

Универзитет у Београду
Машински факултет

Дарко Р. Раденковић

УТИЦАЈ ХРАПАВОСТИ
ЗИДОВА КАНАЛА ПРИ
СТРУЈАЊУ МЕШАВИНЕ ГАСА
И ЧЕСТИЦА У УНУТРАШЊИМ
ТУРБУЛЕНТНИМ
СТРУЈАЊИМА

Докторска дисертација

Београд, 2019.

University of Belgrade
Faculty of Mechanical Engineering

Darko R. Radenkovic

**INFLUENCE OF WALL
ROUGHNESS IN
PARTICLE-LADEN TURBULENT
CHANNEL FLOWS**

Doctoral dissertation

Belgrade, 2019.

Ментор: др Милан Лечић, редовни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет

Чланови Комисије: др Милан Лечић, редовни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет

др Невена Стевановић, редовни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет

др Александар Тоћић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

др Никола Младеновић, редовни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

др Горан Живковић, виши научни сарадник,
Институт за нуклеарне науке Винча

Датум одбране:

Утицај храпавости зидова канала при струјању мешавине гаса и честица у унутрашњим турбулентним струјањима

Резиме

У дисертацији се проучава утицај храпавости зидова при струјању мешавине честица и гаса. При оваквим струјањима, судар честица са храпавим зидом је увек тродимензионалан (3Д) услед прилазних углова честица према зиду као и геометрије храпавих зидова, док су према ранијим истраживањима, модели коришћени за овај судар у нумеричким симулацијама углавном дводимензионалан (2Д) или упрошћени 3Д. Како би се омогућио тачнији прорачун струјања мешавине честица и гаса, циљ дисертације је развој модела за 3Д судар честице и храпавог зида. У дисертацији су анализирани судари честица са изотропним и анизотропним храпавим зидовима, путем детерминистичких симулација и изведени су одговарајући стохастички модели за те сударе, применљиви у Ојлер-Лагранж симулацијама струјања мешавине честица и гаса. Налази се да са порастом прилазног угла честица у односу на макроскопски гладак зид, долази до пораста стандардне девијације бочних углова одбијања честица и у случају изотропне и анизотропне површине. Механизам вишеструких судара честица са зидом остаје непромењен у односу на 2Д модел за судар честице и зида. Изведени стохастички модели се пореде се расположивим експерименталним резултатима и детерминистичким симулацијама. Извршене су LES симулације струјања чистог флуида (без присуства дисперзне фазе) у хоризонталном каналу правоугаоног попречног пресека користећи различите SGS моделе: модел Смагоринског, WALE и динамички једно-једначински модел. Симулације су изведене у програмском пакету OpenFOAM. Утицај зидова тог канала, различите храпавости, на дисперзну фазу, при струјању мешавине гаса и честица истражен је путем LES-DPS симулација. Међусобни судари честица се израчунавају применом модела меких сфера. Када се ови судари занемаре, што би било оправдано при струјањима са веома малом концентрацијом дисперзне фазе, налази се да хра-

павост зида може бити значајан механизам за продукцију попречних флукуације честица. Узимањем у обзир међусобних судара честица, долази до пораста попречних флукуација брзине честица и показује се да је у погледу ових флукуација утицај међусобног судара честица већи у односу на утицај храпавости зидова канала.

UDK 532.517.4:533.6.011(043.3)

Influence of wall roughness in particle-laden turbulent channel flows

Abstract

Influence of wall roughness in turbulent particle-laden wall confined flows is studied in this thesis. In such a flow configuration, particle-wall collision is always three-dimensional (3D) owing to the particle incident angles and rough wall geometry, while according to the previous investigations, models for this collision in numerical simulations are mostly two-dimensional (2D) or simplified 3D. In order to enable more accurate calculation of wall confined particle-laden flows, the goal of the thesis is development of the model for 3D particle-rough wall collision. Particles collision with isotropic and anisotropic rough walls are analyzed using deterministic simulations and stochastic models for those collisions are developed in Euler-Lagrangian framework. It is found that with increase of particle incident angle a standard deviation of particle transverse angles increases, for cases of isotropic and anisotropic rough wall surface. Mechanism of multiple particle-rough wall collision remains unchanged comparing to the 2D model for particle-rough wall collision. Derived stochastic models are compared to the available experimental measurements and results of deterministic simulations. LES of pure fluid flow (without disperse phase) in a horizontal channel are carried out, using different SGS models: Smagorinsky, WALE and dynamic one-equation model. Simulations are carried out in software package OpenFOAM. Also, LES-DPS is performed in turbulent particle-laden flow in horizontal channel in order to estimate influence of walls roughness on disperse phase. Inter-particle collisions are calculated using soft-sphere model. When these collisions are neglected, which is justified at very diluted flows, it is shown that wall roughness can be significant mechanism for production of particle spanwise velocity fluctuations. When inter-particle collisions are accounted for, these fluctuations increase and the influence of inter-particle collisions on particle spanwise velocity fluctuations becomes larger than the influence of channel wall roughness.

Садржај

1	Увод	1
2	Преглед литературе	4
3	Основне карактеристике дисперзних струјања	12
3.1	Спрега континуалне и дисперзне фазе	17
4	Основне једначине при дисперзном струјању	18
4.1	Приступи за проучавање струјања мешавине гаса и честица	18
4.2	Једначине континуалне фазе	19
4.2.1	Методе осредњавања физичких величина	19
4.2.2	Запремински осредњена једначина континуитета континуалне фазе	21
4.2.3	Запремински осредњена једначина количина кретања континуалне фазе	22
4.2.4	Запремински осредњена једначина енергије	23
4.3	Лагранжов приступ при проучавању кретања дисперзне фазе	25
4.4	Ојлеров приступ при проучавању кретања дисперзне фазе	29
5	Принцип LES симулације и моделирање утицаја вртлога малих размера	31
5.1	Преглед симулација и моделирања турбулентних струјања чистог флуида	31
5.2	Основне једначине LES-а	33
5.3	Моделирање SGS напона	34
6	Метод коначних запремина	39
6.1	Дискретизација домена	39
6.2	Дискретизација транспортне једначине	41
6.2.1	Дискретизација просторних чланова	42

6.2.2	Временска дискретизација	46
6.3	Гранични услови	47
6.3.1	Нумерички гранични услови	47
6.3.2	Физички гранични услови	49
6.4	Дискретизација филтрираних Навије-Стоксових једначина	50
6.4.1	Конвективни члан	50
6.4.2	Једначина притиска	51
6.5	PISO алгоритам за нестационарна струјања	52
7	Стохастичко моделирање 3Д одбијања честице од изотропног храпавог зида	54
7.1	Стварање и особине виртуелног храпавог зида	54
7.1.1	Опис начина генерисања Гаусове храпаве површине	54
7.1.2	Особине нормалног вектора изотропног виртуелног храпавог зида	56
7.1.3	Статистичко моделирање вектора нормале виртуелних зидова у случају мале храпавости	58
7.1.4	Моделовање расподеле угла η и валидација детерминистичком симулацијом	60
7.2	Нумеричке симулације 3Д еластичног судара честице са храпавим зидом и статистичка анализа	61
7.2.1	Опис нумеричке симулације	61
7.2.2	Статистичка анализа 3Д одбијања честице од изотропног храпавог зида	62
7.3	Статистичко моделирање 3Д судара честице и изотропног храпавог зида	68
7.3.1	Моделирање првог вектора нормале изотропног виртуелног зида које честице виде при великим угловима	68
7.3.2	Карактеризација бочног ефекта за велике долазне углове честица	74
7.3.3	Моделирање првог јединичног вектора нормале виртуелног зида који види честица при било ком долазном углу	76
7.3.4	Моделирање вишеструких судара честице са виртуелним зидом	77
7.3.5	Стохастичка процедура за израчунавање 3Д одбијања честице од изотропног храпавог зида мале храпавости при Лагранжовом поступку за проучавање кретања честице	79
7.3.6	Валидација моделованих вектора нормале виртуелног зида при првом одбијању честице	79

