

Универзитет у Београду
Машински факултет

Александар М. Томовић

СПРЕГНУТЕ ПОПРЕЧНЕ И УЗДУЖНЕ
ОСЦИЛАЦИЈЕ ОЈЛЕР-БЕРНУЛИЈЕВИХ И
ТИМОШЕНКОВИХ ГРЕДА ОД
ФУНКЦИОНАЛНО ГРАДИЈЕНТНИХ
МАТЕРИЈАЛА

Докторска дисертација

Београд, 2019.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Aleksandar M. Tomović

COUPLED TRANSVERSE AND
LONGITUDINAL VIBRATIONS OF
EULER-BERNOULLI AND TIMOSHENKO
BEAMS OF FUNCTIONALLY GRADED
MATERIALS

DOCTORAL DISSERTATION

Belgrade, 2019

Комисија за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације

- Ментори:** др Немања Зорић, ванредни професор, ментор,
Универзитет у Београду, Машински факултет
др Александар Обрадовић, редовни професор, ментор,
Универзитет у Београду, Машински факултет
- Чланови комисије:** др Зоран Митровић, редовни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет
др Никола Младеновић, редовни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет
др Славиша Шалинић, ванредни професор,
Универзитет у Крагујевцу, Факултет за машинство и
грађевинарство у Краљеву
- Датум одбране:**

Изрази захвалности

Захваљујем својим менторима проф. др Александру Обрадовићу и ван. проф. др Немањи Зорићу на добронамерним критикама и великој стручној помоћи приликом израде докторске дисертације, као и на правилном усмеравању приликом уласка у свет механике, као науке.

Велику захвалност дугујем ван. проф. др Славиши Шалинићу за подршку приликом писања радова, одабира теме и финалних корекција текста дисертације.

У великој мери захваљујем проф. др Николи Младеновићу на издвојеном времену и корисним саветима приликом израде дисертације.

Захваљујем колегама Бојану Јеремићу и Петру Мандићу на колегијалном односу током израде дисертације.

Нарочито сам захвалан својим родитељима Ивани и Милану, супрузи Милицы и посебно сину Вуку на безрезервној подршци.

Ова докторска дисертација урађена је у оквиру пројекта TR35006 *„Одрживост и унапређење машинских система у енергетици и транспорту применом форензичког инжењерства, еко и робуст дизајна”*, чији је руководилац проф. др Срђан Бошњак, коме такође захваљујем.

Резиме

У дисертацији се анализира проблем линеарних хармонијских осцилација еластичних греда од функционално градијентних материјала чије се карактеристике мењају по уздужној оси греде. С обзиром на могућности моделовања материјала тако да својим карактеристикама, могу да задовоље структурне и естетске захтеве, повећан је обим њиховог коришћења у реалним конструкцијама. Ови материјали могу се примењивати у широком спектру различитих инжењерских области, као што су биомедицинско инжењерство, енергетика, ваздухопловно инжењерство, грађевинарство и многе друге. Анализа статичких и динамичких карактеристика еластичних греда, с обзиром на њихову примену у бројним инжењерским конструкцијама је од посебног значаја за савремену технику. У дисертацији се анализирају уздужне и попречне осцилације, као и спрегнуте попречне и уздужне осцилације еластичних греда, чији се попречни пресек и карактеристике материјала мењају по уздужној оси греде. Спрезање уздужних и попречних модова осциловања одређено је општим начином ослањања греде. С обзиром на природу функционално градијентних материјала анализира се промена густине и модула еластичности по уздужној оси греде. Приликом формирања модела, греда се посматра као механички систем са бесконачно много степени слободе. Понашање оваквог система описује се парцијалним диференцијалним једначинама са променљивим коефицијентима. За изведене једначине одређени су аналитички записи модела ослањања греде у општем случају, користећи системе опруга и крутих тела на крајевима греде. На основу ових записа анализира се спрезање попречних и уздужних осцилација. Раздвајањем пороменљивих, дужине и времена, код хармонијских осцилација формиран је систем обичних диференцијалних једначина којима се једначине своде на модални облик. Једначине се своде на бездимензиони облик који је у одређеним случајевима погодан за извршавање потребних израчунавања. У поступку алгебарског свођења крутости опруга на бездимензиони облик, њихове вредности своде се на јединични интервал, што представља додатно нумеричко упрошћавање. С обзиром на формиран систем обичних диференцијалних једначина са дефинисаним контурним условима, проблем

израчунавања сведен је на решавање двотачкастог граничног проблема. Решавање проблема врши се симболичко-нумеричким методом почетних параметара (SNMIP). Овај модел представља модификацију метода почетних параметара (Бидермановог метода) и не захтева примену итеративних процедура приликом израчунавања. Такође, даје се пример примене метода гађања на решавање осцилација греда променљивог попречног пресека и променљивих карактеристика материјала дуж подужне осе греде (аксијално функционално градијентних греда). Услови ортогоналности модова осциловања еластичних греда изводе се на основу претходно одређеног аналитичког облика контурних услова за дефинисане почетне услове у општем смислу. Користећи услове ортогоналности модова осциловања изводе се интеграционе константе у временској функцији. Тиме се добија решење проблема осциловања еластичних греда променљивог попречног пресека од функционално градијентних материјала у затвореном облику. Као верификација примене симболичко-нумеричког метода почетних параметара у решавању тачних диференцијалних једначина кретања даје се упоредни приказ резултата добијених овим методом и оних који су одређени користећи метод крутих сегмената. Такође, разматра се примена симболичко-нумеричког метода почетних параметара за одређивање жељене сопствене фреквенције с обзиром на различите масене и механичке карактеристике механичког система.

Кључне речи: уздужне осцилације, попречне осцилације, спрегнути модови осциловања, симболичко-нумерички метод почетних параметара (SNMIP), ортогоналност модова осциловања, утицај масених карактеристика на сопствене фреквенције.

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Механика

УДК број: 534-16:[62-422.2:539.52(043.3)]

ABSTRACT

The problem of linear harmonic vibration of elastic axially functionally graded (AFG) beams whose characteristics change along longitudinal axes is analyzed in the presented dissertation. The implementation of modern procedures in designing functionally gradient (FG) materials have caused the increased use of later materials in real-life engineering structures, due to the fact that they may satisfy specific structural and aesthetic demands. Thus, FG materials may be used to overcome a wide range of engineering problems in various areas, i.e., biomedical engineering, energy industry, airspace engineering, civil engineering, etc. and that is why the static and dynamic analysis is of special importance in modern engineering. In the dissertation the longitudinal and transverse vibration problems as well as coupled transverse and longitudinal vibration problems of AFG elastic beams are analyzed. The coupling of longitudinal and transverse mode shapes is achieved by the implementation of general boundary conditions. With respect to the nature of FG materials, the changes of mass density and elasticity modulus are analyzed along the beam longitudinal axes. An elastic beam is treated as a mechanical system with an infinite number of degrees of freedom and its behavior is described by partial differential equations with variable coefficients. For presented problems, the equations of motion are derived and boundary conditions are presented in a symbolic manner. Based on later writings, the coupling of mode shapes is analyzed. Using the method of separation of variables, namely longitude and time, the system of ordinary differential equations is formed and the equations are written in the modal form. The equations are written in the non-dimensional form, which may be suitable for practical calculations. In this process, stiffness coefficients are reduced to the unit interval that presents further numerical simplification. Based on the formed system of ordinary differential equations with defined boundary conditions, the computational problem is reduced to the two point boundary value problem. The presented problem is solved using the symbolic-numeric method of initial parameters (*SNMIP*). This model presents modification of the method of initial parameters (*Biderman's method*) and does not require the application of iterative procedures. Also, the example of the shooting method application for solving vibration problem of AFG beams is presented.

Orthogonality conditions of mode shapes are derived with respect to general boundary conditions and further used for the derivation of integration constants in the time function. Thus, the vibration problem of elastic AFG beams with variable cross-sectional characteristics is solved in the closed form. The comparative analysis of the results obtained by *SNMIP* and those obtained by rigid element method is implemented in order to verify the presented procedures. The use of *SNMIP* in the determination of desired natural frequencies with respect to various mass and mechanical characteristics of the system is also discussed.

Key words: longitudinal vibration, transverse vibration, coupled vibration modes, symbolic-numeric method of initial parameters (*SNMIP*), orthogonality conditions of mode shapes, mass characteristics influences on natural frequencies.

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Mechanics

UDC number: 534-16:[62-422.2:539.52(043.3)]

Садржај

1. Увод.....	1
1.1 Анализа постављеног проблема и преглед доступне литературе.....	2
1.2 Садржај дисертације.....	6
2. Уздужне осцилације греда од функционално градијентних материјала - Ојлер-Бернулијев приступ.....	9
2.1 Уводна разматрања и поставка проблема уздужних осцилација.....	9
2.2 Диференцијалне једначине уздужних осцилација греде.....	10
2.3 Свођење једначина на бездимензиони облик.....	12
2.4 Нумеричка процедура одређивања сопствених фреквенција.....	15
3. Попречне осцилације греда од функционално градијентних материјала - Ојлер-Бернулијев приступ.....	18
3.1 Уводна разматрања и поставка проблема попречних осцилација.....	18
3.2 Диференцијалне једначине попречних осцилација греде.....	20
3.3 Свођење једначина на бездимензиони облик.....	22
3.4 Нумеричка процедура одређивања сопствених фреквенција.....	25
4. Попречне осцилације греда од функционално градијентних материјала - Тимошенково приступ.....	29
4.1. Попречне осцилације аксијално оптерећене еластичне Тимошенкове греде ..	29
4.1.1 Диференцијалне једначине осциловања разматране греде.....	30
4.2 Слободне попречне осцилације еластичне Тимошенкове греде на еластичном Пастернаковом темељу.....	35
4.2.1 Диференцијалне једначине кретања непрекидне средине.....	36
4.2.2 Свођење диференцијалних једначина кретања на систем обичних линеарних диференцијалних једначина у бездимензионом облику.....	39
4.4 Нумеричка процедура одређивања сопствених фреквенција Тимошенкових греда.....	42
5. Спрегнуте уздужне и попречне осцилације Ојлер-Бернулијевих греда променљивог попречног пресека од функционално градијентних материјала.....	46
5.1 Парцијалне диференцијалне једначине уздужних и попречних осцилација еластичне греде.....	47
5.2 Контурни услови – општи случај ослањања.....	48
5.3 Свођење једначина на бездимензиони облик.....	52

5.4 Нумеричка процедура одређивања сопствених фреквенција спрегнутих уздужних и попречних осцилација	55
5.5 Услови ортогоналности модова осциловања.....	59
5.6 Одређивање константи у временској функцији	61
5.7 Утицај густине једног конститутивног материјала на сопствене фреквенције греде.....	66
5.8 Утицај масе крутог тела на десном крају греде на сопствене фреквенције осциловања греде	69
6. Нумерички примери.....	73
6.1 Нумерички пример 1	73
6.2 Нумерички пример 2	76
6.3 Нумерички пример 3	78
6.4 Нумерички пример 4	81
6.5 Нумерички пример 5	82
6.6 Нумерички пример 6	84
6.7 Нумерички пример 7	86
6.8 Нумерички пример 8	88
6.9 Нумерички пример 9	94
7. Закључак.....	100
8. Литература.....	102

1. Увод

Полазећи од примене осцилаторних својстава механичких система у старом свету, преко ренесансних научних заноса, који су најчешће обзриво презентовани, до развоја диференцијалног рачуна и формирања таласне једначине, човек је имао потребу да примени и објасни поменуте појаве осциловања. Историјски развој науке о осцилацијама детаљно је представљен од стране Раоа у [1], где се истиче да Л. Ојлер и Д. Бернули средином осамнаестог века дају решење проблема осциловања витке еластичне греде. Њихово решење не узима у обзир ефекте инерције и смицања попречног пресека греде приликом осциловања. Тек у двадесетом веку С. Тимошенко предлаже проширење ове теорије која укључује претходно поменуте ефекте.

Приликом савременог решавања проблема осциловања еластичних греда, као непрекидних средина, полази се од основних хипотеза механике континуума, у циљу формирања конститутивних једначина кретања. Једначине којима се описује кретање су парцијалне диференцијалне једначине са променљивим коефицијентима, који зависе од геометријских, масених и механичких карактеристика греде и одговарајућег конститутивног материјала као што се истиче у [2]. С обзиром на комплексност решавања овако формираних парцијалних диференцијалних једначина, у истраживањима и практичним инжењерским проблемима често се приступа процесу дискретизације конкретног модела греде у циљу вршења модалне анализе постављеног проблема. Тако се проблем осцилација еластичних греда може решавати посматрајући греду као систем са бесконачно много степени слободe, или као дискретан систем са коначним бројем степени слободe, када се еластична гредa представља моделом еластично повезаних крутих сегмената чији је број довољно велики да довољно добро описује кретање греде [2] и [3].

1.1 Анализа постављеног проблема и преглед доступне литературе

На основу пораста броја публикованих радова на предложену тему осцилација греда од функционално градијентних материјала, може се увидети тренд раста интересовања за наведену област механике. Функционално градијентни материјали су детаљно анализирани, са освртом на њихову производњу, примену и механичка својства у [4], односно у [5]. Као једна од главних предности функционално градијентних материјала, у односу на ламинарне композите је одсуство концентрације напона између слојева [6], што се постиже градијентним прелазом једног конститутивног материјала у други. С обзиром на техничке захтеве, развој адитивне производње омогућио је креирање делова од функционално градијентних материјала што је коментарисано и анализирано у литератури [7]–[10], а није тема ове дисертације.

У литератури се разликују греде код којих се масене и материјалне карактеристике материјала мењају попречно у односу на уздужну осу греде и они где се карактеристике мењају по уздужној оси [11]. Случај греда код којих се карактеристике материјала мењају по попречном пресеку греде неће бити анализиран у дисертацији. Први радови који испитују проблеме осциловања греда, чије се карактеристике мењају у правцима ортогоналним на подужну осу, публиковани су пре него што су функционално градијентни материјали, у данас подразумеваном облику, откривени, што је анализирано у [4]. Овај тип греда представља добро истражен део осцилација о чему сведоче бројне референце [12]–[16]. У предложеној дисертацији се анализирају линеарне хармонијске осцилације греда од функционално градијентних материјала чије се карактеристике мењају по уздужној оси греде и код којих је неутрална линија греде права линија у положају равнотеже. Због тога се из разматрања искључују проблеми осциловања лучних носача, као на пример, они разматрани у радовима [17]–[19]. Приликом решавања проблема уздужних и попречних, као и спрегнутих осцилација еластичних греда, чије се геометријске, масене и механичке карактеристике мењају по уздужној оси греде могуће је

спровести два општа приступа. Један приступ огледа се у дискретизацији греде на велики број крутих сегмената, чиме се греда моделује механичким системом са коначним бројем степени слободе, као у радовима [2], [3] и [20]. Овај приступ детаљно је описан у докторској дисертацији [2] са детаљном анализом пратеће литературе у односу на Ојлер-Бернулијеву конститутивну теорију. Други приступ решавања предложеног проблема огледа се кроз решавање тачних парцијалних диференцијалних једначина кретања непрекидне средине. Проблем са којим се истраживачи сусрећу, приликом решавања овако постављених механичких проблема, огледа се кроз променљиве коефицијенте у једначинама кретања. Ови коефицијенти зависе од геометријских карактеристика греде, масених и механичких карактеристика материјала од којих је греда израђена. Уколико је греда постављена на еластични темељ, коефицијенти и једначине се додатно компликују. Како би се превазишли ови проблеми у дисертацији се дискутује и предлаже могућност примене симболичко-нумеричког метода почетних параметара изложеног у раду [11], на решавање проблема уздужних и попречних осцилација Ојлер-Бернулијевих греда, попречних осцилација Тимошенкових греда и спрегнутих попречних и уздужних осцилација Ојлер-Бернулијевих греда. Уз то се даје предлог коришћења симболичко-нумеричког метода почетних параметара и на греде Тимошенковог типа. Овај метод израчунавања представља модификацију Бидермановог метода почетних параметара у диференцијалном облику који се предлаже за решавање проблема осциловања у књизи [21], а за израчунавања користи и у радовима [22] и [23]. Досадашња истраживања се ограничавају на специјалне типове и предефинисане законе промене геометрије греде, односно карактеристика материјала. Тако се у раду [24] одређује решење у затвореном облику осцилација греда код којих се закони промене густине и модула еластичности материјала описују полиномом. Како се у овој дисертацији разматрају општи закони промене густине и модула еластичности материјала, она дисертација представља уопштење анализе дате у поменутом раду. У раду [25] нумерички су решене диференцијалне једначине осциловања непрекидне средине на примеру греде са предефинисаном променом попречног пресека, густине и модула еластичности материјала. Метод почетних вредности који се примењује у [26]

заснива се на сличном принципу решавања као метод почетних параметара у диференцијалном облику изложен у [21], при чему се једначине кретања не свде на систем обичних линеарних диференцијалних једначина. С обзиром на примену симболичко-нумеричког метода почетних параметара као у [11] у моделима приказаним у дисертацији није потребно спроводити итеративну процедуру приликом рачунања сопствених фреквенција осциловања еластичних греда. Аутори у раду [23] користе метод почетних параметара у диференцијалном облику за решавање проблема попречних осцилација еластичних греда. У раду [27] аутори се ограничавају на три степенасте промене попречног пресека, док у овој дисертацији таквог ограничења нема. Компјутерска реализација примене модификованог метода почетних параметара у диференцијалном облику, на симболички облик израчунавања, може се вршити спровођењем процедура описаних у раду [11] односно спровођењем алгоритма представљеног у раду [28]. Аутор у раду [3] одређује сопствене фреквенције осциловања конзоле, од функционално градијентног материјала са крутим телом ексцентрично постављеном на крају конзоле, користећи нумерички ефикасан метод дискретизације конзоле на круте сегменте. У овој дисертацији врши се поређење резултата модификованог метода почетних параметара у диференцијалном облику, са резултатима приказаним у раду [3], као што је претходно поменуто. Најновија истраживања које се баве осциловањем Ојлер-Бернулијевих греда променљивих геометријских, масених и механичких карактеристика огледају се кроз референце [29] и [30], што представља додатну потврду актуелности теме ове докторске дисертације. Поред истраживања на тему осцилација греда од функционално градијентних материјала врше се и текућа истраживања у научној заједници на тему осциловања плоча и љуски што се огледа кроз рад [31] и литературу која га прати. С обзиром да Ојлер-Бернулијева теорија не узима у обзир ефекте инерције и смицања, почетком двадесетог века Тимошенко је дао проширење теорије које укључује поменуте феномене. За греде од функционално градијентних материјала које се моделују сходно Тимошенковој теорији литература је мање обимна од оне за греде моделоване Ојлер-Бернулијевом теоријом. У раду [32] анализирају се Ојлер-Бернулијеве и Тимошенкове хомогене греде на еластичном

темељу користећи метод коначних елемената, док се у раду [33] изводе канонске Гринове функције за савијање, извијање и осциловање хомогених Ојлер-Бернулијевих и Тимошенкових греда. Аутори у раду [34] формирају матрицу крутости за хомогену Тимошенкову греду на еластичном двопараметарском темељу са општим условима ослањања. Утицај двопараметарске еластичне пологе на осциловање Тимошенкове греде под дејством конзервативних аксијалних сила испитивана је у раду [35] користећи Рејли-Рицов метод. Аутори у раду [36] предлажу коришћење *DTM*-метода за одређивање сопствених фреквенција хомогених Тимошенкових греда на темељу Пастернаковог типа. Аналитичко решење проблема осциловања хомогених Тимошенкових греда на Винклеровом темељу, користећи Гринову функцију предложено је у раду [37]. Нови распоред коначних елемената за испитивање извијања и слободних осцилација Тимошенкових греда, које се ослањају на променљив еластични темељ, даје се у раду [38]. Утицај граничних услова на осциловање хомогених Тимошенкових греда на Винклеровом темељу разматра се у раду [39]. Осциловање нехомогених греда Тимошенковог типа које су на Винклеровом темељу анализирано је у радовима [40] и [41], док се у референци [42] користи исти метод као у [40] за решавање проблема осциловања нехомогених Тимошенкових греда променљивог попречног пресека, које су ослоњене на двопараметарски темељ тзв. Пастернаковог типа. Слободне и принудне осцилације Тимошенкових греда од аксијално функционално градијентних материјала, а које се ослањају на темељ Пастернаковог типа анализирани су у раду [43], где се диференцијалне једначине решавају свођењем на Лапласов домен. У овој дисертацији биће анализирани осцилације еластичних греда од функционално градијентних материјала у различитим окружењима и са различитим видовима ослањања, користећи симболичко-нумерички метод почетних параметара као у [11].

1.2 Садржај дисертације

У *првом* поглављу дисертације описан је проблем осциловања еластичних греда од функционално градијентних материјала и дат је преглед остварених резултата разматраног проблема са освртом на доступне литературне изворе. Анализирана је разлика између класичних композитних материјала и функционално градијентних материјала са освртом на могућности њихове производње и техничке примене у реалним конструкцијама. Поставља се граница између модела којима се описују осцилације греда чије се карактеристике мењају у попречном пресеку и оних којима се описује осциловање греда чије се карактеристике мењају по уздужној оси греде. Такође, дискутује се о различитим приступима решавању проблема осциловања, наиме разликују се модели у којима се врши дискретизација греде од оних у којима се греда моделира као непрекидна средина.

У *другом* поглављу дисертације посматра се еластична греда од функционално градијентног материјала чије се геометријске, масене и механичке карактеристике могу мењати по уздужној оси греде. Ова греда може вршити уздужне осцилације, па се за такве осцилације парцијална диференцијална једначина своди на систем обичних линеарних диференцијалних једначина које су погодне за коришћење у симболичко-нумеричком методу почетних параметара на основу чега се одређују сопствене фреквенције и модови осциловања еластичне греде. Коришћене су конститутивне релације Ојлер-Бернулијеве теорије. Контурни услови диференцијалних једначина кретања одређени су начином ослањања греде. Ослањање се моделира коришћењем опруга одговарајућих крутости. На левом, односно десном крају греде круто су спојена тела чија се тежишта поклапају са крајњим тачкама греде.

У *трећем* поглављу дисертације посматра се еластична греда чије се геометријске, масене и механичке карактеристике могу мењати по уздужној оси, при чему посматрана греда може вршити само попречне осцилације. За попречне (трансверзалне) хармонијске осцилације изведена је парцијална диференцијална

једначина и сведена је на систем обичних линеарних диференцијалних једначина које су погодне за коришћење у симболичко-нумеричком методу почетних параметара (*SNMIP*). Коришћењем *SNMIP* метода описан је поступак за одређивање сопствених фреквенција и модова осциловања греде. Контурни услови диференцијалних једначина кретања одређени су начином ослањања греде на вертикалне опруге и спиралне опруге одговарајућих крутости на оба краја греде. На левом, односно десном крају греде, круто су спојена тела чија тежишта се поклапају са крајњим тачкама греде. Приликом извођења једначина коришћене су конститутивне релације Ојлер-Бернулијеве теорије.

У **четврто**м поглављу дисертације, за извођење диференцијалних једначина осциловања еластичних греда, с обзиром на конститутивне релације Тимошенкове теорије, користе се варијациони принципи механике. Одређују се диференцијалне једначине кретања аксијално оптерећене греде променљивог попречног пресека која се ослања на еластичне ослоње слично као у трећем поглављу дисертације. У овом случају сматра се да на крајевима греда нема концентрисаних маса. Описан је поступак извођења диференцијалних једначина користећи модификовани Хамилтонов принцип, с обзиром на већ одређену кинетичку и потенцијалну енергију система. Овај поступак је примењен и на одређивање диференцијалних једначина кретања Тимошенкове греде која се ослања на еластичну подлогу Пастернаковог типа, при чему се карактеристике подлоге као и карактеристике греде, могу мењати по уздужној оси греде. Слично као у поглављу 3, врши се ослањање крајева греде коришћењем опруга. Овако изведен систем парцијалних диференцијалних једначина своди се на систем обичних линеарних диференцијалних једначина са променљивим коефицијентима који је погодан за примену симболичко-нумеричког метода почетних параметара у диференцијалном облику.

У **петом** поглављу дисертације анализиране су спрегнуте уздужне и попречне осцилације греда од функционално градијентних материјала са произвољним законом промене површине попречног пресека греде по њеној уздужној оси. У анализи су примењене једначине Ојлер-Бернулијеве теорије. Ослањање греде на сваком крају извршено је помоћу две опруге чије су подужне осе међусобно управне

и једне спиралне опруге. На оба краја посматране греде круто су спојена тела чија су средишта маса постављена ексцентрично у односу на крајеве греде. Парцијалне диференцијалне једначине кретања сведене су на систем спрегнутих обичних линеарних диференцијалних једначина са променљивим коефицијентима који је погодан за примену симболичко-нумеричког метода почетних параметара у диференцијалном облику. Дат је опис метода одређивања сопствених фреквенција и модова осциловања система. За произвољне почетне услове изведене су константе у временској функцији хармонијских осцилација, а касније и услови ортогоналности спрегнутих модова осциловања. Даље се анализира утицај карактеристика материјала и крутог тела постављеног на крају греде на њене сопствене фреквенције.

У *шестом* поглављу дисертације представљено је девет примера у којима је извршено упоређивање резултата публикованих у доступној литератури са резултатима који су добијени применом метода презентованих у дисертацији следствено датим поглављима.

На крају, у *седмом* поглављу дисертације дата су закључна разматрања са освртом да представљене и анализирани проблеме осциловања. Даје се осврт на могућа будућа истраживања у области раванских линеарних осцилација греда са променљивим геометријским, масеним и механичким карактеристикама по уздужној оси.

2. Уздужне осцилације греда од функционално градијентних материјала - Ојлер-Бернулијев приступ

2.1 Уводна разматрања и поставка проблема уздужних осцилација

У овом поглављу врши се аналитичка и нумеричка анализа уздужних малих осцилација еластичних греда од функционално градијентних материјала следећи начела Ојлер-Бернулијеве теорије. Нека еластична греда, приказана на слици 1, може да осцилује у правцу своје подужне осе. Кретање греде посматра се у односу на инерцијални координатни систем $Oxuz$. Материјал греде је такав да се његове карактеристике мењају по уздужној оси греде. С обзиром на наведену природу материјала карактеристике које се мењају по уздужној оси посматране греде, одређене су z координатом правоуглог Декартовог координатног система као:

$$- \quad E = E(z) \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] - \text{модул еластичности материјала греде и}$$

$$- \quad \rho = \rho(z) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] - \text{густина материјала греде.}$$

У општем случају геометријске карактеристике попречног пресека греде су такође произвољне функције и то:

$$- \quad I_x = I_x(z) \left[\text{m}^4 \right] - \text{аксијални момент инерције попречног пресека греде и}$$

$$- \quad A = A(z) \left[\text{m}^2 \right] - \text{површина попречног пресека греде.}$$

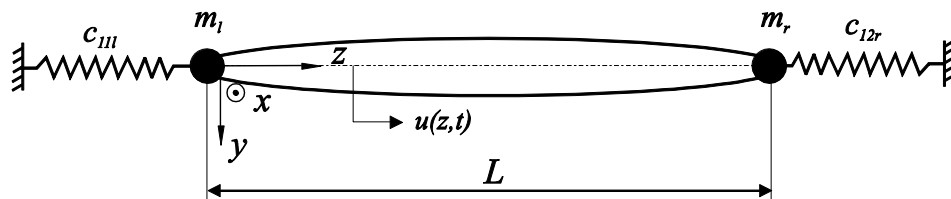
Претходне геометријске карактеристике попречног пресека и материјала еластичне греде условљене су законима промене геометријских и физичких карактеристика греде у смислу аналитички дефинисаних функција на домену $z \in [0, L]$ где је $L[\text{m}]$ дужина греде.

На леви, односно десни крај греде са слике 1 причвршћена су два тела, чије су масе m_l и m_r респективно.

Нека се ослањање греде врши преко опруга чије су крутости:

- $c_{11l} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ – крутост опруге на левом крају греде и
- $c_{12r} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ – крутост опруге на десном крају греде.

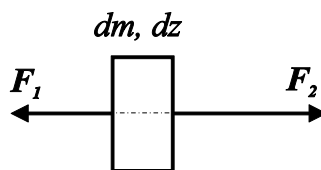
За уздужна померања пресека греде са координатом z , у тренутку t користиће се ознака $u(z,t)$.



Слика 1. Еластична греда са концентрисаним масама на крајевима која се ослања на опруге [11]

2.2 Диференцијалне једначине уздужних осцилација греде

У циљу извођења диференцијалних једначина еластичне греде може се уочити сегмент греде приказан на слици 2. Нека на сегмент масе dm и дужине dz дејствују силе интензитета $F_1 = F_a$ и $F_2 = F_a + dF_a$ правца и смера као на слици 2.



