази модификованих принципа максимума и Парето оптималности. У [82] формулација проблема мултикритеријумске оптимизације остварена је узимајући у обзир делимичну нејасност полазних информација. Предложена је хеуристичка метода за проналажење решења наведеног проблема која је заснована на искуству доносиоца одлуке.

Фази пројектовање се може сматрати оптимизационим проблемом, где је неопходно идентификовати параметре структуре, премиса и последица фази правила. Глобални оптимизациони проблеми су тешки за ефикасно решавање због њихове изражене нелинеарности и бројних локалних оптимума. Истраживачима је природа била главни извор инспирације у области оптимизације [83]. Метакхеуристичке методе као глобални оптимизациони алгоритми могу да се носе са неконвексним, нелинеарним и мултимодалним проблемима подвргнутим линеарним или нелинеарним ограничењима са континуалним или дискретним променљивама. Оптимизација ТС фази модела подразумева одређивање структуре и параметара модела. Многи алгоритми, инспирисани природом (NA) коришћени су у циљу одређивања оптималног фази модела. Оквир за синтезу Такаги-Сугено-Канг (TSK) система заснованог на фази правилима коришћењем генетског алгоритма (GA) предложен је у [84]. Рад [85] користи GA за избор најбољих улаза за различите вишеструке моделе линеарне регресије. Неки побољшани алгоритми

оптимизације, настали по угледу на понашање роја пчела (PSO), описани су у различитим радовима [86, 87, 88, 89]. И друге технике оптимизације, попут оне која се заснива на понашању колоније мравца (AC) [90] и нешто новије која се заснива на понашању птице кукавице (CS) [91] могу се користити у комбинацији са фази управљачким системима.

Алгоритам сивих вукова (GWO) изванредно је се показао у решавању различитих проблема. Најважније предности овог алгоритма, и уопштено речено свих метахеуристичких алгоритама, су у томе што не бива заглављен у локалном минимуму захваљујући случајној расподели. Seyedali Mirjalili, Andrew Lewis први су предложили GWO алгоритам у раду [92]. Побољшани GWO алгоритам (IGWO) може се користити при оптимизацији фази потпомогнутих ПИД контролера [93]. Ова техника има своје предности када се користи са контролером пројектованим за управљање фреквенцијом електроенергетског система. Примена GWO алгоритма за одређивање оптималних параметара Такаги-Сугено пропорционално-интегралног фази контролера приказана је у [94]. У [95] ТС модел је оптимизован коришћењем метахеуристичког алгоритма китови (WOA) и пројектовани су PDC контролери за управљање нивоом воде у резервоару. Такође, постоје неки хибридни контролери који су на основу модела оптимизовани помоћу GWO алгоритма, [96].

Управљање температуром има широку примену у фармацеутској, петрохемијској и биохемијској индустрији. Моделовање и управљање промене температуре у термотунелу је урађено у радовима [97, 98, 99]. Предложена метода у [97] заснована је на скупу података из фреквенцијског домена који се користе за синтезу контролера фиксног реда способних да обезбеде задовољавајуће перформансе и оствариво управљање. Формулисани проблем је оптимизациони са ограничењима и искоришћен је генетски алгоритам за проналажење параметара изабраног контролера да би се постигла задовољавајућа промена температуре. Рад [98] испитује онлајн имплементацију методе модулишуће функције (modulating function method) ради естимације параметара и величина стања модела клима уређаја, централног елемента система грејања и климатизације. У [99] аутори су указали на проблем анализе перформанси поступка синтезе контролера фракционог реда за системе првог реда са временским кашњењем.

Управљање објектом применом класичних алгоритама управљања била је изузетно релевантна тема у прошлости па све до данас и истраживачи се свакодневно баве истом. Мотор једносмерне струје је често објект аутоматског управљања и има широку употребу што се може видети на бази следећих радова. Примена детерминистичке вештачке интелигенције за управљање моторима једносмерне струје код подводних возила без посаде урађена је у [100]. У [101, 102] описано је управљање брзином мотора једносмерне струје базираног на перманентном магнету. Аналитичко решење за оптималне проблеме праћења при ограничењима стања временски континуалних система коришћењем предикције засноване на моделу, квадратне функције циља и варијационог рачуна представљено је у [103]. Пропорционално-интегрални, фази и адаптивни неуро фази контролери примењени су на мотор једносмерне струје у [104]. У [105] различити метахеуристички алгоритми су разматрани за креирање ПИД контролера за мотор једносмерне струје и извршено је детаљно поређење ових алгоритама са класичним методама у циљу проналажења оптималног решења за синтезу ПИД контролера као и подешавање параметара.



## 8.2 Такаги-Сугено фази системи

За разлику од Мамдани фази система који се другачије називају и стандардни фази системи, Такаги-Сугено (скраћено ТС) фази системи представљају функционалне фази системе. Они представљају уопштеније облике система у односу на Мамданијеве системе. Може се показати да су Мамдани системи специјалан случај ТС фази система.

Код ТС фази система последице правила не укључују фази скупове, као Мамданијеве системи, већ су то математички изрази. Математички изрази могу бити било које функције, било које величине, тј. променљиве. У наставку се разматрају само случајеви када су закључци фази правила у облику линеарног динамичког система. На тај начин ТС фази систем врши интерполацију између динамичких система што је корисно за фази идентификацију и управљање.

Много више о фази управљачким системима може се прочитати у [106].

Основна идеја методе ТС фази моделовања је у подели нелинеарне динамике целог система на неколико локалних линеарних подсистема, тако да целокупно нелинеарно понашање система буде обухваћено фази интерполацијом линеарних система. Фази правило које се односи на  $i$ -ти линеарни подсистем може бити дефинисано као  $i$ -то правило:

АКО  $z_1(k)$  је  $M_{i1}$ , и  $z_2(k)$  је  $M_{i2}$ , ..., и  $z_p(k)$  је  $M_{ip}$  ОНДА

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k), \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ \mathbf{x}_i(k) &= C_i \mathbf{x}(k), \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где су  $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{R}^n$  вектор величина стања,  $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{R}^M$  вектор управљања,  $\mathbf{x}_i(k) \in \mathcal{R}^N$  вектор излаза и  $A_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathcal{R}^{n \times M}$ ,  $C_i \in \mathcal{R}^{N \times n}$ . Овде су  $\{z_1(k), z_2(k), \dots, z_p(k)\}$  неке нелинеарне функције од величина стања добијене из оригиналне нелинеарне једначине и  $M_{ij}(z_i)$  су степени припадности  $z_i$  у фази скупу  $M_{ij}$ . Када год је јасно на шта се мисли, ознака за тренутке одабирања  $k$  се изоставља у  $z(k)$ .

Ако су у питању афини модели, претходно  $i$ -то правило остаје исто док једначина (8.1) има следећи облик:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\alpha}_i, \\ \mathbf{x}_i(k) &= C_i \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\beta}_i, \end{aligned} \quad (8.2)$$

Излаз из целог система се добија на основу фази интерполације линеарних система и он има облик:

$$\mathbf{x}(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z) \{A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z)} = \sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k)), \quad (8.3)$$

$$\mathbf{x}_i(k) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z) C_i \mathbf{x}(k)}{\sum_{i=1}^r w_i(z)} = \sum_{i=1}^r h_i(z) C_i \mathbf{x}(k), \quad (8.4)$$

за линеарне системе, односно

$$\mathbf{x}(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z) \{A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\alpha}_i\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z)} = \sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i \mathbf{x}(k) + B_i \mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\alpha}_i), \quad (8.5)$$

$$\mathbf{x}_i(k) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z) \{C_i \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\beta}_i\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z)} = \sum_{i=1}^r h_i(z) \{C_i \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\beta}_i\}, \quad (8.6)$$

за афине моделе при чему су  $\alpha_i \in \mathcal{R}^n$  и  $\beta_i \in \mathcal{R}^N$  константе, и

$$w_i(z) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j), \quad h_i(z) = \frac{w_i(z)}{\sum_{i=1}^r w_i(z)}. \quad (8.7)$$

Такође важи за свако  $k$  да је  $\sum_{i=1}^r w_i(z) > 0$ ,  $w_i(z) \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

## 8.3 Паралелно расподељено управљање

Историја такозваног PDC-а започела је са поступком синтезе заснованом на моделу који је предлошен од стране аутора Канг и Сугено, [107]. Назив методе “parallel distributed compensation” се први пут јавља у [108]. Ипак, поступак синтезе је побољшан и стабилност система је разматрана у [109]. Наглашено је да се многи реални (који нису линеарни) системи могу и јесу представљени помоћу ТС фази модела. Даље, свако правило PDC управљања је конструисано на основу одговарајућег правила ТС фази модела. Као последица претходно реченог, пројектовани фази контролер дели исте фази скупове у премисама правила као и фази модел. За фази модел представљен једначином (8.1) може се пројектовати фази контролер на следећи начин. Правило управљања  $i$ : АКО  $z_1(k)$  је  $M_{i1}$ , и  $z_2(k)$  је  $M_{i2}$ , ..., и  $z_p(k)$  је  $M_{ip}$  ОНДА

$$\mathbf{F}(k) = -\mathbf{F}_i \mathbf{x}(k), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (8.8)$$

Линеарни контролери се налазе у последицама фази правила управљања. Могу се користити контролери различитог типа, као што су Калманов регулатор (користи информацију о величинама стања система), затим статички и динамички контролери који користе информацију о излазној величини система, [60]. Излазни сигнал фази контролера на крају се може представити као:

$$\mathbf{F}(k) = -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(z) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(k)}{\sum_{i=1}^r w_i(z)} = -\sum_{i=1}^r h_i(z) \mathbf{F}_i \mathbf{x}(k). \quad (8.9)$$

Задатак пројектовања фази контролера је да се одреде локална појачања  $\mathbf{F}_i$  у последицама правила.

## 8.4 Оптимизациони алгоритам сивих вукова

Овај оптимизациони алгоритам опонаша сиве вукове у току лова, као и њихову друштвену хијерархију у природи. Лидер чопора је алфа вук и његов главни задатак је да предводи остале чланове чопора. Следећи по хијерархији је бета вук који помаже алфи у доношењу одлука и даје му повратне информације. Делте су скаути који воде рачуна о границама територије. На крају, ту су омеге. Сви вукови учествују у главној активности ловљења плена која се састоји из много фаза. Прва је праћење, јурење и прилажење плену. Јурење, опкољавање и нападање плена траје све док плен не постане непомичан. У том тренутку чопор напада. У циљу формирања математичког модела друштвене хијерархије вукова, најбоље решење се проглашава за  $\alpha$  вука, друго и треће најбоље решење за  $\beta$  и  $\delta$  вука док су сва остала решења  $\omega$  вукови. Како су оптимизација и лов вођени са  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$ , у свакој итерацији се прате њихова решења и узимају се нове вредности само у

случају да се пронађу боља, иначе остају иста. Да би се математички моделовало опкољавање плена користе се наредне једначине [92],

$$\mathbf{D} = |\mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_p(t) - \mathbf{X}(t)|, \quad \mathbf{X}(t+1) = \mathbf{X}_p(t) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}, \quad (8.10)$$

при чему су  $\mathbf{A}, \mathbf{C}$  вектори коефицијената,  $t$  је тренутна итерација,  $\mathbf{X}_p$  је позиција плена и  $\mathbf{X}$  је вектор позиције сивог вука/агента. Главни разлог због кога се GWO сматра стохастичким алгоритмом су вектори коефицијената. Додатно, да би се математички симулирало понашање сивих вукова током лова, уводи се претпоставка да  $\alpha, \beta, \delta$  имају приближно знање о потенцијалној локацији плена. С тим у вези, постигнута три најприближнија решења се чувају и тако приморавају остале агенте,  $\omega$ , да прилагоде своје позиције у складу са позицијом најбољег агента. Све ово што је до сада описано може се представити једначинама:

$$\mathbf{D}_\alpha = |\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{X}_\alpha - \mathbf{X}|, \quad \mathbf{D}_\beta = |\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{X}_\beta - \mathbf{X}|, \quad \mathbf{D}_\delta = |\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{X}_\delta - \mathbf{X}|, \quad (8.11)$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_\alpha - \mathbf{A}_1 \cdot (\mathbf{D}_\alpha), \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_\beta - \mathbf{A}_2 \cdot (\mathbf{D}_\beta), \quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_\delta - \mathbf{A}_3 \cdot (\mathbf{D}_\delta), \quad (8.12)$$

$$\mathbf{X}(t+1) = \frac{\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3}{3}. \quad (8.13)$$

Једноставно речено, агенти дивергирају једни од других док су у потрази за пленом док конвергирају да би исти напали. Дакле, то је управо оно што даје моћ фази трагању и што омогућава GWO алгоритму глобално претраживање, тј. може се рећи да је алгоритам способан за широку претрагу [92]. Све ово помаже GWO алгоритму да постигне насумичније понашање током оптимизационог процеса, истовремено форсирајући истраживање и избегавање локалних оптимума.

## 8.5 Примена ТС моделовања, оптимизације и PDC управљања

Управљање температуром је проблем који је најзаступљенији у процесној индустрији и то је и даље битан задатак за истраживаче. У овом одељку се разматрају два одвојена проблема и то оптимизација модела објекта и управљање. На почетку се одређују линеарни модели објекта за три номиналне тачке термотунела. На основу ових линеарних модела формира се Такаги-Сугено (ТС) модел објекта коришћењем фиксних функција припадности у премисама фази правила. На основу изабране функције циља параметри у премисама су оптимизовани применом метахеуристичког оптимизационог алгоритма сиви вукови (GWO). Надаље се употребом паралелно расподељеног управљања (PDC) ради синтеза фази контролера који се састоји од три пропорционално-сумарна (ПС) контролера који су пројектовани за сваку номиналну тачку. Да би се приказала ефикасност PDC контролера урађено је његово поређење са локалним линеарним контролером. Даље, приказано је поређење PDC контролера са почетним ТС фази моделом објекта и PDC контролера са оптимизованим ТС фази моделом објекта. Сви резултати су потврђени на симулацијама и експериментално на објекту термотунела.

На крају, у поглављу 9, су повезане две области разматране у овој дисертацији: предложена оптимизација коришћењем потпуне преносне функције узимајући у обзир ненулте почетне услове и ТС фази моделовање и управљање. Резултати су потврђени симулационо и експериментално.

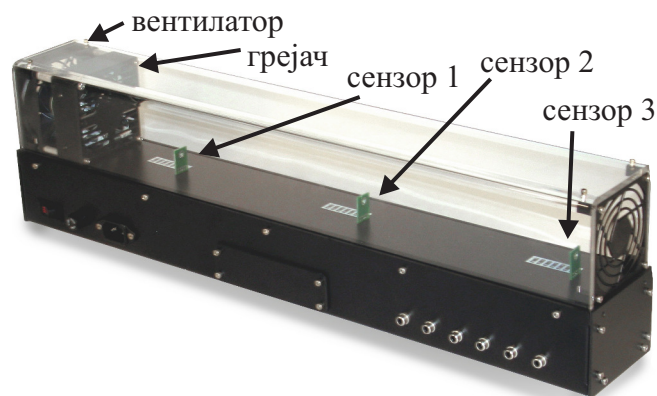
Пуно је радова из области аутоматског управљања који се баве применом GWO алгоритма за оптимизацију параметара различитих типова контролера, углавном

ПИД типа, што класичних што фази. У наставку дисертације се изучава и дискутује примена споменутог алгоритма у другу сврху: оптимизацију ТС модела спрегнутог са PDC контролером. Уопштено гледано, моделовање ТС фази система заснованог на фази правилима састоји се из два дела: моделовања структуре и оптимизације параметара. У највећем броју прилика структура и параметри ТС фази модела се одређују засебно и то је случај и у овој дисертацији. Структура, која укључује број фази правила и променљиве које су укључене у премисе правила, се прва одређује док се касније оптимизују параметри док структура остаје фиксна. Кључни резултати су следећи:

1. Почетни ТС фази модел је направљен од три линеарна математичка модела која описују понашање објекта око три номиналне тачке. Функције припадности су равномерно распоређене са центрима у овим номиналним тачкама;
2. Почетни ТС фази модел је оптимизован употребом GWO алгоритма тако да параметри у премисама фази правила имају оптималне вредности.
3. Урађена је синтеза PDC управљачког система. Приказани су експериментални резултати и поређења одзива објекта управљаног локалним линеарним ПС контролером, PDC контролером који користи почетни ТС фази модел, као и PDC контролером који користи оптимизовани ТС фази модел.