7.4	Примена стохастичког модела судара честице са изотропним храпавим зидом	82
7.4.1	Поређење густина расподела углова при одбијању честице	82
7.4.2	Стандардна девијација бочне компоненте брзине при одбијању честице од зида, у зависности од материјала зидова и пречника честице	86
8	Стохастичко моделирање 3Д одбијања честице од анизотропног храпавог зида	88
8.1	Особине анизотропног виртуелног храпавог зида	88
8.1.1	Особине нормалног вектора анизотропног виртуелног храпавог зида	88
8.1.2	Веза параметера анизотропне површине и стандардне девијације углова вектора нормале виртуелног зида	91
8.1.3	Вектор нормале виртуелног зида у ротираном координатном систему	92
8.2	Статистичка анализа резултата нумеричке симулације 3Д еластичног судара честице са анизотропним зидом	93
8.2.1	Стохастичко моделирање углова ξ^* и ζ^* за било који угао β^*	103
8.2.2	Моделирање првих углова вектора нормале анизотропног зида које честице виде при великим долазним угловима	105
8.2.3	Моделирање првог вектора нормале анизотропног зида при било ком долазном углу честице	106
8.2.4	Моделирање вишеструких судара честица са зидом	107
8.2.5	Стохастичка процедура за прорачун 3Д одбијања честице од анизотропног зида мале храпавости при Лагранжовом поступку	112
8.2.6	Валидација моделованих углова вектора нормале при првом судару честице са анизотропним зидом	112
8.3	Примена стохастичког модела судара честице са анизотропним храпавим зидом	114
8.3.1	Поређење густина расподеле углова одбијања честице из експерименталних мерења, детерминистичких и стохастичких симулација	114
8.3.2	RMS попречне пројекције брзине при одбијању честица од зида, у зависности од материјала зидова и пречника честице	118

9	LES струјања чистог флуида и LES-DPS мешавине гаса и честица у хоризонталном каналу правоугаоног попречног пресека	121
9.1	Опис експеримента	121
9.2	LES симулација турбулентног струјања чистог флуида	122
9.2.1	Прорачунски домен	122
9.2.2	Карактеристике LES симулације струјања чистог флуида	122
9.2.3	Дискретизација	124
9.2.4	Гранични услови	124
9.3	Анализа резултата LES симулација турбулентног струјања чистог флуида	125
9.3.1	Профили просечне брзине флуида	125
9.3.2	Профили RMS флукуација брзине флуида	126
9.3.3	Корелације брзине	127
9.4	LES-DPS симулације турбулентног струјања мешавине гаса и честица	128
9.4.1	Почетни и гранични услови при LES-DPS симулацији	128
9.4.2	Основне једначине струјања мешавине гаса и честица	129
9.4.3	Судар честица и храпавих зидова	129
9.4.4	Поступак LES-DPS симулације	130
9.5	Модел меких сфера	130
9.5.1	Прорачун контактне силе	131
9.6	Симулирани случајеви струјања мешавине гаса и честица	135
9.7	Анализа резултата LES-DPS симулација	136
9.7.1	Случај 1.	136
9.7.2	Случај 2.	139
10	Закључак и правац будућих истраживања	142

Списак слика

1.1	Пристапи моделирања судара честице и зида	3
2.1	Модел виртуелног зида [1].	5
2.2	Ефекат сенке [2]	6
2.3	Вишеструки судари честице са храпавим зидом.	7
3.1	Стратификовано и дисперзно струјање [3]	12
3.2	Утицај Стоксовог броја на трајекторију честице.	15
3.3	Режими струјања мешавине гаса и честица [4].	16
4.1	Сафманова и Магнусова сила	29
6.1	Телија облика квадрата при дискретизацији методом коначних запремина.	40
6.2	Интерполација вредности ϕ_f на површи f [5].	44
6.3	Телија која се налази на граници прорачунског домена.	48
7.1	Изотропни и анизотропни храпав зид.	55
7.2	Углови које формира јединични вектор нормале \mathbf{n} виртуелног зида са координатним осама.	56
7.3	Корелациони дијаграми углова ξ , η и ζ , вектора нормале \mathbf{n} виртуелног храпавог зида.	57
7.4	Зависност RMS нагиба изотропног виртуелног зида у x и z правцима, σ_x и σ_z , редоследно, и стандардних девијација углова вектора нормале виртуелног зида $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, од односа RMS висине храпавости h и корелационе дужинске размере c_L виртуелног храпавог зида.	58
7.5	Карактеристични углови долазне брзине \mathbf{u}_p^- честице и карактеристични углови брзине \mathbf{u}_p^+ честице после одбијања од зида.	62
7.6	Густине расподеле (PDF) угла ξ при првом судару честице са зидом.	63
7.7	Густине расподеле (PDF) угла ζ честице при првом судару честице са зидом.	64
7.8	Густина расподеле (PDF) угла α_p^+ честице која се враћа у струјање.	66

7.9	Густина расподеле (PDF) трансверзалне девијације угла $\beta_p^+ - \beta_p^-$. . .	67
7.10	Густине расподеле (PDF) угла γ при првом судару честице и зида. . .	71
7.11	Густине расподеле (PDF) првог угла γ^* које виде честице у детерминистичкој симулацији (DS), израчунате користећи (7.28) и поређење са статистичким моделом (SM), једначина (7.30), за различите вредности углова α_p^- и β_p^-	72
7.12	Зависност бездимензијских бочних карактеристика честице од угла α_p^- , индукованих сударом честице са зидом.	75
7.13	Поређење теоријске вероватноће (7.47) са вероватноћом, израчуна- том из детерминистичке симулације да честица има само један судар са изотропним зидом пре враћања у струју флуида.	78
7.14	Алгоритам за израчунавање 3Д одбијања честице од изотропног хра- павог зида мале храпавости.	80
7.15	Зависност расподеле угла вектора нормале од углова α_p^- и β_p^- први првом судару честице са изотропним храпавим зидом.	81
7.16	Расподеле углова честица које се враћају у струјни ток из експери- менталних резултата [2], 3Д стохастичког модела (SM), детермини- стичких резултата (DS) и 2Д модела (2DRWCM) [6].	84
7.17	Однос стандардне девијације бочне брзине честице индуковане суда- ром честице са зидом и интезитета долазне брзине честице, $\sigma_p^+ / \mathbf{u}_p^- $, у зависности од односа долазног угла α_p^- честице и стандардних де- вијација $\Delta\xi = \Delta\zeta$ углова вектора нормале за различите материјале зидова и стаклене честице пречника D_p	87
8.1	Углови вектора нормале \mathbf{n} са јединичним векторима дуж оса коор- динатног система $Ox^*y^*z^*$. Координатни систем $Oxyz$ се ротира око y -осе за угао β^*	89
8.2	Корелациони дијаграми углова ξ^* , η^* и ζ^* вектора нормале \mathbf{n} дуж праваца x^* одређених углом β^*	90
8.3	Зависност RMS нагиба анизотропног виртуелног зида у x и z прав- цима, σ_x и σ_z , редоследно, и стандардних девијација углова вектора нормале виртуелног зида $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, од односа RMS висине храпавости h и корелационих дужинских размера $c_{L,x}$ и $c_{L,z}$, у x и z правцу . . .	92
8.4	Густине расподеле (PDF) угла ξ вектора нормале зида израчунате из детерминистичке симулације за анизотропне зидове чије су стан- дардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, при првом суда- ру честице и зида. Ове расподеле су израчунате за различите вред- ности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$	95

8.5	Густине расподеле (PDF) угла ξ вектора нормале зида израчунате из детерминистичке симулације за анизотропне зидове чије су стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, при првом судару честице и зида. Ове расподеле су израчунате за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$	96
8.6	Густине расподеле (PDF) угла ζ вектора нормале зида израчунате из детерминистичке симулације за анизотропне зидове чије су стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, при првом судару честице и зида. Ове расподеле су израчунате за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$	97
8.7	Густине расподеле (PDF) угла ζ вектора нормале зида израчунате из детерминистичке симулације за анизотропне зидове чије су стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, при првом судару честице и зида. Ове расподеле су израчунате за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$	98
8.8	Густине расподеле (PDF) последњег угла одбијања честице, α_p^+ , пре враћања честице у струјни ток. Ове расподеле су израчунате из детерминистичких симулација (DS) и 2Д стохастичког модела [6] за анизотропне зидове окарактерисаних стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ углова вектора нормале, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$	99
8.9	Густине расподеле (PDF) последњег угла одбијања честице, α_p^+ , пре враћања честице у струјни ток. Ове расподеле су израчунате из детерминистичких симулација (DS) и 2Д стохастичког модела [6] за анизотропне зидове окарактерисаних стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ углова вектора нормале, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$	100
8.10	Густине расподеле (PDF) бочних углова честице, $\beta_p^+ - \beta_p^-$, у случају првог (1С) и последњег (МС) одбијања честице од зида. Ове расподеле су израчунате из детерминистичких симулација за анизотропне зидове окарактерисаним стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$	101
8.11	Густине расподеле (PDF) бочних углова честице, $\beta_p^+ - \beta_p^-$, у случају првог (1С) и последњег (МС) одбијања честице од зида. Ове расподеле су израчунате из детерминистичких симулација за анизотропне зидове окарактерисаним стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$	102