Слика 2. Један сегмент еластичне греде оптерећен силама дуж осе греде

Применом другог Њутновог закона на уочени сегмент долази се до диференцијалне једначине кретања произвољног сегмента еластичне греде:

$$dm(z) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(z,t) = \frac{\partial}{\partial z} F_a(z,t) dz, \quad (2.1)$$

где је време означено са t , док је са $F_a(z,t)$ означена пројекција силе која дејствује нормално на попречни пресек греде одређен координатом z у тренутку t .

Након што се маса сегмента изрази преко материјалних и геометријских карактеристика попречног пресека, једначина (2.1) постаје:

$$\rho(z) A(z) dz \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(z,t) = \frac{\partial}{\partial z} F_a(z,t) dz. \quad (2.2)$$

Приликом извођења једначина кретања посматра се случај хармонијских осцилација еластичних греда чије кретање је описано парцијалним диференцијалним једначинама. Може се применити принцип раздвајања променљивих приликом решавања једначина кретања еластичне греде у попречном пресеку одређеном координатом z у тренутку t и као:

- $u(z,t) = U(z)T(t)$ - уздужна померања,
- $F_a(z,t) = F_a(z)T(t)$ - аксијална сила,

док се временска функција претпоставља у облику [44]:

$$T(t) = K \cos \omega t + S \sin \omega t, \quad (2.3)$$

где K и S представљају константе, а ω сопствену фреквенцију греде.

Након примене диференцијалних и алгебарских операција, једначина (2.2) трансформише се у следећи диференцијални облик:

$$-\omega^2 \rho(z) A(z) dz U(z) T(t) = \frac{\partial}{\partial z} F_a(z) dz T(t). \quad (2.4)$$

Елиминацијом временске функције добијен је диференцијални облик модалне једначине кретања:

$$\frac{d}{dz} F_a(z) + \omega^2 \rho(z) A(z) U(z) = 0. \quad (2.5)$$

Сходно Ојлер-Бернулијевој теорији, користећи Хуков закон линеарне еластичности, може се писати:

$$F_a(z,t) = E(z)A(z)\frac{du(z,t)}{dz} = E(z)A(z)\frac{dU(z)}{dz}T(t). \quad (2.6)$$

С обзиром на ослањање еластичне греде као на слици 1, одређују се леви и десни контурни услови осциловања.

Контурни услови диференцијалне једначине осциловања на левом крају греде, одређеном координатом $z=0$ као у [11] су:

$$F_a(0,t) - m_l \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} - c_{11l} u(0,t) = 0. \quad (2.7)$$

На десном крају греде контурни услови дати су изразом као у [11]:

$$F_a(L,t) + m_r \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial t^2} + c_{11r} u(L,t) = 0. \quad (2.8)$$

2.3 Свођење једначина на бездимензиони облик

У циљу смањења обима израчунавања може се извршити свођење карактеристичних величина и диференцијалних једначина кретања на бездимензиони облик као у [11].

Бездимензиона координата \bar{z} уводи се на следећи начин:

$$\bar{z} = \frac{z}{L}. \quad (2.9)$$

Бездимензиона координата \bar{z} припада јединичном интервалу позитивних реалних бројева, што може бити писано као $0 \leq \bar{z} \leq 1$, пошто је са L означена дужина греде.

Уздужно померање своди се на бездимензиони облик користећи количник:

$$\bar{U}(\bar{z}) = \frac{U(z)}{L}. \quad (2.10)$$

Бездимензиона површина попречног пресека у пресеку одређеном бездимензионом координатом \bar{z} еластичне греде се може записати као количник:

$$\bar{A}(\bar{z}) = \frac{A(z)}{A_0}, \quad (2.11)$$

где је $A_0 = A(0) [\text{m}^2]$ - површина попречног пресека греде за $z=0$.

Аксијална сила у попречном пресеку своди се на бездимензиони облик применом следеће алгебарске трансформације:

$$\bar{F}_a(\bar{z}) = \frac{F_a(z)L^2}{E_0 I_{x0}}, \quad (2.12)$$

где су геометријске и материјалне величине одређене следећим ознакама:

- $L [\text{m}]$ - дужина еластичне греде,
- $E_0 = E(0) \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$ - модул еластичности конститутивног материјала на левом крају греде ($z=0$),
- $I_{x0} = I_x(0) [\text{m}^4]$ - аксијални момент инерције попречног пресека греде за $z=0$.

Густина материјала своди се на бездимензиони облик применом следеће алгебарске трансформације:

$$\bar{\rho}(\bar{z}) = \frac{\rho(z)}{\rho_0}, \quad (2.13)$$

где је $\rho_0 = \rho(0) \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]$ - густина конститутивног материјала за $z=0$.

Модул еластичности материјала греде у пресеку означеном бездимензионом координатом \bar{z} може се записати као количник:

$$\bar{E}(\bar{z}) = \frac{E(z)}{E_0}. \quad (2.14)$$

Бездимензионе масе терета на левом, односно десном крају греде могу се записати као количници, респективно:

$$\bar{m}_l = \frac{m_l}{\rho_0 A_0 L}, \quad (2.15)$$

$$\bar{m}_r = \frac{m_r}{\rho_0 A_0 L}. \quad (2.16)$$

Приликом свођења диференцијала на бездимензиону координату \bar{z} добија се:

$$z' \equiv \frac{d}{dz} = \frac{1}{L} \frac{d}{d\bar{z}}. \quad (2.17)$$

Крутости опруга свде се на бездимензиони облик користећи наредне изразе:

$$\bar{c}_{11l} = c_{11l} \frac{L^3}{E_0 I_{x0}}, \quad (2.18)$$

$$\bar{c}_{12r} = c_{12r} \frac{L^3}{E_0 I_{x0}}. \quad (2.19)$$

Приликом моделовања ослонаца опругама, у случају уклештења крутости опруга су бесконачно велики бројеви. У том случају јављају се проблеми нумеричког израчунавања са бесконачно великим бројевима. Како би се елиминисала потреба за овим типом израчунавања, сходно процедури предложеној у радовима [11] и [23], алгебарским трансформацијама могуће је крутости опруга свести на јединични интервал, односно $\bar{c}_{11l}^* \in [0, 1]$, $\bar{c}_{12r}^* \in [0, 1]$.

Крутости опруга којима се моделују ослонци еластичне греде, приказане на слици 1 свде се на јединични интервал применом следећих алгебарских трансформација:

$$\bar{c}_{11l}^* = \frac{\bar{c}_{11l}}{1 + \bar{c}_{11l}}, \quad (2.20)$$

$$\bar{c}_{12r}^* = \frac{\bar{c}_{12r}}{1 + \bar{c}_{12r}}. \quad (2.21)$$

Сопствена фреквенција свди се на бездимензиони облик преко претходно дефинисаних величина на следећи начин:

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho_0 A_0 L^4}{E_0 I_{x0}}}. \quad (2.22)$$

На основу овако уведених бездимензионих величина, диференцијалне једначине (2.5) и (2.6) кретања непрекидне средине могу се писати као:

$$\frac{d}{d\bar{z}} \bar{F}_a(\bar{z}) = -\bar{\omega}^2 \bar{\rho}(\bar{z}) \bar{A}(\bar{z}) \bar{U}(\bar{z}), \quad (2.23)$$

$$\bar{F}_a(\bar{z}) = \bar{E}(\bar{z})\bar{A}(\bar{z})\frac{d\bar{U}(\bar{z})}{d\bar{z}}. \quad (2.24)$$

Сходно уведеним ознакама бездимензионих величина, контурни услови на греди се могу писати у следећем облику као у [11]:

$$\left(1 - \bar{c}_{11l}^*\right)\bar{F}_a(0) + \left[-\bar{c}_{11l}^* + \bar{\omega}^2 \bar{m}_l \left(1 - \bar{c}_{11l}^*\right)\right]\bar{U}(0) = 0, \quad (2.25)$$

$$\left(1 - \bar{c}_{12r}^*\right)\bar{F}_a(1) + \left[\bar{c}_{11l}^* - \bar{\omega}^2 \bar{m}_r \left(1 - \bar{c}_{12r}^*\right)\right]\bar{U}(1) = 0. \quad (2.26)$$

Наредно поглавље посвећено је проблему нумеричких прорачуна користећи метод представљен у референци [11], а који је назван симболичко-нумерички метод почетних параметара (*SNMIP*).

2.4 Нумеричка процедура одређивања сопствених фреквенција

Сходно процедури приказаној у раду [11], уводи се вектор бездимензионих величина $\bar{X}_a(\bar{z})$, као:

$$\bar{X}_a(\bar{z}) = \left[\bar{U}(\bar{z}) \quad \bar{F}_a(\bar{z})\right]^T. \quad (2.27)$$

С обзиром на релације (2.23) и (2.24), уводи се матрица $\bar{T}(\bar{z})$ реда 2x2 као:

$$\mathbf{T}(\bar{z}, \bar{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\bar{A}(\bar{z})\bar{E}(\bar{z})} \\ -\bar{\omega}^2 \bar{\rho}(\bar{z})\bar{A}(\bar{z}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Сада се систем диференцијалних једначина, које описују кретање непрекидне средине у бездимензионом облику, може представити у матричном запису као што следи:

$$\frac{d}{dz} \bar{X}_a = \bar{T} \bar{X}_a. \quad (2.29)$$

Једначине (2.29), (2.25) и (2.26) заједно формирају двотачкасти гранични проблем чије решавање је детаљно описано у [11] и [21]. Користећи симболичко-нумерички метод почетних параметара у диференцијалном облику, може се писати решење проблема у облику:

$$\bar{X}_a(\bar{z}) = C_1 \bar{X}_{a1}(\bar{z}, \bar{\omega}), \quad (2.30)$$

где C_1 представља непознату константу, а вектор $\bar{X}_{a1}(\bar{z}, \bar{\omega}) = [\bar{U}_1(\bar{z}, \bar{\omega}) \quad \bar{F}_{a1}(\bar{z}, \bar{\omega})]^T$ представља вектор партикуларних решења система обичних линеарних диференцијалних једначина (2.29) за почетне услове у општем случају:

$$\bar{U}(0) = \frac{1 - \bar{c}_{11l}^*}{\bar{c}_{11l}^* - \bar{\omega} \bar{m}_l (1 - \bar{c}_{11l}^*)}, \bar{F}_a(0) = 1. \quad (2.31)$$

За случај $\bar{c}_{11l}^* = 0$ и $\bar{m}_l = 0$ почетни услови свде се на постојање померања и одсуство уздужних сила на левом крају еластичне греде, односно штапа стриктно следећи номенклатуру представљену у [45], што се може писати као [11]:

$$\bar{U}(0) = 1, \bar{F}_a(0) = 0. \quad (2.32)$$

Непозната константа C_1 одређује се тако да решење у облику (2.30) задовољава контурни услов (2.26) као:

$$C_1 \left[(1 - \bar{c}_{12r}^*) \bar{F}_{a1}(1, \bar{\omega}) + (\bar{c}_{12r}^* - \bar{m}_r \bar{\omega}^2 (1 - \bar{c}_{12r}^*)) \bar{U}_1(1, \bar{\omega}) \right] = 0. \quad (2.33)$$

Како би константа C_1 била различита од нуле потребно је да следећи израз има вредност једнаку нули:

$$(1 - \bar{c}_{12r}^*) \bar{F}_{a1}(1, \bar{\omega}) + (\bar{c}_{12r}^* - \bar{m}_r \bar{\omega}^2 (1 - \bar{c}_{12r}^*)) \bar{U}_1(1, \bar{\omega}) = 0. \quad (2.34)$$

Тако једначина (2.34) представља фреквентну једначину постављеног проблема. Ова једначина решава се нумерички, применом нумеричких метода и софтверских решења описаних у раду [11] и [28].

За овако одређену сопствену фреквенцију одређује се облик мода осциловања након што се добијена фреквенција уврсти у једначину (2.30):

$$\bar{U}_\alpha(\bar{z}) = C_1 \bar{U}_1(\bar{z}, \bar{\omega}_\alpha). \quad (2.35)$$

где индекс α означава број мода осциловања.

3. Попречне осцилације греда од функционално градијентних материјала - Ојлер-Бернулијев приступ

3.1 Уводна разматрања и поставка проблема попречних осцилација

У овом поглављу анализирају се линеарне осцилације еластичних греда од функционално градијентних материјала користећи конститутивне релације из Ојлер-Бернулијеве теорије. На слици 3 приказана је еластична греда која може да осцилује у правцу управном на своју подужну осу. Кретање греде посматра се у односу на инерцијални координатни систем $Oxyz$, такође приказан на слици 3. Претпоставља се да је греда израђена од функционално градијентног материјала чије се карактеристике мењају по уздужној оси греде. С обзиром на наведену природу материјала, нека су карактеристике које се мењају по уздужној оси посматране греде одређене релацијама:

$$- E = E(z) \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] - \text{модул еластичности материјала греде и}$$

$$- \rho = \rho(z) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] - \text{густина материјала греде.}$$

У општем случају геометријске карактеристике попречног пресека греде су произвољне алгебарске функције и то:

$$- I_x = I_x(z) \left[\text{m}^4 \right] - \text{аксијални момент инерције попречног пресека греде и}$$

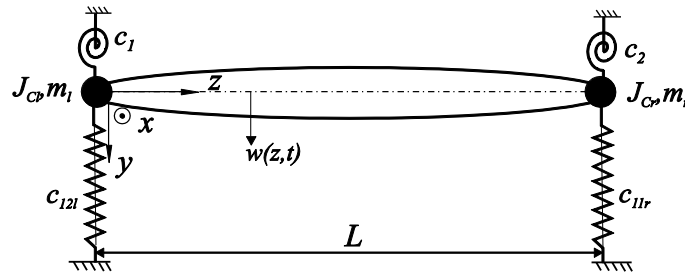
$$- A = A(z) \left[\text{m}^2 \right] - \text{површина попречног пресека греде.}$$

На левом крају посматране греде причвршћено је тело масе m_l , чији је момент инерције J_{Cl} , док је на десном крају круто везано тело масе m_r и момента инерције J_{Cr} .

Нека се ослањање греде врши преко опруга чије су крутости:

- $c_{12l} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ – крутост опруге на левом крају греде,
- $c_1 [\text{Nm}]$ – крутост спиралне опруге на левом крају греде,
- $c_{11r} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ – крутост опруге на десном крају греде и
- $c_2 [\text{Nm}]$ – крутост спиралне опруге на десном крају греде.

За попречна померања тачке на неутралној оси греде, чији је положај одређен координатом z , у тренутку t користи се ознака $w(z,t)$ као што је приказано на слици 3.

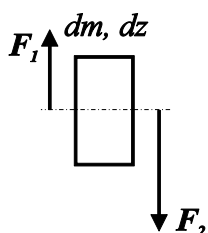


Слика 3. Еластична греда са концентрисаним масама на крајевима, која се ослања на две опруге и две спиралне опруге [11]

Нека су геометријске и материјалне карактеристике греде дефинисане као аналитичке функције на домену $z \in [0, L]$, где је $L[\text{m}]$ дужина греде, аналогно поглављу 2.1.

3.2 Диференцијалне једначине попречних осцилација греде

За извођење диференцијалних једначина попречних осцилација греде уочава се сегмент греде приказан на слици 4. Нека је маса сегмента dm , његова дужина dz , а положај у односу на инерцијални координатни систем (слика 3) одређен координатом z . На сегмент дејствују смичуће силе интензитета $F_1=F_t$ и $F_2=F_t+dF_t$, као што је приказано на слици 4.



Слика 4. Сегмент еластичне греде оптерећен трансверзалним силама

Применом другог Њутновог закона на учени сегмент, долази се до диференцијалне једначине кретања сегмента:

$$dm(z) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} F_t(z,t) dz, \quad (3.1)$$

где је време означено словом t , док је са $F_t(z,t)$ означена сила која дејствује нормално на подужну осу греде, у пресеку одређеном координатом z , у тренутку t .

Сходно карактеристикама материјала и геометрије греде, описане у поглављу 3.1, маса сегмента може се изразити преко материјалних и геометријских карактеристика попречног пресека, на основу чега једначина (3.1) добија облик:

$$\rho(z) A(z) dz \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} F_t(z,t) dz. \quad (3.2)$$

На овако записану једначину може се применити метод раздвајања променљивих z и t као:

- $w(z,t) = W(z)T(t)$ - попречна померања,
- $F_t(z,t) = F_t(z)T(t)$ - трансверзална сила.

Временска функција претпоставља се у облику као у [46], односно [44]:

$$T(t) = K \cos \omega t + S \sin \omega t. \quad (3.3)$$

Након примене принципа раздвајања променљивих и двоструког диференцирања временске функције, диференцијална једначина добија следећи облик:

$$-\omega^2 \rho(z) A(z) dz W(z) T(t) = \frac{\partial}{\partial z} F_t(z) dz T(t). \quad (3.4)$$

Елиминацијом временске функције из једначине (3.4) добијен је диференцијални облик модалне једначине кретања:

$$\frac{d}{dz} F_t(z) + \omega^2 \rho(z) A(z) W(z) = 0. \quad (3.5)$$

Сходно Ојлер-Бернулијевој теорији примењујући метод раздвајања променљивих по процедурама приказаним у књигама [46], односно [44], изрази за момент савијања $M_f(z, t)$ и трансверзалну силу $F_t(z, t)$, у попречном пресеку одређеном координатом z , гласе:

$$M_f(z, t) = -E(z) I_x(z) \frac{dW'(z)}{dz} T(t) = M_f(z) T(t), \quad (3.6)$$

$$F_t(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} (M_f(z, t)) = F_t(z) T(t), \quad (3.7)$$

где је са $W'(z)$ означен први извод: $W'(z) \equiv \frac{d}{dz} W(z)$.

За постављени проблем осциловања еластичне греде одређени су леви и десни контурни услови осциловања.

Након ослобађања од веза контурни услови на левом крају греде са координатом $z=0$ су:

$$F_t(0, t) - m_l \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial t^2} - c_{12l} w(0, t) = 0, \quad (3.8)$$

$$M_f(0, t) + J_{cl} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0, t) + c_{12l} \frac{\partial w}{\partial z}(0, t) = 0. \quad (3.9)$$

Контурни услови на десном крају греде који је одређен координатом $z=L$ су:

$$F_t(L,t) + m_r \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2} + c_{11r} w(L,t) = 0, \quad (3.10)$$

$$M_f(L,t) - J_{cl} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(L,t) - c_{12l} \frac{\partial w}{\partial z}(L,t) = 0. \quad (3.11)$$

3.3 Свођење једначина на бездимензиони облик

За потребе свођења диференцијалних једначина кретања на бездимензиони облик, поред величина уведених у поглављу 2.3, уводе се додатне бездимензионе величине као у [11].

Крутости опруга своде се на бездимензиони облик коришћењем наредних израза слично као у поглављу 2 овог рада:

$$\bar{c}_{12l} = c_{12l} \frac{L^3}{E_0 I_{x0}}, \quad (3.12)$$

$$\bar{c}_{11r} = c_{11r} \frac{L^3}{E_0 I_{x0}}, \quad (3.13)$$

при чему су све величине претходно дефинисане у поглављу 2.

Крутости спиралних опруга своде се на бездимензиони облик коришћењем израза:

$$\bar{c}_1 = c_1 \frac{L}{E_0 I_{x0}}, \quad (3.14)$$

$$\bar{c}_2 = c_2 \frac{L}{E_0 I_{x0}}, \quad (3.15)$$

где су L , E_0 и I_{x0} претходно дефинисане величине.

Слично као у поглављу 2.3, бездимензионе крутости опруга су сведене на јединични интервал:

$$\bar{c}_{12l}^* = \frac{\bar{c}_{12l}}{1 + \bar{c}_{12l}}, \quad (3.16)$$

$$\bar{c}_{11r}^* = \frac{\bar{c}_{11r}}{1 + \bar{c}_{11r}}. \quad (3.17)$$

Крутости спиралних опруга којима се моделују ослонци еластичне греде приказане на слици 3, свде се на јединични интервал применом следећих алгебарских трансформација:

$$\bar{c}_1^* = \frac{\bar{c}_1}{1 + \bar{c}_1}, \quad (3.18)$$

$$\bar{c}_2^* = \frac{\bar{c}_2}{1 + \bar{c}_2}. \quad (3.19)$$

Бездимензионо попречно померање записује се у виду количника познатих величина:

$$\bar{W}(\bar{z}) = \frac{1}{L} W(z). \quad (3.20)$$

Бездимензиони нагиб једнак је физичком нагибу:

$$\bar{W}'(\bar{z}) = W'(z). \quad (3.21)$$

Трансверзална сила у попречном пресеку своди се на бездимензиони облик применом следеће алгебарске трансформације:

$$\bar{F}_t(\bar{z}) = \frac{F_t(z)L^2}{E_0 I_{x0}}, \quad (3.22)$$

Момент савијања у попречном пресеку своди се на бездимензиони облик применом следеће алгебарске трансформације:

$$\bar{M}_f(\bar{z}) = \frac{M_f(z)L}{E_0 I_{x0}}. \quad (3.23)$$

Изрази за бездимензионе облике маса круто спојених терета на крајевима греде записани су као (2.15) и (2.16).

Бездимензиони моменти инерције крутих тела на левом, односно десном крају уведени су као количници:

$$\bar{J}_{Cl} = \frac{J_{Cl}}{\rho_0 A_0 L^3}, \quad (3.24)$$

$$\bar{J}_{Cr} = \frac{J_{Cr}}{\rho_0 A_0 L^3}. \quad (3.25)$$

Приликом двоструког диференцирања по координати z постоји следећа веза других извода са диференцирањем по бездимензионој координати \bar{z} :

$$\frac{d^2}{dz^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2}{d\bar{z}^2}.$$

Приликом троструког диференцирања по координати z постоји следећа веза трећег извода са диференцирањем по координати \bar{z} :

$$\frac{d^3}{dz^3} = \frac{1}{L^3} \frac{d^3}{d\bar{z}^3}. \quad (3.26)$$

Диференцијалне једначине (3.5) и (3.6) у бездимензионом облику сада гласе:

$$\bar{M}_f(z) + \bar{E}(z) \bar{I}_x(z) \frac{d^2}{dz^2} \bar{W}(z) = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{d}{dz} \bar{F}_t(z) + \bar{\omega}^2 \rho(z) A(z) W(z) = 0. \quad (3.28)$$

Бездимензионе једначине контурних услова (3.8) до (3.11) су облика као у [11]:

$$\left(1 - \bar{c}_{12l}^*\right) \bar{F}_t(0) + \left[\bar{\omega}^2 \bar{m}_l \left(1 - \bar{c}_{12l}^*\right) - \bar{c}_{12l}^*\right] \bar{W}(0) = 0, \quad (3.29)$$

$$\left(1 - \bar{c}_2^*\right) \bar{M}(0) - \left[\bar{\omega}^2 \bar{J}_{Cl} \left(1 - \bar{c}_2^*\right) - \bar{c}_2^*\right] \bar{W}'(0) = 0, \quad (3.30)$$

$$\left(1 - \bar{c}_{11r}^*\right) \bar{F}_t(1) - \left[\bar{\omega}^2 \bar{m}_r \left(1 - \bar{c}_{11r}^*\right) - \bar{c}_{11r}^*\right] \bar{W}(1) = 0, \quad (3.31)$$

$$\left(1 - \bar{c}_2^*\right) \bar{M}_f(1) + \left[\bar{\omega}^2 \bar{J}_{Cr} \left(1 - \bar{c}_2^*\right) - \bar{c}_2^*\right] \bar{W}'(1) = 0. \quad (3.32)$$

У наредном поглављу биће описана примена модификованог симболичко-нумеричког метода почетних параметара за решавање система линеарних диференцијалних једначина [11] на који се постављени проблем своди.

3.4 Нумеричка процедура одређивања сопствених фреквенција

Сходно процедури приказаној у раду [11], а за потребе симболичко-нумеричког метода почетних параметара уводи се вектор непознатих бездимензионих величина:

$$\bar{\mathbf{X}}_t(\bar{z}) = \left[\bar{W}(\bar{z}) \quad \bar{W}'(\bar{z}) \quad \bar{F}_t(\bar{z}) \quad \bar{M}_f(\bar{z}) \right]^T. \quad (3.33)$$

Диференцијали по бездимензионој координати \bar{z} , елемената вектора $\bar{\mathbf{X}}(\bar{z})$ могу бити записани у транспонованом облику у виду једначине:

$$\frac{d}{d\bar{z}} \bar{\mathbf{X}}_t(\bar{z}) = \left[\frac{d}{d\bar{z}} \bar{W}(\bar{z}) \quad \frac{d}{d\bar{z}} \bar{W}'(\bar{z}) \quad \frac{d}{d\bar{z}} \bar{F}_t(\bar{z}) \quad \frac{d}{d\bar{z}} \bar{M}_f(\bar{z}) \right]^T. \quad (3.34)$$

На основу диференцијалних веза (3.27) и (3.28) формира се матрица реда 4x4:

$$\mathbf{T}(\bar{z}, \bar{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\bar{E}(\bar{z})\bar{I}_x(\bar{z})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\bar{\omega}^2 \bar{\rho}(\bar{z}) \bar{A}(\bar{z}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Систем диференцијалних једначина које описују попречне осцилације посматране греде у бездимензионом облику може се приказати у виду следећег матричног записа:

$$\frac{d}{dz} \bar{\mathbf{X}}_a = \mathbf{T} \bar{\mathbf{X}}_a. \quad (3.36)$$

Једначине (3.36) и (3.29) - (3.32) заједно формирају двотачкасти гранични проблем чије решавање је детаљно описано у [11] и [21]. Користећи модификовани модел почетних параметара у диференцијалном облику, а због линеарности система диференцијалних једначина решење проблема може се писати у облику:

$$\bar{\mathbf{X}}_t(\bar{z}) = C_1 \bar{\mathbf{X}}_{t1}(\bar{z}, \bar{\omega}) + C_2 \bar{\mathbf{X}}_{t2}(\bar{z}, \bar{\omega}), \quad (3.37)$$

где C_1 и C_2 представљају непознате интеграционе константе, док вектори:

$$\bar{X}_{ii}(\bar{z}) = \left[\bar{W}_i(\bar{z}) \quad \bar{W}'_i(\bar{z}) \quad \bar{F}_{ii}(\bar{z}) \quad \bar{M}_{fi}(\bar{z}) \right]^T, i=1,2, \quad (3.38)$$

представљају векторе партикуларних решења система обичних линеарних диференцијалних једначина (3.36) за одговарајуће почетне услове.

На основу граничних услова (3.29) и (3.30) могу се писати почетни услови система (3.36) у следећем облику:

за $i=1$:

$$\bar{W}(0) = \frac{\bar{c}_{12l}^* - 1}{\bar{\omega} \bar{m}_l (1 - \bar{c}_{12l}^*) - \bar{c}_{12l}^*}, \bar{W}'(0) = 0, \bar{F}_t(0) = 1, \bar{M}_f(0) = 0, \quad (3.39)$$

за $i=2$:

$$\bar{W}(0) = 0, \bar{W}'(0) = \frac{1 - \bar{c}_1}{\bar{\omega} \bar{J}_{Cl} (1 - \bar{c}_1^*) - \bar{c}_1}, \bar{F}_t(0) = 0, \bar{M}_f(0) = 1, \quad (3.40)$$

У случају када је $\bar{J}_{Cl} = 0$ и $\bar{m}_l = 0$ почетни услови анализирани су у раду [11] анализирани за случај слободног левог краја греде, затим непокретне зглобне везе и вертикално усмереног покретног уклештеног ослонца. За случај уклештеног левог краја греде може се писати:

$$\bar{W}(0) = 0, \bar{W}'(0) = 0, \bar{F}_t(0) = 0, \bar{M}_f(0) = 1, \quad (3.41)$$

$$\bar{W}(0) = 0, \bar{W}'(0) = 0, \bar{F}_t(0) = 1, \bar{M}_f(0) = 0. \quad (3.42)$$

Непознате константе C_1 и C_2 одређују се тако да решење у облику представљеном једначином (3.37) задовољава почетне услове (3.39) и (3.40), односно (3.41) и (3.42) као систем:

$$\begin{bmatrix} a_{11}(\bar{\omega}) & a_{12}(\bar{\omega}) \\ a_{21}(\bar{\omega}) & a_{22}(\bar{\omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Коефицијенти матрице a_{ij} дефинисани су следећим изразима:

$$a_{11}(\bar{\omega}) = (1 - \bar{c}_{11r}^*) \bar{F}_{t1}(1, \bar{\omega}) - \left[\bar{\omega} \bar{m}_r (1 - \bar{c}_{11r}^*) - \bar{c}_{11r}^* \right] \bar{W}_1(1, \bar{\omega}), \quad (3.44)$$

$$a_{12}(\bar{\omega}) = (1 - \bar{c}_{11r}^*) \bar{F}_{t2}(1, \bar{\omega}) - \left[\bar{\omega} \bar{m}_r (1 - \bar{c}_{11r}^*) - \bar{c}_{11r}^* \right] \bar{W}_2(1, \bar{\omega}), \quad (3.45)$$

$$a_{21}(\bar{\omega}) = (1 - \bar{c}_2^*) \bar{M}_{f1}(1, \bar{\omega}) + \left[\bar{\omega} \bar{J}_{Cr} (1 - \bar{c}_2^*) - \bar{c}_2^* \right] \bar{W}'_1(1, \bar{\omega}), \quad (3.46)$$

$$a_{22}(\bar{\omega}) = (1 - \bar{c}_2^*) \bar{M}_{f2}(1, \bar{\omega}) + \left[\bar{\omega} \bar{J}_{Cr} (1 - \bar{c}_2^*) - \bar{c}_2^* \right] \bar{W}'_2(1, \bar{\omega}). \quad (3.47)$$

Како би константе C_1 и C_2 имале ненулте вредности потребно је да детерминанта система (3.43) буде једнака нули, односно:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(\bar{\omega}) & a_{12}(\bar{\omega}) \\ a_{21}(\bar{\omega}) & a_{22}(\bar{\omega}) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.48)$$

Уведена је ознака $h_t(\bar{\omega})$ за фреквентну једначину проблема попречног осциловања Ојлер-Бернулијевог греде са променљивим геометријским и материјалним карактеристикама по уздужној оси:

$$h_t(\bar{\omega}) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}(\bar{\omega}) & a_{12}(\bar{\omega}) \\ a_{21}(\bar{\omega}) & a_{22}(\bar{\omega}) \end{vmatrix}. \quad (3.49)$$

На основу графика функције $h_t(\bar{\omega}) = 0$ одређују се почетне вредности за нумеричко израчунавање сопствених фреквенција користећи дефинисане процедуре нумеричких метода као што је приказано у [11] и [28].