### 8.5.1 Опис система термотунела

Термотунел (Heat Flow Experiment (HFE)) приказан на слици 8.1 састоји се из коморе опремљене вентилатором који потискује ваздух преко електричног грејача. Унутар коморе, температура ваздуха се мери са три сензора постављена равномерно дуж тунела. Број обртаја вентилатора се мери помоћу тахометра. Након укључивања овог система аутоматски се укључује вентилатор и он се обрће константном брзином током целог експеримента како би се обезбедио униформни проток ваздуха кроз термотунел. Претпоставља се да је температура у просторији непозната и константна током експеримента зато што се HFE налази у затвореној просторији и експерименти трају кратко. Предмет овог поглавља је да прикаже поступак синтезе контролера за управљање температуром  $\Theta$  коју мери сензор најближи грејачу. Математички модел објекта је одређен на основу техника идентификације. У ту сврху су извршени експерименти у отвореном колу и добијен је математички модел објекта првог реда.



Слика 8.1: Експериментална инсталација термотунела компаније Quanser.

### 8.5.2 Такаги-Сугено модел заснован на линеарним моделима (ТС-ПОЧ)

Локални линеарни модели у последицама правила, једначина (8.1), добијени су методом идентификације на основу измерених улазно-излазних података коришћењем Матлабовог пакета за идентификацију. Улазно-излазни подаци су проистекли из одскочног одзива објекта. Разматра се нелинеарни ТС модел добијен комбиновањем три линеарна модела око три номиналне тачке: 33, 49,4, 68,5 [°C]. Номиналне температуре  $\Theta_{Ni}$ , номинални напони на грејачу  $V_{hNi}$  и одговарајуће идентификоване преносне функције дати су у табlici 8.1.

Табела 8.1: Линеарни модели и номиналне вредности.

$i$	$\Theta_{Ni}$ [° C]	$V_{hNi}$ [V]	$W_i(z)$	$a_i$	$b_i$
1	33	2	$\frac{0,0026}{z - 0,99977}$	0,99977	0,0026
2	49,4	3,1	$\frac{0,006939}{z - 0,99965}$	0,99965	0,00694
3	68,5	4,2	$\frac{0,003929}{z - 0,99976}$	0,99976	0,00393

Одступања у напонима представљају одступања управљања  $u(k) = v_h(k)$ . Коэффициенти УСИ математичког модела објекта су одређени из таблице 8.1 на основу преносних функција  $W_i(z)$ . Као пример, у наставку је приказана процедура за одређивање константи  $a_1, b_1$ ,

$$W_1(z) = \frac{\Theta(z)}{U(z)} = \frac{0,0026}{z - 0,99977}, \quad (8.14)$$

$$\theta(k+1) - 0,99977\theta(k) = 0,0026u(k). \quad (8.15)$$

За величину стања бира се излазна величина  $x(k) = x_i(k) = \theta(k)$ . Уврштавањем величине стања у претходну диференцну једначину понашања добијају се диференцна једначина стања објекта и његова једначина излаза,

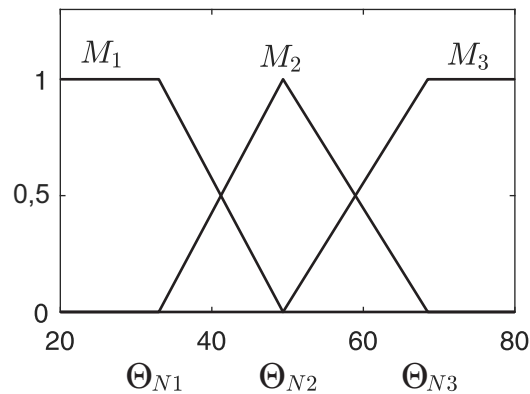
$$x(k+1) = 0,99977x(k) + 0,0026u(k) = a_1x(k) + b_1u(k), \quad (8.16)$$

$$x_i(k) = x(k). \quad (8.17)$$

Исти поступак је спроведен за преостале две диференцне једначине. Константе за сва три модела у простору стања приказане су у табlici 8.1. На основу линеарних система добија се следећи фази модел. Правило  $i$ :

$$\text{АКО } x(k) \text{ је } M_i \text{ ОНДА } \begin{cases} x(k+1) = a_ix(k) + b_iu(k), & i = 1, 2, 3, \\ x_i(k) = x(k). \end{cases} \quad (8.18)$$

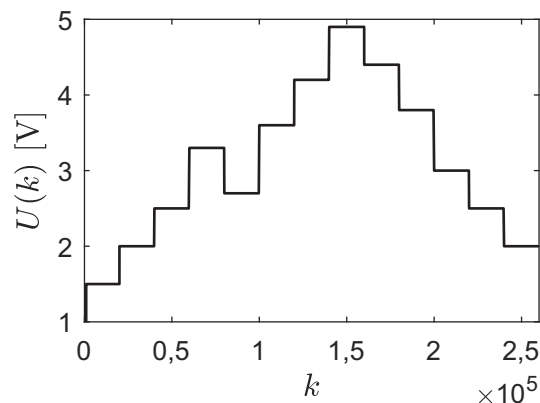
Полазне функције припадности које одговарају номиналним тачкама  $T_{Ni}$  приказане су на слици 8.2.



Слика 8.2: Функције припадности.

### 8.5.3 Оптимизација Такаги-Сугено модела (ТС-ОПТ)

Да би се побољшала тачност модела, коришћењем GWO алгоритма оптимизовани су параметри у премисама фазе правила. За оптимизацију су обезбеђени експериментални улазно-излазни подаци. Да би се покрио што шири радни опсег, објекту је прослеђиван улазни напон приказан на слици 8.3.

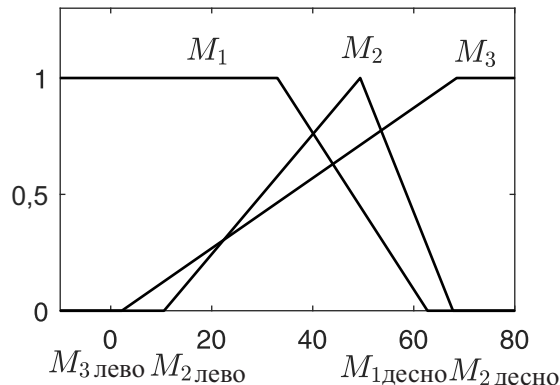


Слика 8.3: Улазни сигнал за оптимизацију модела.

ТС фази модел има фиксну структуру а у последицама правила налазе се локални линеарни модели. У наставку, модел је оптимизован променом параметара у премисама - ширине функција припадности. Споменути ТС параметри су сви кодирани у једног сивог вука, тј. једног агента, који је представљен вектором чији су елементи параметри премиса. Средишња функција припадности садржи два параметра док споредне две садрже по један параметар као што је приказано на слици 8.4, тако да укупно постоје четири непозната параметра.

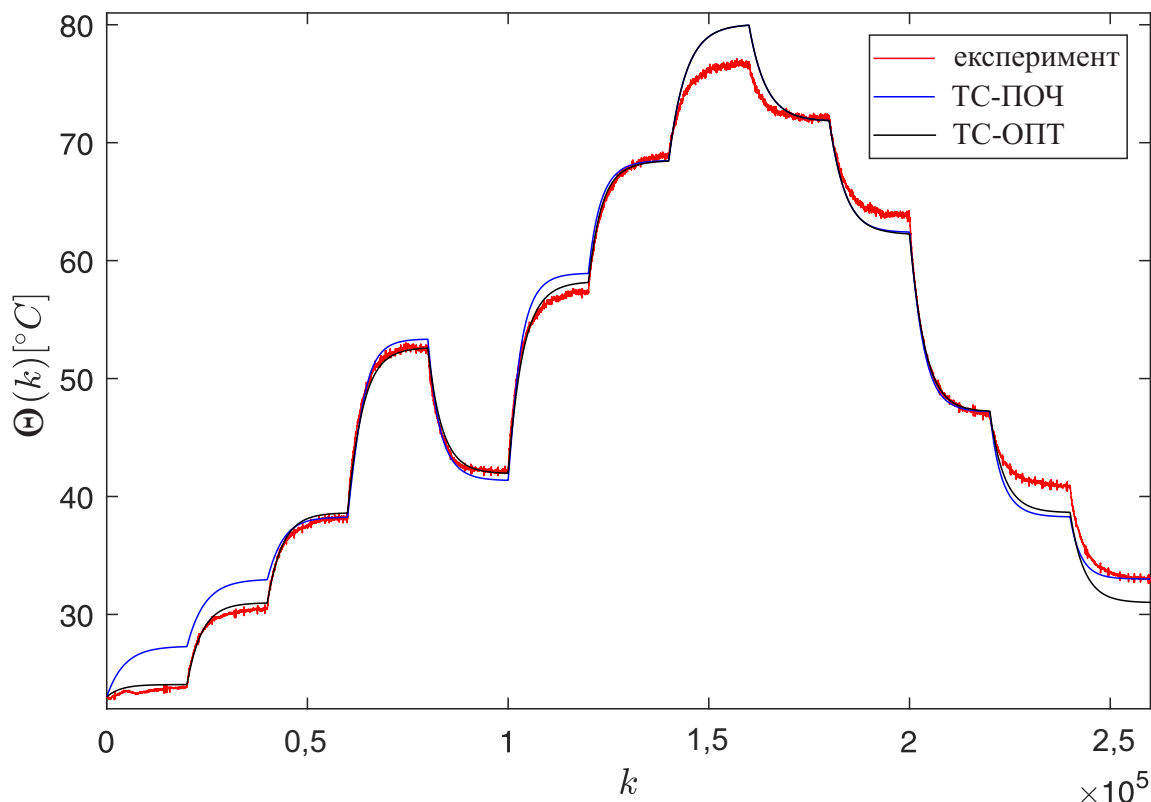
Параметри GWO оптимизационог алгоритма су преузети из оригиналног рада [92], док је изабрано да у популацији буде двадесет јединки и укупно да има тридесет итерација. У оваквој оптимизационој методи један агент представља један потенцијално оптимални фази модел. Као функција циља изабрана је сума квадрата грешака (sum of squared errors (SSE)) и може се израчунати као  $J = \sum_{k=1}^n (x_i(k) - x_{im}(k))^2$ , где је  $x_i(k)$  мерени излаз објекта док је  $x_{im}(k)$  излаз из модела објекта. Овде је у питању проблем оптимизације са ограничењима. Горње и доње границе су одређене физичким ограничењима термотунела. Такође, неопходно је увести горња и

доња ограничења тако да је у сваком тренутку активно бар једно правило како би се искључила могућност да у некој итерацији није активно ниједно правило. Ово би узроковало дељење са нулом и појаву сингуларитета у ТС моделу. На слици 8.4 приказане су оптимизоване функције припадности при чему су  $M_{3\text{лево}} = 2,19853$ ,  $M_{2\text{лево}} = 10,5573$ ,  $M_{1\text{десно}} = 62,718$  и  $M_{2\text{десно}} = 67,7686$ .



Слика 8.4: Оптимизоване функције припадности.

На слици 8.5 приказано је поређење ТС модела заснованих на почетним и оптимизованим функцијама припадности са експерименталним резултатима.



Слика 8.5: Поређење почетног и оптимизованог ТС модела.

Експериментални подаци на слици 8.5 су проистекли након довођења улазног напона објекту у облику приказаном на слици 8.3. Испод су дате вредности индекса перформансе (SSE) два модела као мера њихове тачности у односу на експе-

риментално снимљене податке,

$$SSE_{\text{ТС-ПОЧ}} = 702810, \quad SSE_{\text{ТС-ОПТ}} = 385910. \quad (8.19)$$

Индекс перформансе у облику SSE има много мању вредност, тј. боље је поклапање са експерименталним подацима, у случају оптимизованог модела што потврђује слика 8.5.

#### 8.5.4 Синтеза управљачког система

PDC представља процедуру за синтезу фази управљачког система на основу ТС фази модела. За сваки линеаризовани модел објекта пројектује се локални линеарни ПС контролер. На основу тога се добија  $i$ -то правило PDC контролера:

АКО  $X(k)$  је  $M_i$ , ОНДА контролер је  $C_i$ .

Крајњи облик фази контролера (управљачког сигнала) се онда може представити као:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^3 w_i(X(k))C_i}{\sum_{i=1}^3 w_i(X(k))} = \sum_{i=1}^3 h_i(X(k))C_i, \quad (8.20)$$

где су  $C_i$  ПС контролери дефинисани у комплексном домену као што следи у наставку. Користи се ПС контролер нултог реда. Његова диференцна једначина је

$$u(k) = K_P e(k) + K_S T \sum_{i=0}^{i=k-1} e(i) \quad / \Delta, \quad (8.21)$$

$$u(k+1) - u(k) = K_P e(k+1) - K_P e(k) + K_S T e(k) \quad / \mathcal{Z}, \quad (8.22)$$

$$zU(z) - U(z) = (K_P z - K_P + K_S T)E(z). \quad (8.23)$$

На основу овога следи израз за  $\mathcal{Z}$  преносну функцију контролера  $C_i$ :

$$C_i = \frac{K_{P_i} z + K_{S_i} T - K_{P_i}}{z - 1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.24)$$

Параметри дискретног контролера имају исте вредности као параметри континуалног контролера док је једина разлика у дискретној имплементацији. У наставку се приказује поступак за одређивање ових параметара.

Главни задатак управљања је да се температура у комори одржава на задатој вредности променом напона који се доводи грејачу. Сва три линеарна система треба да остваре следеће захтеве: статичка грешка треба да буде нула; прескок да буде не већи од 5%,  $\Pi \leq 5\%$ ; време смирења мање од 30 секунди,  $T_s \leq 30$ . Ови захтеви, које треба да оствари затворен систем аутоматског управљања, се могу приказати преко природне фреквенције  $\omega_n$  и степена пригушења  $\zeta$ . Ако се  $i$ -ти модел објекта представи са  $W_i(s) = \beta_i / (s - \alpha_i)$  онда, [110]:

$$b_i = \left| \ln \left( \frac{\Pi_i}{100} \right) \right|, \quad \zeta_i = \frac{b_i}{\sqrt{b_i^2 + \pi^2}}, \quad \omega_{ni} = \frac{4}{T_{si} \zeta_i}, \quad (8.25)$$

$$K_{P_i} = \frac{1}{\beta_i} (2\zeta_i \omega_{ni} + \alpha_i), \quad K_{I_i} = \frac{\omega_{ni}^2}{\beta_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.26)$$

На овај начин се добијају параметри линеарних контролера:  $K_{P1} = 0,93768$ ,  $K_{P2} = 0,33312$ ,  $K_{P3} = 0,61816$ ,  $K_{S1} = 0,14357$ ,  $K_{S2} = 0,053788$ ,  $K_{S3} = 0,095009$ .

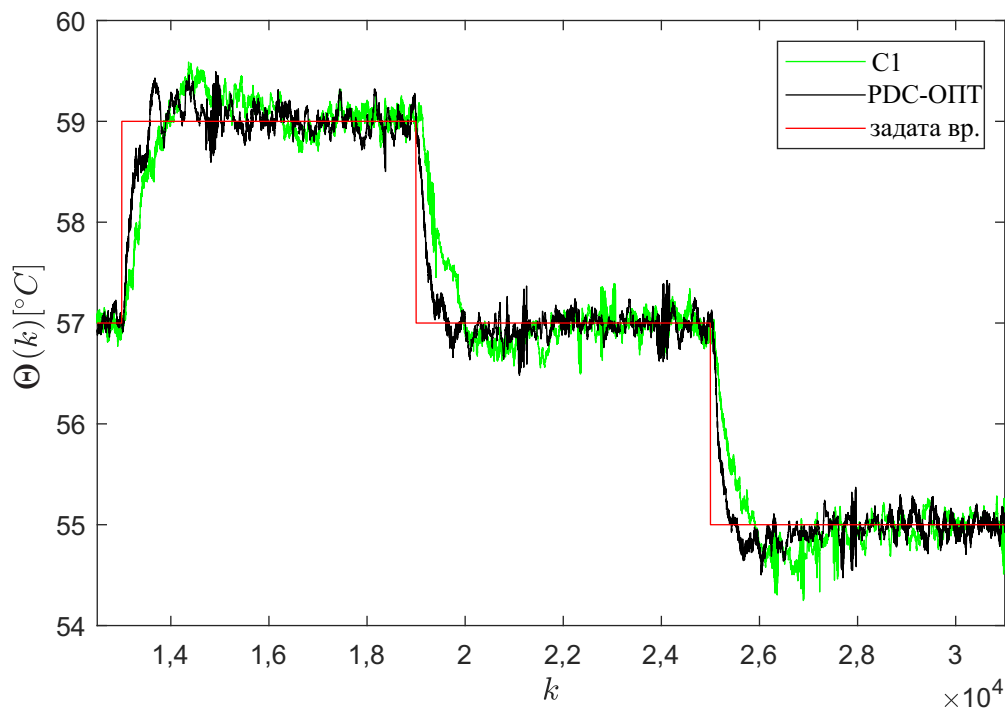


### 8.5.5 Још експерименталних резултата

Одскочни одзив, праћење задате вредности, компензација дејства поремећаја се користе као критеријуми за проверу и поређење рада пројектованих контролера.