8.12	Густине расподеле (PDF) угла γ при првом судару честице и зида, израчунате из детерминистичке симулације и ефективне Зомерфелдове расподеле за анизотропне зидове окарактерисане стандардном девијацијом углова вектора нормале, $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$	108
8.13	Густине расподеле (PDF) угла γ при првом судару честице и зида, израчунате из детерминистичке симулације и ефективне Зомерфелдове расподеле за анизотропне зидове окарактерисане стандардном девијацијом углова вектора нормале, $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$	109
8.14	Густине расподеле (PDF) угла γ^* при првом судару честице и зида, израчунате из детерминистичке симулације (DS) и статистичким моделом (8.16) за неизентропске зидове окарактерисане стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ углова вектора нормале, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$	110
8.15	Густине расподеле (PDF) угла γ^* при првом судару честице и зида, израчунате из детерминистичке симулације (DS) и статистичким моделом (8.16) за неизентропске зидове окарактерисане стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ углова вектора нормале, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$	111
8.16	Поређење теоријске вероватноће (7.47) са вероватноћом, израчунавањем из детерминистичке симулације, да честица има само један судар са изотропним зидом пре враћања у струју флуида.	112
8.17	Алгоритам за израчунавање 3Д одбијања честице од анизотропног храпавог зида мале храпавости.	113
8.18	Валидација моделованих углова вектора нормале при првом судару честице са анизотропним зидом.	115
8.19	Густине расподеле углова одбијања честица, $\alpha_{p,xy}^+$, стаклених честица од челичног зида, при различитим долазним угловима честица, α_p^- и $\beta_p^- = 0^\circ$. Ове расподеле су добијене из експеримента [2], стохастичког модела (SM) и 2Д модела (2DRWCM) [6]. Стандардна девијација бочног угла одбијања честица је $\Delta\beta_p^+$	116
8.20	Зависност односа RMS попречне пројекције брзине честица, $w_{p,rms}^+$, генерисане при судару честице са зидом и интензитета долазне брзине честице, $ \mathbf{u}_p^- $, од односа долазног угла $ \alpha_p^- $ и стандардне девијације $\Delta\xi$ вектора нормале виртуелног зида.	119

9.1	Шематски приказ дела канала ($L = 140 \text{ mm}$, $H = 35 \text{ mm}$ и $W = 52.5 \text{ mm}$) у коме се врше LES симулације.	123
9.2	Просечна брзина флуида у близини зида (слика а) и просечна брзина флуида дуж висине канала (слика б), добијене коришћењем модела Смагоринског, динамичког једно-једначинског и WALE модела. . . .	125
9.3	RMS подужних (слика а), управно на зид канала (слика б) и попречних (слика в) флукуација брзине флуида, добијених коришћењем модела Смагоринског, динамичког једно-једначинског и WALE модела. DNS вредности су узете из [7], а експериментални резултати су узети из [8].	126
9.4	1Д корелације брзине. (а) Подужне корелације брзине у близини зида ($y^+ \approx 100$) (б) подужне корелације брзине дуж центра канала (в) Попречне корелације брзине у близини зида ($y^+ \approx 100$) (г) попречне корелације брзине дуж центра канала. Канал је дужине L , а ширине W	128
9.5	Шематски приказ судара две честице [9] коришћењем модела меких сфера.	132
9.6	Профил просечне брзине честица пречника $D_p = 130 \mu\text{m}$ дуж висине канала. Степен пуњења дисперзне фазе је 1. При судару честица и зида канала, виртуелни зид има стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi = 1.4^\circ$ и $\Delta\zeta$ која зависи од типа храпавости зида канала.	136
9.7	RMS флукуације брзина честица пречника $D_p = 130 \mu\text{m}$ дуж висине канала. Степен пуњења дисперзне фазе је 1. При судару честица и зида канала, виртуелни зид има стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi = 1.4^\circ$ и $\Delta\zeta$ која зависи од типа храпавости зида канала.	138
9.8	Профил брзине честица пречника $D_p = 195 \mu\text{m}$ дуж висине канала. Степен пуњења дисперзне фазе је 0.7. При судару честица и зида канала, виртуелни зид има стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi = 5.1^\circ$ и $\Delta\zeta$ која зависи од типа храпавости зида канала.	140
9.9	RMS флукуације брзина честица пречника $D_p = 195 \mu\text{m}$ дуж висине канала. Степен пуњења дисперзне фазе је 0.7. При судару честица и зида канала, виртуелни зид има стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi = 5.1^\circ$ и $\Delta\zeta$ која зависи од типа храпавости зида канала.	141

Списак ознака

Латинични симболи

\dot{m}_k	Брзина промене масе честице k
\dot{Q}_k	Размењена количина топлоте флуида и честице k
\dot{V}_d	Брзина промене запремине дисперзне фазе у запремини за осредњавање
\mathbf{F}_d	Сила отпора
\mathbf{F}_k	Сила којом носећа фаза делује на честицу k
\mathbf{F}_{body}	Резултујућа масена сила која делује на честицу
\mathbf{F}_{coll}	Резултујућа сила услед међусобног судара честица или услед судара честица са зидом
\mathbf{F}_{surf}	Резултујућа површинска сила која делује на честицу
\mathbf{g}	Убрзање Земљине теже
\mathbf{I}	Јединични тензор
\mathbf{n}	Јединични вектор нормале површи
\mathbf{q}	Вектор тоplotног флукса носећег флуида
\mathbf{q}_m	Вектор тоplotног флукса кроз мешавину
\mathbf{u}	Брзина носеће фазе
$\mathbf{u}_{p,k}$	Брзина честице k
\mathbf{u}_p	Брзина честице

\mathbf{u}_p^+	Брзина честице после њеног судара са зидом
\mathbf{u}_p^-	Брзина честице пре њеног судара са зидом
$\mathbf{u}_{s,k}$	Брзина фазе на површини честице k
Re_p	Рејнолдсов број честице
St_v	Стоксов број везан за брзину честице
$\bar{\mathbf{u}}$	Филтрирана брзина флуида
C_d	Коефицијент отпора честице
c_{Lx}	Корелациона дужинска размера у x правцу
c_{Ly}	Корелациона дужинска размера у y правцу
D_p	Пречник честице
e	Специфична унутрашња енергија носећег флуида
$e_{s,k}$	Специфична унутрашња енергија фазе на површини честице k
e_w	Коефицијент реституције при судару честице и зида
h	RMS висина храпавости
k_{sgs}	Кинетичка енергија вртлога малих размера
m	Степен пуњења дисперзне фазе
m_p	Маса честице
p	Притисак носеће фазе
p_s	Притисак носећег флуида на површини честице
$R_{u_i u_j}$	1Д нормализоване корелације брзине
U^+	Бездимензијска брзина, $U^+ = U/u_\tau$
U_b	Просечна брзина струјања носећег флуида
u_τ	Брзина трења
V_p	Запремина честице

y^+ Бездимензијско растојање од зида

Грчки симболи

α Угао нагиба зида

α_c Запремински удео носеће фазе

α_d Запремински удео дисперзне фазе

α_p^+, β_p^+ Углови честице после њеног одбијања од зида

α_p^-, β_p^- Углови честице која прилази зиду

β^* Угао ротације координатног система $Oxyz$ око y осе

ω_p Вектор угаоне брзине честице

τ Тензор смицајних напона носеће фазе

τ^R Резидуални тензор напона

$\Delta\eta$ Стандардна девијација угла η

$\Delta\eta^2$ Варијанса угла η

$\Delta\xi$ Стандардна девијација угла ξ

$\Delta\xi^2$ Варијанса угла ξ

$\Delta\zeta$ Стандардна девијација угла ζ

$\Delta\zeta^2$ Варијанса угла ζ

δ Половина висине канала

η Угао између вектора нормале зида и јединичног вектора дуж y осе

η^* Угао између вектора нормале зида и јединичног вектора дуж y^* осе

μ Динамичка вискозност ваздуха

μ_w Коефицијент трења при судару честице и зида

∇ Хамилтонов оператор

ν Кинематска вискозност континуалне фазе

Φ	Функција дисипације носећег флуида
ρ	Густина носеће фазе
ρ_p	Густина честица
σ	Средња вредност нагиба хртавости
σ_p^+	Стандардна девијација бочне компоненте брзине честице
τ_v	Време одзива честице на промену брзине околног флуида
ξ	Угао између вектора нормале зида и јединичног вектора дуж x осе
ξ^*	Угао између вектора нормале зида и јединичног вектора дуж x^* осе
ζ	Угао између вектора нормале зида и јединичног вектора дуж z осе
ζ^*	Угао између вектора нормале зида и јединичног вектора дуж z^* осе
Δ	Величина филтера

Индекс

$\langle \cdot \rangle_e$	Вредност осредњена по ансамблу
$\langle \cdot \rangle_F$	Фавреова осредњена вредност
$\langle \cdot \rangle_t$	Временска осредњена вредност

Скраћенице

1C	Први судар честице са зидом
DES	Detached Eddy Simulation
DNS	Direct Numerical Simulation
DPS	Discrete Particle Simulation
DS	Детерминистичка симулација судара честице са зидом
LES	Large Eddy Simulation
PDF	Probability density function
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes

RMS, rms Средња квадратна вредност

SGS Subgrid-scale stress tensor

SM Стохастички модел судара честице са виртуелним зидом

MC Последњи судар честице са зидом, пре враћања честице у струјни ток

Поглавље 1

Увод

Струјање мешавине гаса и честица је важно у многим процесима у процесној и фармацеутској индустрији као нпр. при пнеуматском транспорту, флуидизацији, аеродинамичкој класификацији прахова и сепарацији у циклонским сепараторима [4]. Таква вишефазна турбулентна струјања ограничена зидом су комплексна и много спрегнутих механизма утиче на особине фаза које чине поменуто струјање.