Након што се у прву једначину система (3.43) уврсти одређена бездимензиона сопствена фреквенција из карактеристичне једначине добија се:

$$C_{1\alpha} a_{11}(\bar{\omega}_\alpha) + C_{2\alpha} a_{12}(\bar{\omega}_\alpha) = 0, \quad (3.50)$$

где индекс α означава број мода осциловања.

Нека је $C_{1\alpha}$ произвољно изабрана реална константа, тада из једначине (3.50) следи релација:

$$\frac{C_{2\alpha}}{C_{1\alpha}} = -\frac{a_{11}(\bar{\omega}_\alpha)}{a_{12}(\bar{\omega}_\alpha)}. \quad (3.51)$$

На основу овако дефинисаних константи и постављене релације (3.37) може се писати израз за α – ти мод попречних осцилација еластичне греде у облику:

$$\bar{W}_\alpha(\bar{z}) = C_{1\alpha} \left[\bar{W}_1(\bar{z}, \bar{\omega}_\alpha) - \frac{a_{11}(\bar{\omega}_\alpha)}{a_{12}(\bar{\omega}_\alpha)} \bar{W}_2(\bar{z}, \bar{\omega}_\alpha) \right]. \quad (3.52)$$

4. Попречне осцилације греда од функционално градијентних материјала - Тимошенко приступ

4.1. Попречне осцилације аксијално оптерећене еластичне Тимошенкове греде

У овом поглављу анализиране су линеарне осцилације еластичних греда од функционално градијентних материјала користећи конститутивне релације из Тимошенкове теорије. Дата је греда која је аксијално оптерећена силом \mathbf{P} константног интензитета и правца као на слици 5. Нека ова греда може да осцилује у правцу управном на своју подужну осу. Кретање греде посматра се у односу на инерцијални координатни систем $Oxyz$, видети слику 5. Претпоставља се да је греда израђена од функционално градијентног материјала чије се карактеристике мењају по уздужној оси греде. Промене модула еластичности и густине материјала одређене су општим функцијама као и у Поглављу 2:

- $E = E(z) \left[\frac{N}{m^2} \right]$ - модул еластичности материјала греде и
- $\rho = \rho(z) \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ - густина материјала греде.

Геометријске величине попречног пресека греде су такође произвољне алгебарске функције и дефинисане су као у поглављу 2:

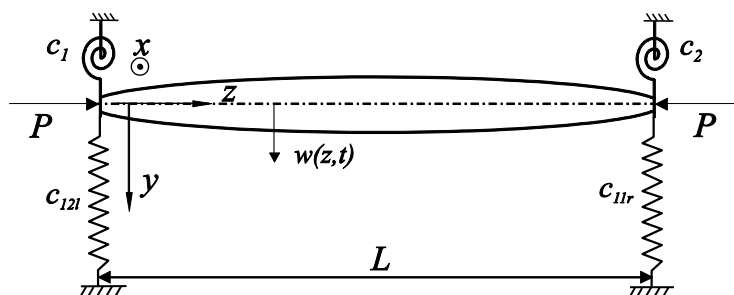
- $I_x = I_x(z) \left[m^4 \right]$ - аксијални момент инерције попречног пресека греде и
- $A = A(z) \left[m^2 \right]$ - површина попречног пресека греде.

Функције промена материјалних и геометријских карактеристика греде дефинисане су на домену одређеном дужином греде $z \in [0, L]$.

На левом и десном крају греде, приказане на слици 5, дејствује сила P константног правца и интензитета.

Нека се ослањање греде врши преко опруга чије су крутости c_{12l} , c_1 , c_{11r} и c_2 као и у поглављу 3.

За попречна померања произвољне тачке неутралне линије греде чији је положај одређен координатом z , у тренутку t биће коришћена ознака $w(z,t)$, као што је приказано на слици 5.



Слика 5. Еластична греда аксијално оптерећена на крајевима, која се ослања на две опруге и на две спиралне опруге

У наставку биће изведене диференцијалне једначине осциловања греде користећи модификовани Хамилтонов принцип.

4.1.1 Диференцијалне једначине осциловања разматране греде

У овом делу биће изведене диференцијалне једначине осциловања еластичне греде, приказане на слици 5, коришћењем модификованог Хамилтоновог принципа уз примену конститутивних релација Тимошенкове теорије. У Тимошенковој теорији долазе до изражаја ефекти инерције и смицања попречног пресека приликом осциловања [46].

За добијање поменутих диференцијалних једначина потребно је одредити кинетичку и потенцијалну енергију система.

Кинетичка енергија система састоји се од кинетичке енергије греде и може се писати као:

$$T = T_b = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho(z) A(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial t} \right)^2 + \rho(z) I_x(z) \left(\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dz. \quad (4.1)$$

Потенцијална енергија система једнака је збиру потенцијалне енергије: греде Π_b , опруга Π_c и аксијалне силе Π_p , односно:

$$\Pi = \Pi_b + \Pi_c + \Pi_p. \quad (4.2)$$

Потенцијална енергија еластичне греде, приказане на слици 5, с обзиром на Тимошенкове претпоставке стања напона у деформисаној непрекидној средини је:

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_0^L \left[E(z) I_x(z) \left(\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} \right)^2 + kG(z) A(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - \phi(z,t) \right)^2 \right] dz, \quad (4.3)$$

где је:

- $G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$ - модул клизања,
- ν [/] - Поасонов коефицијент и
- k [/] - Тимошенков корекциони фактор.

Потенцијална енергија опруга на које се греда ослања:

$$\Pi_c = \frac{1}{2} c_{12l} w^2(0,t) + \frac{1}{2} c_1 \phi^2(0,t) + \frac{1}{2} c_{11r} w^2(L,t) + \frac{1}{2} c_2 \phi^2(L,t), \quad (4.4)$$

где је:

- $w(0,t)$ [m] - попречно померање левог краја греде,
- $\phi(0,t)$ [rad] - угао обртања попречног пресека греде на левом крају услед савијања,
- $w(L,t)$ [m] - попречно померање десног краја греде и
- $\phi(L,t)$ [rad] - угао обртања попречног пресека греде на десном крају услед савијања.

Као што је дефинисано у раду [47], потенцијална енергија аксијалне силе P која представља негативни рад силе на попречном померању је:

$$\Pi_P = -\frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \right)^2 dz = -\frac{1}{2} P \int_0^L \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \right)^2 dz. \quad (4.5)$$

Са овако представљеном кинетичком и потенцијалном енергијом може се испитивати стационарност функционала користећи модификовани Хамилтонов принцип [46]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0. \quad (4.6)$$

Варијација кинетичке енергије за једначину (4.6) гласи:

$$\delta T = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(z) A(z) \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta w dz dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(z) I_x(z) \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta \phi dz dt. \quad (4.7)$$

Варијација транслаторног члана кинетичке енергије уз примену принципа парцијалног диференцирања и варијационог рачуна гласи:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(z) I_x(z) \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta w dz dt &= \int_0^L \rho(z) I_x(z) \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} \delta w(z,t) \Big|_{t_1}^{t_2} dz \\ &\quad - \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(z) A(z) \frac{\partial w(z,t)}{\partial t} \right) \delta w(z,t) dz dt \quad (4.8) \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(z) A(z) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} \delta w(z,t) dz dt. \end{aligned}$$

Варијација ротационог дела кинетичке енергије користећи принципе парцијалног диференцирања и варијационог рачуна гласи:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(z) I_x(z) \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \delta \phi dz dt &= \int_0^L \rho(z) I_x(z) \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial t} \delta \phi(z,t) \Big|_{t_1}^{t_2} dz \\
&\quad - \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(z) I_x(z) \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial t} \right) \delta \phi(z,t) dz dt \quad (4.9) \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho(z) I_x(z) \frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial t^2} \delta \phi(z,t) dz dt.
\end{aligned}$$

Варијација потенцијалне енергије система, с обзиром на једначине (4.2) - (4.5), за једначину (4.6), гласи:

$$\delta \Pi = \delta \Pi_b + \delta \Pi_c + \delta \Pi_p. \quad (4.10)$$

За потенцијалну енергију греде варијација ће бити:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_b &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L E(z) I(z) \frac{\partial}{\partial z} \delta \phi(z,t) dz dt \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L kG(z) A(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - \phi(z,t) \right) \frac{\partial}{\partial z} \delta w(z,t) dz dt \quad (4.11) \\
&\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L kG(z) A(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - \phi(z,t) \right) \delta \phi(z,t) dz dt.
\end{aligned}$$

Варијација члана који је резултат савијања и варијација дела смичуће енергије су респективно:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L E(z) I_x(z) \frac{\partial}{\partial z} \delta \phi(z,t) dz dt &= \int_{t_1}^{t_2} E(z) I_x(z) \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} \delta \phi(z,t) \Big|_0^L dt \\
&\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial z} \left(E(z) I_x(z) \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} \right) \delta \phi(z,t) dz dt, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L kG(z) A(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - \phi(z,t) \right) \frac{\partial}{\partial z} \delta w(z,t) dz dt &= \\
\int_{t_1}^{t_2} kG(z) A(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - \phi(z,t) \right) \delta w(z,t) \Big|_0^L dt &- \\
- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial z} \left(kG(z) A(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - \phi(z,t) \right) \right) \delta w(z,t) dz dt. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Варијација потенцијалне енергије еластичних ослонаца греде на слици 5 је:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_c &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} c_{12l} w^2(0,t) + \frac{1}{2} c_1 \phi^2(0,t) + \frac{1}{2} c_{11r} w^2(L,t) + \frac{1}{2} c_2 \phi^2(L,t) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (c_{12l} w(0,t) + c_{11r} w(L,t)) \delta w(z,t) dt + \int_{t_1}^{t_2} (c_1 \phi(0,t) + c_2 \phi(L,t)) \delta \phi(z,t) dt.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Варијација потенцијалне енергије аксијалне силе интензитета P је:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_p &= -P \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \delta w(z,t) dz dt \\ &= -P \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \delta w(z,t) \right) \Big|_0^L dt + P \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \right) \delta w(z,t) dz dt.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Након што се изрази (4.7) - (4.15) уврсте у модификовани Хамилтонов принцип (4.6) и одговарајући чланови функционала међусобно групишу долази се до диференцијалних једначина кретања, овако постављене непрекидне средине са укљученим ефектима инерције и смицања попречног пресека:

$$-\rho(z) A(z) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[kG(z) A(z) \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \phi \right) \right] = 0, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left(E(z) I_x(z) \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} \right) + kG(z) A(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - \phi(z,t) \right) \\ - \rho(z) I_x(z) \frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial t^2} = 0.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Одговарајући контурни услови на левом крају греде су:

$$-P \frac{\partial w(0,t)}{\partial z} + kG(0) A(0) \left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial z} - \phi(0,t) \right) - c_{12l} w(0,t) = 0, \quad (4.18)$$

$$E(0) I_x(0) \frac{\partial \phi(0,t)}{\partial z} - c_1 \phi(0,t) = 0, \quad (4.19)$$

а одговарајући контурни услови на десном крају греде гласе:

$$P \frac{\partial w(L,t)}{\partial z} - kG(L) A(L) \left(\frac{\partial w(L,t)}{\partial z} - \phi(L,t) \right) - c_{11r} w(L,t) = 0, \quad (4.20)$$

$$-E(L) I_x(L) \frac{\partial \phi(L,t)}{\partial z} - c_2 \phi(L,t) = 0. \quad (4.21)$$

4.2 Слободне попречне осцилације еластичне Тимошенкове греде на еластичном Пастернаковом темељу

У овом поглављу анализирани су слободне линеарне осцилације еластичних греда од функционално градијентних материјала на еластичном темељу користећи конститутивне релације из Тимошенкове теорије. Нека греда на слици 6 може да осцилује у правцу управном на своју подужну осу. Кретање греде посматра се у односу на инерцијални координатни систем $Oxyz$, такође приказан на слици 6. Приликом извођења једначина претпоставља се да је греда израђена од функционално градијентног материјала, чије се карактеристике мењају по подужној оси греде и да је ослоњена на еластични темељ Пастернаковог типа [32]. На оба краја греде налазе се тела, чије су масе и моменти инерције задати као на слици. Карактеристике које се мењају по подужној оси Oz посматране греде као и у поглављу 2, одређене су релацијама:

$$- \quad E = E(z) \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] - \text{модул еластичности материјала греде и}$$

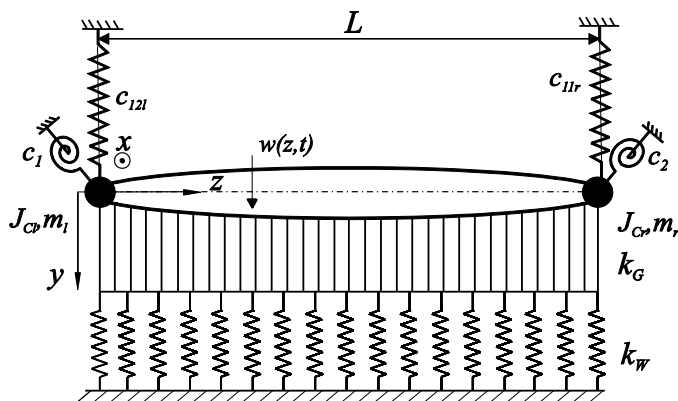
$$- \quad \rho = \rho(z) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] - \text{густина материјала греде.}$$

У општем случају геометријске карактеристике попречног пресека греде су такође произвољне алгебарске функције и дефинисане као у поглављу 2:

$$- \quad I_x = I_x(z) \left[\text{m}^4 \right] - \text{аксијални момент инерције попречног пресека греде и}$$

$$- \quad A = A(z) \left[\text{m}^2 \right] - \text{површина попречног пресека греде.}$$

Претходно поменуте функције дефинисане су на домену одређеном координатом $z \in [0, L]$.



Слика 6. Еластична греда на темељу Пастернаковог типа, која се ослања на две опруге и на две спиралне опруге

Нека се ослањање греде врши преко опруга чије су крутости c_{12l} , c_1 , c_{11r} и c_2 као у поглављу 3 ове дисертације.

За попречна померања сегмената греде чији је положај одређен координатом z у тренутку t користи се ознака $w(z, t)$.

4.2.1 Диференцијалне једначине кретања непрекидне средине

У овом поглављу одређене су диференцијалне једначине кретања еластичне греде приказане на слици 6. Коришћен је модификовани Хамилтонов принцип са применом конститутивних релација Тимошенкове теорије [46], слично процедури описаној у поглављу 4.1.1.

Кинетичка енергија система приказаног на слици 6 јесте збир кинетичке енергије греде и кинетичке енергије тела на крајевима греде, односно:

$$T = T_b + T_m. \quad (4.22)$$

Кинетичка енергија греде одговара кинетичкој енергији (4.1), док се кинетичка енергија тела на крајевима греде може писати као:

$$T_m = \frac{1}{2} m_l \left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_{Cl} \left(\frac{\partial \phi(0,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} m_r \left(\frac{\partial w(L,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} J_{Cr} \left(\frac{\partial \phi(L,t)}{\partial t} \right)^2. \quad (4.23)$$

Потенцијална енергија система може се писати у облику:

$$\Pi = \Pi_b + \Pi_c, \quad (4.24)$$

где је потенцијална енергија Тимошенкове греде на Пастернаковом темељу [32] одређена изразом:

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_0^L \left[E(z) I_x(z) \left(\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} \right)^2 + kG(z) A(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - \phi(z,t) \right)^2 \right] dz + \frac{1}{2} \int_0^L k_w(z) (w(z,t))^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L k_G(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \right)^2 dz, \quad (4.25)$$

док је потенцијална енергија свих опруга на које се систем ослања дата изразом (4.4).

Слично као у поглављу 4.1.1 одређене су диференцијалне једначине осциловања и одговарајући контурни услови. Диференцијалне једначине кретања непрекидне средине са укљученим ефектима инерције и смицања су:

$$-\rho(z) A(z) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} + k_G(z) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[kG(z) A(z) \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \phi \right) \right] + \frac{dk_G(z)}{dz} \frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - k_w(z) w(z,t) = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(E(z) I_x(z) \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} \right) + kG(z) A(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - \phi(z,t) \right) - \rho(z) I_x(z) \frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.27)$$

док су контурни услови на левом крају греде ($z=0$) дати изразима:

$$\begin{aligned} -m_l \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial t^2} + kG(0)A(0) \left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial z} - \phi(0,t) \right) - c_{12l} w(0,t) \\ + k_G(0) \frac{\partial w(0,t)}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$-J_{cl} \frac{\partial^2 \phi(0,t)}{\partial t^2} + E(0)I_x(0) \frac{\partial \phi(0,t)}{\partial z} - c_{1\phi} \phi(0,t) = 0. \quad (4.29)$$

Показује се да су контурни услови на десном крају греде ($z=L$) дати изразима:

$$\begin{aligned} -m_r \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2} - kG(L)A(L) \left(\frac{\partial w(L,t)}{\partial z} - \phi(L,t) \right) - c_{11r} w(L,t) \\ - k_G(L) \frac{\partial w(L,t)}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$-J_{cr} \frac{\partial^2 \phi(L,t)}{\partial t^2} - E(L)I_x(L) \frac{\partial \phi(L,t)}{\partial z} - c_{2\phi} \phi(L,t) = 0. \quad (4.31)$$

Сходно Тимошенкој теорији трансверзална сила дата је изразом:

$$F_t(z,t) = kA(z)G(z) \left(\frac{\partial w(z,t)}{\partial z} - \phi(z,t) \right). \quad (4.32)$$

Момент савијања представљен је као:

$$M_f(z,t) = -E(z)I_x(z) \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z}. \quad (4.33)$$

Са овако записаним изразима за трансверзалну силу и момент савијања, диференцијалне једначине (4.26) и (4.27) свде се на следећи облик:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_t(z,t)}{\partial z} + k_G(z) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2} + \frac{dk_G(z)}{dz} \frac{\partial w(z,t)}{\partial z} \\ - k_w(z) w(z,t) - \rho(z)A(z) \frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$-\frac{\partial M_f(z,t)}{\partial z} + F_t(z,t) - \rho(z)I_x(z) \frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4.35)$$

У циљу свођења једначина на модални облик примењује се метод раздвајања променљивих као у [46], при чему се временска функција може писати у облику (3.3)

- $w(z,t) = W(z)T(t)$ - попречно померање,
- $\phi(z,t) = \phi(z)T(t)$ - угао обртања попречног пресека услед савијања.

Применом метода раздвајања променљивих на трансверзалну силу (4.32) и момент савијања (4.33) добија се:

$$F_t(z,t) = kA(z)G(z) \left(\frac{\partial w(z)}{\partial z} - \phi(z) \right) T(t) = F_t(z)T(t), \quad (4.36)$$

$$M_f(z,t) = -E(L)I_x(z) \frac{d\phi(z)}{dz} T(t) \equiv M_f(z)T(t). \quad (4.37)$$

Сходно уведеним ознакама, једначине (4.26) и (4.27) су сведене на своје модалне облике, редом:

$$\frac{dF_t(z)}{dz} + k_G(z) \frac{d^2W(z)}{dz^2} + p_1(z) \frac{dW(z)}{dz} - k_w(z)W(z) + \rho(z)A(z)\omega^2W(z) = 0, \quad (4.38)$$

$$-\frac{dM_f(z)}{dz} + F_t(z) + \rho(z)I_x(z)\omega^2\phi(z) = 0, \quad (4.39)$$

при чему параметар $p_1(z)$ представља први извод смичућег коефицијента подлоге:

$$p_1(z) = \frac{d}{dz} k_G(z). \quad (4.40)$$

4.2.2 Свођење диференцијалних једначина кретања на систем обичних линеарних диференцијалних једначина у бездимензионом облику

За потребе свођења парцијалних диференцијалних једначина кретања, поред величина уведених у поглављима 2.3 и 3.3, уведе се додатне бездимензионе величине.

У складу са тим, бездимензиони модул смицања је:

$$\bar{G}(\bar{z}) = \frac{\bar{E}(\bar{z})}{(1+\nu)}, \quad (4.41)$$

а угао закретања попречног пресека услед савијања:

$$\bar{\phi}(\bar{z}) = \phi(z). \quad (4.42)$$

Уводи се бездимензиона константа r :

$$\bar{r} = \frac{I_{x0}}{A_0 L^2}, \quad (4.43)$$

у којој су све величине претходно дефинисане.

Винклеров коефицијент у бездимензионом облику гласи:

$$\bar{k}_W(\bar{z}) = k_W(z) \frac{L^4}{E_0 I_{x0}}. \quad (4.44)$$

Коефицијент смичућег дела Пастернаковог темеља у бездимензионом облику је:

$$\bar{k}_G(\bar{z}) = k_G(z) \frac{L^2}{E_0 I_{x0}}, \quad (4.45)$$

док је његов бездимензиони извод по независно променљивој z :

$$\bar{p}_1 = \frac{d}{d\bar{z}} \bar{k}_G(\bar{z}). \quad (4.46)$$

Уводи се и бездимензиона променљива $\bar{p}_2(\bar{z})$ која представља извод бездимензионе смичуће крутости по бездимензионој подужној координати:

$$\bar{p}_2(\bar{z}) = \frac{d}{d\bar{z}} \bar{G}(\bar{z}) \bar{A}(\bar{z}). \quad (4.47)$$

Диференцијалне једначине кретања (4.38) и (4.39) своде се на систем линеарних диференцијалних једначина у бездимензионом облику:

$$\frac{d\bar{W}(\bar{z})}{d\bar{z}} = \bar{\phi}(\bar{z}) + \frac{\bar{r}}{k \bar{A}(\bar{z}) \bar{G}(\bar{z})} \bar{F}_t(\bar{z}), \quad (4.48)$$

$$\frac{d\bar{\phi}(\bar{z})}{d\bar{z}} = -\frac{1}{E(\bar{z}) \bar{I}_x(\bar{z})} \bar{M}_f(\bar{z}), \quad (4.49)$$

$$\frac{d\bar{M}_f(\bar{z})}{d\bar{z}} = \bar{F}_t(\bar{z}) + r\bar{\omega}^2 \bar{\rho}(\bar{z}) \bar{I}_x(\bar{z}) \bar{\phi}(\bar{z}), \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{F}_t(\bar{z})}{d\bar{z}} &= \frac{k\bar{A}(\bar{z})\bar{G}(\bar{z})\bar{k}_G(\bar{z})}{\bar{E}(\bar{z})\bar{I}_x(\bar{z})[k\bar{A}(\bar{z})\bar{G}(\bar{z}) + r\bar{k}_G(\bar{z})]} \bar{M}_f(\bar{z}) \\ &\quad - \frac{k\bar{p}_1(\bar{z})\bar{A}(\bar{z})\bar{G}(\bar{z})}{k\bar{A}(\bar{z})\bar{G}(\bar{z}) + r\bar{k}_G(\bar{z})} \bar{\phi}(\bar{z}) \\ &\quad - \frac{k\bar{A}(\bar{z})\bar{G}(\bar{z})(\bar{\omega}^2 \bar{\rho}(\bar{z})\bar{A}(\bar{z}) - \bar{k}_w(\bar{z}))}{k\bar{A}(\bar{z})\bar{G}(\bar{z}) + r\bar{k}_G(\bar{z})} \bar{W}(\bar{z}) \\ &\quad - \frac{r\bar{p}_1(\bar{z})\bar{A}(\bar{z})\bar{G}(\bar{z}) - r\bar{p}_2(\bar{z})\bar{k}_G(\bar{z})}{\bar{A}(\bar{z})\bar{G}(\bar{z})(k\bar{A}(\bar{z})\bar{G}(\bar{z}) + \bar{k}_G(\bar{z}))} \bar{F}_t(\bar{z}). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Сходно уведеним ознакама бездимензионих величина контурни услови (4.28) - (4.31) могу се писати у следећем облику:

$$\begin{aligned} &\left[\bar{m}_l \bar{\omega}^2 (1 - \bar{c}_{12l}^*) - \bar{c}_{12l}^* \right] \bar{W}(0) + (1 - \bar{c}_{12l}^*) \bar{k}_G(0) \bar{\phi}(0) \\ &+ \frac{\left[r\bar{k}_G(0) + k\bar{G}(0)\bar{A}(0) \right] (1 - \bar{c}_{12l}^*)}{k\bar{G}(0)\bar{A}(0)} \bar{F}_t(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\left[\bar{J}_{Cl} \bar{\omega}^2 (1 - \bar{c}_1^*) - \bar{c}_1^* \right] \bar{\phi}(0) - (1 - \bar{c}_1^*) \bar{M}_f(0) = 0, \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} &\left[\bar{m}_r \bar{\omega}^2 (1 - \bar{c}_{11r}^*) - \bar{c}_{11r}^* \right] \bar{W}(1) + (1 - \bar{c}_{11r}^*) (-\bar{k}_G(1)) \bar{\phi}(1) \\ &+ \frac{\left[r(-\bar{k}_G(1)) - k\bar{G}(1)\bar{A}(1) \right] (1 - \bar{c}_{11r}^*)}{k\bar{G}(1)\bar{A}(1)} \bar{F}_t(1) = 0, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\left[\bar{J}_{Cr} \bar{\omega}^2 (1 - \bar{c}_2^*) - \bar{c}_2^* \right] \bar{\phi}(1) - (1 - \bar{c}_2^*) \bar{M}_f(1) = 0. \quad (4.55)$$

Решавање постављених диференцијалних једначина применом симболичко-нумеричког метода почетних параметара описано је у наредном поглављу.