#### Одскочни одзив

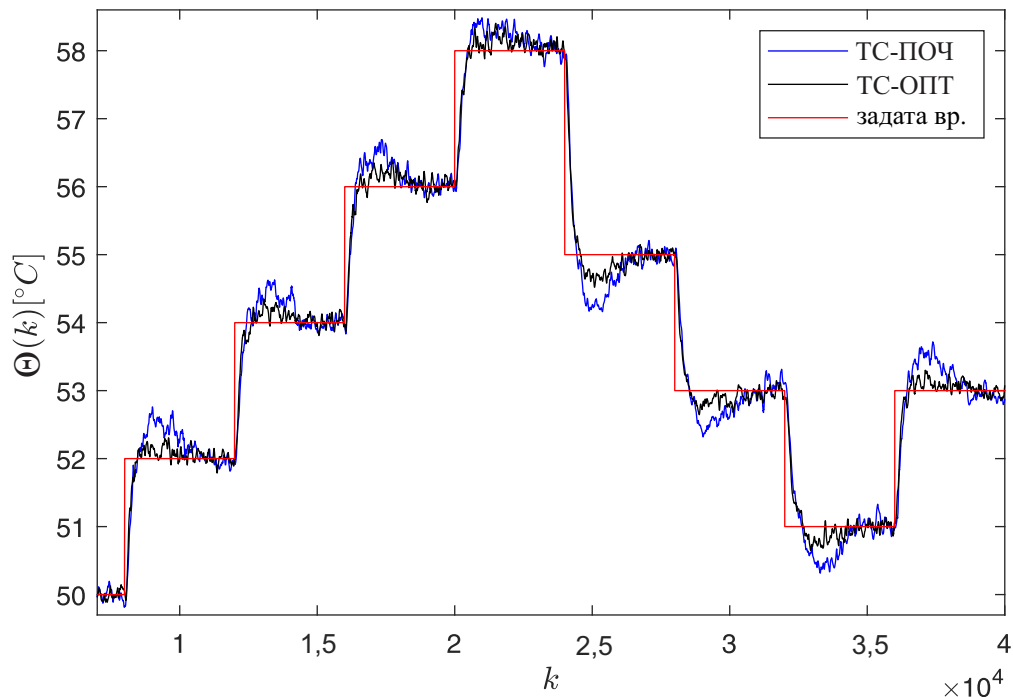
Упоредо са симулацијама, изведени су експерименти на реалном физичком систему. Симулациони резултати потврђени су на експериментима и приказани на сликама 8.6-8.10. На слици 8.6 приказано је поређење PDC-ОПТ контролера и локалног линеарног контролера (C1) пројектованог да ради око  $57\text{ [}^\circ\text{C]}$ . Управо ово је најзахтевнији изазов за пројектовани PDC-ОПТ контролер, због тога што се та температура налази најдаље од номиналних тачака  $33, 49,4$  и  $68,5\text{ [}^\circ\text{C]}$  три локална линеарна контролера који изграђују PDC. Захтеви за овај локални линеарни контролер су потпуно исти као за три претходно пројектована. На исти начин су одређени параметри  $K_P = 0,2256$  и  $K_S = 0,0343$ .



Слика 8.6: Поређење PDC-ОПТ и ПС контролера око  $57\text{ [}^\circ\text{C]}$ .

PDC-ОПТ остварује боље понашање него локални ПС контролер што се може видети на слици 8.6 и на основу израчунатих вредности суме квадрата грешака у односу на задату вредност које износе  $SSE_{C1} = 830330$ ,  $SSE_{PDC-ОПТ} = 455020$ . PDC-ОПТ контролер користи исте функције припадности  $M_1, M_2, M_3$  као и ТС фази модел објекта приказане на слици 8.4. На основу слике 8.4 и изгледа фази скупова  $M_i$  закључује се да за температуру између  $54$  и  $60\text{ [}^\circ\text{C]}$  постоји степен припадности температуре  $\Theta(k)$  у фази скупу  $M_i$ , тј.  $M_i(\Theta(k)) \neq 0, i = 1, 2, 3$ . Када се температура мења у опсегу између  $54$  и  $60\text{ [}^\circ\text{C]}$  активна су прво, друго и треће фази правило у којима учествују фази скупови  $M_1, M_2$  и  $M_3$ . Остварени су мањи прескок и краће време смирења када се објектом управља PDC контролером који користи информацију о оптимизованом моделу (ТС-ОПТ) у односу на то када се објект управља PDC контролером који користи почетне функције припадности (ТС-ПОЧ).

Филтрирани одзиви су приказани на слици 8.7 да би разлике између њих биле видљивије. Исти филтер је искоришћен за оба сигнала.



Слика 8.7: Поређење PDC контролера са почетним (ТС-ПОЧ) и оптимизованим (ТС-ОПТ) моделом објекта.

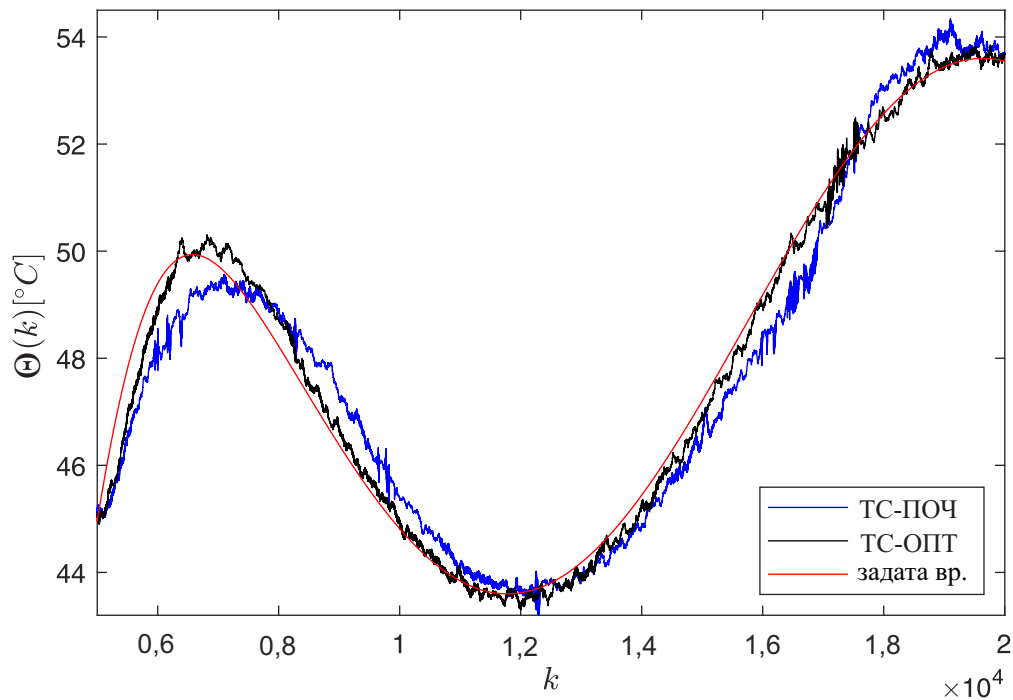
Поређење вредности прескока одзива система заснованих на почетном и оптимизованом ТС фази моделу приказане су у табелици 8.2.

Табела 8.2: Вредности прескока за различите одскочне одзиве.

Скок [ $^{\circ}C$ ]	50-52	52-54	54-56	56-58	58-55	55-53	53-51	51-53
ТС-ПОЧ [%]	38	31,25	34	24	28	34	34	35
ТС-ОПТ [%]	12,5	17	17,5	20	16	17,5	17,5	15

## Праћење

Сврха овог одељка је да покаже да PDC контролер који користи оптимизоване функције припадности постиже боље реаговање у задатку праћења задате вредности од PDC контролера који користи почетне функције припадности. Задата трајекторија није превише захтевна већ је у облику синуса који се споро мења у току времена. Поређење одзива праћења задате трајекторије приказано је на слици 8.8.

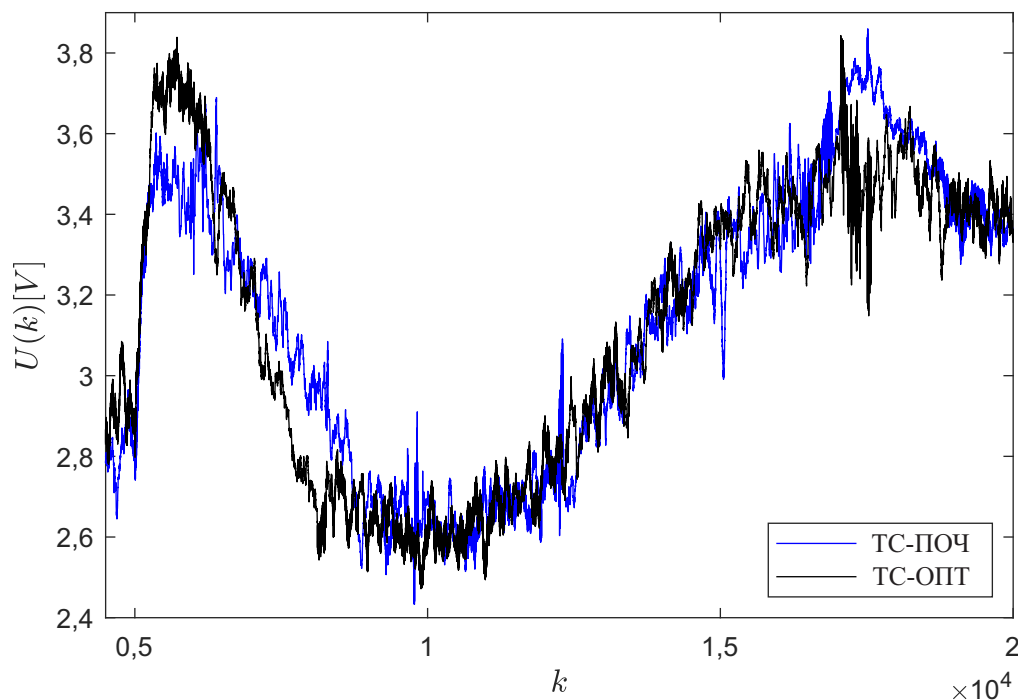


Слика 8.8: Поређење PDC контролера са почетним (ТС-ПОЧ) и оптимизованим (ТС-ОПТ) ТС моделима објекта.

Побољшање се експлицитно види на основу вредности суме квадрата грешака у односу на задату трајекторију које износе

$$SSE_{\text{ТС-ПОЧ}} = 137160, \quad SSE_{\text{ТС-ОПТ}} = 38335. \quad (8.27)$$

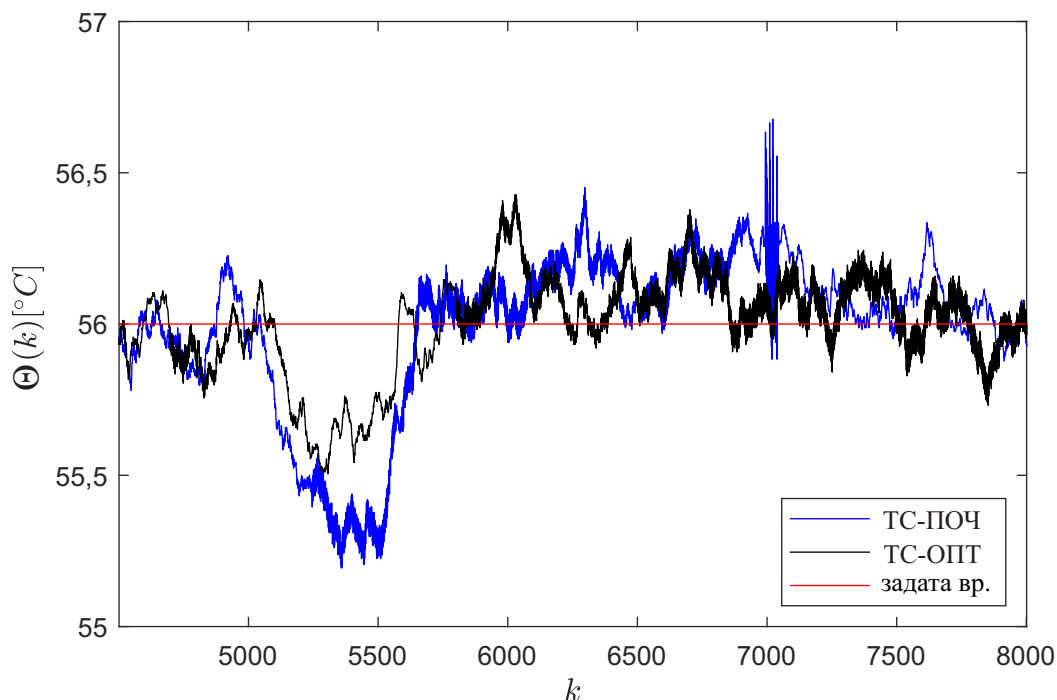
Поређење управљачких сигнала почетног (идентификованог) ТС-ПОЧ и оптималног ТС-ОПТ контролера дато је на слици 8.9.



Слика 8.9: Управљачки сигнали.

### Компензација дејства поремећаја

У овом одељку се разматра проблем компензације дејства поремећаја. Код овог објекта број обртаја вентилатора може служити као поремећај зато што значајно утиче на температуру ваздуха у комори термотунела. Претпоставимо да се температура налази на задатој вредности од  $56\text{ [}^\circ\text{C]}$ . У педесетој секунди брзина вентилатора се нагло повећа и тако остане пет секунди. Тиме се добија поремећај у виду одскочне функције. Експериментални резултати су приказани на слици 8.10 и види се да је температура пала на  $55,5\text{ [}^\circ\text{C]}$  услед дејства поремећаја, пре него што су имплементирани PDC контролери брзо реаговали и вратили стварну вредност температуре да се поклапа са задатом.



Слика 8.10: Поређење PDC контролера са почетним (ТС-ПОЧ) и оптимизованим (ТС-ОПТ) моделима објекта.

Овим је потврђено да су пројектовани PDC контролери показали задовољавајуће резултате и у обављању функције компензације дејства поремећаја. Са слике 8.10 се види да је PDC контролер са оптимизованим функцијама припадности боље компензовао дејство поремећаја него што је то учинио PDC контролер са почетним функцијама припадности.

#### 8.5.6 Дискусија резултата

На почетку су одређена три линеарна математичка модела термотунела на основу технике идентификације засноване на одскочном одзиву. У наредном кораку је формиран ТС нелинеарни фази модел објекта коришћењем претходна три идентификована линеарна модела. Иако је овај почетни ТС фази модел показао задовољавајуће резултате на целом простору излаза он је ипак оптимизован применом оптимизационог алгоритма сиви вукови. Оптимизовани су непознати параметри у премисама фази правила, тј. ширине функција припадности. Урађена је верификација ових модела. Пројектовани су локални линеарни контролери који су

идеални за рад око три номиналне тачке. Коришћењем PDC методе пројектовани су фази контролери који користе почетне и оптимизоване ТС фази моделе објекта. Оптимизовани ТС модел утиче на већу ефикасност PDC контролера. Ефективност овако пројектованог фази контролера проистиче из претходно пројектованог модела објекта са фази структуром. На крају је приказана примена пројектованих контролера на решавање проблема праћења задате вредности и на компензацију дејства поремећаја.

Будућа истраживања ће узети у разматрање више фази правила, друге мета-хеуристичке алгоритме, друге облике функција припадности.

## Глава 9

# Примена нове теорије условне оптимизације на нелинеарним дискретним системима

У овој глави се ради повезивање резултата који су остварени у првом делу дисертације са оним резултатима који су постигнути у претходној глави. У првом делу се показује разлика у добијању оптималних параметара у случају да се узму или не узму у обзир ненулти почетни услови. Користи се потпуна преносна функција и управља се на основу једног линеарног модела објекта и једног, њему одговарајућег, линеарног управљачког система ПДС типа.

Претходна глава доктората се бави фази моделовањем и управљањем. Формиран је нелинеарни ТС фази модел на основу три идентификована линеарна математичка модела. Извршена је синтеза PDC алгоритма управљања који се састоји у интерполацији три локална линеарна ПС контролера. Приказано је да PDC контролер остварује боље управљање од једног ПС контролера. У споменутој глави је извршена и оптимизација нелинеарног дискретног ТС фази модела објекта и такав оптимизовани модел у комбинацији са PDC контролером постиже боље понашање од PDC контролера који се заснива на почетном, идентификованом ТС фази моделу.