Када се узме пример пнеуматског транспорта, с обзиром да је количина прашкастог материјала која се транспортује сваке године изузетно велика, како би ови процеси транспорта били што економичнији, тачан прорачун особина обе фазе је од изузетне важности.

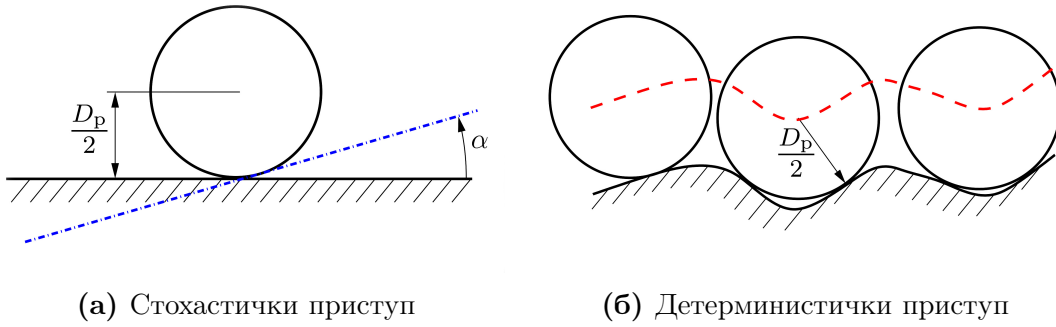
Предмет изучавања ове тезе су струјања мешавине гаса и честица у простору ограниченом храпавим зидовима. У оваквој струјној конфигурацији, при нумеричким прорачунима неопходно је узети у обзир судар честица са зидом. Теоријски, када би се сферна честица при струјању не-еластично сударала са хоризонталним глатким зидом дугачког цевовода, та честица би сваки пут после судара са зидом имала мању висину одскока и врло брзо би дошло до таложења честице. Да би се избегао овај нереалан резултат, неопходно је посматрати неправилне сударе чести-

ца са зидом, који су последица одступања облика честице од облика сфере као и услед храпавости зида.

У дисертацији се проучавају судари сферних честица са храпавим зидовима. Та интеракција представља важан механизам којим се постиже већа хомогенизација струјања честица у дугачким цевоводима [10], а при флуидизацији, применом модела за судар честице са храпавим зидом могуће је добити боље слагање са експерименталним резултатима [11]. Због долазног угла честице као и због геометрије површине зида, судар честице и површине зида је увек 3Д. Међутим, при досадашњим анализама судара честица са зидом, модели за прорачун такве интеракције су углавном 2Д док су постојећи 3Д модели ове интеракције упрошћени. Главни задатак ове дисертације је управо формирање 3Д модела судара честице и храпавог зида у општем случају.

При прорачуну судара честице и храпавог зида, разликују се детерминистички и стохастички приступ (в. сл. 1.1). Код детерминистичког приступа, прво се генерише храпава површина зида, а затим се при симулацији траже тачке где честице ударају у зид. Овакав приступ је захтеван у погледу рачунарских капацитета, с обзиром да је резолуција храпаве површине велика. При детерминистичким симулацијама изведеним у овом докторату, уместо судара честице и стварне површине се анализира еквивалентна интеракција центра честице и тзв. виртуелног зида. Код стохастичког приступа, честица се прати и када она достигне неку граничну макроскопски глатку површ, из одговарајуће густине расподеле се узоркују углови неравнина које честица види.

Дисертација је организована на следећи начин. У поглављу 2 дат је преглед постојећих модела за судар честице са храпавим зидом и дискутују се резултати одговарајућих нумеричких симулација. Потом, у поглављу 3, дефинишу се основне карактеристике вишефазних струјања, док се у поглављу 4 детаљно описују основне једначине које се користе при нумеричким прорачунима струјања мешавине



Слика 1.1: Приступы моделирања судара честице и зида: **(а)** У стохастичком приступу, када центар честице дође на растојање од пола пречника честице D_p од глатке макроскопске површине, виртуелни зид нагиба α се узоркује из одговарајуће густине расподеле. **(б)** У детерминистичком приступу, судар честице и зида се детектује када центар честице пресече виртуелни зид (нацртан испрекиданом линијом на слици). Особине виртуелног зида када центар честице пресече овај зид идентичне су особинама стварног контакта честице и зида.

гаса и честица. У поглављу 5 дају се теоријске основе LES симулација и модела вртлога малих размера, који су коришћени у дисертацији. Опис метода коначних запремина је дат у поглављу 6. У поглављу 7 приказују су статистички резултати детерминистичких симулација судара честице са изотропним храпавим зидом и изводи се одговарајући стохастички модел за тај судар, према Radenkovic and Simonin [12]. У поглављу 8, анализира се судар честице са анизотропним храпавим зидом и изводи се стохастички модел у том случају. У поглављу 9, приказане су поставке и резултати LES симулације турбулентног струјања флуида у хоризонталном каналу правоугаоног попречног пресека, као и поставке и резултати LES-DPS симулације струјања у том каналу, при различитим храпавостима зидова канала: 2Д, изотропне и анизотропне храпавости.

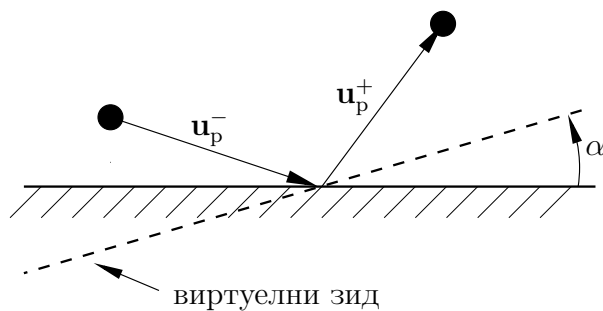
Поглавље 2

Преглед литературе

С обзиром на велику индустријску примену струјања мешавине честица и гаса при пнеуматском транспорту и флуидизацији, ова струјања су била и још увек су предмет великог броја истраживања.

За прорачун судара сферне честице и храпавог зида, важан концепт виртуелног зида је уведен први пут у Tsuji et al. [1]: када честица удари у контуру макроскопски глатког зида, ако је нападни угао честице мањи од одговарајуће вредности, у овом моделу врши се замена почетног зида са глатким нагнутиим виртуелним зидом (в. сл. 2.1). Потом се примењују импулсне једначине за прорачун удара честице у тај виртуелни зид. У овом моделу, параметри који одређују угао виртуелног зида α су емпиријски и важе само за структуру зида и величину честице која се користи у експерименту. Модел [1] важи за цев кружног попречног пресека, а касније је модел модификован у Tsuji et al. [13] за случај струјања у каналу правоугаоног попречног пресека.

Резултати експерименталних истраживања судара честице и зида као и резултати Ојлер-Лагранж симулације пнеуматског транспорта честица у хоризонталном каналу представљени су у Frank et al. [14]. При овим експериментима, испитани су



Слика 2.1: Модел виртуелног зида [1].

нападни углови честица 10° , 30° и 45° , а брзине честица су вариране између 4 и 13 m/s за све наведене нападне углове. У овим експериментима измерени су и коефицијент динамичког трења и коефицијент реституције, за случај судара сферних честица са глатким и храпавим челичним плочама. Налази се да и мали степен храпавости површине зида има велики утицај на одбијање честица при судару честице и зида.