4.4 Нумеричка процедура одређивања сопствених фреквенција Тимошенкових греда

У овом поглављу систем линеарних диференцијалних једначина у бездимензионом облику (4.48) до (4.51) приказан је у матричном облику за потребе одређивања сопствених фреквенција осциловања греде. Вектор $\bar{X}(\bar{z})$ уводи се као вектор чији су елементи попречно померање, угао ротације попречног пресека, момент савијања и трансверзална сила, односно:

$$\bar{X}(\bar{z}) = \left[\bar{W}(\bar{z}) \quad \bar{\phi}(\bar{z}) \quad \bar{M}_f(\bar{z}) \quad \bar{F}_t(\bar{z}) \right]^T. \quad (4.56)$$

Диференцијали по бездимензионој координати \bar{z} елемената вектора $\bar{X}(\bar{z})$ су:

$$\frac{d}{d\bar{z}} \bar{X}(\bar{z}) = \left[\frac{d}{d\bar{z}} \bar{W}(\bar{z}) \quad \frac{d}{d\bar{z}} \bar{\phi}(\bar{z}) \quad \frac{d}{d\bar{z}} \bar{M}_f(\bar{z}) \quad \frac{d}{d\bar{z}} \bar{F}_t(\bar{z}) \right]^T.$$

За потребе матричног записа система једначина формирана је матрица реда 4x4:

$$\mathbf{T}(\bar{z}, \bar{\omega}) = \begin{bmatrix} t_{11}(\bar{z}) & t_{12}(\bar{z}) & t_{13}(\bar{z}) & t_{14}(\bar{z}) \\ t_{21}(\bar{z}) & t_{22}(\bar{z}) & t_{23}(\bar{z}) & t_{24}(\bar{z}) \\ t_{31}(\bar{z}) & t_{32}(\bar{z}, \bar{\omega}) & t_{33}(\bar{z}) & t_{34}(\bar{z}) \\ t_{41}(\bar{z}, \bar{\omega}) & t_{42}(\bar{z}) & t_{43}(\bar{z}) & t_{44}(\bar{z}) \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Елементи матрице \mathbf{T} , с обзиром на систем (4.48) до (4.51) су:

$$t_{11}(\bar{z}) = t_{13}(\bar{z}) = t_{21}(\bar{z}) = t_{22}(\bar{z}) = t_{23}(\bar{z}) = t_{31}(\bar{z}) = t_{33}(\bar{z}) = 0, \quad (4.58)$$

$$t_{12}(\bar{z}) = t_{34}(\bar{z}) = 1, \quad (4.59)$$

$$t_{14}(\bar{z}) = \frac{\bar{r}}{k \bar{A}(\bar{z}) \bar{G}(\bar{z})}, \quad (4.60)$$

$$t_{23}(\bar{z}) = -\frac{1}{\bar{E}(\bar{z}) \bar{I}_x(\bar{z})}, \quad (4.61)$$

$$t_{32}(\bar{z}, \bar{\omega}) = \bar{r} \bar{\omega}^2 \bar{\rho}(\bar{z}) \bar{I}_x(\bar{z}), \quad (4.62)$$

$$t_{41}(\bar{z}, \bar{\omega}) = -\frac{k \bar{A}(\bar{z}) \bar{G}(\bar{z}) (\bar{\omega}^2 \bar{\rho}(\bar{z}) \bar{A}(\bar{z}) - \bar{k}_w(\bar{z}))}{k \bar{A}(\bar{z}) \bar{G}(\bar{z}) + \bar{r} \bar{k}_G(\bar{z})}, \quad (4.63)$$

$$t_{42}(\bar{z}) = -\frac{k \bar{p}_1(\bar{z}) \bar{A}(\bar{z}) \bar{G}(\bar{z})}{k \bar{A}(\bar{z}) \bar{G}(\bar{z}) + \bar{r} \bar{k}_G(\bar{z})}, \quad (4.64)$$

$$t_{43}(\bar{z}) = \frac{k \bar{A}(\bar{z}) \bar{G}(\bar{z}) \bar{k}_G(\bar{z})}{\bar{E}(\bar{z}) \bar{I}_x(\bar{z}) [k \bar{A}(\bar{z}) \bar{G}(\bar{z}) + \bar{r} \bar{k}_G(\bar{z})]}, \quad (4.65)$$

$$t_{44}(\bar{z}) = -\frac{\bar{r} \bar{p}_1(\bar{z}) \bar{A}(\bar{z}) \bar{G}(\bar{z}) - \bar{r} \bar{p}_2(\bar{z}) \bar{k}_G(\bar{z})}{\bar{A}(\bar{z}) \bar{G}(\bar{z}) (k \bar{A}(\bar{z}) \bar{G}(\bar{z}) + \bar{k}_G(\bar{z}))}. \quad (4.66)$$

Систем линеарних диференцијалних једначина у бездимензионом облику може бити записан у симболичком облику као:

$$\frac{d}{dz} \bar{X} = T \bar{X}. \quad (4.67)$$

Једначине (4.67) и (4.52) до (4.55) заједно формирају двотачкасти гранични проблем чије решавање је детаљно описано у [21] и [48]. Слично као у поглављу 3, а услед линеарности система диференцијалних једначина решење проблема је облика:

$$\bar{X}_i(\bar{z}) = C_1 \bar{X}_{i1}(\bar{z}, \bar{\omega}) + C_2 \bar{X}_{i2}(\bar{z}, \bar{\omega}), \quad (4.68)$$

где C_1 и C_2 представљају непознате интеграционе константе, док вектори:

$$\bar{X}_{ii}(\bar{z}) = [\bar{W}_i(\bar{z}) \quad \bar{\phi}_i(\bar{z}) \quad \bar{F}_{ii}(\bar{z}) \quad \bar{M}_{fi}(\bar{z})]^T, \quad i = 1, 2, \quad (4.69)$$

представљају векторе партикуларних решења система обичних линеарних диференцијалних једначина (4.67) за одговарајуће почетне услове.

На основу граничних услова (4.52) и (4.55) почетни услови система (4.67) могу бити записани у следећем облику:

за $i=1$:

$$\bar{W}(0) = \frac{\left[r\bar{k}_G(0) + k\bar{G}(0)\bar{A}(0) \right] \left(1 - \bar{c}_{12l}^* \right)}{\left[\bar{m}_l \bar{\omega}^2 \left(1 - \bar{c}_{12l}^* \right) - \bar{c}_{12l}^* \right] k\bar{G}(0)\bar{A}(0)}, \bar{\phi}(0) = 0, \bar{M}_f(0) = 0, \bar{F}_t(0) = 1, \quad (4.70)$$

за $i=2$:

$$\bar{W}(0) = \frac{\left(\bar{c}_{12l}^* - 1 \right) \left(1 - \bar{c}_1^* \right) \bar{k}_G(0)}{\left[\bar{m}_l \bar{\omega}^2 \left(1 - \bar{c}_{12l}^* \right) - \bar{c}_{12l}^* \right] \left[\bar{J}_{Cl} \bar{\omega}^2 \left(1 - \bar{c}_1^* \right) - \bar{c}_1^* \right]}, \bar{\phi}(0) = \frac{1 - \bar{c}_1^*}{\bar{J}_{Cl} \bar{\omega}^2 \left(1 - \bar{c}_1^* \right) - \bar{c}_1^*}, \quad (4.71)$$

$$\bar{M}_f(0) = 1, \bar{F}_t(0) = 0.$$

За случај $\bar{J}_{Cl} = 0$ и $\bar{m}_l = 0$, почетни услови за решавање система једначина за случај уклештеног краја леве греде без масе на крају, своде се на следећи облик:

$$\bar{W}(0) = 0, \bar{\phi}(0) = 0, \bar{F}_t(0) = 0, \bar{M}_f(0) = 1, \quad (4.72)$$

$$\bar{W}(0) = 0, \bar{\phi}(0) = 0, \bar{F}_t(0) = 1, \bar{M}_f(0) = 0. \quad (4.73)$$

Слично као у поглављу 3.4, непознате константе C_1 и C_2 одређене су тако да решење (4.68) задовољава почетне услове (4.70) и (4.71), односно (4.72) и (4.73) као систем једначина:

$$\begin{bmatrix} a_{11}(\bar{\omega}) & a_{12}(\bar{\omega}) \\ a_{21}(\bar{\omega}) & a_{22}(\bar{\omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

Елементи матрице представљени су изразима:

$$a_{11}(\bar{\omega}) = \left[\bar{m}_r \bar{\omega}^2 \left(1 - \bar{c}_{11r}^* \right) - \bar{c}_{11r}^* \right] \bar{W}_1(1, \bar{\omega}) + \left(1 - \bar{c}_{11r}^* \right) \left(-\bar{k}_G(1) \right) \bar{\phi}_1(1, \bar{\omega})$$

$$+ \frac{\left[r \left(-\bar{k}_G(1) \right) - k\bar{G}(1)\bar{A}(1) \right] \left(1 - \bar{c}_{11r}^* \right)}{k\bar{G}(1)\bar{A}(1)} \bar{F}_{t1}(1, \bar{\omega}), \quad (4.75)$$

$$a_{12}(\bar{\omega}) = \left[\bar{m}_r \bar{\omega}^2 \left(1 - \bar{c}_{11r}^* \right) - \bar{c}_{11r}^* \right] \bar{W}_2(1, \bar{\omega}) + \left(1 - \bar{c}_{11r}^* \right) \left(-\bar{k}_G(1) \right) \bar{\phi}_2(1, \bar{\omega})$$

$$+ \frac{\left[r \left(-\bar{k}_G(1) \right) - k\bar{G}(1)\bar{A}(1) \right] \left(1 - \bar{c}_{11r}^* \right)}{k\bar{G}(1)\bar{A}(1)} \bar{F}_{t2}(1, \bar{\omega}), \quad (4.76)$$

$$a_{21}(\bar{\omega}) = \left[\bar{J}_{Cr} \bar{\omega}^2 (1 - \bar{c}_2^*) - \bar{c}_2^* \right] \bar{\phi}_1(1, \bar{\omega}) - (1 - \bar{c}_2^*) \bar{M}_{f1}(1, \bar{\omega}), \quad (4.77)$$

$$a_{22}(\bar{\omega}) = \left[\bar{J}_{Cr} \bar{\omega}^2 (1 - \bar{c}_2^*) - \bar{c}_2^* \right] \bar{\phi}_2(1, \bar{\omega}) - (1 - \bar{c}_2^*) \bar{M}_{f2}(1, \bar{\omega}). \quad (4.78)$$

Како би константе C_1 и C_2 имале ненулте вредности потребно је да детерминанта система (4.74) буде једнака нули, односно:

$$\begin{vmatrix} a_{11}(\bar{\omega}) & a_{12}(\bar{\omega}) \\ a_{21}(\bar{\omega}) & a_{22}(\bar{\omega}) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.79)$$

Са овако постављеном детерминантом уводи се ознака $h_t(\bar{\omega})$ за фреквенту једначину проблема попречног осциловања Тимошенкове греде са променљивим геометријским и материјалним карактеристикама по уздужној оси:

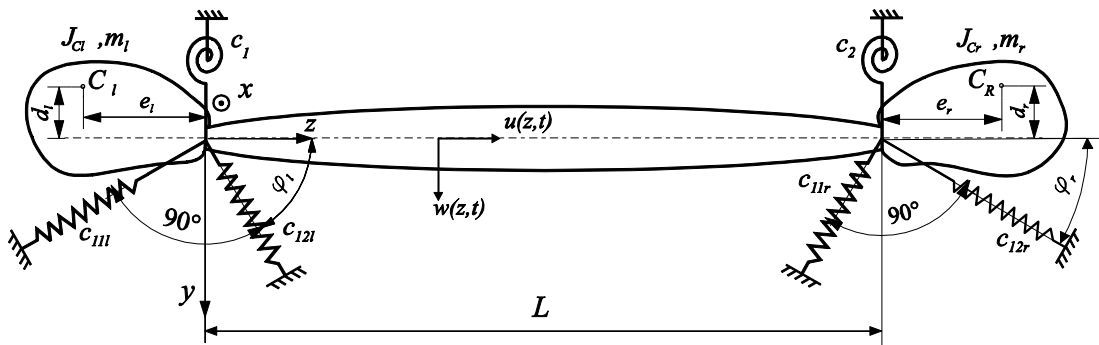
$$h_t(\bar{\omega}) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}(\bar{\omega}) & a_{12}(\bar{\omega}) \\ a_{21}(\bar{\omega}) & a_{22}(\bar{\omega}) \end{vmatrix}. \quad (4.80)$$

Решавањем добијене фреквентне једначине $h_t(\bar{\omega}) = 0$ долази се до сопствених фреквенција Тимошенкових греда од функционално градијентних материјала.

Одређивање модова осциловања, врши се аналогно процедури описаној у поглављу 3.4.

5. Спрегнуте уздужне и попречне осцилације Ојлер-Бернуливих греда променљивог попречног пресека од функционално градијентних материјала

У овом поглављу анализиране су линеарне спрегнуте уздужне и попречне осцилације еластичних греда од функционално градијентних материјала користећи конститутивне релације из Ојлер-Бернулијеве теорије. Еластична греда која може да осцилује у правцу управном на своју подужну осу и у правцу своје подужне осе приказана је на Слици 7. Кретање греде посматра се у односу на инерцијални координатни систем $Oxyz$, такође приказан на слици 7. Претпоставља се да је греда израђена од функционално градијентног материјала чије се карактеристике мењају по уздужној оси греде. На левом и десном крају греде везана су крута тела чији су центри маса постављени ексцентрично у односу на крајеве греде, а сваки крај се ослања на по две опруге и једну спиралну опругу.



Слика 7. Еластична греда са ексцентрично постављеним крутим телима, која се ослања на четири опруге и две спиралне опруге

Нека су карактеристике које се мењају по уздужној оси посматране греде одређене z координатом правоуглог Декартовог координатног система $Oxyz$ следеће:

- $I_x = I_x(z) [m^4]$ - аксијални момент инерције попречног пресека греде,
- $E = E(z) \left[\frac{N}{m^2} \right]$ - модул еластичности материјала греде,
- $A = A(z) [m^2]$ - површина попречног пресека греде и

– $\rho = \rho(z) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ - густина материјала греде.

Претходне геометријске карактеристике попречног пресека и материјала еластичне греде одређене су на домену $z \in [0, L]$, где је $L[\text{m}]$ дужина греде.

Крутости опруга круто спојених са левим, односно десним крајем греде означене су са: $c_{11l}, c_{12l}, c_{11r}, c_{12r} \in [0, \infty]$, док су крутости спиралних опруга означене са c_1 и $c_2 \in [0, \infty]$.

5.1 Парцијалне диференцијалне једначине уздужних и попречних осцилација еластичне греде

Спроведећи процедуру формирања диференцијалних једначина кретања непрекидне средине која је описана у поглављима 2 и 3, добијају се диференцијалне једначине попречних и уздужних померања елементарног дела греде приказане на слици 7.

Попречна померања $w(z, t)$ тачака еластичне греде описана су парцијалном диференцијалном једначином [46]:

$$\frac{\partial}{\partial z} [F_t(z, t)] - \rho(z) A(z) \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (5.1)$$

Уздужна померања $u(z, t)$ тачака еластичне линије греде описана су парцијалном диференцијалном једначином [46]:

$$\frac{\partial}{\partial z} [F_a(z, t)] - \rho(z) A(z) \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (5.2)$$

Применом Ојлер-Бернулијеве теорије осцилација еластичних греда динамичке величине у попречном пресеку греде своде се на претходно дефинисане изразе:

- Аксијална сила која дејствује у пресеку одређеном координатом z одређена је изразом (2.6);
- Трансверзална сила која дејствује у пресеку одређеном координатом z одређена је изразом (3.7);
- Момент савијања који дејствује у пресеку који је одређен координатом z дат је изразом (3.6).

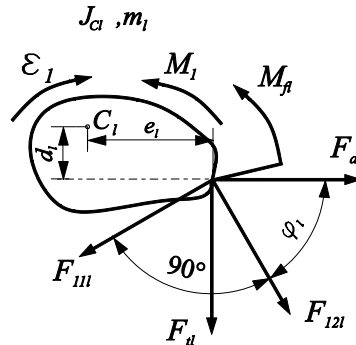
Након примене метода раздвајања променљивих добијене су диференцијалне једначине осциловања греде у модалном облику [48]:

$$\frac{dF_a(z)}{dz} + \omega^2 \rho(z) A(z) U(z) = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{dF_t(z)}{dz} + \omega^2 \rho(z) A(z) W(z) = 0. \quad (5.4)$$

5.2 Контурни услови – општи случај ослањања

Након примене принципа ослобађања од веза, круто тело на левој страни греде чији је положај одређен координатом $z=0$ може да врши равно кретање. Тело је приказано на слици 8. Овај тип кретања тела детаљно је описан у [49], односно у [50] на основу чега су одређени контурни гранични услови разматраног проблема.



Слика 8. Круто тело на левом крају греде ослобођено од веза

Реакције везе у виду момента савијања, аксијалне и трансверзалне силе, приказане су у аналитичком облику уз примену метода раздвајања променљивих:

$$M_f \equiv M_f(0,t) = M_f(0)T(t), \quad (5.5)$$

$$F_a \equiv F_a(0,t) = F_a(0)T(t), \quad (5.6)$$

$$F_t \equiv F_t(0,t) = F_t(0)T(t). \quad (5.7)$$

Дејство спиралне опруге на левом крају греде описује се дејством момента M_l који се може приказати у облику диференцијалне везе:

$$M_l = c_1 w'(0,t) \equiv c_1 \frac{\partial}{\partial z} w(0,t). \quad (5.8)$$

Дејства орпуга чије су крутости c_{11l} и c_{12l} на левом крају греде аналитички се описују дејством сила F_{11l} и F_{12l} чије су пројекције, у односу на координатни систем приказан на слици 7, дате следећим једначинама:

$$F_{11l} = c_{11} [u(0,t) \sin \varphi_l - w(0,t) \cos \varphi_l], \quad (5.9)$$

$$F_{12l} = c_{11} [-u(0,t) \cos \varphi_l - w(0,t) \sin \varphi_l]. \quad (5.10)$$

Угаоно убрзање крутог тела на левом крају греде дато је изразом:

$$\varepsilon_1 = \ddot{w}'(0,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} w(0,t) \right). \quad (5.11)$$

Након примене метода раздвајања променљивих угаоно убрзање крутог тела и убрзање центра масе тела у аксијалном правцу могу се писати као:

$$\varepsilon_1 = -\omega^2 W'(0)T(t), \quad (5.12)$$

$$\ddot{u}(0,t) = -\omega^2 U(0)T(t). \quad (5.13)$$

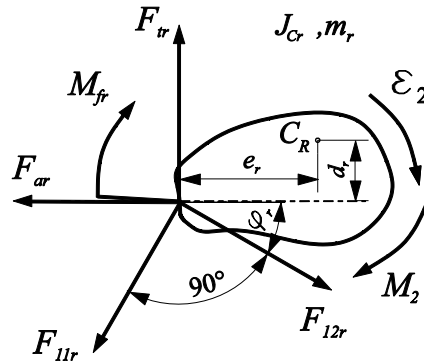
Уочимо десни крај еластичне греде приказане на слици 7 и применом принципа ослобађања од веза посматрајмо круто тело на десној страни греде за $z=L$, које такође може да врши равно кретање као што је приказано на слици 9.

Реакције везе у виду момента савијања, аксијалне и трансверзалне силе приказане су у аналитичком облику следећим једначинама уз примену метода раздвајања променљивих [44] и [46]:

$$M_{fr} \equiv M_f(L, t) = M_f(L)T(t), \quad (5.14)$$

$$F_{tr} = F_t(L, t) = F_t(L)T(t), \quad (5.15)$$

$$F_{ar} \equiv F_a(L, t) = F_a(L)T(t). \quad (5.16)$$



Слика 9. Круто тело на десном крају греде ослобођено од веза

Утицај спиралне опруге на десном крају греде описан је дејством момента M_2 :

$$M_2 = c_2 w'(L, t) = -\omega^2 W'(L)T(t). \quad (5.17)$$

Дејства опруга чије су крутости c_{11r} и c_{12r} на десном крају греде аналитички се описује дејством сила F_{11r} и F_{12r} чије су пројекције, у односу на координатни систем приказан на слици 7, дате следећим једначинама:

$$F_{11r} = c_{11r} [u(L, t) \sin \varphi_r - w(L, t) \cos \varphi_r], \quad (5.18)$$

$$F_{12r} = c_{12r} [-u(L, t) \cos \varphi_r - w(L, t) \sin \varphi_r]. \quad (5.19)$$

Угаоно убрзање крутог тела на десном крају је:

$$\varepsilon_2 \equiv \ddot{w}'(L, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} w(L, t) \right). \quad (5.20)$$

Након примене метода раздвајања просторне и временске променљиве угаоно убрзање крутог тела и убрзање у аксијалном правцу имају облик:

$$\varepsilon_2 = -\omega^2 W'(L)T(t), \quad (5.21)$$

$$\ddot{w}(L,t) = -\omega^2 W(L)T(t). \quad (5.22)$$

Примена теореме о промени момента количине кретања [51] у односу на центар маса C_l за осу x гласи:

$$\begin{aligned} -\omega^2 J_{C_l} W'(0) = & -c_1 W'(0) - M_f(0) - F_a(0)d_l + F_t(0)e_l + \\ & d_l c_{12l} \left[U(0) \cos^2 \varphi_l + \frac{1}{2} W(0) \sin 2\varphi_l \right] \\ & - e_l c_{12l} \left[\frac{1}{2} U(0) \sin 2\varphi_l + W(0) \sin^2 \varphi_l \right] \\ & + d_l c_{11l} \left[U(0) \sin^2 \varphi_l - \frac{1}{2} W(0) \sin 2\varphi_l \right] \\ & + e_l c_{11l} \left[\frac{1}{2} U(0) \sin 2\varphi_l - W(0) \cos^2 \varphi_l \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Теорема о кретању средишта маса C_l [51] за осу z гласи:

$$\begin{aligned} -m_l \omega^2 [U(0) + W'(0)d_l] = & -c_{12l} \left[U(0) \cos^2 \varphi_l + \frac{1}{2} W(0) \sin 2\varphi_l \right] \\ & - c_{11l} \left[U(0) \sin^2 \varphi_l - \frac{1}{2} W(0) \sin 2\varphi_l \right] + F_a(0), \end{aligned} \quad (5.24)$$

а теорема о кретању средишта маса C_l [51] за осу y :

$$\begin{aligned} -m_l \omega^2 [W(0) - W'(0)e_l] = & -c_{12l} \left[W(0) \sin^2 \varphi_l + \frac{1}{2} U(0) \sin 2\varphi_l \right] \\ & + c_{11l} \left[-W(0) \cos^2 \varphi_l + \frac{1}{2} U(0) \cos 2\varphi_l \right] + F_t(0). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Применом сличне процедуре на круто тело које је круто везано за десни крај еластичне греде добијају се и гранични услови за $z=L$:

$$\begin{aligned}
-\omega^2 J_c W'(L) = & -c_2 W'(L) + M_f(L) + F_a(L) d_r + F_t(L) e_r + \\
& d_r c_{12r} \left[U(L) \cos^2 \varphi_r + \frac{1}{2} W(L) \sin 2\varphi_r \right] \\
& + e_r c_{12r} \left[\frac{1}{2} U(L) \sin 2\varphi_r + W(L) \sin^2 \varphi_r \right] + \\
& d_r c_{11r} \left[U(L) \sin^2 \varphi_r - \frac{1}{2} W(L) \sin 2\varphi_r \right] \\
& - e_r c_{11r} \left[\frac{1}{2} U(L) \sin 2\varphi_r - W(L) \cos^2 \varphi_r \right],
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
-m_r \omega^2 [U(L) + W'(L) d_r] = & -c_{12r} \left[U(L) \cos^2 \varphi_r + \frac{1}{2} W(L) \sin 2\varphi_r \right] \\
& - c_{11r} \left[U(L) \sin^2 \varphi_r - \frac{1}{2} W(L) \sin 2\varphi_r \right] - F_a(L),
\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
-m_r \omega^2 [W(L) + W'(L) e_r] = & -c_{12r} \left[W(L) \sin^2 \varphi_r + \frac{1}{2} U(L) \sin 2\varphi_r \right] \\
& + c_{11r} \left[-W(L) \cos^2 \varphi_r + \frac{1}{2} U(L) \sin 2\varphi_r \right] - F_t(L).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

5.3 Свођење једначина на бездимензиони облик

У циљу смањења обима израчунавања може се извршити свођење карактеристичних величина и диференцијалних једначина кретања на бездимензиони облик спроводећи сличну процедуру као у претходним поглављима.

Као допуна до сада уведеним бездимензионим величинама у поглављима 2 и 3, уводе се бездимензиони ексцентрицитети тежишта крутог тела на левом крају греде C_l као:

$$\bar{e}_l = \frac{1}{L} e_l, \bar{d}_l = \frac{1}{L} d_l, \tag{5.29}$$

и бездимензиони ексцентрицитети тежишта крутог тела на десном крају греде C_r :

$$\bar{e}_r = \frac{1}{L} e_r, \bar{d}_r = \frac{1}{L} d_r. \tag{5.30}$$

Систем бездимензионих линеарних диференцијалних једначина приказан је у матричном облику. Вектор $\bar{X}(\bar{z})$ уводи се као вектор чији су елементи уздужно и попречно померање, нагиб попречног пресека, аксијалне и трансверзалне силе, као и момент савијања у функцији од уздужне координате.

Овај вектор дат је следећим изразом:

$$\bar{X}(\bar{z}) = \left[\bar{U}(\bar{z}) \quad \bar{W}(\bar{z}) \quad \bar{W}'(\bar{z}) \quad \bar{F}_a(\bar{z}) \quad \bar{F}_t(\bar{z}) \quad \bar{M}_f(\bar{z}) \right]^T. \quad (5.31)$$

Диференцијали по бездимензионој координати \bar{z} елемената вектора $\bar{X}(\bar{z})$ записани су у виду вектора у транспонованом облику као:

$$\frac{d}{d\bar{z}} \bar{X}(\bar{z}) = \left[\frac{d}{d\bar{z}} \bar{U}(\bar{z}) \quad \frac{d}{d\bar{z}} \bar{W}(\bar{z}) \quad \frac{d}{d\bar{z}} \bar{W}'(\bar{z}) \quad \frac{d}{d\bar{z}} \bar{F}_a(\bar{z}) \quad \frac{d}{d\bar{z}} \bar{F}_t(\bar{z}) \quad \frac{d}{d\bar{z}} \bar{M}_f(\bar{z}) \right]^T. \quad (5.32)$$

За потребе формирања система линеарних диференцијалних једначина спрегнутих осцилација у матричном облику формира се матрица реда 6×6 на основу сличних процедура као у поглављима 2 и 3:

$$\mathbf{T}(\bar{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{E}(\bar{z})\bar{A}(\bar{z})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\bar{E}(\bar{z})\bar{I}_x(\bar{z})} \\ -\bar{\omega}^2 \bar{\rho}(\bar{z}) \bar{A}(\bar{z}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\omega}^2 \bar{\rho}(\bar{z}) \bar{A}(\bar{z}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Систем линеарних диференцијалних једначина у бездимензионом облику може се писати у симболичком облику као матрични производ:

$$\frac{d}{dz} \bar{X} = T \bar{X}. \quad (5.34)$$

Сходно уведеним ознакама бездимензионих величина гранични услови на левом крају греде ($\bar{z} = 0$) дати изразима (5.23) до (5.25) могу се писати у следећем облику:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \bar{c}_{11l}^*\right) \left(1 - \bar{c}_{12l}^*\right) \left[\bar{F}_a(0) + \bar{m}_l \bar{\omega}^2 \left(\bar{U}(0) + \bar{W}'(0) \bar{d}_l \right) \right] \\ & - \bar{c}_{12l}^* \left(1 - \bar{c}_{11l}^*\right) \left[\bar{U}(0) \cos^2 \varphi_l + \frac{1}{2} \bar{W}(0) \sin 2\varphi_l \right] \\ & - \bar{c}_{11l}^* \left(1 - \bar{c}_{12l}^*\right) \left[\bar{U}(0) \sin^2 \varphi_l - \frac{1}{2} \bar{W}(0) \sin 2\varphi_l \right] \equiv \\ & \equiv \Phi_{1l} \left(\bar{F}_a(0), \bar{U}(0), \bar{W}(0), \bar{W}'(0) \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \bar{c}_{11l}^*\right) \left(1 - \bar{c}_{12l}^*\right) \left[\bar{F}_t(0) + \bar{m}_l \bar{\omega}^2 \left(\bar{W}(0) - \bar{W}'(0) \bar{e}_l \right) \right] \\ & - \bar{c}_{12l}^* \left(1 - \bar{c}_{11l}^*\right) \left[\bar{W}(0) \sin^2 \varphi_l + \frac{1}{2} \bar{U}(0) \sin 2\varphi_l \right] \\ & - \bar{c}_{11l}^* \left(1 - \bar{c}_{12l}^*\right) \left[-\bar{W}(0) \cos^2 \varphi_l + \frac{1}{2} \bar{U}(0) \sin 2\varphi_l \right] \equiv \\ & \equiv \Phi_{2l} \left(\bar{F}_t(0), \bar{U}(0), \bar{W}(0), \bar{W}'(0) \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} & -\bar{c}_1 \bar{W}'(0) + \left(1 - \bar{c}_1^*\right) \left[\bar{\omega}^2 \bar{J}_{cl} \bar{W}'(0) - \bar{M}_f(0) + \bar{m}_l \bar{\omega}^2 \left(\bar{U}(0) \bar{d}_l - \bar{W}(0) \bar{e}_l \right) \right] \\ & + \bar{m}_l \bar{\omega}^2 \left(1 - \bar{c}_1^*\right) \left(\bar{W}'(0) \bar{d}_l^2 - \bar{W}(0) \bar{e}_l^2 \right) \equiv \\ & \equiv \Phi_{3l} \left(\bar{M}_f(0), \bar{U}(0), \bar{W}(0), \bar{W}'(0) \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Слично као за „леве“ граничне услове, на десном крају греде $\bar{z} = 1$ гранични услови, који су дати изразима (5.26) до (5.28) могу се писати као:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \bar{c}_{11r}^*\right) \left(1 - \bar{c}_{12r}^*\right) \left[-\bar{F}_a(1) + \bar{m}_r \bar{\omega}^2 \left(\bar{U}(1) + \bar{W}'(1) \bar{d}_r \right) \right] \\ & - \bar{c}_{12r}^* \left(1 - \bar{c}_{11r}^*\right) \left[\bar{U}(1) \cos^2 \varphi_r + \frac{1}{2} \bar{W}(1) \sin 2\varphi_r \right] \\ & - \bar{c}_{11r}^* \left(1 - \bar{c}_{12r}^*\right) \left[\bar{U}(1) \sin^2 \varphi_r - \frac{1}{2} \bar{W}(1) \sin 2\varphi_r \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned}
& (1 - \bar{c}_{11r}^*) (1 - \bar{c}_{12r}^*) \left[-\bar{F}_t(1) + \bar{m}_r \bar{\omega}^2 (\bar{W}(1) + \bar{W}'(1) \bar{e}_r) \right] \\
& - \bar{c}_{12r}^* (1 - \bar{c}_{11r}^*) \left[\bar{W}(1) \sin^2 \varphi_l + \frac{1}{2} \bar{U}(1) \sin 2\varphi_r \right] \\
& + \bar{c}_{11r}^* (1 - \bar{c}_{12r}^*) \left[-\bar{W}(1) \cos^2 \varphi_l + \frac{1}{2} \bar{U}(1) \sin 2\varphi_l \right] = 0,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{c}_2^* \bar{W}'(1) + (1 - \bar{c}_2^*) \left[\bar{\omega}^2 \bar{J}_{Cr} \bar{W}'(1) + \bar{M}_f(1) + \bar{m}_r \bar{\omega}^2 (\bar{U}(1) \bar{d}_r - \bar{W}(1) \bar{e}_r) \right] \\
& + \bar{m}_r \bar{\omega}^2 (1 - \bar{c}_2^*) (\bar{W}'(1) \bar{d}_r^2 + \bar{W}'(1) \bar{e}_r^2) = 0.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

За овако постављене диференцијалне једначине у наредном поглављу описана је примена симболичко-нумеричког метода почетних параметара за решавање система линеарних диференцијалних једначина [11] на који се постављени проблем своди.