### 9.1 Експериментални пример условне оптимизације PDC управљачког система

У овом примеру представљена је развијена метода синтезе дискретног паралелно расподељеног управљања (PDC) за нелинеарни дискретни фази модел објекта. Разлика у односу на све друге примере је у томе што је овде примењен линеарни дискретни пропорционално-сумарни (ПС) контролер првог реда. Пројектована су три оваква локална управљачка система за сваки појединачни линеарни математички модел објекта. Користи се алгебарска метода у дводимензионалном простору као и карактеристични полином потпуне преносне функције недегенеративне по врстама. Постигнута је релативна стабилност свих појединачних затворених линеарних система у односу на изабрани степен пригушења. Додатни критеријум је минимална вредност индекса перформансе у облику суме квадрата грешака (SSE). Разлика у односу на класичну методу је у томе што грешка истовремено узима у обзир дејство спољашњег улаза и ненултих почетних услова. Управо теорија потпуне преносне функције омогућава третирање истовременог дејства

спољашњег улаза и ненултих почетних услова. У циљу приказивања побољшања узрокованог применом нове оптимизационе методе која разматра ненулте почетне услове извршено је поређење рада два PDC контролера. Први PDC контролер је пројектован при нултим а други при конкретним ненултим почетним условима при чему се поређење њиховог рада врши тако што у оба случаја систем крене са радом из истих ненултих почетних услова што највише одговара примерима из праксе. Симулациони и експериментални резултати су приказани како би потврдили ефикасност предложене методе.

### 9.1.1 Такаги-Сугено модел мотора једносмерне струје базиран на линеарним моделима

Техника синтезе је имплементирана и експериментално потврђена на мотору једносмерне струје са зупчаницима и оптерећењем. Експерименти су изведени на истом сервомотору који је коришћен у одељцима 7.2 и 7.3.

Локални линеарни модели у последицама фази правила, једначина (8.2), су проистекли на основу идентификације модела урађене помоћу Матлабове библиотеке за идентификацију на основу измерених улазно-излазних података. У ту сврху је искоришћен одскочни одзив објекта. Номиналне тачке су изабране тако да ТС фази модел представља модел серво мотора на опсегу [0-5] [V]. Прва и трећа номинална тачка су изабране да буду близу краја радног опсега а друга у средини опсега, тј.  $U_{N1} = 0,5$ ,  $U_{N2} = 2,5$  и  $U_{N3} = 4,5$  [V]. Одговарајуће вредности номиналних угаоних брзина су  $\Omega_{N1} = 0,62$ ,  $\Omega_{N2} = 4,02$  и  $\Omega_{N3} = 7,56$  [rad/s]. Таблица 9.1 приказује номиналне угаоне брзине  $\Omega_{Ni}$ , номиналне напоне  $U_{Ni}$  и њима одговарајуће идентификоване дискретне преносне функције при периоди одабирања  $T = 0,002$  [s].

Табела 9.1: Линеарни модели и номиналне вредности.

$i$	$\Omega_{Ni}$ [rad/s]	$U_{Ni}$ [V]	$W_i(z)$	$a_i$	$b_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$
1	0,62	0,5	$\frac{0,1023}{z - 0,9398}$	0,9398	0,1023	-0,0138	0
2	4,02	2,5	$\frac{0,0953}{z - 0,9444}$	0,9444	0,0953	-0,0149	0
3	7,56	4,5	$\frac{0,1042}{z - 0,9443}$	0,9443	0,1042	-0,0477	0

На основу идентификованих модела могу се добити диференчне једначине које описују понашање серво мотора у околини изабраних номиналних тачака. Испод је приказан поступак за номиналну тачку ( $U_{N1}, \Omega_{N1}$ ) као илустративни пример. Ако  $u(k)$  и  $\omega(k)$  означавају одступање управљачке величине и угаоне брзине, следствено, онда се добија:

$$W_1(z) = \frac{\Omega(z)}{U(z)} = \frac{0,1023}{z - 0,9398}, \quad (9.1)$$

$$\omega(k+1) - 0,9398\omega(k) = 0,1023u(k). \quad (9.2)$$

Излазна величина је усвојена као величина стања,  $x(k) = x_i(k) = \omega(k)$ . Диференчна једначина стања објекта и његова једначина излаза се добијају заменом величине

стања у претходну једначину,

$$x(k+1) = 0,9398x(k) + 0,1023u(k) = a_1x(k) + b_1u(k), \quad (9.3)$$

$$x_i(k) = x(k). \quad (9.4)$$

Ако  $X(k)$  представља вредност угаоне брзине у тоталним координатама, онда за номиналну тачку  $(U_{N1}, \Omega_{N1})$  важи да је  $X(k) = x(k) + X_{N1} = x(k) + \Omega_{N1}$  и  $U(k) = u(k) + U_{N1}$ . Из једначина (9.3, 9.4) добија се први локални модел у тоталним координатама за номиналну тачку  $(U_{N1}, \Omega_{N1})$ , тј. локални модел у тоталним координатама за прво правило у једначини (8.5):

$$X(k+1) - X_{N1} = a_1(X(k) - X_{N1}) + b_1(U(k) - U_{N1}), \quad (9.5)$$

$$X(k+1) = a_1X(k) + b_1U(k) + \alpha_1, \quad \alpha_1 = X_{N1} - a_1X_{N1} - b_1U_{N1}, \quad (9.6)$$

$$X_i(k) = X(k). \quad (9.7)$$

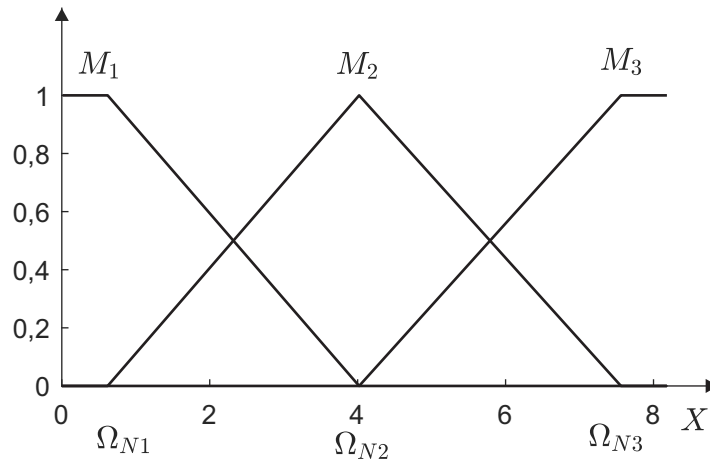
Истоветна процедура је примењена за преостале две дискретне преносне функције и њихове диференцне једначине понашања. У табlici 9.1 су приказане константе сва три линеарна математичка модела објекта у простору стања. На основу линеарних подсистема формиран је наредни ТС фази модел објекта у тоталним координатама:

Правило  $i$ :

$$\text{АКО } X(k) \text{ је } M_i \text{ ОНДА } \begin{cases} X(k+1) = a_iX(k) + b_iU(k) + \alpha_i, & i = 1, 2, 3, \\ X_i(k) = X(k). \end{cases} \quad (9.8)$$

Функције припадности са номиналним вредностима  $\Omega_{Ni}$  приказане су на слици 9.1. Због једноставности су изабране троугласте функције припадности. Њихови параметри су јасно дефинисани са центрима у номиналним вредностима. Троугласта функција припадности  $M_2$  одређена је са три параметра  $\{\Omega_{N1}, \Omega_{N2}, \Omega_{N3}\}$  и дефинише се са:

$$M_2(X, \Omega_{N1}, \Omega_{N2}, \Omega_{N3}) = \begin{cases} 0, & X < \Omega_{N1} \\ \frac{X - \Omega_{N1}}{\Omega_{N2} - \Omega_{N1}}, & \Omega_{N1} \leq X < \Omega_{N2} \\ \frac{\Omega_{N3} - X}{\Omega_{N3} - \Omega_{N2}}, & \Omega_{N2} \leq X \leq \Omega_{N3} \\ 0, & X > \Omega_{N3} \end{cases}. \quad (9.9)$$



Слика 9.1: Функције припадности.



Функција припадности  $M_1$  отворена је са леве стране и дефинисана са два параметра  $\{\Omega_{N1}, \Omega_{N2}\}$ :

$$M_1(X, \Omega_{N1}, \Omega_{N2}) = \begin{cases} 1, & X < \Omega_{N1} \\ \frac{\Omega_{N2} - X}{\Omega_{N2} - \Omega_{N1}}, & \Omega_{N1} \leq X \leq \Omega_{N2} \\ 0, & X > \Omega_{N2} \end{cases} . \quad (9.10)$$

На крају, функција припадности  $M_3$  је отворена са десне стране и дефинисана са два параметра  $\{\Omega_{N2}, \Omega_{N3}\}$ :

$$M_3(X, \Omega_{N2}, \Omega_{N3}) = \begin{cases} 0, & X < \Omega_{N2} \\ \frac{X - \Omega_{N2}}{\Omega_{N3} - \Omega_{N2}}, & \Omega_{N2} \leq X \leq \Omega_{N3} \\ 1, & X > \Omega_{N3} \end{cases} . \quad (9.11)$$

Претходна глава је показала да су ТС и PDC ефикасан начин за моделовање, оптимизацију и управљање нелинеарних дискретних фази система. Показане су могућности метахеуристичке оптимизације ТС фази модела. То отвара могућности за примену друге врсте оптимизације изложене у наставку.

### 9.1.2 Условна оптимизација под дејством ненултих почетних услова

У наставку је изложена процедура за одређивање оптималних параметара дискретног ПС контролера првог реда при нултим и ненултим почетним условима који одговарају првом линеарном математичком моделу објекта из таблице 9.1.

#### Опис система

##### Објект

У нашем случају једначина (9.2) је таква да  $a_{1O} = 1$ ,  $a_{0O} = -0,9398$ ,  $b_{0O} = 0,1023$ ,  $\omega(k) = x_i(k)$ ,  $u(k) = u_O(k)$ . Компактни облик једначине (9.2) добија следећи изглед, [1, 33]:

$$\mathbf{A}_O^{(1)} \mathbf{x}_i^1 = \mathbf{B}_O^{(0)} \mathbf{u}_O^0, \quad \mathbf{A}_O^{(1)} = [ -0,9398 \quad 1 ], \quad \mathbf{B}_O^{(0)} = [ 0,1023 ], \quad (9.12)$$

$$\mathbf{x}_i^1 = [ x_i(k) \quad x_i(k+1) ]^T, \quad \mathbf{u}_O^0 = [ u_O(k) ], \quad (9.13)$$

где су  $\mathbf{A}_O^{(1)}$ ,  $\mathbf{B}_O^{(0)}$  проширене матрице објекта, а  $\mathbf{x}_i^1$ ,  $\mathbf{u}_O^0$  су проширени вектори излаза и улаза објекта.

##### Управљачки систем

Општи облик ПС контролера првог реда је

$$\frac{\Delta u(k)}{T} + u(k) = K\varepsilon(k) + K_S T \sum_{i=0}^{i=k-1} \varepsilon(i), \quad / \Delta \quad (9.14)$$

$$\frac{\Delta u(k+1) - \Delta u(k)}{T} + \Delta u(k) = K \Delta \varepsilon(k) + K_S T \varepsilon(k), \quad / \cdot T \quad (9.15)$$

$$u(k+2) - 2u(k+1) + u(k) + Tu(k+1) - Tu(k) = KT\varepsilon(k+1) - KT\varepsilon(k) + K_S T^2 \varepsilon(k), \quad (9.16)$$

$$u(k+2) + (T-2)u(k+1) + (1-T)u(k) = KT\varepsilon(k+1) + (K_S T^2 - KT) \varepsilon(k). \quad (9.17)$$

Компактни облик ПС контролера првог реда је:

$$\mathbf{A}_C^{(2)} \mathbf{u}^2 = \mathbf{B}_C^{(1)} \varepsilon^1, \quad (9.18)$$

при чему су  $\mathbf{A}_C^{(2)}$ ,  $\mathbf{B}_C^{(1)}$  проширене матрице контролера, док су  $\mathbf{u}^2$ ,  $\varepsilon^1(k)$  проширени вектори излаза и улаза контролера и дати су у наставку,

$$\mathbf{A}_C^{(2)} = [ 1 - T, \quad T - 2, \quad 1 ], \quad \mathbf{B}_C^{(1)} = [ K_S T^2 - KT, \quad KT ], \quad T = 0,002 \text{ [s]}, \quad (9.19)$$

$$\mathbf{u}^2 = [ u(k) \quad u(k+1) \quad u(k+2) ]^T, \quad \varepsilon^1 = [ \varepsilon(k) \quad \varepsilon(k+1) ]^T. \quad (9.20)$$

### Затворен систем

Приказ затвореног система аутоматског управљања у компактном облику је:

$$\mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_i^3 = \mathbf{B}^{(2)}(\alpha, \beta) \mathbf{x}_u^2, \quad \forall k \in \mathcal{N}_0, \quad \alpha = K, \quad \beta = K_S, \quad (9.21)$$

где су  $\mathbf{A}^{(3)}$ ,  $\mathbf{B}^{(2)}$  проширене матрице система,  $\mathbf{x}_i^3$ ,  $\mathbf{x}_u^2$  су проширени вектор излаза и улаза система,

$$\mathbf{A}^{(3)}(\alpha, \beta) = [ a_0(\alpha, \beta) \quad a_1(\alpha, \beta) \quad a_2(\alpha, \beta) \quad a_3(\alpha, \beta) ] = \begin{bmatrix} -2,046 \cdot 10^{-4} \alpha + 4,1 \cdot 10^{-7} \beta - 0,93794 \\ 2,046 \cdot 10^{-4} \alpha + 0 \beta + 2,8758 \\ 0 \alpha + 0 \beta - 2,9378 \\ 0 \alpha + 0 \beta + 1 \end{bmatrix}^T, \quad (9.22)$$

$$\mathbf{B}^{(2)}(\alpha, \beta) = [ \mathbf{B}_0(\alpha, \beta) \quad \mathbf{B}_1(\alpha, \beta) \quad \mathbf{B}_2(\alpha, \beta) ], \quad (9.23)$$

$$\mathbf{B}^{(2)}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} [ -2,046 \cdot 10^{-4} \alpha + 4,092 \cdot 10^{-7} \beta, \quad 0,1021 ] \\ [ 2,046 \cdot 10^{-4} \alpha, \quad -0,2044 ] \\ [ 0 \quad 0,1023 ] \end{bmatrix}^T, \quad (9.24)$$

$$\mathbf{x}_i^3 = [ x_i(k) \quad x_i(k+1) \quad x_i(k+2) \quad x_i(k+3) ]^T, \quad (9.25)$$

$$\mathbf{x}_u^2 = [ \mathbf{x}_u^T(k) \quad \mathbf{x}_u^T(k+1) \quad \mathbf{x}_u^T(k+2) ]^T, \quad \mathbf{x}_u = [ x_{iz} \quad z ]^T, \quad (9.26)$$

при чему су  $x_{iz}$  задата вредност и  $z$  поремећајна величина.

### Потпуна преносна функција

Потпуна преносна функција  $\Pi(z)$  улазно-излазног (УИ) система датог једначином (9.21) гласи, [1]:

$$\Pi(z) = \Pi_D^{-1}(z) \Pi_N(z) = [ \mathbf{A}^{(3)}(\cdot) \mathbf{S}_1^{(3)}(z) ]^{-1} \cdot [ \mathbf{B}^{(2)}(\cdot) \mathbf{S}_2^{(2)}(z) \quad -\mathbf{B}^{(2)}(\cdot) \mathbf{Z}_2^{(2)}(z) \quad \mathbf{A}^{(3)}(\cdot) \mathbf{Z}_1^{(3)}(z) ], \quad (9.27)$$

где су  $\Pi_D(z)$  полиномијална матрица у имениоцу,  $\Pi_N(z)$  полиномијална матрица у бројиоцу,  $\mathbf{S}_1^{(3)}(z)$ ,  $\mathbf{S}_2^{(2)}(z)$ ,  $\mathbf{Z}_1^{(3)}(z)$  и  $\mathbf{Z}_2^{(2)}(z)$  су матричне функције у зависности од  $z$  дефинисане као:

$$\mathbf{S}_1^{(3)}(z) = [ 1 \quad z \quad z^2 \quad z^3 ]^T, \quad \mathbf{S}_2^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & z^2 \end{bmatrix}^T, \quad (9.28)$$

$$\mathbf{Z}_2^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ z^2 & 0 & z & 0 \\ 0 & z^2 & 0 & z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_1^{(3)}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \\ z^2 & z & 0 \\ z^3 & z^2 & z \end{bmatrix}. \quad (9.29)$$

На крају, коначан израз за  $\Pi(z)$  постаје:

$$\Pi(z) = \frac{1}{-z^3 + 2,9378z^2 + (-2,046 \cdot 10^{-4}\alpha - 2,8758)z + 2,046 \cdot 10^{-4}\alpha - 4,092 \cdot 10^{-7}\beta + 0,9379} \cdot \begin{bmatrix} -(4,092 \cdot 10^{-7}\beta - 2,046 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,046 \cdot 10^{-4}\alpha z) \\ -(0,1023z^2 - 0,2044z + 0,1021) \\ 2,046 \cdot 10^{-4}\alpha z \\ -(-0,1023z^2 + 0,2044z) \\ 0 \\ 0,1023z \\ -(z^3 - 2,9378z^2 + (2,046 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,8758)z) \\ -z^2 + 2,9378z \\ -z \end{bmatrix}^T. \quad (9.30)$$

Концепт недегенеративне потпуне преносне матрице је откривен и развијен у [33, 32], за континуалне линеарне системе и даље проширен за дискретне линеарне системе у [1]. Према [1] (Деф.6.1, п.104; Лем.6.1, п.108), нула и пол заједнички за све елементе потпуне преносне матрице  $\Pi(z)$  ( $\Pi(z)$  је врста вектор) система (9.21) не утичу на карактер одзива система. Уколико постоје, овакве нуле и полови се могу скратити и тако настаје потпуна преносна матрица недегенеративна по врстама  $\Pi_{rnd}(z)$ . Скраћене нуле и полови морају бити истог степена у свим елементима од  $\Pi(z)$ . Ово је нови, јасан критеријум за скраћивање истих нула и половина проистекао из новог концепта недегенеративне потпуне преносне матрице система. Тиме су превазиђене све потенцијалне дилеме у вези скраћивања нула и половина.