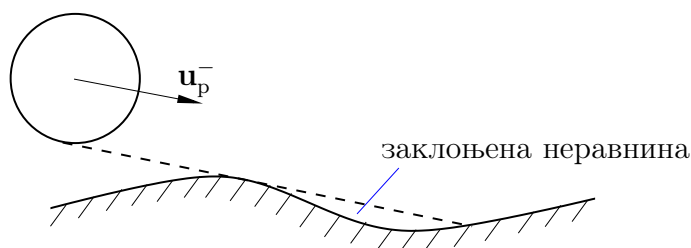
У Ојлер-Лагранж симулацији пнеуматског транспорта честица у вертикалном каналу Sommerfeld and Huber [15] пореде различите стохастичке моделе за судар честице и зида, при чему ти модели узимају у обзир структуру зида и геометрију честице. Најбоље слагање са експерименталним резултатима је добијено када угао виртуелног зида има нормалну расподелу. Резултати нумеричких симулација показују да се флукуације брзине честица значајно повећавају када се моделира храпавост, што је у сагласности са резултатима експеримента.

Да би побољшали и верификовали модел за судар честица и зида у оквиру Лагранжовог приступа, Sommerfeld and Huber [2] су извели експериментална истраживања судара честица и зидова различитих храпавости, за честице различитих пречника и различитих облика, при струјању у хоризонталном каналу. При великим нападним угловима честица, угао зида које честице виде описан је нормалном расподелом са нултом просечном вредношћу и стандардном девијацијом која зависи од структуре зида и пречника честице. При малим вредностима нападних углова честица, честице виде позитивне нагибе са већом вероватноћом него нега-

тивне нагибе, што представља тзв. ефекат сенке, приказан на слици 2.2. Стога, дистрибуција углова храпавости које честице виде моделирана је као модификована нормална расподела. Један начин за узорковање углова из те расподеле је путем метода рејекције [16], а други, упрошћени начин, представља тзв. модел сенке и предложили су га поменути аутори у истом раду. Тај модел се састоји из следећих корака:

1. Угао нагиба виртуелног зида се узоркује из нормалне расподеле са нултом просечном вредношћу и стандардном девијацијом добијеном експерименталним испитивањем за одређени зид и пречник честице.
2. Ако је узоркован негативан угао виртуелног зида чија је апсолутна вредност већа од нападаног угла честице, тј. ако честица прилази са стране зида супротне од стране где струји флуид, то је нереалан судар и процедура се понавља од корака 1.
3. Ако се честица после судара са зидом не враћа у флуид, процедура се понавља од корака 1.

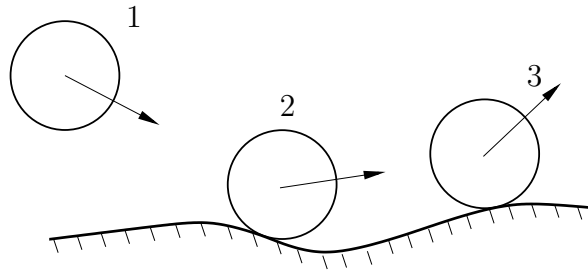
Модел сенке је дао добра слагања са експерименталним резултатима изузев што је предвиђена вероватноћа малих углова одбијања честице знатно већа од вероватноће предвиђене у експерименталним резултатима.



Слика 2.2: Ефекат сенке [2]: неравнине са негативним нагибом су заклоњене.

Мана модела сенке је што се занемарује да уколико честица има мали угао одбијања, она може поново да се судари са неком оближњом неравнином зида (в. сл. 2.3) и потом да се врати у струју флуида са већим углом одбијања.

Користећи особину да је густина расподеле (PDF) угла одбијања честица које су доживеле само један судар са зидом пре враћања у струју флуида приближно једнака густини расподеле угла одбијања честица које имају више судара са зидом пре враћања у струју флуида, стохастичка процедура за моделирање вишеструких судара честице са зидом је предложена у Konan et al. [6].



Слика 2.3: Вишеструки судари честице са храпавим зидом. Положај честице у тренутку t_i је означен на слици са i , ($i = 1, 2, 3$; $t_1 < t_2 < t_3$).

У Kussin and Sommerfeld [17] приказани су резултати експерименталних испитивања особина чврсте фазе и модулације турбуленције при струјању у хоризонталном каналу мале висине (35 mm), за зидове различите храпавости, при чему су брзине ваздуха и честица мерене у исто време. Са порастом степена пуњења дисперзне фазе, флуктуације брзине честица се смањују услед дисипације енергије приликом судара честица. Честице до пречника $200 \mu\text{m}$ утичу на смањење интензитета турбуленције флуида, док веће честице (пречника 0.625 mm и 1.0 mm) повећавају интензитет турбуленције флуида у области око осе канала.

Струјање мешавине гаса и честица у хоризонталном каналу проучавано је у Sommerfeld [18] коришћењем Ојлер-Лагранж нумеричке симулације у којима је имплементиран стохастички модел за сударе честица и зида као и стохастички модел за међусобне сударе честица. Услед таложења честица, региони повећане концентрације се развијају у близини доњег зида канала, али међусобни судари честица изазивају њихову вертикалну дисперзију, што доводи до повећавања вероватноће судара честица са горњим зидом канала. Услед међусобних судара честица, са порастом степена пуњења дисперзне фазе, у случају честица мањег пречника долази

до смањења фреквенције судара честица и зида, а самим тим и до мање деградације честица приликом судара као и до мањег пада притиска.

Претходно истраживање [18] је настављено у Sommerfeld [19]. У овом раду је одређиван утицај храпавости зида и међусобног судара честица на интегралне карактеристике струјања дисперзне фазе (просечну брзину честица и флукуационе компоненте осредњене по висини канала). Налази се да просечна брзина честица опада са порастом храпавости зидова. Са порастом висине канала утицај храпавости зидова опада, нарочито у случају честица малог пречника, што резултује повећањем просечних брзина честица у смеру струјања и смањењем њихових флукуационих брзина.

Експериментално истраживање пнеуматског транспорта стаклених сферних честица у хоризонталном каналу дато у Sommerfeld and Kussin [10] показује да повећање храпавости зида или величине честица доводи до равномерније расподеле честица по попречном пресеку канала. Са порастом величине честица запажа се слабљење утицаја храпавости зида на профил концентрације честица у попречном пресеку, а са повећањем храпавости зидова канала долази до повећања флукуација честица у подужном, и нарочито у попречном правцу. То узрокује повећање фреквенције судара честица са зидом, услед чега долази до смањења количине кретања честица и последично до повећаног пада притиска.

Резултати експерименталних мерења турбулентног развијеног струјања мешавине гаса и честица у вертикалном каналу су приказани у Venson et al. [20]. У експерименту, честице су имале пречник $150 \mu\text{m}$, Рејнолдсов број је био 13800, а масени удео честица је био 15%. Закључено је да храпави зидови остварују велики утицај на особине обе фазе. Када су зидови канала храпави, временски осредњени профил брзине честица у мерном пресеку је знатно равномернији него када су зидови канала глатки, што је последица мешања честица услед њихових судара са храпавим зидом канала.

Утицај храпавости зида на дисперзну фазу при струјању мешавине гаса и честица у вертикалном каналу истраживан је у Squires and Simonin [21] применом LES-DPS симулације са једносмерном спрегом флуида и честица. Виртуелни зид је дефинисан јединичним вектором нормале $\mathbf{n} = [\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi, \sin \varphi \sin \theta]$, где углови φ и θ имају нормалну расподелу са стандардном девијацијом $\Delta\gamma$. После судара честице са зидом, ако нормална компонента брзине честице није усмерена ка флуиду, генерисање угла виртуалног зида се понавља. Судари честица са зидом су рачунати без утицаја трења.

Резултати DNS-DPS симулације струјања мешавине гаса и честица кроз вертикалну цев са моделираним сударима честица са храпавим зидом дати су у Vreman [22]. Виртуални вектор нормале зида је рачунат као $\mathbf{n} + \chi \mathbf{s} / |\mathbf{n} + \chi \mathbf{s}|$, где су пројекције вектора \mathbf{s} униформне случајне вредности у домену $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, ($|s| < 1$), а коефицијент спекуларности $\chi = 0.2$ је грубо процењен за алуминијумску цев коришћену у експерименту, из разлога што храпавост није мерена у оригиналном експерименту. Показано је да примена модела храпавог зида у симулацији, уместо глатког зида, резултује бољим слагањем резултата симулације са експерименталним резултатима.