5.4 Нумеричка процедура одређивања сопствених фреквенција спрегнутих уздужних и попречних осцилација

Решавање постављеног проблема могуће је применом симболично-нумеричког метода почетних параметара [11] за чију примену се користе једначине (5.34) и (5.35) до (5.40) које заједно формирају двотачкасти гранични проблем. Решавање овог проблема је детаљно описано у [11] и [21]. Користећи модификовни метод почетних параметара у диференцијалном облику, а због линеарности система диференцијалних једначина може се писати решење проблема у облику:

$$\bar{X}(\bar{z}, \bar{\omega}) = C_1 \bar{X}_1(\bar{z}, \bar{\omega}) + C_2 \bar{X}_2(\bar{z}, \bar{\omega}) + C_3 \bar{X}_3(\bar{z}, \bar{\omega}), \tag{5.41}$$

где C_1 , C_2 и C_3 представљају непознате интеграционе константе, док вектори:

$$\begin{aligned}
& \bar{X}_i(\bar{z}, \bar{\omega}) = \\
& = \left[\bar{U}_i(\bar{z}, \bar{\omega}) \quad \bar{W}_i(\bar{z}, \bar{\omega}) \quad \bar{W}'_i(\bar{z}, \bar{\omega}) \quad \bar{F}_{ai}(\bar{z}, \bar{\omega}) \quad \bar{F}_{ti}(\bar{z}, \bar{\omega}) \quad \bar{M}_{fi}(\bar{z}, \bar{\omega}) \right]^T \\
& i \in \{1, 2, 3\},
\end{aligned} \tag{5.42}$$

представљају векторе партикуларних решења система обичних линеарних диференцијалних једначина (5.34) за одговарајуће почетне услове. Ова партикуларна решења одговарају почетним условима (5.35) - (5.37). Почетни услови система обичних линеарних диференцијалних једначина (5.34) могу се писати у следећем облику:

за $i=1$:

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_a(0, \bar{\omega}) &= 1, \bar{F}_t(0, \bar{\omega}) = 0, \bar{M}_f(0, \bar{\omega}) = 0 \\
 \Phi_{1l}(1, \bar{U}(0, \bar{\omega}), \bar{W}(0, \bar{\omega}), \bar{W}'(0, \bar{\omega})) &= 0 \\
 \Phi_{2l}(0, \bar{U}(0, \bar{\omega}), \bar{W}(0, \bar{\omega}), \bar{W}'(0, \bar{\omega})) &= 0 \\
 \Phi_{3l}(0, \bar{U}(0, \bar{\omega}), \bar{W}(0, \bar{\omega}), \bar{W}'(0, \bar{\omega})) &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

за $i=2$:

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_a(0, \bar{\omega}) &= 0, \bar{F}_t(0, \bar{\omega}) = 1, \bar{M}_f(0, \bar{\omega}) = 0 \\
 \Phi_{1l}(0, \bar{U}(0, \bar{\omega}), \bar{W}(0, \bar{\omega}), \bar{W}'(0, \bar{\omega})) &= 0 \\
 \Phi_{2l}(1, \bar{U}(0, \bar{\omega}), \bar{W}(0, \bar{\omega}), \bar{W}'(0, \bar{\omega})) &= 0 \\
 \Phi_{3l}(0, \bar{U}(0, \bar{\omega}), \bar{W}(0, \bar{\omega}), \bar{W}'(0, \bar{\omega})) &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

за $i=3$:

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_a(0, \bar{\omega}) &= 0, \bar{F}_t(0, \bar{\omega}) = 0, \bar{M}_f(0, \bar{\omega}) = 1 \\
 \Phi_{1l}(0, \bar{U}(0, \bar{\omega}), \bar{W}(0, \bar{\omega}), \bar{W}'(0, \bar{\omega})) &= 0 \\
 \Phi_{2l}(0, \bar{U}(0, \bar{\omega}), \bar{W}(0, \bar{\omega}), \bar{W}'(0, \bar{\omega})) &= 0 \\
 \Phi_{3l}(1, \bar{U}(0, \bar{\omega}), \bar{W}(0, \bar{\omega}), \bar{W}'(0, \bar{\omega})) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Непознате константе C_1 , C_2 и C_3 одређују се тако да решење у облику представљеном једначином (5.41) задовољава контурне услове (5.38) до (5.40):

$$\begin{bmatrix} a_{11}(\bar{\omega}) & a_{12}(\bar{\omega}) & a_{13}(\bar{\omega}) \\ a_{21}(\bar{\omega}) & a_{22}(\bar{\omega}) & a_{23}(\bar{\omega}) \\ a_{31}(\bar{\omega}) & a_{32}(\bar{\omega}) & a_{33}(\bar{\omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.46)$$

Елементи матрице су функције бездимензионе сопствене фреквенције у следећем облику:

$$\begin{aligned} a_{1i}(\bar{\omega}) = & (1 - \bar{c}_{11r}^*)(1 - \bar{c}_{12r}^*) \left[-\bar{F}_{ai}(1, \bar{\omega}) + \bar{m}_r \bar{\omega}^2 \left(\bar{U}_i(1, \bar{\omega}) + \bar{W}'_i(1, \bar{\omega}) \bar{d}_r \right) \right] \\ & - \bar{c}_{11r}^* (1 - \bar{c}_{12r}^*) \left[\bar{U}_i(1, \bar{\omega}) \sin^2 \varphi_r - \frac{1}{2} \bar{W}_i(1, \bar{\omega}) \sin 2\varphi_r \right] \\ & - \bar{c}_{12r}^* (1 - \bar{c}_{11r}^*) \left[\bar{U}_i(1, \bar{\omega}) \cos^2 \varphi_r - \frac{1}{2} \bar{W}_i(1, \bar{\omega}) \sin 2\varphi_r \right], i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} a_{2i}(\bar{\omega}) = & (1 - \bar{c}_{11r}^*)(1 - \bar{c}_{12r}^*) \left[-\bar{F}_{ii}(1, \bar{\omega}) + \bar{m}_r \bar{\omega}^2 \left(\bar{W}_i(1, \bar{\omega}) + \bar{W}'_i(1, \bar{\omega}) \bar{e}_r \right) \right] \\ & - \bar{c}_{11r}^* (1 - \bar{c}_{12r}^*) \left[\frac{1}{2} \bar{U}_i(1, \bar{\omega}) \sin 2\varphi_r - \bar{W}_i(1, \bar{\omega}) \cos^2 \varphi_r \right] \\ & - \bar{c}_{12r}^* (1 - \bar{c}_{11r}^*) \left[\frac{1}{2} \bar{U}_i(1, \bar{\omega}) \sin 2\varphi_r + \bar{W}_i(1, \bar{\omega}) \sin^2 \varphi_r \right], i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} a_{3i}(\bar{\omega}) = & -\bar{c}_2^* \bar{W}'(1, \bar{\omega}) + \bar{m}_r \bar{\omega}^2 (1 - \bar{c}_2^*) \left(\bar{W}'(1, \bar{\omega}) \bar{d}_r^2 + \bar{W}(1, \bar{\omega}) \bar{e}_r^2 \right) + \\ & (1 - \bar{c}_2^*) \left[\bar{\omega}^2 \bar{J}_{Cr} \bar{W}'(1, \bar{\omega}) + \bar{M}_f(1, \bar{\omega}) + \bar{m}_r \bar{\omega}^2 \left(\bar{U}(1, \bar{\omega}) \bar{d}_r - \bar{W}(1, \bar{\omega}) \bar{e}_r \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

На основу дискусије изложене у претходним поглављима, детерминанта система (5.46) представља фреквенту једначину спрегнутих уздужних и попречних осцилација Ојлер-Бернулијеве греде са променљивим геометријским и материјалним карактеристикама по уздужној оси:

$$h(\bar{\omega}) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}(\bar{\omega}) & a_{12}(\bar{\omega}) & a_{13}(\bar{\omega}) \\ a_{21}(\bar{\omega}) & a_{22}(\bar{\omega}) & a_{23}(\bar{\omega}) \\ a_{31}(\bar{\omega}) & a_{32}(\bar{\omega}) & a_{33}(\bar{\omega}) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.50)$$

За овако дефинисану фреквентну једначину решења се одређују користећи дефинисане процедуре нумеричких метода као што је приказано у [11]. Решења једначине (5.50) представљају сопствене фреквенције греде на слици 7. Нека је $\bar{\omega}_\alpha$ бездимензиона α -та сопствена фреквенција. Користећи систем једначина (5.46) долази се до веза међу константама $C_{1\alpha}$, $C_{2\alpha}$ и $C_{3\alpha}$.

Нека је $C_{1\alpha}$ произвољно изабрана реална константа, тада из система једначина (5.46) следе релације:

$$\frac{C_{2\alpha}}{C_{1\alpha}} = -\frac{a_{11}(\bar{\omega}_\alpha)a_{23}(\bar{\omega}_\alpha) - a_{21}(\bar{\omega}_\alpha)a_{13}(\bar{\omega}_\alpha)}{a_{12}(\bar{\omega}_\alpha)a_{23}(\bar{\omega}_\alpha) - a_{22}(\bar{\omega}_\alpha)a_{13}(\bar{\omega}_\alpha)}, \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{3\alpha}}{C_{1\alpha}} = & \\ = & -\frac{a_{31}(\bar{\omega}_\alpha)a_{12}(\bar{\omega}_\alpha)a_{23}(\bar{\omega}_\alpha) - a_{31}(\bar{\omega}_\alpha)a_{22}(\bar{\omega}_\alpha)a_{13}(\bar{\omega}_\alpha)}{a_{33}(\bar{\omega}_\alpha)[a_{12}(\bar{\omega}_\alpha)a_{23}(\bar{\omega}_\alpha) - a_{22}(\bar{\omega}_\alpha)a_{13}(\bar{\omega}_\alpha)]} \\ & + \frac{-a_{11}(\bar{\omega}_\alpha)a_{23}(\bar{\omega}_\alpha)a_{32}(\bar{\omega}_\alpha) + a_{21}(\bar{\omega}_\alpha)a_{13}(\bar{\omega}_\alpha)a_{32}(\bar{\omega}_\alpha)}{a_{33}(\bar{\omega}_\alpha)[a_{12}(\bar{\omega}_\alpha)a_{23}(\bar{\omega}_\alpha) - a_{22}(\bar{\omega}_\alpha)a_{13}(\bar{\omega}_\alpha)]}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

На основу овако изведених константи и постављене релације (5.41) може се писати израз за α -ти бездимензиони мод подужних осцилација еластичне греде у облику:

$$\bar{U}_\alpha(\bar{z}) = C_{1\alpha} \left[\bar{U}_1(\bar{z}, \bar{\omega}_\alpha) + \frac{C_{2\alpha}}{C_{1\alpha}} \bar{U}_2(\bar{z}, \bar{\omega}_\alpha) + \frac{C_{3\alpha}}{C_{1\alpha}} \bar{U}_3(\bar{z}, \bar{\omega}_\alpha) \right]. \quad (5.53)$$

За попречне осцилације еластичне греде израз за α -ти мод осциловања у бездимензионом облику гласи:

$$\bar{W}_\alpha(\bar{z}) = C_{1\alpha} \left[\bar{W}_1(\bar{z}, \bar{\omega}_\alpha) + \frac{C_{2\alpha}}{C_{1\alpha}} \bar{W}_2(\bar{z}, \bar{\omega}_\alpha) + \frac{C_{3\alpha}}{C_{1\alpha}} \bar{W}_3(\bar{z}, \bar{\omega}_\alpha) \right]. \quad (5.54)$$

Сходно изразима (2.10) и (3.20) следе димензијски изрази модова осциловања:

$$U_\alpha(z) = L\bar{U}_\alpha(\bar{z}), \quad (5.55)$$

$$W_\alpha(z) = L\bar{W}_\alpha(\bar{z}). \quad (5.56)$$

5.5 Услови ортогоналности модова осциловања

Полазећи од процедура за одређивање услова ортогоналности модова осциловања нехомогених греда описаних у [46] за уздужне осцилације еластичних греда сходно Ојлер-Бернулијевој теорији може се писати:

$$\int_0^L \rho(z) A(z) (\omega_\alpha^2 U_\alpha(z) U_\beta(z) - \omega_\beta^2 U_\beta(z) U_\alpha(z)) dz = \int_0^L (-F'_{\alpha\alpha}(z) U_\beta(z) + F'_{\alpha\beta}(z) U_\alpha(z)), \quad (5.57)$$

при чему индекси α и β представљају бројеве модова осциловања.

Нека је дат диференцијал облика:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (-F_{\alpha\alpha}(z) U_\beta + F_{\alpha\beta}(z) U_\alpha) &= -F'_{\alpha\alpha}(z) U_\beta(z) - F_{\alpha\alpha}(z) U'_\beta(z) + F'_{\alpha\beta}(z) U_\alpha(z) \\ &+ F_{\alpha\beta}(z) U'_\alpha(z) = -F'_{\alpha\alpha}(z) U_\beta(z) - F_{\alpha\alpha}(z) \frac{F_{\alpha\beta}(z)}{E(z) A(z)} \\ &+ F'_{\alpha\beta}(z) U_\alpha(z) + F_{\alpha\beta}(z) \frac{F_{\alpha\alpha}(z)}{E(z) A(z)} = -F'_{\alpha\alpha}(z) U_\beta(z) + F'_{\alpha\beta}(z) U_\alpha(z). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Када се израз (5.58) уврсти у (5.57), након интеграције добија се:

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) \int_0^L \rho(z) A(z) U_\alpha(z) U_\beta(z) dz = (-F_{\alpha\alpha}(z) U_\beta(z) + F_{\alpha\beta}(z) U_\alpha(z)) \Big|_0^L. \quad (5.59)$$

Након спровођења сличне процедуре за попречне осцилације добијено је:

$$\int_0^L \rho(z) A(z) (\omega_\alpha^2 W_\alpha(z) W_\beta(z) - \omega_\beta^2 W_\beta(z) W_\alpha(z)) dz = \int_0^L (-F'_{\alpha\alpha}(z) W_\beta(z) + F'_{\alpha\beta}(z) W_\alpha(z)). \quad (5.60)$$

У циљу свођења израза на тотални диференцијал уочавају се релације:

$$\begin{aligned} -F'_{\alpha\alpha}(z) W_\beta(z) + F'_{\alpha\beta}(z) W_\alpha(z) &= \frac{d}{dz} (-F_{\alpha\alpha}(z) W_\beta(z) + F_{\alpha\beta}(z) W_\alpha(z)) \\ &- (-F_{\alpha\alpha}(z) W'_\beta(z) + F_{\alpha\beta}(z) W'_\alpha(z)), \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dz} \left(-M_{f\alpha}(z)W'_\beta(z) + M_{f\beta}(z)W'_\alpha(z) \right) \\
&= -F_{t\alpha}(z)W'_\beta(z) + F_{t\beta}(z)W'_\alpha(z) - M_{f\alpha}(z) \frac{-M_{f\beta}(z)}{E(z)I(z)} + M_{f\beta}(z) \frac{-M_{f\alpha}(z)}{E(z)I(z)} \quad (5.62) \\
&= -F_{t\alpha}(z)W'_\beta(z) + F_{t\beta}(z)W'_\alpha(z).
\end{aligned}$$

Након што се изрази (5.61) и (5.62) уврсте у (5.60) услови ортогоналности попречних модова осциловања своде се на:

$$\begin{aligned}
& (\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) \int_0^L \rho(z) A(z) W_\alpha(z) W_\beta(z) dz \\
&= \left[-F_{t\alpha}(z)W_\beta(z) + M_{f\alpha}(z)W'_\beta(z) + F_{t\beta}(z)W_\alpha(z) - M_{f\beta}(z)W'_\alpha(z) \right]_0^L. \quad (5.63)
\end{aligned}$$

Сабирањем (5.59) и (5.63) добијено је:

$$\begin{aligned}
& (\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) \int_0^L \rho(z) A(z) [U_\alpha(z)U_\beta(z) + W_\alpha(z)W_\beta(z)] dz = \\
& \left[F_{a\beta}(L)U_\alpha(L) - F_{a\alpha}(L)U_\beta(L) \right] - \left[F_{a\beta}(0)U_\alpha(0) - F_{a\alpha}(0)U_\beta(0) \right] + \\
& \left[-F_{t\alpha}(L)W_\beta(L) + M_{f\alpha}(L)W'_\beta(L) + F_{t\beta}(L)W_\alpha(L) - M_{f\beta}(L)W'_\alpha(L) \right] - \\
& \left[-F_{t\alpha}(0)W_\beta(0) + M_{f\alpha}(0)W'_\beta(0) + F_{t\beta}(0)W_\alpha(0) - M_{f\beta}(0)W'_\alpha(0) \right]. \quad (5.64)
\end{aligned}$$

Када се у једначину (5.64) уврсте гранични услови (5.23) до (5.28) услови ортогоналности модова осциловања могу се писати као:

$$\begin{aligned}
& (\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) \int_0^L [\rho(z) A(z) [U_\alpha(z)U_\beta(z) + W_\alpha(z)W_\beta(z)]] dz \\
& + m_r (U_\alpha(L)U_\beta(L) + W_\alpha(L)W_\beta(L)) + m_r d_r (U_\alpha(L)W'_\beta(L) + U_\beta(L)W'_\alpha(L)) \\
& + m_r e_r (W_\alpha(L)W'_\beta(L) + W_\beta(L)W'_\alpha(L)) + J_{Cr} W'_\alpha(L)W'_\beta(L) \\
& + m_r (e_r^2 + d_r^2) W'_\alpha(L)W'_\beta(L) + m_l (U_\alpha(0)U_\beta(0) + W_\alpha(0)W_\beta(0)) + \\
& m_l d_l (U_\alpha(0)W'_\beta(0) + U_\beta(0)W'_\alpha(0)) - m_l e_l (W_\alpha(0)W'_\beta(0) + W_\beta(0)W'_\alpha(0)) \\
& + J_{Cl} W'_\alpha(0)W'_\beta(0) + m_l (e_l^2 + d_l^2) W'_\alpha(0)W'_\beta(0) = 0. \quad (5.65)
\end{aligned}$$

Из израза (5.65) може се закључити да крутости еластичних ослонаца греде не утичу на ортогоналност модова осциловања спрегнутих уздужних и попречних осцилација анализираних проблема.

Са испуњеним условима ортогоналности одзив механичког система на почетну побуду може се писати као бесконачна сума по моду осциловања α , [44] и [46].

За уздужна померања сегмената еластичне греде важи:

$$u(z,t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} U_{\alpha}(z) (K_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t) + S_{\alpha} \sin(\omega_{\alpha} t)). \quad (5.66)$$

За попречна померања сегмената еластичне греде важи:

$$w(z,t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W_{\alpha}(z) (K_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t) + S_{\alpha} \sin(\omega_{\alpha} t)). \quad (5.67)$$

5.6 Одређивање константи у временској функцији

Полазећи од услова ортогоналности модова осциловања (5.65) и заменом услова $\alpha=\beta$ добија се израз чија вредност може бити произвољна реална константа. Тада можемо писати:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho(z) A(z) [U_{\alpha}^2(z) + W_{\alpha}^2(z)] dz + m_r (U_{\alpha}^2(L) + W_{\alpha}^2(L)) + \\ & 2m_r d_r U_{\alpha}(L) W_{\alpha}'(L) + 2m_r e_r W_{\alpha}(L) W_{\alpha}'(L) + \\ & (J_{Cr} + m_r (d_r^2 + e_r^2)) W_{\alpha}'^2(L) + m_l (U_{\alpha}^2(0) + W_{\alpha}^2(0)) - \\ & 2m_l e_l W_{\alpha}(0) W_{\alpha}'(0) + 2m_l d_l U_{\alpha}(0) W_{\alpha}'(0) + \\ & (J_{Cl} + m_l (d_l^2 + e_l^2)) W_{\alpha}'^2(0) = 1, \end{aligned} \quad (5.68)$$

где је 1, произвољно изабрана реална константа.

Нека је $C_{1(1)}^{\alpha}$ произвољно изабрана реална константа тако да је:

$$W_{\alpha}(z) = C_{1(1)}^{\alpha} W_{\alpha}^*(z), \quad (5.69)$$

$$U_{\alpha}(z) = C_{1(1)}^{\alpha} U_{\alpha}^*(z). \quad (5.70)$$

За потребе одређивања константи у временској функцији уочене су следеће величине:

- Попречно померање попречног пресека одређеног координатом z у тренутку $t=0$:

$$f_w(z) \equiv w(z,0) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W_{\alpha}(z) K_{\alpha}, \quad (5.71)$$

- Уздужно померање попречног пресека одређеног координатом z , у тренутку $t=0$:

$$f_u(z) \equiv u(z,0) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} U_{\alpha}(z) K_{\alpha}, \quad (5.72)$$

- Нагиб попречног пресека греде одређеног координатом z , у тренутку $t=0$:

$$f'_w(z) \equiv w'(z,0) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W'_{\alpha}(z) K_{\alpha}, \quad (5.73)$$

- Пројекција брзине попречног пресека одређеног координатом z у тренутку $t=0$ на правац управан на подужну осу греде:

$$h_w(z) \equiv \frac{\partial w(z,0)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W_{\alpha}(z) \omega_{\alpha} S_{\alpha}, \quad (5.74)$$

- Пројекција брзине попречног пресека одређеног координатом z у тренутку $t=0$ у правцу подужне осе греде:

$$h_u(z) \equiv \frac{\partial u(z,0)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} U_{\alpha}(z) \omega_{\alpha} S_{\alpha}, \quad (5.75)$$

- Пројекција угаоног убрзања попречног пресека одређеног координатом z у тренутку $t=0$, на правац управан на подужну осу греде:

$$h'_w(z) \equiv \frac{\partial w'(z,0)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W'_\alpha(z) \omega_\alpha S_\alpha, \quad (5.76)$$

- Временска функција (2.3) и њен извод по времену за хармонијске осцилације:

$$\frac{d}{dt} T(t) = \omega_\alpha (-K_\alpha \sin(\omega_\alpha t) + S_\alpha \cos(\omega_\alpha t)), \quad (5.77)$$

- Попречно померање попречног пресека одређеног координатом $z=0$, у тренутку $t=0$:

$$f_w(0) \equiv w(0,0) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W_\alpha(0) K_\alpha, \quad (5.78)$$

- Уздужно померање попречног пресека одређеног координатом $z=0$, у тренутку $t=0$:

$$f_u(0) \equiv u(0,0) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} U_\alpha(0) K_\alpha, \quad (5.79)$$

- Нагиб попречног пресека греде одређеног координатом $z=0$ у тренутку $t=0$:

$$f'_w(0) \equiv w'(0,0) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W'_\alpha(0) K_\alpha, \quad (5.80)$$

- Пројекција брзине попречног пресека одређеног координатом $z=0$, у тренутку $t=0$ на правац управан на подужну осу греде:

$$h_w(0) \equiv \frac{\partial w(0,0)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W_{\alpha}(0) \omega_{\alpha} S_{\alpha}, \quad (5.81)$$

- Пројекција брзине попречног пресека одређеног координатом $z=0$ у тренутку $t=0$ у правцу подужне осе греде:

$$h_u(0) \equiv \frac{\partial u(0,0)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} U_{\alpha}(0) \omega_{\alpha} S_{\alpha}, \quad (5.82)$$

- Пројекција угаоног убрзања попречног пресека одређеног координатом $z=0$, у тренутку $t=0$ на правац управан на подужну осу греде:

$$h'_w(0) \equiv \frac{\partial w'(0,0)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W'_{\alpha}(0) \omega_{\alpha} S_{\alpha}, \quad (5.83)$$

- Попречно померање попречног пресека одређеног координатом $z=L$, у тренутку $t=0$:

$$f_w(L) \equiv w(L,0) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W_{\alpha}(L) K_{\alpha}, \quad (5.84)$$

- Уздужно померање попречног пресека одређеног координатом $z=L$, у тренутку $t=0$:

$$f_u(L) \equiv u(L,0) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} U_{\alpha}(L) K_{\alpha}, \quad (5.85)$$

- Нагиб попречног пресека греде одређеног координатом $z=L$, у тренутку $t=0$:

$$f'_w(L) \equiv w'(L,0) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W'_{\alpha}(L) K_{\alpha}, \quad (5.86)$$

- Пројекција брзине попречног пресека одређеног координатом $z=L$, у тренутку $t=0$ на правац управан на подужну осу греде:

$$h_w(L) \equiv \frac{\partial w(L,0)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W_{\alpha}(L) \omega_{\alpha} S_{\alpha}, \quad (5.87)$$

- Пројекција брзине попречног пресека одређеног координатом $z=L$, у тренутку $t=0$ у правцу подужне осе греде:

$$h_u(L) \equiv \frac{\partial u(L,0)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} U_{\alpha}(L) \omega_{\alpha} S_{\alpha}, \quad (5.88)$$

- Нагиб попречног пресека греде одређеног координатом $z=L$, у тренутку $t=0$:

$$f'_w(L) \equiv w'(L,0) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W'_{\alpha}(L) K_{\alpha}, \quad (5.89)$$

- Пројекција угаоног убрзања попречног пресека одређеног координатом $z=L$ у тренутку $t=0$ на правац управан на подужну осу греде:

$$h'_w(L) \equiv \frac{\partial w'(L,0)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} W'_{\alpha}(L) \omega_{\alpha} S_{\alpha}. \quad (5.90)$$

Применом изведених услова ортогоналности модова осциловања добијају се константе K_{α} и S_{α} у временској функцији, у облику:

$$\begin{aligned}
K_\alpha &= C_{1(1)}^\alpha \int_0^L \rho(z) A(z) (f_w(z) W_\alpha^*(z) + f_u(z) U_\alpha^*(z)) dz \\
&+ C_{1(1)}^\alpha \left[J_{Cr} + m_r (d_r^2 + e_r^2) \right] W_\alpha^{*'}(L) f_w'(L) + C_{1(1)}^\alpha m_r d_r (f_u(L) W_\alpha^*(L) + f_w'(L) U_\alpha^*(L)) \\
&+ C_{1(1)}^\alpha m_r (U_\alpha^*(L) f_u(L) + W_\alpha^*(L) f_w(L)) + C_{1(1)}^\alpha m_r e_r (f_w'(L) W_\alpha^*(L) + f_w(L) W_\alpha^{*'}(L)) \quad (5.91) \\
&+ C_{1(1)}^\alpha \left[J_{Cl} + m_l (d_l^2 + e_l^2) \right] W_\alpha^{*'}(0) f_w'(0) + C_{1(1)}^\alpha m_l d_l (f_u(0) W_\alpha^*(0) + f_w'(0) U_\alpha^*(0)) \\
&+ C_{1(1)}^\alpha m_l (U_\alpha^*(0) f_u(0) + W_\alpha^*(0) f_w(0)) - C_{1(1)}^\alpha m_l e_l (f_w'(0) W_\alpha^*(0) + f_w(0) W_\alpha^{*'}(0)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_\alpha &= \frac{1}{\omega_\alpha} C_{1(1)}^\alpha \int_0^L \rho(z) A(z) (h_w(z) W_\alpha^*(z) + h_u(z) U_\alpha^*(z)) dz \\
&+ C_{1(1)}^\alpha \left[J_{Cr} + m_r (d_r^2 + e_r^2) \right] W_\alpha^{*'}(L) h_w'(L) + C_{1(1)}^\alpha m_r d_r (h_u(L) W_\alpha^*(L) + h_w'(L) U_\alpha^*(L)) \\
&+ C_{1(1)}^\alpha m_r (U_\alpha^*(L) h_u(L) + W_\alpha^*(L) h_w(L)) + C_{1(1)}^\alpha m_r e_r (h_w'(L) W_\alpha^*(L) + h_w(L) W_\alpha^{*'}(L)) \quad (5.92) \\
&+ C_{1(1)}^\alpha \left[J_{Cl} + m_l (d_l^2 + e_l^2) \right] W_\alpha^{*'}(0) h_w'(0) + C_{1(1)}^\alpha m_l d_l (h_u(0) W_\alpha^*(0) + h_w'(0) U_\alpha^*(0)) \\
&+ C_{1(1)}^\alpha m_l (U_\alpha^*(0) h_u(0) + W_\alpha^*(0) h_w(0)) - C_{1(1)}^\alpha m_l e_l (h_w'(0) W_\alpha^*(0) + h_w(0) W_\alpha^{*'}(0)).
\end{aligned}$$

5.7 Утицај густине једног конститутивног материјала на сопствене фреквенције греде

Утицај густине конститутивног материјала у положају $z=0$ на сопствену фреквенцију могуће је анализирати применом симболичко-нумеричког метода почетних параметара [11] уз примену параметарског решавања система линеарних диференцијалних једначина осциловања.