### Релативна стабилност

Из једначине (9.30) је очигледно да је потпуна преносна функција недегенеративна по врстама, тако да следи да је карактеристични полином система:

$$z^3 - 2,9378z^2 - (-2,046 \cdot 10^{-4}\alpha - 2,8758)z - 2,046 \cdot 10^{-4}\alpha + 4,092 \cdot 10^{-7}\beta - 0,9379 = \\ = \bar{a}_3(\alpha, \beta)z^3 + \bar{a}_2(\alpha, \beta)z^2 + \bar{a}_1(\alpha, \beta)z + \bar{a}_0(\alpha, \beta) = 0, \quad (9.31)$$

$$\bar{a}_j(\alpha, \beta) = \bar{b}_j\alpha + \bar{c}_j\beta + \bar{d}_j, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (9.32)$$

Да би се пронашла област константног степена пригушења у  $\alpha\beta$  параметарској равни бира се константна вредност  $\zeta$ ,  $0 < \zeta < 1$ , и користе једначине (9.33) и (9.34), [10, 11],

$$\alpha = \frac{\bar{C}_1\bar{D}_2 - \bar{C}_2\bar{D}_1}{\bar{B}_1\bar{C}_2 - \bar{B}_2\bar{C}_1}, \quad (9.33)$$

$$\beta = \frac{\bar{B}_2\bar{D}_1 - \bar{B}_1\bar{D}_2}{\bar{B}_1\bar{C}_2 - \bar{B}_2\bar{C}_1}. \quad (9.34)$$

Узимањем у обзир Чебишевљеве функције прве и друге врсте добијамо:

$$\bar{B}_1(\omega_n, \zeta) = 2,046 \cdot 10^{-4} e^{-0,002\omega_n\zeta} \cos\left(0,002\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) - 2,046 \cdot 10^{-4}, \quad (9.35)$$

$$\bar{B}_2(\omega_n, \zeta) = 2,046 \cdot 10^{-4} e^{-0,002\omega_n\zeta} \sin\left(0,002\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right), \quad (9.36)$$

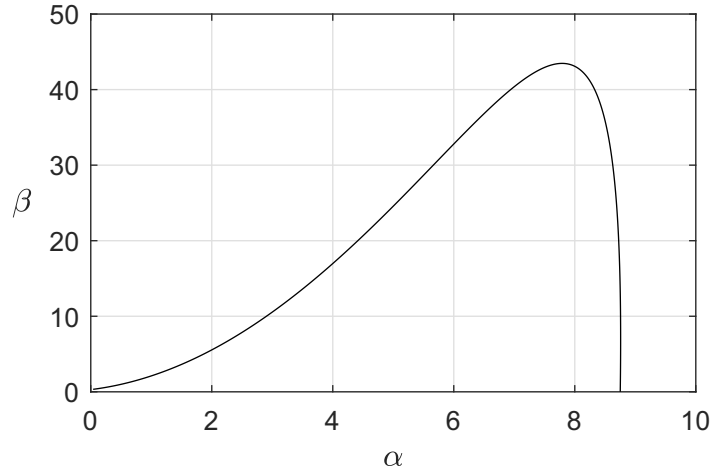
$$\bar{C}_1(\omega_n, \zeta) = 4,092 \cdot 10^{-7}, \quad (9.37)$$

$$\bar{C}_2(\omega_n, \zeta) = 0, \quad (9.38)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_1(\omega_n, \zeta) = & 2,8758e^{-0,002\omega_n\zeta} \cos\left(0,002\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) - \\ & -2,9378e^{-0,004\omega_n\zeta} \cos\left(0,004\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + e^{-0,006\omega_n\zeta} \cos\left(0,006\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) - 0,9379, \end{aligned} \quad (9.39)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_2(\omega_n, \zeta) = & 2,8758e^{-0,002\omega_n\zeta} \sin\left(0,002\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) - \\ & -2,9378e^{-0,004\omega_n\zeta} \sin\left(0,004\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) + e^{-0,006\omega_n\zeta} \sin\left(0,006\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right). \end{aligned} \quad (9.40)$$

Вредности  $\alpha$  и  $\beta$  су добијене при  $\zeta = 0,7$  и тако што су претходни изрази израчунати при  $\omega_n$  које је повећавано од 0,71 до 22,2 са кораком 0,01. Овакав опсег за  $\omega_n$  је изабран због тога што су ту оба параметра система,  $\alpha$  и  $\beta$  позитивна. Крива константног степена пригушења  $\zeta = 0,7$  у  $\alpha\beta$  параметарској равни приказана је на слици 9.2.



Слика 9.2: Крива константног степена пригушења  $\zeta = 0,7$  у  $\alpha\beta$  параметарској равни.

### Индекс перформансе

За критеријум оптималности изабрана је минимална вредност индекса перформансе у облику суме квадрата грешака,

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^2(k), \quad \varepsilon(k) = x_{iz}(k) - x_i(k), \quad (9.41)$$

где је  $\varepsilon(k)$  грешка добијена као резултат истовременог дејства ненултих почетних услова и спољашњег улаза. То је у пракси реалистичнији случај него да је грешка  $\varepsilon(k)$  настала само под утицајем спољашњег улаза при нултим почетним условима што је се до сада најчешће сретало у литератури.

Потпуни блок дијаграм система [1, 33] приказан је на слици 6.1.  $\mathcal{Z}$  преносна функција објекта је  $W_O(z)$ . Објектова  $\mathcal{Z}$  преносна функција у односу на његов вектор почетних услова  $\mathbf{c}_{0O}$  је  $\mathbf{W}_{0O}(z)$ . Слично, контролерова  $\mathcal{Z}$  преносна функција је  $W_C(z)$  и контролерова  $\mathcal{Z}$  преносна функција у односу на његов вектор почетних услова  $\mathbf{c}_{0C}$  је  $\mathbf{W}_{0C}(z)$ . Класична преносна матрица у односу на спољашњи улаз, или краће речено преносна матрица  $\mathbf{W}(z)$ , је само један елемент од  $\mathbf{\Pi}(z)$ . Постоји и други елемент од  $\mathbf{\Pi}(z)$ , а то је преносна матрица  $\mathbf{W}_0(z)$  која се односи на почетне услове целог система. Једина одговарајућа и прикладна преносна матрица, без икакве контроверзе, за испитивање особина Љапуновљеве стабилности је  $\mathbf{W}_0(z)$ , која проистиче из  $\mathbf{\Pi}_{rnd}(z)$ , тј.  $\mathbf{W}_{0rnd}(z)$ . Са блок дијаграма лако се добија  $\mathcal{Z}$ -трансформација  $X_i(z)$  излаза  $x_i(k)$ :

$$X_i(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(z) & \mathbf{W}_0(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{c}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W_O(z)W_C(z)}{1 + W_O(z)W_C(z)} \\ \frac{W_O(z)}{1 + W_O(z)W_C(z)} \\ \frac{W_O(z)}{1 + W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0C}^T(z) \\ \frac{1}{1 + W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0O}^T(z) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u(z) \\ \mathbf{c}_{0C} \\ \mathbf{c}_{0O} \end{bmatrix}, \quad (9.42)$$

$$\mathbf{X}_u(z) = \begin{bmatrix} X_{iz}(z) \\ Z(z) \end{bmatrix}. \quad (9.43)$$

Еквивалентни потпуни блок дијаграм система приказаног на слици 6.1 представљен је на слици 6.2. Треба приметити да се у креираном ТС моделу сервомотора не разматра дејство поремећаја. Међутим, предложена методологија се може применити и у случају постојања поремећајне величине при чему би било неопходно одредити преносну матрицу у односу на поремећајну величину као и у односу на почетне услове поремећаја. На основу најопштијег блок дијаграма, слике 6.1 и 6.2, могу се одредити све неопходне функције припадности за сервомотор разматран у овом одељку на који не делује поремећај. Након примене  $\mathcal{Z}$ -трансформације, на једначину објекта (9.2), узимањем у обзир свих почетних услова добија се:

$$X_i(z) = \begin{bmatrix} W_O(z) & W_{0O}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_O(z) \\ c_{0O} \end{bmatrix}. \quad (9.44)$$

Користи се добро позната формула за израчунавање  $\mathcal{Z}$  трансформације при ненултним почетним условима,

$$\mathcal{Z} \{x(k+n)\} = z^n \left( X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)z^{-k} \right). \quad (9.45)$$

Применом једначине (9.45) на једначину (9.2) добија се следеће:

$$z\Omega(z) - z\omega(0) - 0,9398\Omega(z) = 0,1023U(z), \quad (9.46)$$

$$(z - 0,9398)\Omega(z) = 0,1023U(z) + z\omega(0), \quad (9.47)$$

и коначно

$$\Omega(z) = \frac{0,1023}{z - 0,9398}U(z) + \frac{z}{z - 0,9398}\omega(0) = W_O(z)U(z) + W_{0O}(z)\omega(0). \quad (9.48)$$

На овај начин су одређене преносне функције објекта,

$$W_O(z) = \frac{0,1023}{z - 0,9398}, \quad W_{0O}(z) = \frac{z}{z - 0,9398}, \quad c_{0O} = x_i(0). \quad (9.49)$$

Применом  $\mathcal{Z}$ -трансформације, укључујући све почетне услове, на једначину контролера (9.17), уз помоћ једначине (9.45) добија се:

$$U(z) = [ W_C(z) \quad \mathbf{W}_{0C}(z) ] \begin{bmatrix} E(z) \\ \mathbf{c}_{0C} \end{bmatrix}. \quad (9.50)$$

Након уврштавања  $T = 0,002$ ,  $K = \alpha$  и  $K_S = \beta$ , добија се  $W_C(z)$

$$W_C(z) = \frac{0,002\alpha z - 0,002\alpha + 4 \cdot 10^{-6}\beta}{z^2 - 1,998z + 0,998}. \quad (9.51)$$

На сличан начин као што је одређено  $W_{0O}$  може се одредити  $\mathbf{W}_{0C}$ ,

$$\mathbf{W}_{0C} = \begin{bmatrix} \frac{-0,002\alpha z}{z^2 - 1,998z + 0,998} & \frac{z^2 - 1,998z}{z^2 - 1,998z + 0,998} & \frac{z}{z^2 - 1,998z + 0,998} \end{bmatrix}, \quad (9.52)$$

при чему је

$$\mathbf{c}_{0C} = \begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{iz}(0) - x_i(0) \\ u(0) \\ u(1) \end{bmatrix}. \quad (9.53)$$

Сада се  $\mathcal{Z}$ -комплексни лик грешке  $E(z)$  може израчунати као,

$$E(z) = X_{iz}(z) - X_i(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + W_O(z)W_C(z)} \\ \frac{-W_O(z)}{1 + W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0C}^T(z) \\ \frac{-1}{1 + W_O(z)W_C(z)} \mathbf{W}_{0O}^T(z) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X_{iz}(z) \\ \mathbf{c}_{0C} \\ \mathbf{c}_{0O} \end{bmatrix}, \quad (9.54)$$

одакле следи,

$$E(z) = \begin{bmatrix} \frac{z^3 - 2,9378z^2 + 2,8758z - 0,9379}{z^3 - 2,9378z^2 + (2,046 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,8758)z + 4,092 \cdot 10^{-7}\beta - 2,046 \cdot 10^{-4}\alpha - 0,9379} \\ \frac{2,046 \cdot 10^{-4}\alpha}{2,046 \cdot 10^{-4}\alpha} \\ \frac{z^3 - 2,9378z^2 + (2,046 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,8758)z + 4,092 \cdot 10^{-7}\beta - 2,046 \cdot 10^{-4}\alpha - 0,9379}{-0,1023z + 0,2044} \\ \frac{-0,1023}{-0,1023} \\ \frac{z^3 - 2,9378z^2 + (2,046 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,8758)z + 4,092 \cdot 10^{-7}\beta - 2,046 \cdot 10^{-4}\alpha - 0,9379}{-z^2 + 1,998z - 0,998} \\ \frac{-z^2 + 1,998z - 0,998}{z^3 - 2,9378z^2 + (2,046 \cdot 10^{-4}\alpha + 2,8758)z + 4,092 \cdot 10^{-7}\beta - 2,046 \cdot 10^{-4}\alpha - 0,9379} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} X_{iz}(z) \\ X_{iz}(0) - X_i(0) \\ u(0) \\ u(1) \\ y(0) \end{bmatrix}. \quad (9.55)$$

Применом дискретне Парсевалове теореме [53, 54], и добро познате Кошијеве теореме о остацима на једначину (6.77), добија се израз за индекс перформансе у комплексном облику који се користи за израчунавања,

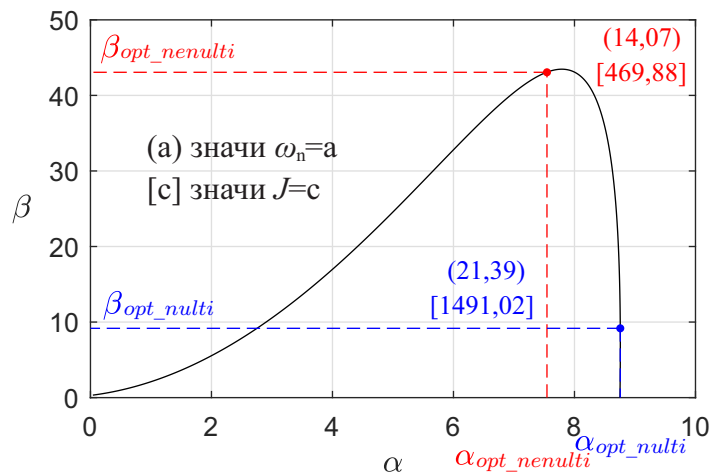
$$J = \sum_{r=1}^n \operatorname{Res} [E(z)E(z^{-1})z^{-1}] \Big|_{z=z_r^*}, \quad (9.56)$$

где је  $z_r^*$  корен од  $z^{-1}E(z)$ .

Експеримент је изведен на следећи начин. Мотор једносмерне струје првобитно ради 2 [s] у отвореном колу при напону  $U = 1,5$  [V]. На крају тог интервала постигнути су ненулти почетни услови који су поновљиви под истим условима. При нултим почетним условима  $u(0) = 1$ ,  $u(1) = 1$ ,  $y(0) = 1,68$ ,  $r(0) = 4$  израчунате су вредности индекса перформансе за парове  $\alpha$ ,  $\beta$  који одређују криву константног степена пригушења  $\zeta = 0,7$  за први линеарни модел објекта, слика 9.2.

Минимална вредност индекса перформансе је  $J_{min\_nenulti} = 469,88$ . Пар оптималних параметара  $\alpha$  и  $\beta$  који даје оптималну вредност индекса перформансе је:  $\beta_{opt\_nenulti} = 43,2051$  и  $\alpha_{opt\_nenulti} = 7,5919$ . Ове вредности су приказане на слици 9.3.

Вредности индекса перформансе су такође израчунате при нултим почетним условима да би се направила разлика између предложене и класичне методе. У овом случају, оптималне вредности параметара  $\alpha$  и  $\beta$  који обезбеђују минималну вредност индекса перформансе  $J_{min\_nulti} = 1491,02$  су  $\beta_{opt\_nulti} = 9,8506$  и  $\alpha_{opt\_nulti} = 8,7564$ , као што је приказано на слици 9.3.



Слика 9.3: Крива константног степена пригушења са нанетим оптималним вредностима при ненултим и нултим почетним условима.

Понављањем истог поступка који је приказан у овом одељку 9.1.2, за друга два линеарна математичка модела објекта из таблице 9.1, добијају се преостале вредности у таблицама 9.2 и 9.3.

Табела 9.2: Ненулни почетни услови и оптималне вредности.

$i$	$u_i(0)$	$u_i(1)$	$x_{i_i}(0)$	$x_{iz_i}(0)$	$J_i \text{ min\_nenulti}$	$K_i$	$K_{S_i}$
1	1	1	1,68	4	469,88	7,5919	43,2051
2	-1	-1	-1,72	0,62	1502,26	6,9531	36,8605
3	-3	-3	-5,26	-2,92	3487,25	6,4655	34,1012

Табела 9.3: Нулни почетни услови и оптималне вредности.