У DES-DPS симулацији турбулентног струјања у хоризонталном каналу Koppa et al. [23], истраживан је утицај храпавости на дисперзну фазу користећи модел сенке [2] и модел вишеструких судара честице са зидом [6]. Анализа резултата симулација показује да се применом модела сенке ствара велики број честица које се после судара са храпавим зидом крећу у близини зида, док применом модела вишеструких судара честице са зидом, постоји веома мала вероватноћа да ће се честице после судара са зидом одбити са углом блиским нули. Да би се повећала дисперзија честица индукована сударом честица са храпавим зидом и добило боље слагање са експерименталним резултатима, у моделу сенке је неопходно повећати статистичке особине храпавости зидова.

Модел за судар честице са храпавим зидом у коме је стварна површина зида замењена са површином прекривеном полусферама једнаког пречника, предложен је у Breuer et al. [24]. Стандардна девијација угла зида је функција просечне висине неравнина R_z (или RMS висине храпавости R_q) и пречника честице. Ови параметри дозвољавају лакшу примену модела у практичним инжењерским проблемима. Ефекти сенке су узети у обзир, али вишеструки судари честице са зидом су занемарени. Модел је примењен у LES-DPS симулацији струјања гаса и честица у хоризонталном каналу.

Malloupas and Van Wachem [25] су извршили LES-DPS симулацију струјања мешавине гаса и честица у хоризонталном каналу, при чему се одбијање сферних честица од храпавог зида израчунава у оквиру модела меких сфера. Вишеструки судари честице и зида се третирају сукцесивним додавањем виртуелних зидова. Први виртуелни зид се ствара уз помоћ модела сенке [2] када честица достигне амплитуду храпавог зида додатог глатком зиду. Ако се после судара са виртуелним зидом честица помери према зиду, други виртуелни зид се генерише и одбијање честице се поново израчунава. Механизам генерисања виртуелних зидова се понавља све док се честица не врати у струју флуида.

У раду Cheng and Zhu [26] судари честица и храпавог зида проучавани су у систему виртуелних зидова који заједно чине тзв. групу виртуелних зидова. У овом окружењу, дефинише се густина расподеле углова храпавих зидова које честица види када прилази зиду. Упрошћен случај ове густине расподеле представља ефективна дистрибуција храпавости [2]. Процедура за вишеструке сударе зида и честица из [6] је модификована и разлика је направљена за честице које имају позитивне и негативне углове одбијања од зида. Резултујућа процедура је примењена у RANS-DPS симулацији струјања гаса и честица у ограниченом раванском млазу.

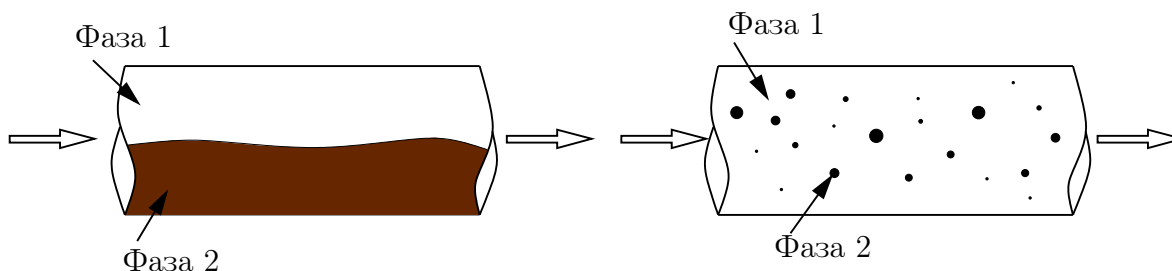
Резултати DNS-DPS симулације струјања мешавине гаса и честица у вертикалном каналу су описани у Vreman [27]. Судари честица и храпавих зидова су

рачунати на детерминистички начин, а храпавост зида је моделирана као скуп густо збијених полусфера са равним странама причвршћеним за гладак зид. Налази се да повећање храпавости зида канала при струјању мешавине гаса и честица доводи до слабљења турбуленције флуида. Неуниформни део просечне силе којим слободне честице делују на гас такође утиче на смањење турбуленције флуида.

Поглавље 3

Основне карактеристике дисперзних струјања

Вишефазна струјања се могу поделити на стратификована и дисперзна струјања, као што је приказано на слици 3.1. У стратификованом струјању, фазе су раз-



Слика 3.1: Стратификовано струјање (слика лево) и дисперзно струјање (слика десно) [3].

двојене малим бројем контактних површина, а при дисперзном струјању једна фаза је у форми честица, окружена флуидом, при чему постоји велики број контактних површина честица и флуида. Термин дисперзна фаза означава честице а флуид који окружује дисперзну фазу назива се носећа или континуална фаза.

За карактеризацију дисперзних струјања се користи неколико параметара.

Најважнији међу њима је запремински удео, који дефинише колико запремине заузима нека од фаза. Запремински удео дисперзне фазе је дефинисан следећим изразом:

$$\alpha_d = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_d} V^i \quad (3.1)$$

где је V^i запремина која заузима честица i а N_d је укупан број честица у запремини V . Како је збир запреминских удела дисперзне и носеће фазе увек једнак јединици, запремински удео флуида (континуалне фазе) је дат са:

$$\alpha_c = 1 - \alpha_d \quad (3.2)$$

За процену међусобног утицаја честица, важан параметар је растојање између честица L_p . Уколико се посматрају сферне честице пречника D_p хомогено распо- ређене у коцкама страница L_p тако да се средиште честице поклапа са средиштем коцке која је окружује, важи [4]:

$$\frac{L_p}{D_p} = \left(\frac{\pi}{6 \alpha_d} \right)^{1/3} \quad (3.3)$$

За запремински удео дисперзне фазе од 15%, растојање између центара две су- седне сферне честице би било $1.5 D_p$, што сугерише да су честице превише близу да би занемарила њихова интеракција.

Степен пуњења дисперзне фазе се дефинише као однос масеног протока дис- перзне фазе и масеног протока носеће фазе,

$$m = \frac{\dot{m}_d}{\dot{m}} = \frac{\alpha_d \rho_d U_{b,d}}{(1 - \alpha_d) \rho U_b} \quad (3.4)$$

где су ρ_d и $U_{b,d}$ густина и просечна брзина дисперзне фазе, редоследно, а ρ и U_b су густина и просечна брзина носеће фазе, редоследно.

Времена одзива честице на промену брзине и промену температуре околног флуида, су важни параметри за карактеризацију струјања.

Време одзива честице на промену брзине околног флуида, τ_v , у случају сферне честице пречника D_p која се креће у гасу униформне брзине u добија се из једначине кретања честице,

$$m_p \frac{du_p}{dt} = \frac{1}{2} C_D \frac{\pi D_p^2}{4} \rho (u - u_p) |u - u_p| \quad (3.5)$$

где је u_p брзина честице. Увођењем Рејнолдсовог броја честице,

$$\text{Re}_p = \frac{\rho D_p |u - u_p|}{\mu} \quad (3.6)$$

у (3.5) и дељењем са масом честице m_p , добија се:

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{18\mu}{\rho_p D_p^2} \frac{C_d \text{Re}_p}{24} (u - u_p) \quad (3.7)$$

У случају малих Рејнолдсових бројева (Стоксово струјање), параметар $\frac{C_d \text{Re}_p}{24}$ тежи јединици. Други параметар представља реципрочну вредност времена одзива честице,

$$\tau_v = \frac{\rho_p D_p^2}{18\mu} \quad (3.8)$$

па се једначина кретања може написати у следећем облику:

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{1}{\tau_v} (u - u_p) \quad (3.9)$$

Решење једначине (3.9), за константну брзину гаса u и почетну брзину честице једнакој нули, је:

$$u_p = u(1 - \exp(-t/\tau_v)). \quad (3.10)$$

Из (3.10) се добија да време одзива честице представља време које је потребно да честица из стања мировања достигне 63% униформне брзине гаса u . Сличну

анализу за време одзива честице на промену температуре околног флуида могуће је пронаћи у [28].

Стоксов број везан за брзину честице се дефинише као:

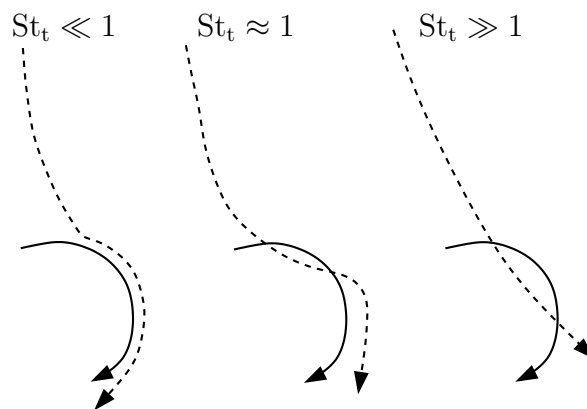
$$St_v = \frac{\tau_v}{\tau_f} \quad (3.11)$$

где је τ_f је неко карактеристично време континуалне фазе. Ако је $St_v \ll 1$, време одзива честице је много мање од карактеристичног времена струјања флуида, па честице имају довољно времена да одреагују на промене брзине флуида у струјном пољу. С друге стране, ако је $St_v \gg 1$, честице немају довољно времена да реагују на промене брзине околног флуида.