Систем линеарних диференцијалних једначина (5.41) може се писати у функцији сопствене фреквенције и густине материјала на левом крају греде као [52]:

$$X(z) = C_1 X_1(z, \omega, \rho_0) + C_2 X_2(z, \omega, \rho_0) + C_3 X_3(z, \omega, \rho_0), \quad (5.93)$$

где C_1 , C_2 и C_3 представљају непознате интеграционе константе, док вектори:

$$X_i(z, \omega, \rho_0) = \left[U_i(z, \omega, \rho_0) \quad W_i(z, \omega, \rho_0) \quad W'_i(z, \omega, \rho_0) \quad F_{ai}(z, \omega, \rho_0) \quad F_{fi}(z, \omega, \rho_0) \quad M_{fi}(z, \omega, \rho_0) \right]^T$$

$$i \in \{1, 2, 3\},$$

(5.94)

представљају векторе партикуларних решења система обичних линеарних диференцијалних једначина (5.34) за одговарајуће почетне услове. Ова партикуларна решења одговарају контурним условима (5.35) до (5.37).

Сада се могу писати почетни услови система обичних линеарних диференцијалних једначина (5.34) у следећем облику:

за $i=1$:

$$\begin{aligned} F_a(0, \omega, \rho_0) &= 1, F_t(0, \omega, \rho_0) = 0, M_f(0, \omega, \rho_0) = 0 \\ \Phi_{1l}(1, U(0, \omega, \rho_0), W(0, \omega, \rho_0), W'(0, \omega, \rho_0)) &= 0 \\ \Phi_{2l}(0, U(0, \omega, \rho_0), W(0, \omega, \rho_0), W'(0, \omega, \rho_0)) &= 0 \\ \Phi_{3l}(0, U(0, \omega, \rho_0), W(0, \omega, \rho_0), W'(0, \omega, \rho_0)) &= 0, \end{aligned}$$

(5.95)

за $i=2$:

$$\begin{aligned} F_a(0, \omega, \rho_0) &= 0, F_t(0, \omega, \rho_0) = 1, M_f(0, \omega, \rho_0) = 0 \\ \Phi_{1l}(0, U(0, \omega, \rho_0), W(0, \omega, \rho_0), W'(0, \omega, \rho_0)) &= 0 \\ \Phi_{2l}(1, U(0, \omega, \rho_0), W(0, \omega, \rho_0), W'(0, \omega, \rho_0)) &= 0 \\ \Phi_{3l}(0, U(0, \omega, \rho_0), W(0, \omega, \rho_0), W'(0, \omega, \rho_0)) &= 0, \end{aligned}$$

(5.96)

за $i=3$:

$$\begin{aligned} F_a(0, \omega, \rho_0) &= 0, F_t(0, \omega, \rho_0) = 0, M_f(0, \omega, \rho_0) = 1 \\ \Phi_{1l}(0, U(0, \omega, \rho_0), W(0, \omega, \rho_0), W'(0, \omega, \rho_0)) &= 0 \\ \Phi_{2l}(0, U(0, \omega, \rho_0), W(0, \omega, \rho_0), W'(0, \omega, \rho_0)) &= 0 \\ \Phi_{3l}(1, U(0, \omega, \rho_0), W(0, \omega, \rho_0), W'(0, \omega, \rho_0)) &= 0. \end{aligned}$$

(5.97)

Слично као у поглављу 5.4 непознате константе C_1 , C_2 и C_3 одређују се тако да решење (5.93) задовољава:

$$\begin{bmatrix} a_{11}(\omega, \rho_0) & a_{12}(\omega, \rho_0) & a_{13}(\omega, \rho_0) \\ a_{21}(\omega, \rho_0) & a_{22}(\omega, \rho_0) & a_{23}(\omega, \rho_0) \\ a_{31}(\omega, \rho_0) & a_{32}(\omega, \rho_0) & a_{33}(\omega, \rho_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.98)$$

Елементи матрице система a_{ij} су функције сопствене фреквенције ω и густине ρ_0 :

$$\begin{aligned} a_{1i}(\omega, \rho_0) &= m_r \omega^2 \left[U_i(L, \omega, \rho_0) + W_i'(L, \omega, \rho_0) d_r \right] \\ &- c_{12r} \left[U_i(L, \omega, \rho_0) \cos^2 \varphi_r + \frac{1}{2} W_i(L, \omega, \rho_0) \sin 2\varphi_r \right] \\ &- c_{11r} \left[U_i(L, \omega, \rho_0) \sin^2 \varphi_r - \frac{1}{2} W_i(L, \omega, \rho_0) \sin 2\varphi_r \right] \\ &- F_{ai}(L, \omega, \rho_0), i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5.99)$$

$$\begin{aligned} a_{2i}(\omega, \rho_0) &= m_r \omega^2 \left[W_i(L, \omega, \rho_0) + W_i'(L, \omega, \rho_0) e_r \right] \\ &- c_{12r} \left[W_i(L, \omega, \rho_0) \sin^2 \varphi_r + \frac{1}{2} U_i(L, \omega, \rho_0) \sin 2\varphi_r \right] \\ &+ c_{11r} \left[-W_i(L, \omega, \rho_0) \cos^2 \varphi_r + \frac{1}{2} U_i(L, \omega, \rho_0) \sin 2\varphi_r \right] \\ &- F_{ii}(L), i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned} a_{3i}(\omega, \rho_0) &= -c_2 W'(L, \omega, \rho_0) + m_r \omega^2 (1 - c_2^*) (W'(L, \omega, \rho_0) d_r^2 + W'(L, \omega, \rho_0) e_r^2) \\ &+ (1 - c_2^*) \left[\omega^2 J_c W'(L, \omega, \rho_0) + M_f(L, \omega, \rho_0) \right] \\ &+ (1 - c_2^*) m_r \omega^2 (U(L, \omega, \rho_0) d_r - W(L, \omega, \rho_0) e_r). \end{aligned} \quad (5.101)$$

На основу дискусије изложене у претходним поглављима, детерминанта система (5.98) представља фреквентну једначину спрегнутих уздужних и попречних осцилација Ојлер-Бернулијеве греде. Фреквентна једначина дата је као функција две променљиве и то сопствене фреквенције ω и густине ρ_0 као у [52]:

$$h(\omega, \rho_0) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}(\omega, \rho_0) & a_{12}(\omega, \rho_0) & a_{13}(\omega, \rho_0) \\ a_{21}(\omega, \rho_0) & a_{22}(\omega, \rho_0) & a_{23}(\omega, \rho_0) \\ a_{31}(\omega, \rho_0) & a_{32}(\omega, \rho_0) & a_{33}(\omega, \rho_0) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.102)$$

За овако дефинисану фреквентну једначину $h(\omega, \rho_0)$ графички се одређују зависности густине и сопствених фреквенција система. На основу добијених графика може се пратити тренд промене сопствених фреквенција са променом густине материјала на левом крају греде.

5.8 Утицај масе крутог тела на десном крају греде на сопствене фреквенције осциловања греде

Утицај масе крутог тела на десном крају греде на сопствену фреквенцију могуће је анализирати применом симболичко-нумеричког метода почетних параметара [11] уз примену параметарског решавања система линеарних диференцијалних једначина осциловања система. Поступак је сличан као у поглављу 5.7, при чему маса крутог тела не фигурише у самим диференцијалним једначинама, већ само у контурним условима на крају греде.

Систем линеарних диференцијалних једначина (5.41) може се писати као функција сопствене фреквенције и масе тела на десном крају греде као:

$$X(z) = C_1 X_1(z, \omega, m_r) + C_2 X_2(z, \omega, m_r) + C_3 X_3(z, \omega, m_r), \quad (5.103)$$

где C_1 , C_2 и C_3 представљају непознате интеграционе константе, док вектори:

$$X_i(z, \omega) = \left[U_i(z, \omega) \quad W_i(z, \omega) \quad W_i'(z, \omega) \quad F_{ai}(z, \omega) \quad F_{ii}(z, \omega) \quad M_{fi}(z, \omega) \right]^T, i \in \{1, 2, 3\}, \quad (5.104)$$

представљају векторе партикуларних решења система обичних линеарних диференцијалних једначина (5.34) за одговарајуће почетне услове.

Ова партикуларна решења одговарају контурним условима (5.35) до (5.37), па се почетни услови система обичних линеарних диференцијалних једначина (5.34) могу писати у следећем облику:

за $i=1$:

$$\begin{aligned}
 F_a(0, \omega) &= 1, F_t(0, \omega) = 0, M_f(0, \omega) = 0 \\
 \Phi_{1l}(1, U(0, \omega), W(0, \omega), W'(0, \omega)) &= 0 \\
 \Phi_{2l}(0, U(0, \omega), W(0, \omega), W'(0, \omega)) &= 0 \\
 \Phi_{3l}(0, U(0, \omega), W(0, \omega), W'(0, \omega)) &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.105}$$

за $i=2$:

$$\begin{aligned}
 F_a(0, \omega) &= 0, F_t(0, \omega) = 1, M_f(0, \omega) = 0 \\
 \Phi_{1l}(0, U(0, \omega), W(0, \omega), W'(0, \omega)) &= 0 \\
 \Phi_{2l}(1, U(0, \omega), W(0, \omega), W'(0, \omega)) &= 0 \\
 \Phi_{3l}(0, U(0, \omega), W(0, \omega), W'(0, \omega)) &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.106}$$

за $i=3$:

$$\begin{aligned}
 F_a(0, \omega) &= 0, F_t(0, \omega) = 0, M_f(0, \omega) = 1 \\
 \Phi_{1l}(0, U(0, \omega), W(0, \omega), W'(0, \omega)) &= 0 \\
 \Phi_{2l}(0, U(0, \omega), W(0, \omega), W'(0, \omega)) &= 0 \\
 \Phi_{3l}(1, U(0, \omega), W(0, \omega), W'(0, \omega)) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.107}$$

Слично као у поглављу 5.4 непознате константе C_1 , C_2 и C_3 одређују се тако да решење у облику представљеном једначином (5.93) задовољава контурне услове као:

$$\begin{bmatrix} a_{11}(\omega, m_r) & a_{12}(\omega, m_r) & a_{13}(\omega, m_r) \\ a_{21}(\omega, m_r) & a_{22}(\omega, m_r) & a_{23}(\omega, m_r) \\ a_{31}(\omega, m_r) & a_{32}(\omega, m_r) & a_{33}(\omega, m_r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{5.108}$$

Елементи матрице система a_{ij} су функције сопствене фреквенције ω и масе m_r на десном крају греде:

$$\begin{aligned}
a_{1i}(\omega, m_r) &= m_r \omega^2 \left[U_i(L, \omega, m_r) + W_i'(L, \omega, m_r) d_r \right] \\
&- c_{12r} \left[U_i(L, \omega, m_r) \cos^2 \varphi_r + \frac{1}{2} W_i(L, \omega, m_r) \sin 2\varphi_r \right] \\
&- c_{11r} \left[U_i(L, \omega, m_r) \sin^2 \varphi_r - \frac{1}{2} W_i(L, \omega, m_r) \sin 2\varphi_r \right] \\
&- F_{ai}(L, \omega, m_r), i = 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{5.109}$$

$$\begin{aligned}
a_{2i}(\omega, m_r) &= m_r \omega^2 \left[W_i(L, \omega, m_r) + W_i'(L, \omega, m_r) e_r \right] \\
&- c_{12r} \left[W_i(L, \omega, m_r) \sin^2 \varphi_r + \frac{1}{2} U_i(L, \omega, m_r) \sin 2\varphi_r \right] \\
&+ c_{11r} \left[-W_i(L, \omega, m_r) \cos^2 \varphi_r + \frac{1}{2} U_i(L, \omega, m_r) \sin 2\varphi_r \right] \\
&- F_{ii}(L), i = 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{5.110}$$

$$\begin{aligned}
a_{3i}(\omega, m_r) &= m_r \omega^2 (1 - c_2^*) (W_i'(L, \omega, m_r) d_r^2 + W_i(L, \omega, m_r) e_r^2) \\
&+ (1 - c_2^*) \left[\omega^2 J_{Cr} W_i'(L, \omega, m_r) + M_{fi}(L, \omega, m_r) \right] \\
&+ (1 - c_2^*) m_r \omega^2 (U_i(L, \omega, m_r) d_r - W_i(L, \omega, m_r) e_r) \\
&- c_2 W_i'(L, \omega, m_r).
\end{aligned} \tag{5.111}$$

На основу дискусије изложене у претходним поглављима, детерминанта система (5.108) представља фреквенту једначину спрегнутих уздужних и попречних осцилација Ојлер-Бернулијеве греде. Фреквентна једначина дата је као функција две променљиве и то сопствене фреквенције ω и масе крутог тела m_r као што је дискутовано у [52]:

$$h(\omega, m_r) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}(\omega, m_r) & a_{12}(\omega, m_r) & a_{13}(\omega, m_r) \\ a_{21}(\omega, m_r) & a_{22}(\omega, m_r) & a_{23}(\omega, m_r) \\ a_{31}(\omega, m_r) & a_{32}(\omega, m_r) & a_{33}(\omega, m_r) \end{vmatrix} = 0. \tag{5.112}$$

За овако дефинисану фреквентну једначину $h(\omega, m_r)$ графички се одређује промена сопствених фреквенција греде од масе тела на десном крају. За жељену

сопствену фреквенцију може се пратити тренд њене промене са порастом масе тела на десном крају.

Користећи сличну процедуру могуће је вршити анализу утицаја масе левог тела на сопствене фреквенције греда, као и анализу утицаја положаја центра масе крутог тела на крајевима греде.

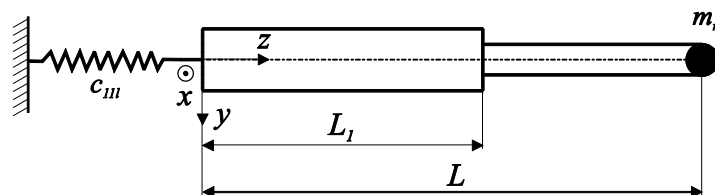
6. Нумерички примери

Применљивост и тачност изложеног модела за решавање проблема осцилација еластичних греда од функционално градијентних материјала чије се механичке карактеристике мењају по уздужној оси греде, проверава се поређењем добијених резултата са резултатима представљеним у релевантној литератури. За проблеме подужног осциловања еластичних штапова поређење се врши са резултатима представљеним у референци [53], док се резултати тачних сопствених фреквенција добијених симболичко-нумеричким методом почетних параметара за случајеве попречних осцилација Ојлер-Бернулијевих греда пореде са резултатима рада [27], односно [54]. Ови резултати су међународно верификовани 2018. године кроз рад [11]. Упорјеђивање резултата добијених *SNMIP*-методом за попречне осцилације Тимошенкових греда извршено је у односу на резултате представљене у [55]. С обзиром на слабу покривеност проблема спрегнутих осцилација еластичних греда од функционално градијентних материјала у литератури предложени модел је примењен на одређивање сопствених фреквенција конзолног носача и поређење добијених резултата са резултатима у раду [3]. Илустрација предности симболичко-нумеричког метода почетних параметара у односу на метод погађања (*shooting method*) извршена је кроз поређење са резултатима у раду [48].

6.1 Нумерички пример 1

На слици 10 приказан је штап који може да осцилује дуж z осе. На левом крају штап се ослања на опругу ($z=0$), чија је крутост c_{III} , док је на десној страни штапа везан терет масе $m_r = 500\text{kg}$ чије димензије је могуће занемарити. Штап, приказан на слици 10 састоји се из два сегмента и дужине је $L = 20\text{m}$. Први сегмент је дужине $L_1 = 5\text{m}$ и кружног попречног пресека полупречника $r_1 = 0.05\text{m}$, док је други сегмент кружног попречног пресека полупречника $r_2 = 0.04\text{m}$. За задата два типа материјала

(Тип 1 и Тип 2) и различите вредности крутости опруге на левом крају штапа, врши се одређивање прве три бездимензионе сопствене фреквенције и поређење добијених резултата са резултатима доступним у литератури [53].



Слика 10. Еластични штап са једном степенастом променом попречног пресека

Карактеристике материјала типа 1 за анализирани проблем:

- Модул еластичности:

$$E_1 = E_2 = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad (6.1)$$

- Густина материјала:

$$\rho_1 = \rho_2 = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad (6.2)$$

где индекси 1 и 2 означавају број сегмента греде.

Карактеристике материјала типа 2 за анализирани проблем:

- Модул еластичности:

$$E_1(z) = E_{zc} + (E_{al} - E_{zc}) \left(\frac{z}{L} \right)^2, \quad 0 \leq z < L_1, \quad (6.3)$$

- Густина материјала:

$$E_2(z) = E_{zc} + (E_{al} - E_{zc}) \left(\frac{z - L_1}{L} \right)^2, \quad L_1 \leq z < L, \quad (6.4)$$

где индекси 1 и 2 означавају број сегмента.

Коришћене су следеће ознаке: $E_{zc} = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ представља модул еластичности цирконијум-диоксида (ZrO_2), а $E_{al} = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ представља модул еластичности алуминијума.

Закони промене густине материјала сегмената 1 и 2 су:

$$\rho_1(z) = \rho_{zc} + (\rho_{al} - \rho_{zc}) \left(\frac{z}{L} \right)^2, 0 \leq z < L_1, \quad (6.5)$$

$$\rho_2(z) = \rho_{zc} + (\rho_{al} - \rho_{zc}) \left(\frac{z - L_1}{L} \right)^2, L_1 \leq z < L, \quad (6.6)$$

где, $\rho_{zc} = 5700 \text{ kg/m}^3$ представља густину цирконијум-диоксида, а $\rho_{al} = 2702 \text{ kg/m}^3$ представља густину алуминијума.

Применом метода описаног у поглављу 2 долази се до бездимензионих сопствених фреквенција чије вредности су приказане у табели 1. Одређене су вредности сопствених фреквенција за различите крутости еластичне опруге на левом крају греде и резултати су упоређени са резултатима из релевантне литературе.

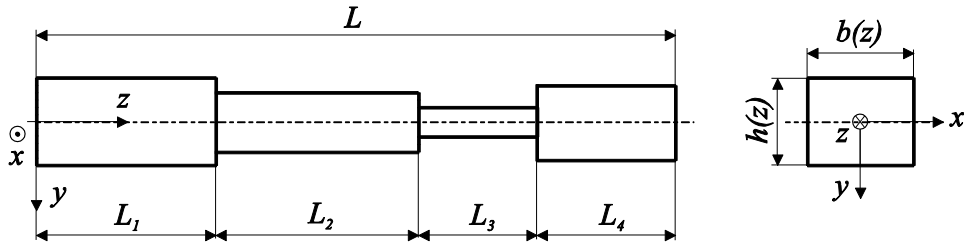
Табела 1. Квадрати бездимензионих сопствених фреквенција уздужних осцилација еластичног степенастог штапа [11]

$c_{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$	Тип материјала	Метод израчунавања	$\bar{\omega}_1^2$	$\bar{\omega}_2^2$	$\bar{\omega}_3^2$
$1.62 \cdot 10^8$	1	<i>SNMIP</i>	0.72951	7.29066	26.7723
	1	[53]	0.72951	7.29066	26.7723
	2	<i>SNMIP</i>	0.60663	6.29918	24.5695
$1.62 \cdot 10^9$	1	<i>SNMIP</i>	1.08319	12.8165	37.2285
	1	[53]	1.08319	12.8165	37.2285
	2	<i>SNMIP</i>	0.838264	11.0054	35.282
$1.62 \cdot 10^9$	1	<i>SNMIP</i>	1.13277	13.9834	41.5727
	1	[53]	1.13277	13.9834	41.5727
	2	<i>SNMIP</i>	0.868606	11.9269	39.2609

Поређењем приказаних резултата сопствених фреквенција одређених у литератури може се закључити да се применом симболичко-нумеричког метода почетних параметара добијају поклапања резултата са претходно верификованима.

6.2 Нумерички пример 2

На слици 11 приказана је греда који може да осцилује дуж y -осе приказаног инерцијалног координатног система. Греда, приказана на слици 11 састоји се од четири сегмента правоугаоног попречног пресека чије су дужине L_1 , L_2 , L_3 и L_4 као на слици. За задата два типа материјала (Тип 1 и Тип 2) и различите типове ослањања греде, без концентрисаних маса на крајевима, врши се одређивање прве три бездимензионе сопствене фреквенције и поређење добијених резултата са резултатима доступним у литератури [27]. Везе које су приказане у табели 2 ограничавају кретање греде.



Слика 11. Еластична греда правоугаоног попречног пресека са четири сегмента константног попречног пресека

Геометријске карактеристике греде су као у референци [27]:

$$b_1(z) = b_2(z) = b_3(z) = b_4(z) = \text{const} \equiv b_1,$$

$$h_1(z) \equiv h_1, \quad h_2(z) = 0.8h_1, \quad h_3(z) = 0.65h_1, \quad h_4(z) = 0.25h_1,$$

$$\frac{L_1}{L} = 0.25, \quad \frac{L_2}{L} = 0.3, \quad \frac{L_3}{L} = 0.25, \quad \frac{L_4}{L} = 0.20,$$

Карактеристике материјала типа 1:

- Модул еластичности материјала:

$$E(z) = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad (6.7)$$

- Густина материјала:

$$\rho(z) = 5700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (6.8)$$

Карактеристике материјала типа 2:

- Модул еластичности материјала:

$$E(z) = E_{zc} + (E_{al} - E_{zc}) \left(\frac{z}{L} \right)^2, \quad (6.9)$$

- Густина материјала:

$$\rho(z) = \rho_{zc} + (\rho_{al} - \rho_{zc}) \left(\frac{z}{L} \right)^2. \quad (6.10)$$

Применом метода описаног у поглављу 3 долази се до бездимензионих сопствених фреквенција чије вредности су приказане у табели 2.

Табела 2. Квадратни корени прве три бездимензионе сопствене фреквенције греде са
Слике 11 са различитим типовима ослањања [11]

Тип ослонца Леви/Десни	Тип материјала	Метод израчунавања	$\sqrt{\bar{\omega}_1}$	$\sqrt{\bar{\omega}_2}$	$\sqrt{\bar{\omega}_3}$
Укљештен/ Слободан крај	1	<i>SNMIP</i>	2.17847	4.23574	5.92195
	1	[27]	2.17847	4.23574	5.92195
	2	<i>SNMIP</i>	2.3605	4.32307	5.903
Укљештен/ Вертикално усмерен крај	1	<i>SNMIP</i>	2.24864	4.67662	6.62451
	1	[27]	2.24864	4.67662	6.62451
	2	<i>SNMIP</i>	2.40769	4.73025	6.48911
Укљештен/ Укљештен	1	<i>SNMIP</i>	3.54196	5.81163	8.48186
	1	[27]	3.54196	5.81163	8.48186
	2	<i>SNMIP</i>	3.4077	5.72337	8.39337
Зглобна веза/ Зглобна веза	1	<i>SNMIP</i>	2.24074	4.63823	7.43284
	1	[27]	2.24074	4.63823	7.43284
	2	<i>SNMIP</i>	2.08694	4.62467	7.38797
Укљештен/ Зглобна веза	1	<i>SNMIP</i>	3.02686	5.42184	8.10835
	1	[27]	3.02686	5.42184	8.10835
	2	<i>SNMIP</i>	3.00028	5.43323	8.04775
Зглобна веза/ Вертикално усмерен крај	1	<i>SNMIP</i>	0.822628	3.93483	6.12866
	1	[27]	0.82263	3.93483	6.12866
	2	<i>SNMIP</i>	0.73289	4.013	6.13116

6.3 Нумерички пример 3

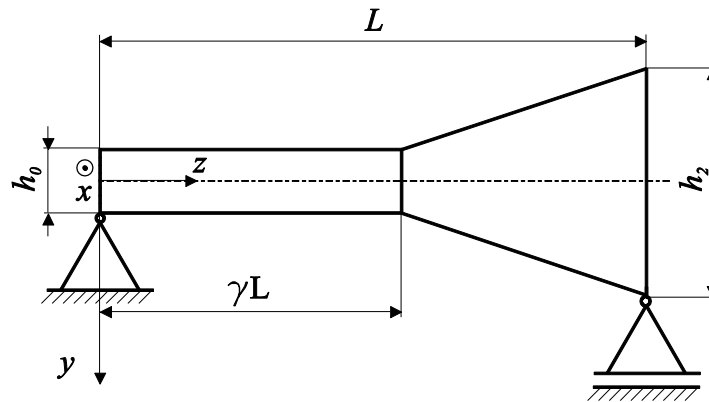
На слици 12 приказана је еластична греда чије су подужне димензије приказане на слици, а која се састоји из два сегмента [11] при чему је сваки сегмент правоугаоног попречног пресека. Једна димензија попречног пресека је константна на оба сегмента и износи $b_1(z) = b_2(z) \equiv b_0$, док се друга димензија првог и другог сегмента греде мења по закону:

$$h_1(z) \equiv h_0, 0 \leq z < \gamma L, \quad (6.11)$$

$$h_2(z) = h_0 \left(1 + \frac{1 - c_h}{c_h(1 - \gamma)} (z - \gamma L) \right), z \geq \gamma L, \quad (6.12)$$

где је $c_h = \frac{h_0}{h_2(L)}$ параметар чије се вредности мењају као у табели 3, док је γ

параметар дужине, чије су вредности такође дате у табели 3.



Слика 12. Еластична греда, правоугаоног попречног пресека која се ослања лево на непокретну зглобну везу, а десно на покретну зглобну везу.

Карактеристике материјала типа 1:

- Модул еластичности материјала:

$$E(z) = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad (6.13)$$

- Густина материјала:

$$\rho(z) = 5700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (6.14)$$

Карактеристике материјала типа 2:

- Модул еластичности материјала, по сегментима 1 и 2:

$$E_1(z) = E_{zc} + (E_{al} - E_{zc}) \left(\frac{z}{L} \right)^2, 0 \leq z < \gamma L, \quad (6.15)$$

$$E_2(z) = E_{zc} + (E_{al} - E_{zc}) \left(\frac{z - L_1}{L} \right)^2, \gamma L \leq z \leq L, \quad (6.16)$$

– Густина материјала, по сегментима:

$$\rho_1(z) = \rho_{zc} + (\rho_{al} - \rho_{zc}) \left(\frac{z}{L} \right)^2, 0 \leq z < \gamma L, \quad (6.17)$$

$$\rho_2(z) = \rho_{zc} + (\rho_{al} - \rho_{zc}) \left(\frac{z - L_1}{L} \right)^2, \gamma L \leq z \leq L, \quad (6.18)$$

Табела 3. Квадратни корени прве три сопствене фреквенције еластичне греде на Слици 12 за различите типове материјала и параметара димензија попречног пресека

[11]

c_h	γ	Тип материјала	Метод израчунавања	$\sqrt{\bar{\omega}_1}$	$\sqrt{\bar{\omega}_2}$	$\sqrt{\bar{\omega}_3}$
0.1	0.2	1	<i>SNMIP</i>	4.16751	11.7968	16.6742
		1	[54]	4.1675	11.7968	16.6742
		2	<i>SNMIP</i>	4.21301	11.7355	16.5863
0.1	0.4	1	<i>SNMIP</i>	3.29393	9.14228	14.6626
		1	[54]	3.2939	9.4123	14.6626
		2	<i>SNMIP</i>	3.28088	9.13954	14.6762
0.2	0.2	1	<i>SNMIP</i>	4.04915	9.31172	13.8225
		1	[54]	4.0492	9.3117	13.8225
		2	<i>SNMIP</i>	4.08265	9.25132	13.7392

Поређењем квадратних корена бездимензионих сопствених фреквенција одређених у литератури [54] са онима одређеним користећи симболичко-нумерички метод почетних параметара може се закључити да се добијају добра поклапања резултата.