$i$	$u_i(0)$	$u_i(1)$	$x_{i_i}(0)$	$x_{iz_i}(0)$	$J_i \text{ min\_nulti}$	$K_i$	$K_{S_i}$
1	0	0	0	0	1491,02	8,7564	9,8506
2	0	0	0	0	2500,6	8,0313	9,0201
3	0	0	0	0	4351,55	7,3831	8,3161

### 9.1.3 Синтеза управљачког система

Паралелно расподељено управљање представља методу за синтезу фази контролера на основу ТС фази модела објекта. Другим речима, PDC контролер користи исте функције припадности као ТС фази модел објекта описан једначином (9.8), које су приказане на слици 9.1. Линеарни ПС контролер првог реда је дефинисан за све појединачне линеарне моделе објекта у тоталним координатама. На овај начин  $i$ -то правило фази контролера за ТС фази модел сервомотора описаног једначином (8.2) је:

АКО  $X(k)$  је  $M_i$ , ОНДА контролер је  $C_i$ .

Сигнал излаза из целог фази контролера представљен је са:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^3 w_i(X(k))C_i}{\sum_{i=1}^3 w_i(X(k))} = \sum_{i=1}^3 h_i(X(k))C_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9.57)$$

где је  $C_i$  ПС контролер првог реда дефинисан у комплексном домену након примене  $\mathcal{Z}$  - трансформације на једначину (9.17). Његова  $\mathcal{Z}$ -преносна функција је

$$C_i(z) = \frac{K_i T z + K_{S_i} T^2 - K_i T}{z^2 + (T - 2)z + 1 - T}. \quad (9.58)$$

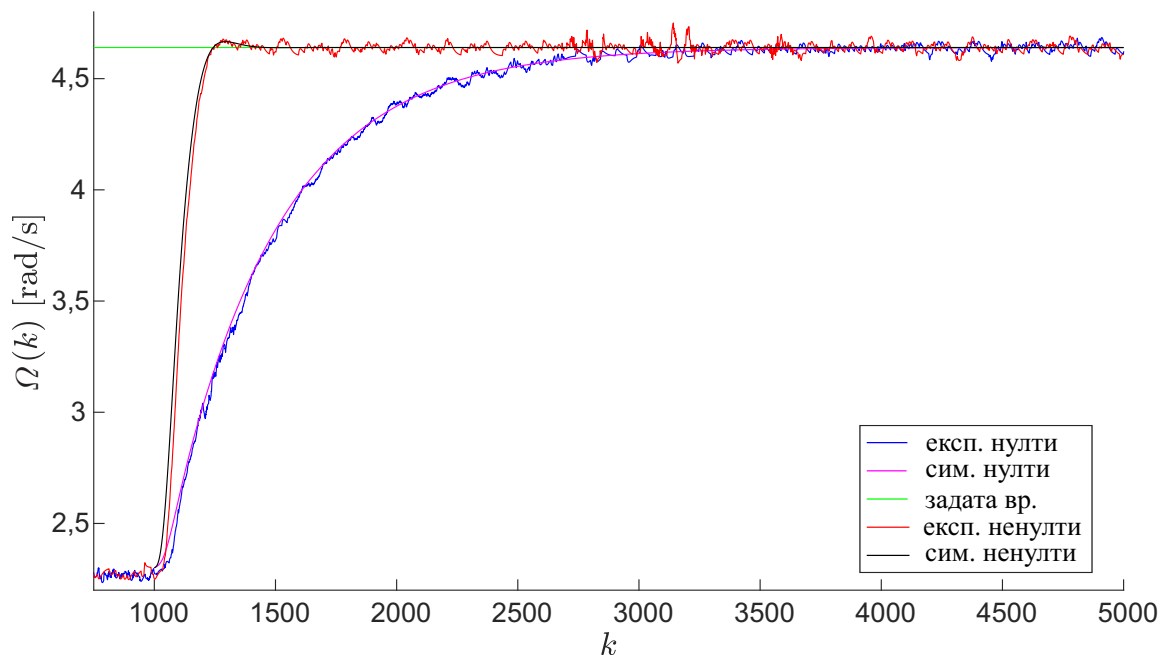


### 9.1.4 Симулациони и експериментални резултати

Из три идентификована линеарна модела објекта нелинеарни ТС фази модел је формиран. Такође, пронађени су оптимални параметри три појединачна ПС контролера првог реда који су идеални за одговарајуће линеарне моделе објекта и на основу њих је формиран PDC управљачки систем.

У наставку су приказани симулациони и експериментални резултати добијени на серво мотору једносмерне струје узимањем у обзир израчунатих оптималних параметара  $\alpha$ ,  $\beta$ .

На слици 9.4 приказани су симулациони и експериментални одскочни одзиви за оба сценарија (ненулни и нулни почетни услови који одговарају новом и традиционалном концепту). Сви одзиви започињу из истих ненултих почетних услова.



Слика 9.4: Симулациони и експериментални резултати одскочних одзива пројектованих PDC контролера који узимају у обзир нулте и ненулте почетне услове.

На самом почетку, ненулни почетни услови постижу се након 2 [s] рада у отвореном колу а након тога систем наставља са радом у затвореном колу.

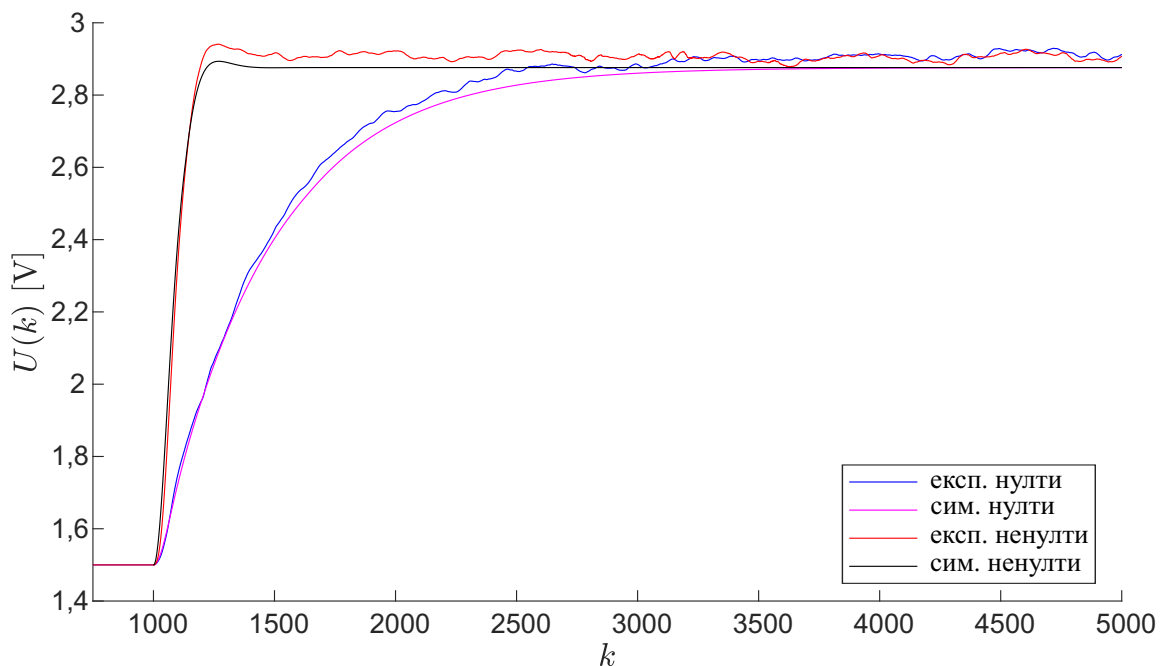
Симулациони одзив система приказан црном линијом добијен је применом нове теорије за одређивање оптималних параметара при чему је за њену употребу неопходно познавање конкретних ненултих почетних услова. Насупрот тога, симулациони одзив система представљен љубичастом линијом постигнут је на основу класичне теорије за одређивање оптималних параметара који би требало да буду оптимални за било које почетне услове. Као последица, због веродостојног поређења, одзив приказан љубичастом линијом започиње из истих ненултих почетних услова као и одзив проистекао при узимању у обзир ненултих почетних услова (црна линија) при израчунавању оптималних параметара. Може се видети да је одзив приказан црном линијом знатно бољи од одзива представљеног љубичастом линијом што потврђују и вредности суме квадрата грешака као критеријума квалитета динамичког понашања,

$$SSE_{nenulti} = 404,528, \quad SSE_{nulti} = 1401,0306. \quad (9.59)$$

Као што се види на слици 9.4 експериментални резултати се одлично поклапају са симулационим. И овде ћемо направити сличну дискусију. Експериментални одзив

приказан црвеном линијом настао је услед примене нове теорије за одређивање оптималних параметара који су одређени за конкретне ненулта почетне услове. Исто тако, експериментални одзив приказан плавом бојом је постигнут применом оптималних параметара остварених путем класичне теорије где су уврштени нулти почетни услови, али одзив започиње из истих ненултих почетних услова као што је случај код црвене линије да би поређење имало смисла. Одзив добијен применом оптималних параметара контролера у случају узимања у обзир ненултих почетних услова има знатно краће време смирења и време успона.

Поређење управљачких сигнала дато је на слици 9.5. Приметно је да је управљачки сигнал агресивнији у случају узимања у обзир ненултих почетних услова, због чега се јављају малопре споменута побољшања уочљива на одскочном одзиву.



Слика 9.5: Симулациони и експериментални резултати управљачких сигнала пројектованих PDC контролера који узимају у обзир нулта и ненулта почетне услове.

Остварени резултати показују значајна побољшања у случају условне оптимизације спроведене узимањем у обзир ненултих почетних услова у односу на нулта. Узет је једноставан облик функција припадности са центрима у номиналним тачкама и без метахеуристичке оптимизације су остварени задовољавајући резултати. Међутим, остаје могућност да ће се за неке друге објекте бољи резултати добити тек након оптимизације фази модела, као што је показано у потпоглављу 8.5.

Суштина истраживања и најзначајнији закључци овог потпоглавља су следећи:

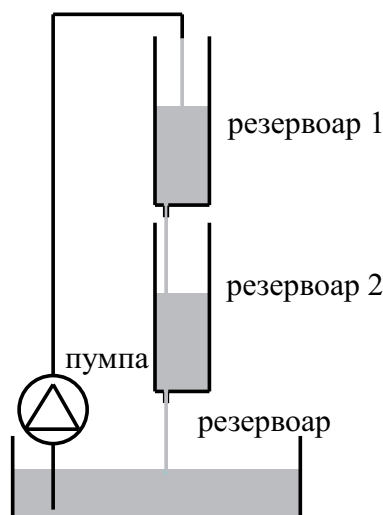
1. Идентификована су три линеарна дискретна математичка модела објекта. Такаги-Сугено фази модел је конструисан коришћењем ових линеарних модела који описују понашање објекта у околини његових номиналних вредности. Функције припадности су распоређене равномерно, са њиховим центрима лоцираним у номиналним вредностима;
2. Карактеристични полином потпуне преносне функције, за разлику од класичног, се користи у овој дисертацији у сврху спровођења условне оптимизације. Тачније, употреба карактеристичног полинома потпуне преносне функције недегенеративне по врстама је једина одговарајућа за тестирање стабилности

система и његову оптимизацију. Најопштији и најреалистичнији случај оптимизације се разматра, захваљујући теорији потпуне преносне функције, при чему је грешка резултат истовременог деловања ненултих почетних услова и спољашњег улаза. Одређени су оптимални параметри за три линеарна ПС контролера првог реда при нултим и ненултим почетним условима, уважавајући захтев да сви појединачни затворени системи имају степен пригушења  $\zeta = 0,7$ . Урађена је синтеза, у два случаја, PDC контролера који користи исте функције припадности као и фази ТС модел објекта. У првом случају PDC контролер је састављен од три локална линеарна ПС контролера првог реда чији су параметри одређени при нултим почетним условима. У другом случају PDC контролер изграђују линеарни контролери чији су параметри одређени при ненултим почетним условима;

3. Симулациони и експериментални резултати приказују да је метода развијена у овој дисертацији потпунија од класичне зато што узима у обзир ненулте почетне услове из којих објект започиње свој рад. Класична метода даје параметре који би требало да буду оптимални за све почетне услове што очигледно није испуњено.

## 9.2 Симулациони пример условне оптимизације PDC управљачког система

Овде ће бити представљено поређење рада PDC контролера и једног локалног линеарног ПС контролера у околини номиналне тачке за коју је локални линеарни контролер идеалан. Илустрација претходно реченог ће се применити на објекту који није коришћен до сада - систем спрегнутих резервоара приказан на слици 9.6. Извршиће се синтеза једног ПС контролера нултог реда који је идеалан за рад система у околини нивоа од 12 [cm] узимањем у обзир ненултих почетних услова. Овакав контролер ће се упоредити са PDC контролером који се састоји од три локална линеарна ПС контролера, такође нултог реда, који су пројектовани за номиналне тачке нивоа у другом резервоару од 8, 16 и 24 [cm]. Притом су параметри ова три локална линеарна контролера одређени узимајући у обзир ненулте почетне услове што омогућава примена развијене теорије потпуне преносне матрице, [1, 33].



Слика 9.6: Систем спрегнутих резервоара.

У наставку се даје скраћени поступак због тога што је раније већ све детаљно објашњено.

Линеарни модели и номиналне вредности су дате у табlici 9.4. Модели су добијени идентификацијом на основу снимљених експерименталних улазно излазних података. Преносне функције у табlici представљају следеће односе физичких величина,

$$W_1(z) = \frac{H_1(z)}{V_p(z)}, \quad W_2(z) = \frac{H_2(z)}{H_1(z)}. \quad (9.60)$$

Табела 9.4: Линеарни модели и номиналне вредности.

$i$	$H_{1Ni}$ [m]	$H_{2Ni}$ [m]	$V_{pNi}$ [V]	$W_{1i}(z)$	$W_{2i}(z)$
1	0,08	0,075	4,31	$\frac{0,00002884}{z - 0,9994}$	$\frac{0,0007502}{z - 0,9993}$
2	0,16	0,1535	5,83	$\frac{0,00002515}{z - 0,9996}$	$\frac{0,000463}{z - 0,9996}$
3	0,24	0,233	7,02	$\frac{0,00002444}{z - 0,9997}$	$\frac{0,0003887}{z - 0,9996}$

За одређивање нелинеарног ТС модела објекта неопходни су модели у простору стања. Константе модела у простору стања приказане су у табlici 9.5.

Табела 9.5: Линеарни модели у простору стања.

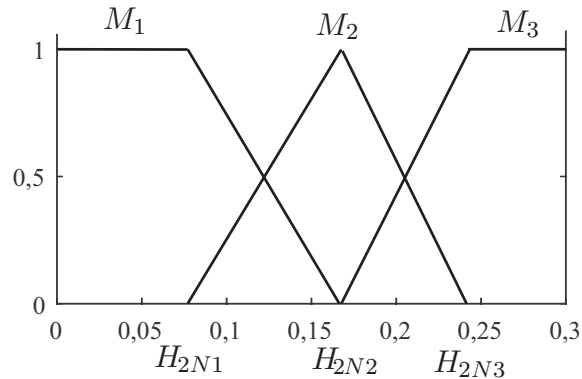
$i$	$A_i$		$B_i$	
1	0,99937	0	0,00002884	0
	0,00075023	0,99927		
2	0,99959	0	0,000025155	0
	0,000463	0,99956		
3	0,99967	0	0,000024436	0
	0,00038872	0,9996		

Параметри ПС управљачких система за сва три линеарна математичка модела објекта могу се израчунати као што је детаљно приказано у одељку 7.2 и њихове вредности су дате у табlici 9.6.

Табела 9.6: Вредности параметара ПС контролера.

$i$	$K_{Pi}$	$K_{Si}$
1	45,9123	1,5139
2	0,6011	0,2612
3	0,74742	0,2047

Комбинацијом ова три ПС управљачка система добија се PDC контролер који користи исте функције припадности као нелинеарни ТС модел објекта. Споменуте функције припадности су приказане на слици 9.7.