Аналогно (3.11), следи дефиниција турбулентног Стоксовог броја,

$$St_t = \frac{\tau_v}{\tau_t} \quad (3.12)$$

где је τ_t интегрална размера турбуленције. Овај број се користи за процену утицаја турбуленције на кретање честице (в. сл. 3.2). Ако је $St_t \ll 1$, што је често у случају честица мањих димензија, флукуације брзине утичу знатно на кретање честице, а ако је $St_t \gg 1$, флукуације брзине не утичу на кретање честице.



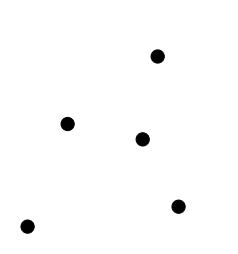
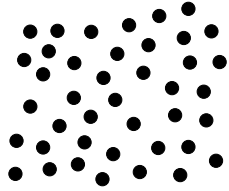
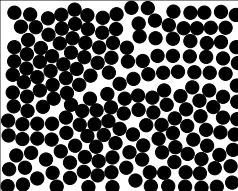
Слика 3.2: Утицај турбулентног вртлога на трајекторију честице за различите вредности турбулентних Стоксових бројева [3].

Стоксов број везан за сударе честица је:

$$St_c = \frac{\tau_v}{\tau_c} \quad (3.13)$$

Ако је $St_c < 1$, на кретање честице највише утичу силе којима флуид делује на њу. У том случају концентрација дисперзне фазе је веома мала, и таква струјања припадају класи тзв. разблажених струјања. Са друге стране, када је $St_c > 1$, кретање честица је регулисано њиховим међусобним сударима или пак њиховим континуалним контактом. Оваква струјања карактерише и велика вредност концентрације дисперзне фазе, и она припадају класи тзв. густих струјања.

Како постоји много механизма који утичу на међусобне сударе честица, тешко је дефинисати јасну границу између разблаженог и густог режима струјања и уобичајено се за одређивање режима струјања користи запремински удео честица (в. сл. 3.3). За запреминске уделе честица 0.001 и мање, струјање се може сматрати

Разблажено струјање	Густо струјање	
	Доминирају судари	Доминира контакт
		
$\alpha_d < 0.001$	$0.001 < \alpha_d < 0.1$	$\alpha_d > 0.1$

Слика 3.3: Режији струјања мешавине гаса и честица [4].

разблаженим. Примери овог струјања су струјање гаса и честица у електростатичком филтеру или у циклонском сепаратору. За запреминске уделе честица између 0.001 и 0.1, судари честица остварују велики утицај на особине обе фазе. Пример овог режима струјања је флуидизација, где се честице често сударају међусобно као и са зидом. Уколико је запремински удео честица већи од 0.1, то су струјања у којима је доминантан ефекат контакта честица. Примери ових режима су грану-

ларна струјања честица низ нагнуту раван.

3.1 Спрега континуалне и дисперзне фазе

При анализи дисперзних струјања важан концепт је спрега дисперзне и континуалне фазе. Разликују се три начина спреге:

- једносмерна спрега: струјање континуалне фазе утиче на струјање честица, при чему нема повратног утицаја честица на флуид. Међусобна интеракција честица је занемарљива.
- двосмерна спрега: струјање континуалне фазе утиче на струјање честица, али постоји и повратни утицај струјања честица на флуид. Међусобна интеракција честица је занемарљива.
- четворосмерна спрега: постоји међусобна интеракција струјања честица и флуида, али и међусобне интеракције честица су важне (једна честица утиче на другу, али и друга честица утиче на прву, па се то рачуна као двосмерна спрега). Под интеракцијом честица се подразумевају судари честица али и индиректни феномени као у случају када се две честице приближавају једна другој у вискозном флуиду. Иако се честице не морају сударити, њихова интеракција је и даље важна, уколико је мало растојање између њих.

Поглавље 4

Основне једначине при дисперзном струјању

4.1 Приступи за проучавање струјања мешавине гаса и честица

За прорачун струјања мешавине гаса и честица, разликују се два приступа:

- **Ојлер - Лагранж:** За опис континуалне фазе користи се Ојлеров приступ и решавају се закони одржања (маса, количине кретања, енергије) на фиксној прорачунској мрежи, док се честице прате на Лагранжов начин - за сваку честицу (или групу честица) примењује се други Њутнов закон и физичке величине честица (попут брзине и температуре) се ажурирају дуж трајекторија.
- **Ојлер - Ојлер (модел два флуида):** Користећи Ојлеров приступ, различите фазе се третирају као флуиди, при чему се закони одржања решавају за сваку фазу. Особине честица се осредњавају у контролној запремини.

Приступ Ојлер-Лагранж се примењује углавном код разблажених режима струјања, док се Ојлер - Ојлер примењује углавном када су режими струјања мешавине гуси.

4.2 Једначине континуалне фазе

При решавању проблема у вишефазном струјању мешавине гаса и честица, концепцијски најбољи приступ би био решавање основних једначина носеће фазе (једначине континуитета, једначина количине кретања и једначине енергије) са граничним условима које намећу честице. Међутим, због захтева за великим рачунарским капацитетима, решења оваквих струјања до данас постоје само у случају малог броја честица, при малим вредностима Рејнолдсовог броја. У реалним индустријским прорачунима вишефазних струјања број честица може бити изузетно велики, па би такви прорачуни трајали дуго и на најсавременијим рачунарима који су данас расположиви.

Други, мање захтеван приступ у погледу рачунарских капацитета, је формирање система једначина који описује промену просечних физичких величина при вишефазном струјању. Те просечне вредности се добијају осредњавањем физичких величина.

4.2.1 Методе осредњавања физичких величина

Осредњавање физичких величина може бити у времену, по ансамблу и по запремини.

Временско осредњавање величине $B(\mathbf{r}, t)$ се дефинише изразом,

$$\langle B(\mathbf{r}) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T B(\mathbf{r}, t) dt \quad (4.1)$$

где је T време осредњавања које мора бити довољно велико тако да осредњена величина B више не зависи од времена.

При **осредњавању по ансамблу**, физичка величина $B(\mathbf{r}, t)$ се мери у N реализација експеримента и вредност осредњена по ансамблу је:

$$\langle B(\mathbf{r}, t) \rangle_e = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N B_n(\mathbf{r}, t) \quad (4.2)$$

При вишефазном струјању најчешће се користи **осредњавање по запремини**, с обзиром да се струјно поље у великом броју модела дели на прорачунске ћелије које у суштини представљају запремине за осредњавање. Овај тип осредњавања је дефинисан изразом:

$$\{B(\mathbf{r}, t)\} = \frac{1}{V} \int_V B(\mathbf{r}, t) dV \quad (4.3)$$

Величина запремине V у којој се врши осредњавање треба да буде довољно велика тако да се обухвати довољан број честица, како се запремински осредњена вредност не би мењала са порастом величине запремине за осредњавање. С друге стране, да би промена величина у систему била континуална, неопходно је да запремина за осредњавање буде мања од карактеристичне димензије система. Када запремина која је потребна за осредњавање величина није довољно велика, могу се дефинисати величине осредњене по запремини, али њихова промена у простору није континуална. У том случају запреминско осредњавање је могуће комбиновати са другим типовима осредњавања [29].

Поред запреминске просечне вредности (4.3), фазна просечна вредност се дефинише као,

$$\langle B(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} B(\mathbf{r}, t) dV \quad (4.4)$$

где је V_c запремина континуалне фазе. Једначине (4.3) и (4.4) су повезане изразом

$$\langle B \rangle = \alpha_c \{B\}.$$

Коришћење осредњавања у једначинама одржања доводи до губитка информација па добијени систем осредњених једначина по правилу није затворен. Моделирање одређених чланова у осредњеним једначинама представља проблем и при струјању чистог флуида, а проблеми су још већи у вишефазном струјању, услед присуства више фаза.

Према Crowe [28], запремински осредњена вредност градијента неке величине је повезана са градијентом фазне осредњене вредности изразом,

$$\left\{ \frac{\partial B}{\partial x_i} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle B \rangle - \frac{1}{V} \int_{S_d} B n_i dS \quad (4.5)$$

где је S_d површина честице коју окружује флуид. За запремински осредњену вредност временског извода важи,

$$\left\{ \frac{\partial B}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \langle B \rangle - \frac{1}{V} \int_{S_d} B \dot{r} dS \quad (4.6)$$

где је \dot{r} интензитет брзине површине честице у односу на њен центар. У изразима (4.5) и (4.6), величина B може бити скалар, вектор или тензор.