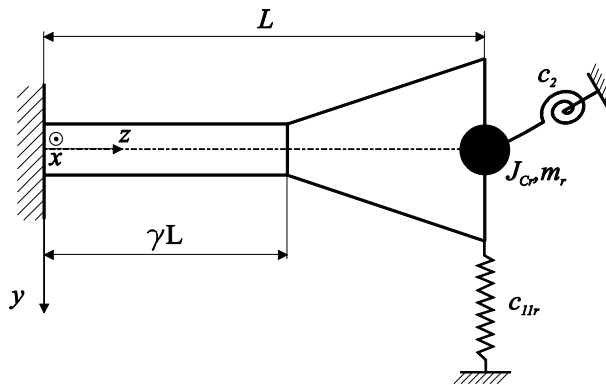
6.4 Нумерички пример 4

На слици 13 приказана је еластична греда правоугаоног попречног пресека која се састоји из два сегмента [11]. Подужне димензије греде приказане су на слици. Леви крај греде уклештен је, док се десни крај греде ослања на опругу бездимензионе крутости $\bar{c}_{11r} = 10$ и спиралну опругу чија ездимензиона крутост износи $\bar{c}_2 = 2$. На десном крају греде причвршћено је тело масе m_r и момента инерције J_{Cr} . Једна димензија попречног пресека греде је константна на оба сегмента и износи $h_1(z) = h_2(z) \equiv h_1$ док се друга димензија (b) првог и другог сегмента греде мења по закону:

$$b_1(z) \equiv b_0, 0 \leq z < \gamma L, \quad (6.19)$$

$$b_2(z) = b_0 \left(1 + \frac{1 - c_b}{c_b(1 - \gamma)} (z - \gamma L) \right), \gamma L \leq z \leq L, \quad (6.20)$$

где је $b_n = \frac{b_0}{b_2(L)}$ параметар чије се вредности мењају као у табели 4 док је $\gamma = 0.4$.



Слика 13. Еластична греда, правоугаоног попречног пресека, која је лево уклештена, а десно елстично везана опругом и спиралном опругом са концентрисаном масом на крају

Карактеристике материјала анализирани греде су:

- Модул еластичности материјала:

$$E(z) = E_{zc} + (E_{al} - E_{zc}) \left(\frac{z}{L} \right)^n, 0 \leq z \leq L, \quad (6.21)$$

- Густина материјала:

$$\rho(z) = \rho_{zc} + (\rho_{al} - \rho_{zc}) \left(\frac{z}{L} \right)^n, 0 \leq z \leq L. \quad (6.22)$$

Табела 4. Бездимензионе сопствене фреквенције греде приказане на Слици 13 [11]

$\bar{m}_r = \bar{J}_{Cr}$	n	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
0.2	0.5	4.1348	6.19337	26.3315
	1	4.17254	6.31021	26.5147
	2	4.19416	6.3701	26.5826
0.6	0.5	2.47013	4.6751	24.2485
	1	2.51016	4.77835	24.3103
	2	2.55812	4.83328	24.239
1	0.5	1.92326	3.93593	23.5083
	1	1.95648	4.0362	23.5111
	2	1.9979	4.10309	23.3602

6.5 Нумерички пример 5

У овом примеру посматра се Тимошенкова греда променљивог попречног пресека чије се карактеристике мењају по њеној уздужној оси Oz . Тимошенков фактор смицања је $k = \frac{5}{6}$, Поасонов коефицијент материјала $\nu = 0.3$, а бездимензиони

геометријски параметар $\bar{r} = \frac{1}{12 \cdot 2.887^2}$. Површина попречног пресека гредe мења се

по закону $\bar{A}(\bar{z}) = 1 - 0.1\bar{z}$, а аксијални момент инерције попречног пресека за осу Ox

по закону $\bar{I}_x(\bar{z}) = (1 - 0.1\bar{z})^3$.

Модул еластичности материјала мења се по закону:

$$\bar{E}(\bar{z}) = 1 + \left(\frac{E_{al}}{E_{zc}} - 1 \right) (\bar{z})^n. \quad (6.23)$$

Густина материјала мења се по закону:

$$\bar{\rho}(\bar{z}) = 1 + \left(\frac{\rho_{al}}{\rho_{zc}} - 1 \right) (\bar{z})^n. \quad (6.24)$$

У табели 5 дате су сопствене фреквенције посматране Тимошенкове греде за различите услове ослањања упоредо са резултатима из релевантне литературе.

Табела 5. Бездимензионе сопствене фреквенције Тимошенкове греде [56]

n	Гранични услови <i>Леви/Десни</i>	Метод	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
1	<i>Уклештење/ Слободан крај</i>	SNMIP	3.944696	14.93709	30.57452
		[55]	3.944695	14.93708	30.57450
	<i>Уклештење/ Уклештење</i>	SNMIP	12.68222	26.49274	42.64459
		[55]	12.68221	26.49274	42.64455
	<i>Уклештење/ Зглобна веза</i>	SNMIP	10.88507	25.56756	42.18536
		[55]	10.88507	25.56755	42.18531
2	<i>Уклештење/ Слободан крај</i>	SNMIP	3.935847	15.15403	31.22572
		[55]	3.935846	15.15403	31.22569
	<i>Уклештење/ Уклештење</i>	SNMIP	12.46392	26.38217	42.96361
		[55]	12.46391	26.38218	42.96355
	<i>Уклештење/ Зглобна веза</i>	SNMIP	10.80112	25.61938	42.65022
		[55]	10.80111	25.6194	42.6502

На основу поређења вредности бездимензионих сопствених фреквенција приказаних у табели 5 може се закључити да је добро поклапање резултата.

6.6 Нумерички пример 6

За Тимошенкову греду којој фактор смицања износи $k = \frac{5}{6}$, Поасонов коефицијент $\nu = 0.3$, а бездимензиони параметар $\bar{r} = \frac{1}{12 \cdot 2.887^2}$ одређене су прве три бездимензионе сопствене фреквенције за задате законе промене површине попречног пресека и момента инерције, као и за два типа материјала греде. Греда се ослања левим и десним крајем на различите ослонце представљене у табелама 6 и 7 док се налази на темељу Пастернаковог типа. Разматрају се два типа еластичног темеља. Функција промене површине попречног пресека у бездимензионом облику дата је изразом $\bar{A}(\bar{z}) = 1 - 0.1\bar{z}$, а закон промене момента инерције по уздужној оси греде $\bar{I}_x(\bar{z}) = (1 - 0.1\bar{z})^3$.

Закон промене модула еластичности функционално градијентног материјала дуж подужне осе греде је:

$$\bar{E}(\bar{z}) = 1 + \left(\frac{E_{al}}{E_{zc}} - 1 \right) (\bar{z})^n, 0 \leq \bar{z} \leq 1, \quad (6.25)$$

док је закон промене густине функционално градијентног материјала дуж подужне осе греде:

$$\bar{\rho}(\bar{z}) = 1 + \left(\frac{\rho_{al}}{\rho_{zc}} - 1 \right) (\bar{z})^2, 0 \leq \bar{z} \leq 1, \quad (6.26)$$

а бездимензионе карактеристике темеља Винклеровог типа, *случај 1*:

$$\bar{k}_w(\bar{z}) = 25, 0 \leq \bar{z} \leq 1, \quad (6.27)$$

$$\bar{k}_G(\bar{z}) = 0, 0 \leq \bar{z} \leq 1, \quad (6.28)$$

односно бездимензионе карактеристике темеља Пастернаковог типа, *случај 2*:

$$\bar{k}_w(\bar{z}) = 25, 0 \leq \bar{z} \leq 1, \quad (6.29)$$

$$\bar{k}_G(\bar{z}) = 25, 0 \leq \bar{z} \leq 1. \quad (6.30)$$

Табела 6. Бездимензионе сопствене фреквенције Тимошенкове греде на еластичном темељу који задовољава услове (6.27) и (6.28) [56]

n	Гранични услови <i>Леви/Десни</i>	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
1	<i>Уклештење/ Слободан крај</i>	7.79897	16.0484	31.0829
	<i>Уклештење/ Зглобна веза</i>	12.4526	26.2333	42.5911
	<i>Уклештење/ Уклештење</i>	14.0364	27.1412	43.0471
2	<i>Уклештење/ Слободан крај</i>	7.45727	16.1397	31.6756
	<i>Уклештење/ Зглобна веза</i>	12.1716	26.2043	43.0067
	<i>Уклештење/ Уклештење</i>	13.6572	26.9534	43.3173

Табела 7. Бездимензионе сопствене фреквенције Тимошенкове греде на еластичном темељу који задовољава услове (6.29) и (6.30) [56]

n	Гранични услови <i>Леви/Десни</i>	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
1	<i>Уклештење/ Слободан крај</i>	13.4809	32.901	52.8636
	<i>Уклештење/ Зглобна веза</i>	22.81	44.7783	59.7506
	<i>Уклештење/ Уклештење</i>	23.6086	45.1747	66.0438
2	<i>Уклештење/ Слободан крај</i>	12.7072	31.5845	51.931
	<i>Уклештење/ Зглобна веза</i>	21.5205	43.0004	61.3003
	<i>Уклештење/ Уклештење</i>	22.2881	43.3384	65.6778

Из резултата приказаних у табелама 6 и 7 може се уочити да су сопствене фреквенције греде на темељу Пастернаковог типа више од оних где је греда на темељу Винклеровог типа.

6.7 Нумерички пример 7

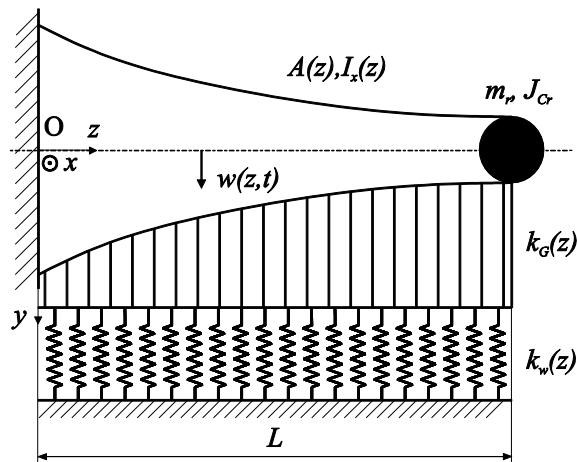
На слици 14 приказана је конзола Тимошенковог типа која на свом десном крају има причвршћено тело масе m_r и момента инерције J_{Cr} . Конзола се ослања на темељ Пастернаковог типа. Функција промене површине попречног пресека у бездимензионом облику дата је изразом $\bar{A}(\bar{z}) = (1 - 0.4\bar{z})^2$, а закон промене момента инерције по уздужној оси греде је $\bar{I}_x(\bar{z}) = (1 - 0.4\bar{z})^4$. За предложену греду фактор смицања је $k = \frac{5}{6}$, Поасонов коефицијент $\nu = 0.3$, а бездимензиони параметар $\bar{r} = 0.01$.

Промена карактеристика темеља Винклеровог типа и смичућег типа описана је законима:

$$\bar{k}_w(\bar{z}) = \begin{cases} 25 - 25H(\bar{z} - \gamma), & 0 < \gamma < 1, 0 \leq \bar{z} \leq 1 \\ 25, & \gamma = 1, 0 \leq \bar{z} \leq 1 \end{cases}, \quad (6.31)$$

$$\bar{k}_G(\bar{z}) = \begin{cases} 25 - 25H(\bar{z} - \gamma), & 0 < \gamma < 1, 0 \leq \bar{z} \leq 1 \\ 25, & \gamma = 1, 0 \leq \bar{z} \leq 1 \end{cases}, \quad (6.32)$$

где је γ константа.



Слика 14. Конзола са телом на десном крају која лежи на темељу Пастернаковог типа

Промена модула еластичности функционалног материјала греде разматраног проблема описана је једначином:

$$\bar{E}(\bar{z}) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{\alpha\bar{z}} - 1}{e^\alpha - 1} + \frac{E_{al}(e^{\alpha\bar{z}} - 1)}{E_{zr}(e^\alpha - 1)}, \alpha \neq 0 \\ 1 - \bar{z} + \frac{E_{al}e^{\bar{z}}}{E_{zr}}, \alpha = 0 \end{cases}, \quad (6.33)$$

где α представља експонент закона промене модула еластичности.

Промена густине функционално градијентног материјала греде разматраног проблема дата је као:

$$\bar{\rho}(\bar{z}) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{\alpha\bar{z}} - 1}{e^\alpha - 1} + \frac{\rho_{al}(e^{\alpha\bar{z}} - 1)}{\rho_{zr}(e^\alpha - 1)}, \alpha \neq 0 \\ 1 - \bar{z} + \frac{\rho_{al}e^{\bar{z}}}{\rho_{zr}}, \alpha = 0 \end{cases}, \quad (6.34)$$

где α представља експонент закона промене густине функционално градијентног материјала.

За хомоген материјал (означен симболом „*“ у табели 8), важе једнакости:

$$\bar{E}(\bar{z}) = 1, \quad (6.35)$$

$$\bar{\rho}(\bar{z}) = 1. \quad (6.36)$$

Бездимензионе сопствене фреквенције овог носача приказане су у табели 8.

Табела 8. Бездимензионе сопствене фреквенције конзоле Тимошенковог типа ослоњене на темељ Пастернаковог типа, са телом круто везаним на слободном крају,

[56]

$\bar{m}_r = \bar{J}_{Cr}$	α	γ	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
0.2	*	0.6	0.932629	3.26574	19.8157	37.0095
		1	2.38272	10.2762	28.0802	49.6479
	-3	0.6	0.634229	2.30247	17.7056	38.467
		1	1.50282	11.4032	32.5555	57.2792
	0	0.6	0.730719	2.51166	17.4143	36.5751
		1	1.55882	11.1624	30.0981	53.6887
3	0.6	0.822859	2.7185	17.3487	35.4406	
	1	1.6619	10.8266	28.5225	50.8905	
0.6	*	0.6	0.553128	2.14295	18.2416	36.2366
		1	1.37599	7.11858	25.7904	48.0392
	-3	0.6	0.37021	1.43067	16.7801	38.1127
		1	0.867715	7.32265	30.838	56.2841
	0	0.6	0.426531	1.57513	16.3797	36.2127
		1	0.900047	7.28943	28.1853	52.5956
3	0.6	0.481267	1.7276	16.1305	35.0051	
	1	0.959568	7.22149	26.3601	49.6354	
1	*	0.6	0.430778	1.71346	17.8455	36.0668
		1	1.06589	5.75484	25.2256	47.6846
	-3	0.6	0.287393	1.12649	16.5752	38.0386
		1	0.672138	5.80228	30.4688	56.0784
	0	0.6	0.331111	1.243	16.1491	36.1374
		1	0.697183	5.798	27.7719	52.3707
3	0.6	0.373748	1.36797	15.8548	34.9154	
	1	0.743289	5.77377	25.8816	49.3774	

6.8 Нумерички пример 8

На слици 15 приказана је конзола дужине $L=1\text{m}$ са ексцентрично постављеним крутим телом на десном крају греде, чији су ексцентрицитети e_r и d_r приказани на слици, као у раду [3] са којим се врши поређење за случај спрегнутих уздужних и попречних осцилација конзоле. Разликују се два типа материјала конзоле и то онај где су промене густине и модула еластичности описане полиномним функцијама по

уздужној оси греде и оне где су ове карактеристике описане тригонометријским функцијама. Уз решавање проблема одређивања сопствених фреквенција греде, испитује се и утицај густине конститутивног материјала на левом крају греде.

Геометријске карактеристике конзоле су као у референцама [3] и [52]:

- Површина попречног пресека конзоле мења се по закону:

$$A(z) = A_0(1 - 0.5z), A_0 = 0.0025m^2; \quad (6.37)$$

- Аксијални момент инерције мења се по закону:

$$I_x(z) = I_{x0}(1 - 0.5z), I_{x0} = 5.20833 \times 10^{-7} m^4. \quad (6.38)$$

Масене и механичке карактеристике конзоле су као у референцама, *тип материјала 1* [3]:

- Закон промене густине материјала:

$$\rho(z) = \rho_0(1 + z), \rho_0 = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad (6.39)$$

- Закон промене модула еластичности материјала греде:

$$E(z) = E_0(64.8 + 42.8z + 20.8z^2 - 1.2z^3 - 2.2z^4 + z^5), E_0 = 2.068 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (6.40)$$

Масене и механичке карактеристике конзоле су као у референцама, *тип материјала 2* [3] и [52]:

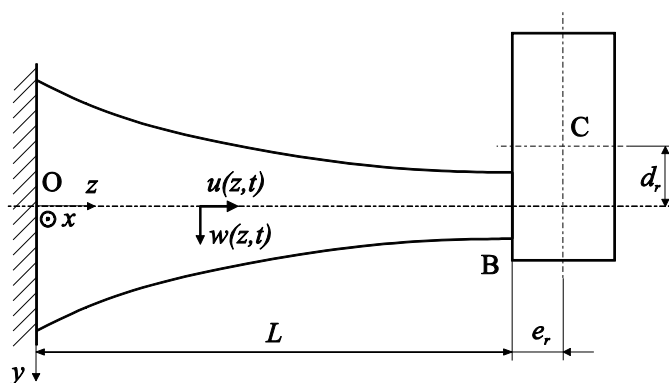
- Закон промене густине материјала:

$$\rho(z) = \rho_0(1 - 0.8 \cos(\pi z)), \rho_0 = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad (6.41)$$

- Закон промене модула еластичности материјала греде:

$$E(z) = E_0(1 - 0.2 \cos(\pi z)), E_0 = 2.068 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (6.42)$$

Спрезање уздужних и попречних осцилација греде врши се на основу задатих граничних услова постављеног проблема као што је дискутовано у раду [3]. Геометријске и масене карактеристике ексцентрично постављеног терета приказане су у табелама 9 и 10 заједно са одговарајућим бездимензионим сопственим фреквенцијама.



Слика 15. Конзола од функционално градијентног материјала са круто спојеним недеформабилним телом ексцентрично постављеним на десном крају [3] и [52]

Табела 9. Бездимензионе сопствене фреквенције спрегнутих уздужних и попречних осцилација посматране конзоле за различите вредности ексцентрицитета и тип материјала 1

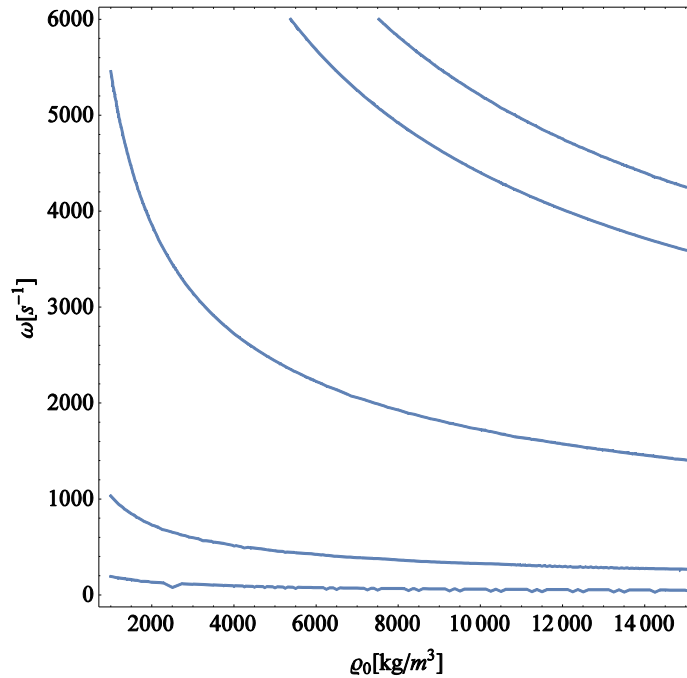
\bar{m}_r	e_r/L	d_r/L	$\bar{\omega}_1$		$\bar{\omega}_2$		$\bar{\omega}_3$	
			<i>SNMIP</i>	[3]	<i>SNMIP</i>	[3]	<i>SNMIP</i>	[3]
0.5	0	0	16.29071	16.288	132.24170	132.198	404.82590	404.356
		0.05	16.26236	16.260	128.56092	128.515	362.56083	362.273
		0.1	16.17767	16.175	117.99975	117.964	287.64566	287.517
		0.5	13.81663	13.815	47.89522	47.891	198.89172	198.807
	0.05	0	15.50275	15.501	118.11194	118.072	346.79934	346.487
		0.05	15.47722	15.475	115.29403	115.257	323.36878	323.128
		0.1	15.40101	15.399	107.50044	107.47	280.01798	279.869
		0.5	13.28465	13.283	48.84953	48.845	200.45596	200.370
	0.1	0	14.71465	14.712	102.70219	102.672	292.68246	292.481
		0.05	14.69189	14.689	100.80186	100.774	283.24881	283.068
		0.1	14.62396	14.621	95.58475	95.560	263.04800	262.904
		0.5	12.74025	12.739	49.36926	49.363	202.02297	201.935
	0.5	0	9.56658	9.565	53.18922	53.179	219.06176	218.947
		0.05	9.55902	9.558	53.08553	53.076	218.88168	218.768
		0.1	9.53642	9.535	52.77994	52.770	218.35696	218.244
		0.5	8.88196	8.881	45.98428	45.979	208.62390	208.524
1	0	0	12.64004	12.637	126.81347	126.766	398.157898	397.696
		0.05	12.61288	12.610	120.63330	120.592	315.46999	315.318
		0.1	12.53188	12.529	104.17563	104.149	241.24358	241.167
		0.5	10.37156	10.370	36.69322	36.691	187.97430	187.908
	0.05	0	11.90431	11.902	110.96606	110.930	325.66340	325.401
		0.05	11.88054	11.878	106.52311	106.491	288.09339	287.937
		0.1	11.80970	11.807	95.12203	95.099	242.25431	242.160
		0.5	9.92036	9.919	37.81180	37.809	188.95081	188.884
	0.1	0	11.18842	11.186	93.38371	93.359	265.55826	265.409
		0.05	11.16783	11.166	90.69019	90.667	253.95249	253.825
		0.1	11.10649	11.105	83.71146	83.697	233.39377	233.290
		0.5	9.46538	9.464	38.62558	38.623	189.98499	189.917
	0.5	0	6.93988	6.939	45.54776	45.543	204.42992	204.338
		0.05	6.93965	6.933	45.54327	45.431	204.42308	204.169
		0.1	6.91658	6.916	45.10762	45.103	203.76986	203.679
		0.5	6.41511	6.414	38.20622	38.203	195.518	195.437

Табела 10. Бездимензионе сопствене фреквенције спрегнутих уздужних и попречних осцилација посматране конзоле за различите вредности ексцентрицитета и тип материјала 2 [52]

\bar{m}_r	e_r/L	d_r/L	$\bar{\omega}_1$		$\bar{\omega}_2$		$\bar{\omega}_3$	
			<i>SNMIP</i>	[3]	<i>SNMIP</i>	[3]	<i>SNMIP</i>	[3]
0.5	0	0	1.77924	1.779	16.31864	16.310	53.67654	53.606
		0.05	1.77588	1.775	15.63776	15.630	44.02430	43.995
		0.1	1.76583	1.765	13.80094	13.796	33.71129	33.698
		0.5	1.48856	1.488	5.06105	5.061	25.07258	25.061
	0.05	0	1.68764	1.687	14.17096	14.164	43.90148	43.857
		0.05	1.68463	1.684	13.69108	13.685	39.59564	39.567
		0.1	1.67565	1.675	12.43438	12.430	33.55737	33.540
		0.5	1.42882	1.429	5.18285	5.182	25.24057	25.229
	0.1	0	1.59647	1.596	11.93163	11.928	36.13141	36.105
		0.05	1.59381	1.593	11.64142	11.638	34.73042	34.707
		0.1	1.58586	1.585	10.87365	10.870	32.04515	32.027
		0.5	1.36782	1.368	5.25911	5.259	25.41614	25.405
	0.5	0	1.01764	1.017	5.84198	5.841	27.58303	27.568
		0.05	1.01680	1.017	5.82958	5.829	27.55965	27.545
		0.1	1.01430	1.014	5.79308	5.792	27.49181	27.477
		0.5	0.94204	0.942	5.00015	4.999	26.28668	26.273
1	0	0	1.36739	1.367	15.67383	15.666	51.89784	51.896
		0.05	1.36427	1.364	14.51755	14.511	36.39552	36.384
		0.1	1.35495	1.354	11.80404	11.801	28.46110	28.453
		0.5	1.10859	1.108	3.83966	3.839	23.80774	23.798
	0.05	0	1.28435	1.284	13.23746	13.232	40.48897	40.455
		0.05	1.28163	1.281	12.48766	12.483	34.28830	34.272
		0.1	1.27352	1.273	10.73735	10.734	28.96219	28.952
		0.5	1.05915	1.059	3.96814	3.967	23.90551	23.896
	0.1	0	1.20390	1.204	10.69414	10.691	32.42530	32.407
		0.05	1.20156	1.201	10.29798	10.295	30.83229	30.817
		0.1	1.19458	1.194	9.32437	9.322	28.37917	28.367
		0.5	1.00941	1.009	4.06588	4.065	24.01268	24.003
	0.5	0	0.73539	0.735	4.92549	4.925	25.73294	25.721
		0.05	0.73475	0.735	4.91250	4.912	25.71144	25.699
		0.1	0.73284	0.733	4.87441	4.874	25.64955	25.638
		0.5	0.67813	0.678	4.09147	4.090	24.66745	24.657

На основу процедуре описане у поглављу 5.7 испитан је утицај густине конститутивног материјала на левом крају конзоле r_0 на промену сопствених

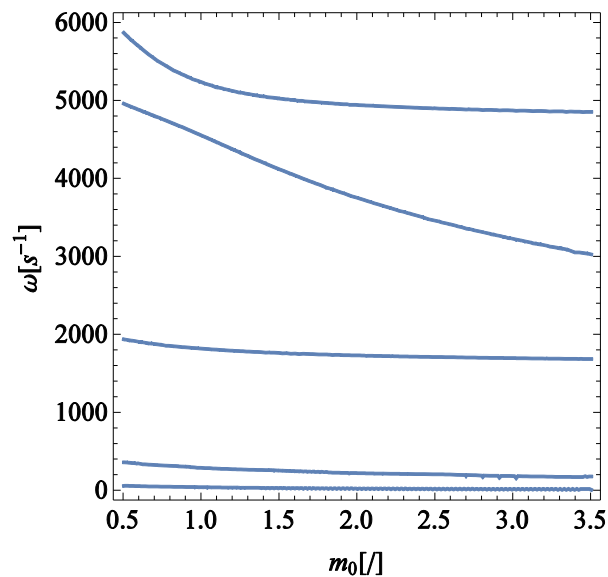
фреквенција конзоле, при чему се густина мења у интервалу $10^3 \leq \rho_0 \leq 15 \times 10^3$ као у [52] за тип материјала 2. На слици 16 приказан је утицај континуалне промене густине левог конститутивног материјала на промену првих пет сопствених фреквенција греде сходно карактеристичној једначини $h(\omega, \rho_0) = 0$.



Слика 16. Утицај густине конститутивног материјала конзоле на левом крају $\omega - \rho_0$

Са слике 16 може се уочити да се трећа сопствена фреквенција конзоле најбрже смањује са порастом густине конститутивног материјала на левом крају греде, што се не може директно уочити на основу података из табеле 10.

На основу примењене процедуре описане у поглављу 5.8 формирањем фреквентне једначине $h(\omega, m_0) = 0$, где је m_0 бездимензиона маса тела на десном крају греде, добија се њен утицај на сопствене фреквенције посматране конзоле. Овај утицај на првих пет сопствених фреквенција приказан је на слици 17.



Слика 17. Утицај бездимензионе масе ексцентрично постављеног тела конзоле на левом крају ω - m_0

Са слике 17 може се уочити да четврта сопствена фреквенција конзоле најбрже опада са порастом масе тела, што се не може директно уочити на основу нумеричких података из табеле 10.