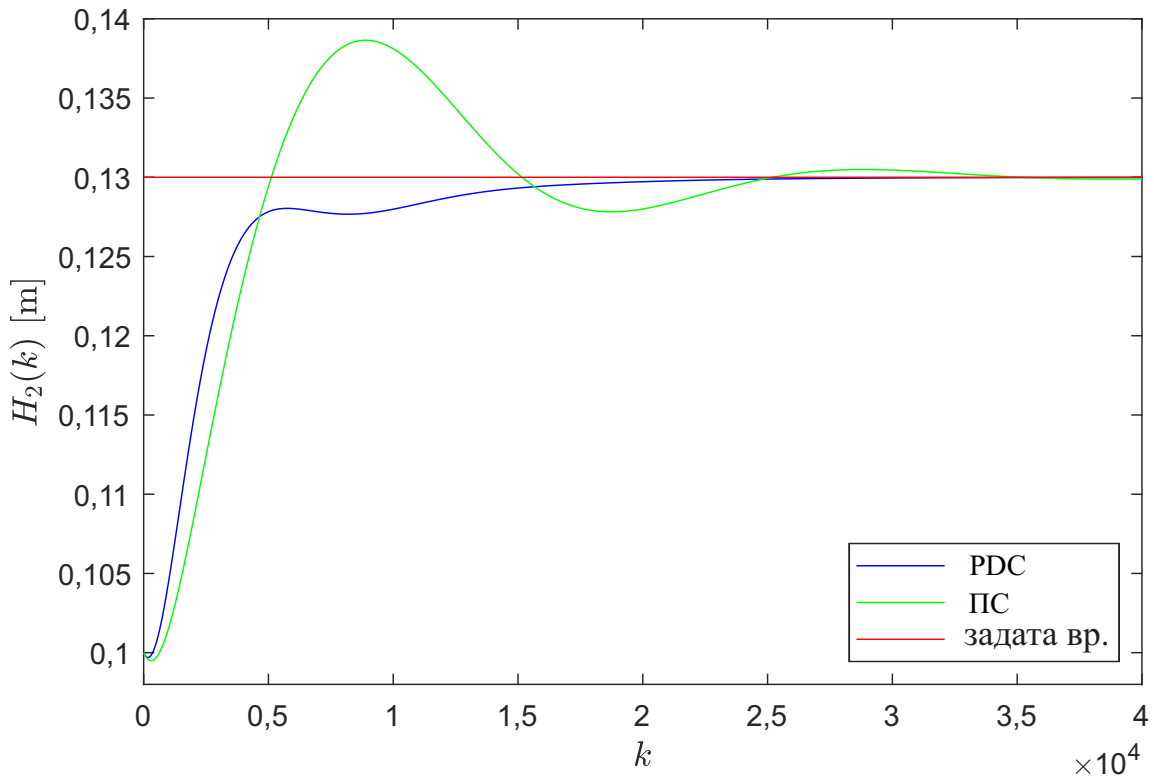
Слика 9.7: Функције припадности идентификованог нелинеарног ТС фази модела објекта.

Један, специјално пројектовани ПС управљачки систем је за математички модел објекта који описује понашање нивоа око 12 [cm] у другом резервоару. Тај линеарни модел је представљен наредним преносним функцијама,

$$W_1(z) = \frac{H_1(z)}{V_p(z)} = \frac{0,00003089}{z - 0,9994}, \quad W_2(z) = \frac{H_2(z)}{H_1(z)} = \frac{0,0005791}{z - 0,9994}. \quad (9.61)$$

Узимајући у обзир ненулте почетне услове, процедуром која је детаљно спроведена у одељку 7.2, добијају се параметри ПС управљачког система који износе  $K_P = 6,0646$  и  $K_S = 0,6132$ .

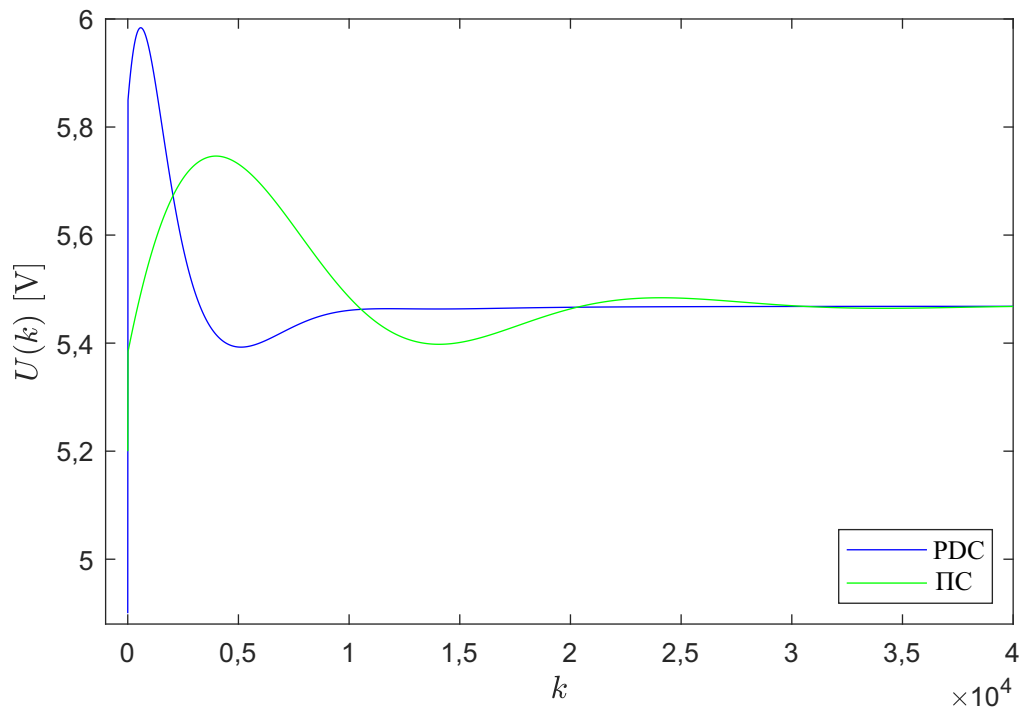
Поређење одзива на основу PDC контролера и једног ПС контролера дато је на слици 9.8.



Слика 9.8: Одзиви услед PDC управљања и једног линеарног ПС контролера.

Као мерило квалитета понашања затвореног система користи се сума квадрата грешака. То је оправдано из тог разлога што су и сви појединачни линеарни контролери оптимизовани баш имајући у виду минималну вредност суме квадрата грешака као критеријум оптималности. У случају одступања одзива од задате вредности проузрокованог ПС контролером добија се  $SSE_{\text{ПС}} = 2,3502$ . Одступање одзива од задате вредности проузроковано PDC контролером износи  $SSE_{\text{PDC}} = 1,4583$ .

Управљачки сигнали се могу видети на слици 9.9.



Слика 9.9: Управљачки сигнали PDC контролера и једног линеарног ПС контролера.

Управљачки сигнал који одговара PDC контролеру је “бржи” и управљање у првим тренуцима има већи интензитет. То је један од разлога због кога је приметно боље понашање излазне величине система управљане PDC контролером.

Разлог одсуства експерименталних резултата је због квара на опреми и немогућности извођења експеримената на истој.

# Глава 10

## Закључак

У првом делу ове дисертације приказана је нова процедура за спровођење условне оптимизације, линеарних стационарних временски дискретних система, која отклања одређене недостатке класичне теорије која је раније примењивана. Оптимизација се изводи у параметарском простору. Један од доприноса који је дат је у томе што је представљен начин за одређивање области (површине) релативне стабилности затвореног система са три непозната, подешљива параметра у параметарском простору док је у класичној теорији приказан поступак за два непозната параметра у параметарској равни. Побољшање постојеће методе условне оптимизације је постигнуто на основу решења контроверзе која се тиче класичне преносне функције и испитивања стабилности на основу ње, [1], [33]. Ова контроверза је недавно разрешена на основу уведене потпуне преносне функције [1], [33], тако да се при условној оптимизацији користи карактеристични полином од потпуне преносне функције а не од класичне. Још прецизније речено, у питању је карактеристични полином од потпуне преносне функције недегенеративне по врстама који је уједно и природнији за испитивање стабилности система. Исто тако, користи се нови компактни рачун [1], [33] без кога би одређивање потпуне преносне функције било немогуће.

Уведен је нов облик индекса перформансе у облику суме квадрата грешака који узима у обзир најопштији и најреалнији случај истовременог дејства спољашњих улаза и ненултих почетних услова на систем, који је у потпуности сагласан са употребом потпуне преносне функције.

Дати су илустративни примери на којима се види разлика у понашању система када се управљачки систем пројектује предложеним новим начином у односу на то када се користи класична теорија. Разлике су уочене на симулационом (математичком) и експерименталним примерима. Када се систем пројектује на класичан начин а започне са радом из ненултих почетних услова, његов одзив је значајно лошији него када се систем пројектује на нов начин који узима у обзир конкретне ненулте почетне услове. Класичан начин узима у обзир нулте почетне услове па је адекватан када систем креће са радом, баш из ових, нултих почетних услова.

Овиме је дат одговор на једно од питања којима се докторат бави: Скуп подешљивих параметара контролера који је оптималан за понашање система при свим нултим почетним условима није оптималан за његов рад при ненултим почетним условима. У овоме је значај нове методе условне оптимизације која је тема ове дисертације.

Примена пропорционално-диференчно-сумарног типа контролера, у њиховим различитим облицима, је још увек широко заступљена у индустрији. Као што се може видети на симулационим и експерименталним резултатима јасно је да се пре-

---

дложена метода, уместо класичне која узима у обзир нулте почетне услове, може користити за оптимизацију параметара управљачког система било ког објекта у индустрији који започиње са радом из ненултих почетних услова при чему је познат његов линеарни стационарни временски дискретни математички модел.

Други део дисертације демонстрира нови приступ условне оптимизације за класу нелинеарних дискретних система, у форми Такаги-Сугено фази система. Да би се методе развијене у првом делу дисертације, за линеарне дискретне системе, могле употребити на нелинеарним дискретним системима, искоришћено је својство ТС фази система да они представљају нелинеарне системе, који интерполирају динамику више локалних линеарних система. Након тако формираног нелинеарног дискретног ТС фази модела објекта пројектована су три локална линеарна ПС контролера који заједно формирају PDC управљачки систем. Ови појединачни локални линеарни контролери су пројектовани узимањем у обзир теорије условне оптимизације из првог дела дисертације која подразумева примену потпуне преносне функције и најопштијег израза за грешку који укључује истовремени утицај ненултих почетних услова и спољашњег улаза на понашање система. Такаги-Сугено фази модел и пројектовани PDC управљачки систем користе исте параметре у премисама фази правила па као резултат тога проистиче да је ефикасност пројектованог фази PDC контролера уско повезана са претходно пројектованим фази моделом објекта. Користи се модел објекта са фази структуром да би се “ухватила” нелинеарност у понашању стварног, реалног објекта.

Коначно, на крају, је показано да, и у случају нелинеарног ТС фази модела објекта управљаног PDC управљачким системом састављеним од три локална линеарна ПС управљачка система, оптимални параметри управљачког система за дати систем при нултим почетним условима нису оптимални за његов рад при ненултим почетним условима.



# Литература

- [1] Zoran M. Buchevats and Ly T. Gruyitch. Linear Discrete-Time Systems. CRC Press/Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2017.
- [2] J. A. Vishnegradski. Sur la théorie général des régulateurs. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 83:318–321, 1876.
- [3] I. Neymark. On the values of the parameters for which the feedback control system is stable (in russian). Avt. Telem., 3, 1948.
- [4] D. Mitrović. Graphical analysis and synthesis of feedback control systems i - theory and analysis. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry, 77(6):476–487, Jan 1959.
- [5] D. Mitrović. Graphical analysis and synthesis of feedback control systems ii — synthesis. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry, 77(6):487–496, Jan 1959.
- [6] D. Mitrović. Graphical analysis and synthesis of feedback control systems iii — sampled-data feedback control systems. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry, 77(6):497–503, Jan 1959.
- [7] D. D. Siljak. Generalization of mitrovic's method. IEEE Transactions on Applications and Industry, 83(74):314–320, Sep. 1964.
- [8] D. D. Šiljak. Squared error optimization with a relative stability constraint, Ph.D. Dissertation (in Serbian). University of Belgrade, 1963.
- [9] Lj. T. Grujić. Temperature regulation in heat transfer processes (In Serbian), Diploma work. Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 1963.
- [10] D. D. Siljak. Analysis and synthesis of feedback control systems in the parameter plane i-linear continuous systems. IEEE Transactions on Applications and Industry, 83(75):449–458, Nov 1964.
- [11] D. D. Siljak. Analysis and synthesis of feedback control systems in the parameter plane ii-sampled-data systems. IEEE Transactions on Applications and Industry, 83(75):458–466, Nov 1964.
- [12] D. D. Siljak. Analysis and synthesis of feedback control systems in the parameter plane iii-nonlinear systems. IEEE Transactions on Applications and Industry, 83(75):466–473, Nov 1964.
- [13] T. Grujić, Lj. Possibilities of linear system design on the basis of conditional optimization in parameter plane i-linear continual systems with constant parameters. Automatika, (1-2):49 – 60, 1966.

- [14] T. Grujić, Lj. Possibilities of linear system design on the basis of conditional optimization in parameter plane ii-linear sampled-data systems with constant parameters. Automatika, (1-2):61 – 71, 1966.
- [15] M. Rakić. Contribution to algebraic method for the synthesis of linear systems of automatic control (in serbo-croatian). Automatika, 1965.
- [16] R. E. Kalman. Optimal synthesis of linear sampling control systems using general performance indexes. Trans. ASME, 80:1820–1826, 1958.
- [17] R.E. Kalman. On the general theory of control systems. IFAC Proceedings Volumes, 1(1):491 – 502, 1960. 1st International IFAC Congress on Automatic and Remote Control, Moscow, USSR, 1960.
- [18] Hao Xu, A. Datta, and S. P. Bhattacharyya. Computation of all stabilizing pid gains for digital control systems. In Proceedings of the 2001 American Control Conference. (Cat. No.01CH37148), volume 3, pages 2033–2037 vol.3, June 2001.
- [19] L. H. Keel, J. I. Rego, and S. P. Bhattacharyya. A new approach to digital pid controller design. IEEE Transactions on Automatic Control, 48(4):687–692, April 2003.
- [20] R. N. Tantarís, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya. Stabilization of discrete-time systems by first-order controllers. IEEE Transactions on Automatic Control, 48(5):858–860, May 2003.
- [21] Yinya Li, Andong Sheng, and Yuangang Wang. Synthesis of pid-type controllers without parametric models: A graphical approach. Energy Conversion and Management, 49(8):2392 – 2402, 2008.
- [22] Radek Matušů. Calculation of all stabilizing pi and pid controllers. International Journal of Mathematics and Computers in Simulation, 5:224–231, 01 2011.
- [23] Elena N. Gryazina and Boris T. Polyak. Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited. Automatica, 42(1):13 – 26, 2006.
- [24] E. N. Gryazina and B. T. Polyak. Geometry of the stability domain in the parameter space: D-decomposition technique. In Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, Seville, Spain, pages 6510–6515, 15 December 2005.
- [25] E. N. Gryazina, B. T. Polyak, and A. A. Tremba. D-decomposition technique state-of-the-art. Automation and Remote Control, 69(12):1991–2026, Dec 2008.
- [26] M. Kipnis and R. Nigmatullin. D-decomposition method for stability checking for trinomial linear difference equation with two delays. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 111(3):479–489, Dec 2016.
- [27] Fabrizio Padula and Antonio Visioli. Tuning rules for optimal pid and fractional-order pid controllers. Journal of Process Control, 21(1):69 – 81, 2011.
- [28] R. S. Barbosa and I. S. Jesus. Optimization of control systems by cuckoo search. in: Moreira a., matos a., veiga g. In (eds) CONTROLO’2014 – Proceedings of the 11th Portuguese Conference on Automatic Control. Lecture Notes in Electrical Engineering, volume 321, 2015.
- [29] A. A. Fel’dbaum. On the distribution of the roots of the characteristic equations of systems of regulation (in russian). Avtomatika i Telemekhanika, 9:253–279, 1948.

- [30] R. N. Izmailov. The peak effect in stationary linear systems with scalar inputs and outputs. Autom. Remote Control, 48(8):1018–1024, 1987.
- [31] Boris Polyak, A. Tremba, Mikhail Khlebnikov, Pavel Shcherbakov, and G. Smirnov. Large deviations in linear control systems with nonzero initial conditions. Automation and Remote Control, 76:957–976, June 2015.
- [32] L. Gruyitch. Advances in the Linear Dynamic Systems Theory. Llumina Press: Plantation, FL, USA, 2013.
- [33] L.T. Gruyitch. Linear Continuous-Time Systems. CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2017.
- [34] H.C. Torng. Optimization of discrete control systems through linear programming. Journal of the Franklin Institute, 278(1):28–44, 1964.
- [35] Daniel Tabak. Optimal control of nonlinear discrete time systems by mathematical programming. Journal of the Franklin Institute, 289(2):111–119, 1970.
- [36] M. E. Rasmy and M. H. Hamza. Minimum-effort time-optimal control of linear discrete systems. International Journal of Control, 21(2):293–304, 1975.
- [37] L. V. Kolev. Minimum-fuel control of linear discrete systems. International Journal of Control, 23(2):207–216, 1976.
- [38] M. Scott. Time/fuel optimal control of constrained linear discrete systems. Automatica, 22(6):711–715, 1986.
- [39] Anders Hansson. A primal-dual interior-point method for robust optimal control of linear discrete-time systems. Automatic Control, IEEE Transactions on, 45:1639 – 1655, October 2000.
- [40] Akira Mohri. A computational method for optimal control of a linear system by quadratic programming. International Journal of Control, 11(6):1021–1039, 1970.
- [41] Alexander H. Levis, Robert A. Schlueter, and Michael Athans. On the behaviour of optimal linear sampled-data regulators†. International Journal of Control, 13(2):343–361, 1971.
- [42] Yuh-Shyang Wang, Nikolai Matni, and John C Doyle. Localized lqr optimal control. In 53rd IEEE Conference on Decision and Control, pages 1661–1668. IEEE, 2014.
- [43] Yi Jiang, Bahare Kiumarsi, Jialu Fan, Tianyou Chai, Jinna Li, and Frank L. Lewis. Optimal output regulation of linear discrete-time systems with unknown dynamics using reinforcement learning. IEEE Transactions on Cybernetics, 50(7):3147–3156, 2020.
- [44] Daniel Viegas, Pedro Batista, Paulo Oliveira, and Carlos Silvestre. Distributed controller design and performance optimization for discrete-time linear systems. Optimal Control Applications and Methods, 42(1):126–143, sep 2020.
- [45] Xuerong Mao. Stabilization of continuous-time hybrid stochastic differential equations by discrete-time feedback control. Automatica, 49:3677–3681, Dec 2013.
- [46] D.Q. Mayne and W.R. Schroeder. Robust time-optimal control of constrained linear systems. Automatica, 33(12):2103–2118, 1997.

- [47] Li-Sheng Hu, Peng Shi, and Paul M Frank. Robust sampled-data control for markovian jump linear systems. Automatica, 42(11):2025–2030, November 2006.
- [48] Adam Pracownik, Grzegorz Sieklucki, and Maciej Tondos. Optimization of a digital controller and observer in a two-mass system - the lq problem. Przegląd Elektrotechniczny, 88:341–348, 01 2012.
- [49] Francesco Borrelli, Mato Baotić, Alberto Bemporad, and Manfred Morari. Dynamic programming for constrained optimal control of discrete-time linear hybrid systems. Automatica, 41(10):1709–1721, 2005.
- [50] L.T. Gruyitch. Observability and Controllability of General Linear Systems. CRC Press, 2018.
- [51] L.T. Gruyitch. Trackability and Tracking of General Linear Systems. CRC Press, 2018.
- [52] L.T. Gruyitch. Nonlinear Systems Tracking. CRC Press, 2018.
- [53] Lj. T. Grujić. Discrete Systems (In Serbian). Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 1991.
- [54] A.D. Poularikas. Transforms and Applications Handbook. Electrical Engineering Handbook. CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2018.
- [55] K.M. Moudgalya. Digital control. John Wiley & Sons, 2007.
- [56] Lyubomir Gruyitch, Zoran Bučevac, Radiša Jovanović, and Vladimir Zarić. Discrete-time system conditional optimisation in the parameter space via the full transfer function matrix. Transactions of Famena, 45(3):45–62, 2021.
- [57] Vladimir Zarić, Zoran Bučevac, and Radiša Jovanović. Discrete-time system conditional optimization in the parameter space with nonzero initial conditions. Technical Gazette, 29(1):200–207, 2021.
- [58] Radiša Jovanović and Vladimir Zarić. Identification and control of a heat flow system based on the takagi-sugeno fuzzy model using the grey wolf optimizer. Thermal Science, 26(3A):2275–2286, 2022.
- [59] Tomohiro Takagi and Michio Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-15(1):116–132, 1985.
- [60] K. Tanaka and H. O. Wang. Fuzzy control systems Design and analysis. John Willey & Sons Inc., New York, 2001.
- [61] Sasa Vrkalovic, Teodor-Adrian Teban, and L.-D Borlea. Stable takagi-sugeno fuzzy control designed by optimization. International Journal of Artificial Intelligence, 15:17–29, 01 2017.
- [62] Anh-Tu Nguyen, Tadanari Taniguchi, Luka Eciolaza, Victor Campos, Reinaldo Palhares, and Michio Sugeno. Fuzzy control systems: Past, present and future. IEEE Computational Intelligence Magazine, 14:56–68, 02 2019.
- [63] Carlos Andrés Torres-Pinzón, Leonel Paredes-Madrid, Freddy Flores-Bahamonde, and Harrynson Ramirez-Murillo. Lmi-fuzzy control design for non-minimum-phase dc-dc converters: An application for output regulation. Applied Sciences, 11(5), 2021.

- [64] Bin Zhang and Yung C. Shin. A data-driven approach of takagi-sugeno fuzzy control of unknown nonlinear systems. Applied Sciences, 11(1), 2021.
- [65] Wen-Jer Chang, Ming-Hsuan Tsai, and Chin-Lin Pen. Observer-based fuzzy controller design for nonlinear discrete-time singular systems via proportional derivative feedback scheme. Applied Sciences, 11(6), 2021.
- [66] Xiangpeng Xie, Dong Yue, Huaguang Zhang, and Yusheng Xue. Fault estimation observer design for discrete-time takagi–sugeno fuzzy systems based on homogenous polynomially parameter-dependent lyapunov functions. IEEE Transactions on Cybernetics, 47(9):2504–2513, 2017.
- [67] Xiangpeng Xie, Dong Yue, Tiedong Ma, and Xunlin Zhu. Further studies on control synthesis of discrete-time t-s fuzzy systems via augmented multi-indexed matrix approach. IEEE Transactions on Cybernetics, 44(12):2784–2791, 2014.
- [68] T. Taniguchi, K. Tanaka, K. Yamafuji, and H.O. Wang. Nonlinear model following control via takagi-sugeno fuzzy model. In Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251), San Diego, CA, USA, volume 3, pages 1837–1841 vol.3, 2-4 June 1999.
- [69] Mokhtar Shasadeghi, Behrouz Safarinejadian, and Amir Farughian. Parallel distributed compensator design of tank level control based on fuzzy takagi-sugeno model. Applied Soft Computing, 21:280–285, August 2014.
- [70] Snejana Yordanova. Fuzzy logic approach to coupled level control. Systems Science & Control Engineering, 4(1):215–222, 2016.
- [71] Morteza Seidi and Amir H.D. Markazi. Performance-oriented parallel distributed compensation. Journal of the Franklin Institute, 348(7):1231–1244, 2011. Special issue on Modeling, Simulation and Applied Optimization.
- [72] M. Prabhat Dev., J. Sidharth, H. Kumar, B. N. Tripathi, and S. A. Khan. Various tuning and optimization techniques employed in pid controller: A review. In Proceedings of International Conference in Mechanical and Energy Technology, Springer, Singapore, pages 797–805, 2020.
- [73] Vadim Zhmud, Wolfram Hardt, Oleg V. Stukach, Lubomir Dimitrov, and Jaroslav Nosek. The parameter optimization of the pid and pidd controller for a discrete object. 2019 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics), Omsk, Russia, 5–7 November 2019, pages 1–6, 2019.
- [74] Bin Li, Xiaolong Guo, Xiaodong Zeng, and Songyi Dian. An optimal pid tuning method for a single-link manipulator based on the control parametrization technique. Discrete and continuous dynamical systems series S, 13(6):1813–1823, 2020.
- [75] Ryo Kurokawa, Takao Sato, Ramon Vilanova, and Yasuo Konishi. Discrete-time first-order plus dead-time model-reference trade-off pid control design. Applied Sciences, 9(16), 2019.
- [76] Yinya Li, Andong Sheng, and Yuangang Wang. Synthesis of pid-type controllers without parametric models: A graphical approach. Energy Conversion and Management, 49:2392–2402, 2008.

- [77] Chun-Tang Chao, Nana Sutarna, Juing-Shian Chiou, and Chi-Jo Wang. Equivalence between fuzzy pid controllers and conventional pid controllers. Applied Sciences, 7(6), 2017.
- [78] Daniel Viegas, Pedro Batista, Paulo Oliveira, and Carlos Silvestre. Distributed controller design and performance optimization for discrete-time linear systems. Optimal Control Applications and Methods, 42:1–18, 09 2020.
- [79] Danica Rosinová and Mária Hypiusová. Comparison of nonlinear and linear controllers for magnetic levitation system. Applied Sciences, 11(17), 2021.
- [80] Yuh-Shyang Wang, Nikolai Matni, and John Doyle. Localized lqr optimal control. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, CA, USA, 2015, 15-17 Decembar 2014.
- [81] Batyr B. Orazbayev, Yerbol A. Ospanov, Kulman N. Orazbayeva, and Bulat A. Serimbetov. Multicriteria optimization in control of a chemical-technological system for production of benzene with fuzzy information. Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, Geo Assets Engineering, 330(7):182 – 194, 2019.
- [82] Batyr Orazbayev, Ainur Zhumadillayeva, Kulman Orazbayeva, Sandugash Iskakova, Balbupe Utenova, Farit Gazizov, Svetlana Ilyashenko, and Olga Afanaseva. The system of models and optimization of operating modes of a catalytic reforming unit using initial fuzzy information. Energies, 15(4), 2022.
- [83] Seyedeh Zahra Mirjalili, Seyed Mirjalili, Shahzad Saremi, and Seyedali Mirjalili. Whale Optimization Algorithm: Theory, Literature Review, and Application in Designing Photonic Crystal Filters: Methods and Applications, pages 219–238. 01 2020.
- [84] O. Cordon and F. Herrera. A two-stage evolutionary process for designing tsk fuzzy rule-based systems. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 29(6):703–715, 1999.
- [85] Slobodan Ilić, Aleksandar Selakov, and Srdjan Vukmirović. Procedure for creating custom multiple linear regression based short term load forecasting models by using genetic algorithm optimization. Thermal Science, 25:679–690, Jan 2021.
- [86] Shun-Hung Tsai and Yu-Wen Chen. A novel identification method for takagi–sugeno fuzzy model. Fuzzy Sets and Systems, 338:117–135, 2018. Theme: Fuzzy Systems.
- [87] Farhad Soleimanian Gharehchopogh and Hojjat Gholizadeh. A comprehensive survey: Whale optimization algorithm and its applications. Swarm and Evolutionary Computation, 48:1–24, 2019.
- [88] Yiwei Chen, Xiaoli Song, Yakai Bai, and Chunyu Hu. Advantages of thermal industry cluster and application of particle swarm optimization model. Thermal Science, 25(2):977–987, Jan 2021.
- [89] Saeid Rastegar, Rui Araújo, and Jérôme Mendes. Online identification of takagi-sugeno fuzzy models based on self-adaptive hierarchical particle swarm optimization algorithm. Applied Mathematical Modelling, 45:606–620, Jan 2017.
- [90] M.Z.M. Kamali, N. Kumaresan, and Kuru Ratnavelu. Takagi–sugeno fuzzy modeling of some nonlinear problems using ant colony programming. Applied Mathematical Modelling, 48:635–654, 2017.

- [91] Mourad Turki and Anis Sakly. Extracting t–s fuzzy models using the cuckoo search algorithm. Computational Intelligence and Neuroscience, 12, Jul 2017.
- [92] Seyedali Mirjalili, Seyed Mohammad Mirjalili, and Andrew Lewis. Grey wolf optimizer. Advances in Engineering Software, 69:46–61, 2014.
- [93] B.P. Sahoo and S. Panda. Improved grey wolf optimization technique for fuzzy aided pid controller design for power system frequency control. Sustainable Energy, Grids and Networks, 16:278–299, 2018.
- [94] Radu-Emil Precup, Radu David, Alexandra-Iulia Szedlak-Stinean, Emil Petriu, and Florin Dragan. An easily understandable grey wolf optimizer and its application to fuzzy controller tuning. Algorithms, 68(10):1–15, Jun 2017.
- [95] R. Jovanović, V. Zarić, M. Vesović, and L. Laban. Modeling and control of a liquid level system based on the takagi-sugeno fuzzy model using the whale optimization algorithm. In Proceedings of the 2020 International Conference on Electrical, Electronic and Computing Engineering, pages 197–202, 2020.
- [96] Raul-Cristian Roman, Radu-Emil Precup, and Radu David. Second order intelligent proportional-integral fuzzy control of twin rotor aerodynamic systems. Procedia Computer Science, 139:372–380, Jan 2018.
- [97] Sofiane Khadraoui and Hazem N. Nounou. A nonparametric approach to design fixed-order controllers for systems with constrained input. International Journal of Control, Automation and Systems, 16:2870–2877, 2018.
- [98] Ana Ionesi, Hossein Ramezani, and Jerome Jouffroy. On-line parameter and state estimation of an air handling unit model: experimental results using the modulating function method. Modeling, Identification and Control: A Norwegian Research Bulletin, 40:161–176, 01 2019.
- [99] Ubaid Al-Saggaf, Ibrahim Mehedi, Maamar Bettayeb, and Rachid Mansouri. Fractional-order controller design for a heat flow process. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 230:1–12, 05 2016.
- [100] Timothy Sands. Control of dc motors to guide unmanned underwater vehicles. Applied Sciences, 11(5), 2021.
- [101] Fredy E. Hoyos, John E. Candelo-Becerra, and Alejandro Rincón. Zero average dynamic controller for speed control of dc motor. Applied Sciences, 11(12), 2021.
- [102] Fredy E. Hoyos, John E. Candelo-Becerra, and Carlos I. Hoyos Velasco. Application of zero average dynamics and fixed point induction control techniques to control the speed of a dc motor with a buck converter. Applied Sciences, 10(5), 2020.
- [103] Jihwan Kim, Ung Jon, and Hyeongcheol Lee. State-constrained sub-optimal tracking controller for continuous-time linear time-invariant (ct-lti) systems and its application for dc motor servo systems. Applied Sciences, 10(16), 2020.
- [104] Temiz Ismail Akar Mehmet. Motion controller design for the speed control of dc servo motor. Int J Appl Math Inf, 7:131–137, 01 2013.
- [105] Mirza Muhammad Sabir and Junaid Ali Khan. Optimal design of pid controller for the speed control of dc motor by using metaheuristic techniques. Advances in Artificial Neural Systems, 2014:1–8, 12 2014.

- [106] R. Jovanović. Fazi logika, modelovanje i upravljanje. Mašinski fakultet, Beograd, 2020.
- [107] M. Sugeno and G.T. Kang. Fuzzy modelling and control of multilayer incinerator. Fuzzy Sets and Systems, 18(3):329–345, 1986.
- [108] H.O. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by takagi-sugeno fuzzy model. In Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Yokohama, Japan, 20-24 March, volume 2, pages 531–538 vol.2, 1995.
- [109] Kazuo Tanaka and Michio Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. Fuzzy Sets and Systems, 45(2):135–156, 1992.
- [110] Haizhou Pan, Hong Wong, Vikram Kapila, and Marcio de Queiroz. Experimental validation of a nonlinear backstepping liquid level controller for a state coupled two tank system. Control Engineering Practice, 13:27–40, Jan 2005.



# Биографија аутора

Владимир Зарић је рођен 05.06.1990. г. у Ивањици, Република Србија. Основну школу завршио је у Ивањици са одличним успехом при чему је награђен дипломом “Вук Стефановић Караџић”. Сваки разред природно-математичког смера Гимназије у Ивањици је завршио са одличним успехом.

Машински факултет Универзитета у Београду уписао је школске 2009/2010. године. Основне академске студије завршио је 13.07.2012. године са просечном оценом 9,51 (9 и 51/100). Модул за аутоматско управљање Мастер академских студија Машинског факултета Универзитета у Београду је уписао школске 2012/2013. године и завршио их 08.10.2014. године са просечном оценом 9,40 (9 и 40/100). Мастер рад из предмета Рачунарско управљање, насловљен “Рачунарско аутоматско управљање транслаторног обрнутог клатна” одбранио је са максималном оценом 10.

Школске 2014/2015. године уписао је докторске академске студије на Машинском факултету Универзитета у Београду (број индекса Д2/2014) са оријентацијом на даље усавршавање у области аутоматског управљања, а првенствено у области рачунарског управљања, дигиталних система, интелигентних система управљања. Положио је све испите са просечном оценом 9,93 (девет и 93/100).

Познаје програмске језике и пакете C, MATLAB, Simulink, Wolfram Mathematica, AutoCad, Solid Works, MS Office, TIA Portal, Latex, CorelDRAW, Antares. Активно се служи (говори, чита, пише) енглеским језиком.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани Владимир Зарић

број индекса Д2/2014

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

#### **Условна оптимизација дискретних система аутоматског управљања применом потпуне преносне функције**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора \_\_\_\_\_ Владимир Зарић

Број индекса \_\_\_\_\_ Д2/2014

Студијски програм \_\_\_\_\_ Докторске академске студије

Наслов рада: Условна оптимизација дискретних система аутоматског управљања  
применом потпуне преносне функције

Ментор \_\_\_\_\_ др Радиша Јовановић, редовни професор

Потписани \_\_\_\_\_ Владимир Зарић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

### **Условна оптимизација дискретних система аутоматског управљања применом потпуне преносне функције**

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.