6.9 Нумерички пример 9

На слици 18 приказана је греда кружног попречног пресека од функционално градијентног материјала која се својим левим крајем ослања на непокретни ослонац, док се својим десним крајем ослања на покретни ослонац. Покретни ослонац са хоризонталом заклапа угао α као на слици. У овом примеру одређене су прве три сопствене фреквенције спрегнутих уздужних и попречних осцилација греде као у раду [48]. Одређене су константе у временској функцији хармонијских осцилација и извршена је провера конвергенције решења на основу задатих почетних параметара.

Нека је дужина греде $L=1\text{m}$, док је пречник греде дат изразом [48]:

$$D(z) = \frac{L}{10} \left[1 + 0.2 \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right) H\left(\frac{1}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right) - 0.2 \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right) H\left(\frac{1}{L}\left(-z + \frac{L}{2}\right)\right) \right] e^{\frac{3z}{10L}}. \quad (6.43)$$

Механичке и масене карактеристике материјала мењају се по уздужној оси греде. Модул еластичности и густина материјала мењају се по законима одређеним следећим изразима респективно [48]:

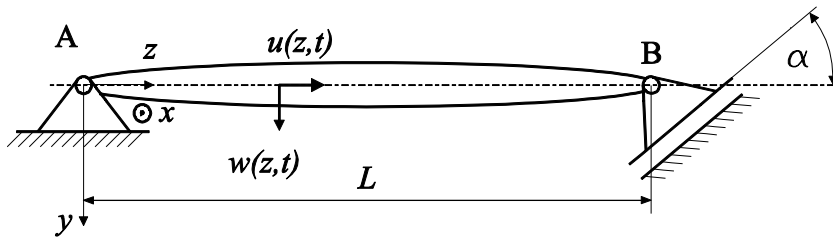
$$E(z) = E_0 \left[\frac{69}{200} H\left(\frac{1}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right) + H\left(\frac{1}{L}\left(-z + \frac{L}{2}\right)\right) \right], E_0 = 2.0 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \quad (6.44)$$

$$\rho(z) = \rho_0 \left[\frac{272}{760} H\left(\frac{1}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right) + H\left(\frac{1}{L}\left(-z + \frac{L}{2}\right)\right) \right], \rho_0 = 7600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad (6.45)$$

где ознака „ $H(_)$ “ представља Хевисајдову функцију која може имати вредности:

$$H\left(\frac{1}{L}\left(z - \frac{L}{2}\right)\right) = \begin{cases} 0, & z < \frac{L}{2} \\ 1, & z \geq \frac{L}{2} \end{cases}, \quad (6.46)$$

$$H\left(\frac{1}{L}\left(-z + \frac{L}{2}\right)\right) = \begin{cases} 0, & z \geq \frac{L}{2} \\ 1, & z < \frac{L}{2} \end{cases}. \quad (6.47)$$

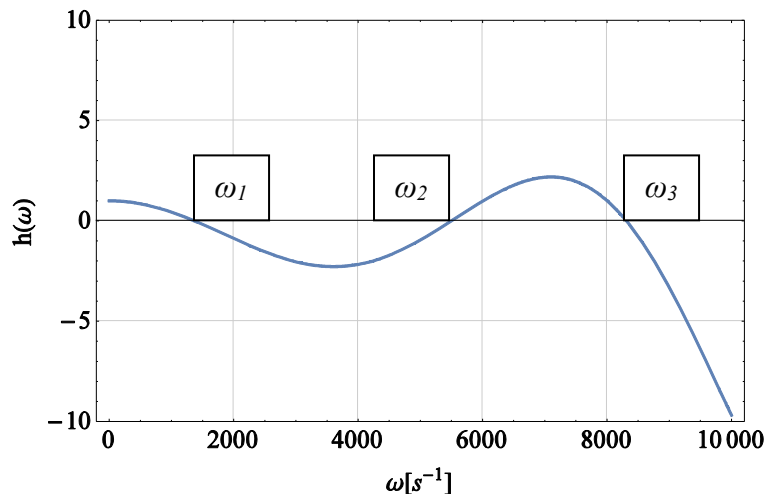


Слика 18. Еластична греда од функционално градијентних материјала

За овако постављени проблем одређене су прве три сопствене фреквенције које су значајне у практичним инжењерским прорачунима, као што се наводи у [2]. Ове фреквенције приказане су у Табелли 11 и дат је упоредни приказ резултата добијених

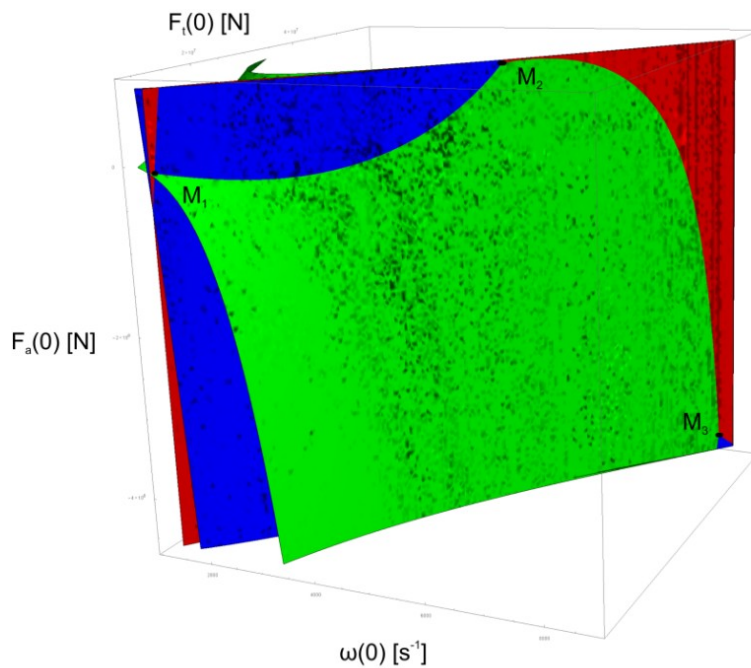
применом метода погађања представљеног у референци [48], односно применом симболичко-нумеричког метода почетних параметара.

Предности симболичко-нумеричког метода почетних параметара у односу на метод погађања у поступку одређивања почетних итеративних вредности уочавају се поређењем дијаграма на сликама 19 и 20.



Слика 19. График фреквентне једначине греде

На слици 19 приказана је фреквентна једначина греде $h(\omega)$ добијена применом симболичко-нумеричког метода на решавање проблема осциловања еластичне греде приказане на слици 18. Са приказаног дијаграма могу се очитати нуле функције фреквентне једначине које представљају почетне вредности за нумеричко одређивање сопствених фреквенција греде решавањем тачних диференцијалних једначина кретања. На слици 20 графички су приказане вредности контурних услова на десном крају греде који су потребни за процену почетних вредности сопствених фреквенција приликом решавања проблема методом погађања (*shooting method*).



Слика 20. Контурни услови на десном крају греде који су потребни за процену почетних вредности сопствених фреквенција [48]

У табели 11 дат је упоредни приказ сопствених фреквенција еластичне греде чије вредности су одређене користећи метод погађања [48] и симболичко-нумерички метод почетних параметара [11]. Коришћењем оба метода решаване су тачне диференцијалне једначине. Показано је да је *SNMIP* супериоран у смислу брзине решавања проблема.

Табела 11. Сопствене фреквенције спрегнутих осцилација греде од функционално градијентног материјала

Мод осциловања	ω [s ⁻¹]	
	[48]	<i>SNMIP</i>
1	1373.59	1373.59
2	5498.13	5498.14
3	8310.53	8310.52

С обзиром на ознаке из поглавља 5 за произвољне почетне услове добијају се константе K_α и S_α у временској функцији које се могу писати као у раду за спрегнуте попречне и уздужне осцилације греде [48]:

$$K_\alpha = \frac{\int_0^L \rho(z) A(z) [f_a(z) U_\alpha(z) + f_t(z) W_\alpha(z)] dz}{\int_0^L \rho(z) A(z) [(U_\alpha(z))^2 + (W_\alpha(z))^2] dz}, \quad (6.48)$$

$$S_\alpha = \frac{\int_0^L \rho(z) A(z) [\dot{f}_a(z) U_\alpha(z) + \dot{f}_t(z) W_\alpha(z)] dz}{\omega_\alpha \int_0^L \rho(z) A(z) [(U_\alpha(z))^2 + (W_\alpha(z))^2] dz}. \quad (6.49)$$

Нека су за проверу конвергенције решења дефинисани следћи почетни услови:

- Почетно померање у подужном правцу: $f_a(z) \equiv u(z, 0) = 0$,
- Почетно померање у попречном правцу: $f_t(z) \equiv w(z, 0) = 0$,
- Почетна брзина у подужном правцу: $\frac{\partial f_a(z)}{\partial t} = \dot{f}_a(z) = \dot{u}(z, 0) = 0$ и
- Почетна брзина у попречном правцу: $\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = \dot{f}_t(z) = \dot{w}(z, 0) = 0.5 \sin(\pi z)$.

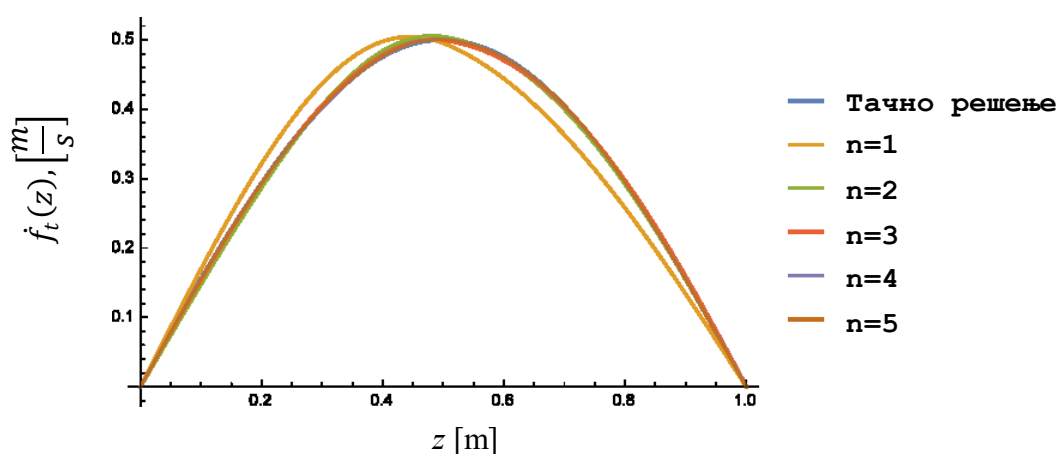
Сходно једначинама (6.48) и (6.49) одређене су нумеричке вредности константи у временској функцији и приказане у табели 12 за првих пет модова осциловања.

Табела 12. Константе у временској функцији хармонијског осциловања греде

Мод осциловања (α)	K_α	S_α
1	0	25.607914
2	0	-0.831682
3	0	0.089432
4	0	0.042403
5	0	-0.007228

Конвергенција решења приказаног у [48] за случај спрегнутих уздужних и попречних осцилација греде од функционално градијентног материјала испитује се поређењем тачног почетног услова попречне брзине $\dot{f}_t(z) = \dot{w}(z,0) = 0.5\sin(\pi z)$ са рачунски добијеним резултатима диференцирањем израза (5.67).

На слици 21 приказано је плавом бојом теоријски тачно решење, уз приказ решења добијених сабирањем резултата до пет израчунатих хармоника.



Слика 21. Теоријски тачна и нумеричка приближења промене попречне брзине сегмената еластичне греде

Са слике 21 може се закључити да са порастом броја хармоника постиже приближавање теоријски тачном решењу, с обзиром да се приближна решења поклапају са теоријски тачним.

7. Закључак

У дисертацији је анализиран проблем линеарних хармонијских осцилација еластичних греда, при чему нису ограничени закони промене геометријских, масених и механичких карактеристика по уздужној оси греде, све док њихове вредности припадају скупу реалних бројева. Са освртом на претходно публикована истраживања, публикације које су у процесу рецензије и будуће радове, предложена је примена симболичко-нумеричког метода почетних параметара (SNMIP) за решавање проблема раванских хармонијских осцилација греда од функционално градијентних материјала. Примењена су два конститутивна модела на моделовање еластичних греда: Ојлер-Бернулијев и Тимошенков. За добијање једначина осциловања формирају се парцијалне диференцијалне једначине кретања које се услед хармонијске природе осциловања своде на системе обичних линеарних диференцијалних једначина са променљивим коефицијентима. Проблем решавања овог типа једначина за све случајеве изложене од поглавља 2 закључно са онима приказаним у поглављу 5 превазилази се коришћењем симболичко-нумеричког метода почетних параметара. Применом савремених софтвера, као што је приказано у раду [11], односно симболичко-нумеричких алгоритама предложених у раду [28], превазилази се проблем решавања тачних диференцијалних једначина кретања непрекидне средине променљивих геометријских, масених и механичких параметара.

Разматрани су проблеми уздужних осцилација еластичних штапова чије једначине су добијене користећи Ојлер-Бернулијеву теорију. Користећи исту теорију анализирани су проблеми попречних осцилација еластичних греда са концентрисаним масама на крајевима. Попречне осцилације еластичних греда од функционално градијентних материјала разматране су користећи и Тимошенкову теорију. Ту се разликују два случаја. У првом, греда је без концентрисаних маса на крајевима и оптерећена је константном силом, док је у другом случају еластична греда положена на темељ Пастернаковог типа. За овакве греде уведена је нумеричка процедура одређивања сопствених фреквенција и модова осциловања греде користећи симболичко-нумерички метод почетних параметара. Даље је разматран

проблем спрегнутих уздужних и попречних осцилација еластичне греде од функционално градијентног материјала следећи Ојлер-Бернулијеву теорију. Спрезање модова осциловања извршено је комбиновањем одговарајућих граничних услова. Сходно томе предложено је решење у затвореном облику, са условима ортогоналности модова осциловања и константама у временској функцији, за спрегнуте уздужне и попречне осцилације еластичних греда од функционално градијентних материјала. Резултати изложених модела су упоређивани са резултатима публикованим у ранијим радовима, при чему су добијена задовољавајућа поклапања. Ови резултати приказани су примерима у поглављу 6. Може се рећи да предложени модел даје добра решења сопствених фреквенција осциловања греда која су добијена нумеричким решавањем тачних диференцијалних једначина кретања. Такође, дата је процедура за проверу утицаја масених карактеристика материјала и масе тела на крају греде на сопствене фреквенције осциловања.

У даљим истраживањима може се анализирати примена овог модела на греде Рејлијевог типа. Као једна од смерница за будућа истраживања може се навести анализа промене сопствених фреквенција греде која је изложена температурском пољу, што може бити посебно значајно за анализу динамичког понашања елемената у нафтној и петрохемијској индустрији, као и у ваздухопловству. Даља истраживања могу се наставити и на анализу статичких и динамичких карактеристика система еластичних греда од функционално градијентних материјала које су међусобно спојене крутим или еластичним сегментима. Уз то, може се вршити оптимизација утрошка конститутивног материјала за израду греде, односно промене начина ослањања за добијање жељених сопствених фреквенција.

8. Литература

- [1] S. S. Rao, “Mechanical Vibrations Fifth Edition in SI Units,” Pearson Education, Inc., 2018.
- [2] A. Nikolić, “Statička i dinamička analiza elastičnog štapa promenljivog preseka metodom diskretizacije na krute segmente,” Doktorska disertacija, 2017.
- [3] A. Nikolić, “Free vibration analysis of a non-uniform axially functionally graded cantilever beam with a tip body,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 87, no. 7, pp. 1227–1241, 2017.
- [4] I. Elishakoff, D. Pentaras, C. Gentilini, *Mechanics of Functionally Graded Material Structures*, World Scientific Publishing Co., 2016.
- [5] F. Ebrahimi, *Advances in Functionally Graded Materials and Structures*, 2016 .
- [6] A. A. Kokanee, “Review on Functionally Graded Materials and various theories,” *Int. Res. J. Eng. Technol.*, pp. 890–893, 2017.
- [7] M. Vatani, Y. Lu, E. D. Engeberg, and J. W. Choi, “Combined 3D printing technologies and material for fabrication of tactile sensors,” *Int. J. Precis. Eng. Manuf.*, vol. 16, no. 7, pp. 1375–1383, 2015.
- [8] E. Pei, G. Hsiang Loh, D. Harrison, H. A. Almeida, M. Domingo, M. Verona, R. Paz, “Exploring the concept of functionally graded additive manufacturing,” *Assem. Autom.*, vol. 37, no. 2, pp. 147–153, 2017.
- [9] D. V. Kaweesa, D. R. Spillane, and N. A. Meisel, “Investigating the Impact of Functionally Graded Materials on Fatigue Life of Material Jetted Specimens,” *Solid Free. Fabr. Symp.*, pp. 578–592, 2017.
- [10] N. Oxman, “Variable property rapid prototyping,” *Virtual Phys. Prototyp.*, vol. 6, no. 1, pp. 3–31, 2011.
- [11] S. Šalinić, A. Obradović, and A. Tomović, “Free vibration analysis of axially functionally graded tapered, stepped, and continuously segmented rods and beams,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 150, 1 October, pp. 135–143, 2018.
- [12] J. R. Banerjee and A. Ananthapuvirajah, “Free vibration of functionally graded

- beams and frameworks using the dynamic stiffness method,” *J. Sound Vib.*, vol. 422, pp. 34–47, 2018.
- [13] W. R. Chen and H. Chang, “Closed-Form Solutions for Free Vibration Frequencies of Functionally Graded Euler-Bernoulli Beams,” *Mech. Compos. Mater.*, vol. 53, no. 1, pp. 79–98, 2017.
- [14] J. W. Lee and J. Y. Lee, “Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 122, March 2017, pp. 1–17, 2017.
- [15] L. C. Trinh, T. P. Vo, H. T. Thai, and T. K. Nguyen, “An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 100, pp. 152–163, 2016.
- [16] A. E. Alshorbagy, M. A. Eltahir, and F. F. Mahmoud, “Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method,” *Appl. Math. Model.*, vol. 35, no. 1, pp. 412–425, 2011.
- [17] E. Viola and F. Tornabene, “Vibration analysis of damaged circular arches with varying cross-section,” *SID Struct. Integr. Durab.*, vol. 1, no. 2, pp. 155–169, 2005.
- [18] E. Viola, M. Dilena, and F. Tornabene, “Analytical and numerical results for vibration analysis of multi-stepped and multi-damaged circular arches,” *J. Sound Vib.*, vol. 299, no. 1–2, pp. 143–163, 2007.
- [19] X. Tong, N. Mrad, and B. Tabarrok, “In-plane vibration of circular arches with variable cross-sections,” *J. Sound Vib.*, vol. 212, no. 1, pp. 121–140, 1998.
- [20] S. Šalinić and A. Nikolić, “A new pseudo-rigid-body model approach for modeling the quasi-static response of planar flexure-hinge mechanisms,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 124, pp. 150–161, 2018.
- [21] V. L. Biderman, *Theory of mechanical vibration*, 1980.
- [22] B. Shvartsman and J. Majak, “Numerical method for stability analysis of functionally graded beams on elastic foundation,” *Appl. Math. Model.*, vol. 40, no. 5–6, pp. 3713–3719, 2016.
- [23] B. S. Shvartsman and J. Majak, “Free vibration analysis of axially functionally graded beams using method of initial parameters in differential form,” *Adv. Theor.*

Appl. Mech., vol. 9, no. 1, pp. 31–42, 2016.

- [24] I. Elishakoff and S. Candan, “Apparently first closed-form solution for vibrating: Inhomogeneous beams,” *Int. J. Solids Struct.*, vol. 38, no. 19, pp. 3411–3441, 2001.
- [25] A. Shahba and S. Rajasekaran, “Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials,” *Appl. Math. Model.*, vol. 36, no. 7, pp. 3094–3111, 2012.
- [26] C. Y. Wang, “Vibration of a tapered cantilever of constant thickness and linearly tapered width,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 83, no. 1, pp. 171–176, 2013.
- [27] S. Naguleswaran, “Vibration and stability of an Euler-Bernoulli beam with up to three-step changes in cross-section and in axial force,” *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 45, no. 9, pp. 1563–1579, 2003.
- [28] B. Palancz and G. Popper, “Symbolic solution of boundary value problem via Mathematica,” *Period. Polytech. Civ. Eng.*, vol. 44, no. 1, pp. 89–97, 2000.
- [29] M. A. Mahmoud, “Natural frequency of axially functionally graded, tapered cantilever beams with tip masses,” *Eng. Struct.*, vol. 187, no. December 2018, pp. 34–42, 2019.
- [30] J. W. Lee and J. Y. Lee, “Contribution rates of normal and shear strain energies to the natural frequencies of functionally graded shear deformation beams,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 159, no. August 2018, pp. 86–104, 2019.
- [31] K. Choe, K. Ri, Z. Zhang, C. Shuai, and Q. Wang, “A domain decomposition method for elastodynamic problems of functionally graded elliptic shells and panels with elastic constraints,” *Thin-Walled Struct.*, vol. 142, September, pp. 262–276, 2019.
- [32] T. Yokoyama, “Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations,” *Comput. Struct.*, vol. 61, no. 6, pp. 995–1007, 1996.
- [33] C. M. Wang, K. Y. Lam, and X. Q. He, “Exact solutions for Timoshenko beams on elastic foundations using Green’s functions,” *Mech. Struct. Mach.*, vol. 26, no. 1, pp. 101–113, 1998.
- [34] L. G. Arboleda-Monsalve, D. G. Zapata-Medina, and J. D. Aristizabal-Ochoa, “Timoshenko beam-column with generalized end conditions on elastic foundation:

- Dynamic-stiffness matrix and load vector,” *J. Sound Vib.*, vol. 310, no. 4–5, pp. 1057–1079, 2008.
- [35] N. M. Auciello, “Vibrations of Timoshenko beams on two-parameter elastic soil,” *Engng. Trans.*, vol. 56, no. 3, pp. 187–200, 2008.
- [36] M. Balkaya, M. O. Kaya, and A. Sağlamer, “Analysis of the vibration of an elastic beam supported on elastic soil using the differential transform method,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 79, no. 2, pp. 135–146, 2009.
- [37] M. Mofid and A. Ghannadiasl, “An Analytical Solution for Free Vibration of Elastically Restrained Timoshenko Beam on an Arbitrary Variable Winkler Foundation and Under Axial Load,” *Lat. Am. J. Solids Struct.*, pp. 2417–2438, 2015.
- [38] A. Mirzabeigy, M. Haghpanahi, and R. Madoliat, “A new finite element formulation for buckling and free vibration analysis of Timoshenko beams on variable elastic foundation,” *J. Solid Mech.*, vol. 9, no. 2, pp. 276–290, 2017.
- [39] I. Elishakoff, G. M. Tonzani, and A. Marzani, “Effect of boundary conditions in three alternative models of Timoshenko–Ehrenfest beams on Winkler elastic foundation,” *Acta Mech.*, vol. 229, no. 4, pp. 1649–1686, 2018.
- [40] C. N. Chen, “DQEM vibration analyses of non-prismatic shear deformable beams resting on elastic foundations,” *J. Sound Vib.*, vol. 255, no. 5, pp. 989–999, 2002.
- [41] S. Y. Lee and S. M. Lin, “Vibrations of elastically restrained non-uniform Timoshenko beams,” *J. Sound Vib.*, vol. 184, no. 3, pp. 403–415, 1995.
- [42] P. Malekzadeh, G. Karami, and M. Farid, “DQEM for free vibration analysis of Timoshenko beams on elastic foundations,” *Comput. Mech.*, vol. 31, no. 3, pp. 219–228, 2003.
- [43] F. F. Calim, “Free and forced vibration analysis of axially functionally graded Timoshenko beams on two-parameter viscoelastic foundation,” *Compos. Part B Eng.*, vol. 103, pp. 98–112, 2016.
- [44] J. Vuković, A. Obradović, *Linearne oscilacije mehaničkih sistema*. Beograd: Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2007.
- [45] J. N. Reddy, *An Introduction to Continuum Mechanics, Second Edition*. 2013.
- [46] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*. 2007.

- [47] Washizu K., "Variational methods in elasticity and plasticity," *J. Mech. Work. Technol.*, 1975.
- [48] A. Tomović, "A novel approach to the free axial-bending vibration problem of inhomogeneous elastic beams with variable cross-sectional profiles," *Tara*, 2017. (S3c)
- [49] M. Simonović, Z. Mitrović, Z. Golubović, *Mehanika-Kinematika*. Beograd: Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2011.
- [50] N. Mladenović, *Mehanika II - Kinematika*. Beograd: Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2008.
- [51] M. Pavišić, Z. Golubović, Z. Mitrović, *Mehanika - Dinamika sistema*. Beograd: Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2011.
- [52] A. Tomović, S. Šalinić, A. Obradović, M. Lazarević, Z. Mitrović, "The exact natural frequency solution of a free axial- bending vibration problem of a non-uniform AFG cantilever beam with a tip body," (rad je prihvaćen za publikovanje), *Sremski Karlovci*, 2019, (M4c)
- [53] Z. G. Wang, "Axial Vibration Analysis of Stepped Bar by Differential Transformation Method," *Appl. Mech. Mater.*, vol. 419, pp. 273–279, 2013.
- [54] T. D. Chaudhari and S. K. Maiti, "A study of vibration of geometrically segmented beams with and without crack," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 761-779, 2000.
- [55] Y. Zhao, Y. Huang, and M. Guo, "A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory," *Compos. Struct.*, vol. 168, pp. 277–284, 2017.
- [56] S. Šalinić, A. Tomović, A. Obradović, "Buckling and vibration of axially functionally graded tapered Timoshenko beams on variable elastic foundation," *Mech. Syst. Signal Procesing* (rad je u postupku recenziranja).

Биографија

Општи подаци

Александар Томовић, рођен 07. 09. 1988. године у Горњем Милановцу

Образовање

- 2012- Докторске студије, Универзитет у Београду, Машински факултет
2012. **Мастер академске студије**, Универзитет у Београду, Машински факултет. Просечна оцена **10,00**.
2010. **Основне академске студије**, Универзитет у Београду, Машински факултет. Просечна оцена **10,00**.
2007. Техничка школа „Јован Жујовић“ у Горњем Милановцу. Просечна оцена 5,00. Ученик генерације.

Похвале и награде

2017. Награда „**Растко Стојановић**“ Српског друштва за механику.
2012. Похвала за **најбољег студента на Мастер академским студијама** генерације уписане 2010/11, са просечном оценом **10,00**.
2011. и 2012. Похвала за изванредан успех на првој и другој години Мастер академских студија.
2010. Похвала за **најбољег студента на Основним академским студијама** генерације уписане 2007/08, са просечном оценом **10,00**.
- 2008, '09 и '10. Похвала за изванредан успех на првој, другој и трећој години Основних академских студија.
2007. Похвалница Њ. К. В. Александра II Карађорђевића.
2007. Награда Таковски устанак, Општине Горњи Милановац.
2007. Трећа награда на Републичком такмичењу из математике. Друштво математичара Србије.

Стипендије

- 2011-2012. Фонд за младе таленте Министарства омладине и спорта Републике Србије – „Доситеја“.
- 2010-2011. СПК Привредник, компанија *MK Group*.
- 2010-2011. Републичка фондација за развој научног и уметничког подмлатка.
- 2009-2010. Фонд за младе таленте Министарства омладине и спорта Републике Србије.
- 2008-2012. Општина Горњи Милановац.
- 2008-2009. Министарство просвете и спорта Републике Србије.

Радно искуство

- 2015 - Машински факултет Универзитета у Београду.
- 2012 - 2014. Технички факултет „Михајло Пупин“ Универзитета у Новом Саду.

Учешће на пројектима Министарства просвете науке и технолошког развоја Републике Србије

- 2018 - "Одрживост и унапређење машинских система у енергетици и транспорту применом форензичког инжењерства, еко и робуст дизајна", ТР 35006.
- 2012 -2017. "Одрживи развој технологија и опреме за рециклажу моторних возила", ТР 35033.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани Александар М. Томовић

број индекса Д8/12

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Спрегнуте попречне и уздужне осцилације Ојлер-Бернулијевих и Тимошенкових
греда од функционално градијентних материјала

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 28.06.2019. године

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Александар М. Томовић

Број индекса Д8/12

Студијски програм Докторске академске студије-Машинско инжењерство

Наслов рада Спрегнуте попречне и уздужне осцилације Ојлер-Бернулијевих и Тимошенкових греда од функционално градијентних материјала

Ментори ванр. проф. др Немања Зорић и проф. др Александар Обрадовић

Потписани Александар М. Томовић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 28.06.2019. године

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Спрегнуте попречне и уздужне осцилације Ојлер-Бернулијевих и Тимошенкових греда од функционално градијентних материјала

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 28.06.2019. године

1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.