4.2.2 Запремински осредњена једначина континуитета континуалне фазе

Запреминским осредњавањем једначине континуитета носеће фазе, у диференцијалном облику,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.7)$$

коришћењем (4.5) и (4.6), добија се једначина,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_c \langle \rho \rangle) + \nabla \cdot (\alpha_c \langle \rho \mathbf{u} \rangle) = -\frac{1}{V} \sum_k \dot{m}_k \quad (4.8)$$

где је \dot{m}_k брзина промене масе честице k .

Код модела где се честице апроксимирају као тачке, односно као елементи без запремине, запремински удео носеће фазе једнак је јединици, $\alpha_c = 1$, а једначина континуитета (4.8) се своди на облик,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\langle \rho \rangle) + \nabla \cdot (\langle \rho \mathbf{u} \rangle) = -\frac{1}{V} \sum_k \dot{m}_k \quad (4.9)$$

Ако је флуид нестишљив и нема промене фазе честица, једначина (4.9) има исти облик као једначина континуитета (4.7) за чист флуид.

4.2.3 Запремински осредњена једначина количина кретања континуалне фазе

Једначина количине кретања носеће фазе се може написати у следећем облику,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (4.10)$$

Запреминским осредњавањем ове једначине добија се,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_c \langle \rho \mathbf{u} \rangle) + \nabla \cdot (\alpha_c \langle \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \rangle) &= -\nabla \langle p \rangle - \frac{1}{V} \sum_k \mathbf{u}_{p,k} \dot{m}_k + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \\ - \nabla \cdot (\alpha_c \langle \rho \mathbf{u}' \mathbf{u}' \rangle) - \frac{1}{V} \sum_k \mathbf{F}_k + \alpha_c \langle \rho \rangle \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.11)$$

где је $\mathbf{u}_{p,k}$ брзина k -те честице, а \mathbf{F}_k је сила којом носећа фаза делује на ту честицу. Брзина \mathbf{u}' представља одступање локалне брзине \mathbf{u} у запремини за осредњавање од Фавреове осредњене вредности $\langle \mathbf{u} \rangle_F = \frac{\langle \rho \mathbf{u} \rangle}{\langle \rho \rangle}$,

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle_F \quad (4.12)$$

Члан $\langle \rho \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ представља аналогију Рејнолдсовом напону при струјању чистог флуида. Овај члан постоји и када струјање није турбулентно, услед девијација брзине које се јављају при опструјавању индивидуалних честица.

У случају да честице не мењају фазу, да је носећи флуид нестишљив и да се честице могу апроксимирати као тачке, једначина (4.11) се упрошћава на следећи облик,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}_p \quad (4.13)$$

где је \mathbf{F}_p сила којом честице дисперзне фазе делују у тачки носећег флуида.

4.2.4 Запремински осредњена једначина енергије

Једначина укупне енергије носећег флуида има следећи облик,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \right] = & -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (p \mathbf{u}) + \\ & + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.14)$$

и следи из првог закона термодинамике. Једначина механичке енергије добија се скаларним множењем једначине количине кретања и брзине флуида,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \right] = -\mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \quad (4.15)$$

Једначина унутрашње енергије се добија као разлика једначине укупне енергије и једначине механичке енергије,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} e] = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (4.16)$$

Запреминским осредњавањем једначине унутрашње енергије (4.16), у случају нестишљивог флуида, добија се,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_c \rho \langle e \rangle) + \nabla \cdot (\alpha_c \rho \langle \mathbf{u} e \rangle) = -\frac{1}{V} \sum_k \dot{m}_k e_{s,k} + \alpha_c \langle \Phi \rangle + \nabla \cdot \mathbf{q}_m - \frac{1}{V} \sum_k \dot{Q}_k \quad (4.17)$$

Запремински осредњена једначина механичке енергије, у случају нестишљивог флуида је,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_c \rho \left\langle \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right\rangle \right) + \nabla \cdot \left(\alpha_c \rho \left\langle \mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right\rangle \right) &= -\nabla \cdot (\alpha_c \langle \mathbf{u} p \rangle) + \nabla \cdot (\alpha_c \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} \rangle) \\ + \nabla \cdot (\alpha_d \langle p \rangle \langle \mathbf{u}_p \rangle_F) + \langle p \rangle \frac{\dot{V}_d}{V} - \frac{1}{V} \sum_k \mathbf{u}_{p,k} \cdot \mathbf{F}_k - \frac{1}{V} \sum_k \dot{m}_k \left[\frac{|\mathbf{u}_{s,k}|^2}{2} + \frac{p_s}{\rho} \right] & \quad (4.18) \\ - \alpha_c \langle \Phi \rangle + \alpha_c \rho \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{g} \end{aligned}$$

Једначина укупне енергије носеће фазе је,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_c \rho \left\langle e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right\rangle \right) + \nabla \cdot \left(\alpha_c \rho \langle \mathbf{u} \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) \rangle \right) &= \\ - \frac{1}{V} \sum_k \dot{m}_k \left[\frac{|\mathbf{u}_{s,k}|^2}{2} + e_{s,k} + \frac{p_s}{\rho} \right] + \nabla \cdot (\alpha_d \langle p \rangle \langle \mathbf{u}_p \rangle_F) + \langle p \rangle \frac{\dot{V}_d}{V} & \quad (4.19) \\ - \frac{1}{V} \sum_k \mathbf{u}_{p,k} \cdot \mathbf{F}_k + \nabla \cdot (\alpha_c \langle \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} \rangle) + \alpha_c \rho \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{q}_m - \frac{1}{V} \sum_k \dot{Q}_k \end{aligned}$$

4.3 Лагранжов приступ при проучавању кретања дисперзне фазе

Једначина кретања честице кроз флуид се описује другим Њутновим законом,

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{F}_{\text{body}} + \mathbf{F}_{\text{surf}} + \mathbf{F}_{\text{coll}} \quad (4.20)$$

где су \mathbf{F}_{body} и \mathbf{F}_{surf} , резултујућа масена сила и резултујућа површинска сила која делује на честицу, редоследно, а \mathbf{F}_{coll} је резултујућа сила услед међусобног судара честица (или услед судара честица са зидом).

Резултујућа масена сила се своди на гравитациону силу, $\mathbf{F}_{\text{body}} = m_p \mathbf{g}$ ако су остале масене силе (нпр. електромагнетна и инерцијалне силе) занемарљиве.

У зависности од начина одређивања површинских сила које делују на честицу, у оквиру Лагранжовог приступа за прорачун кретања честице разликују се:

1. модели код којих се напонско стање флуида одређује на површини сваке честице
2. модели код којих се претпоставља да је честица тачка (тзв. point-force приступ)

Код модела код којих се напонско стање флуида одређује на површини сваке честице, резултујућа површинска сила добија се нумеричком интеграцијом израза:

$$\mathbf{F}_{\text{surf}} = \int_{S_p} \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \mathbf{n}_p dS \quad (4.21)$$

где је S_p површина честице у контакту са флуидом, $\boldsymbol{\sigma}_p$ је тензор напона флуида на површини честице а \mathbf{n}_p је јединични вектор нормале на површини честице. Овај приступ нема ограничења у погледу Рејнолдсовог броја честице, њеног облика

и убрзања. Недостатак овог приступа су високи захтеви у погледу рачунарских капацитета, с обзиром да је неопходан велики број прорачунских тачака око сваке честице.

Уколико је у струјању присутан већи број честица, за прорачун се користи модел код којег резултујућа сила на честицу делује у тачки. Код тог модела, резултујућа сила представља површински осредњену силу и она се налази као линеарна комбинација међусобно независних сила. Резултујућа сила је дефинисана изразом:

$$\mathbf{F}_{\text{surf}} = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_{ls} + \mathbf{F}_{lm} + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_h + \mathbf{F}_{\text{add}} \quad (4.22)$$

где је \mathbf{F}_d сила отпора, \mathbf{F}_s сила услед напона непоремећене струје флуида, \mathbf{F}_{ls} Сафманова сила узгона, \mathbf{F}_{lm} Магнусова сила узгона, \mathbf{F}_a сила додате масе, \mathbf{F}_h је Басетова сила и \mathbf{F}_{add} представља додатне силе које могу бити важне при струјању, као што су нпр. термофоретичка сила услед постојања градијента температуре или Браунова сила услед молекуларних судара.

Различите силе у (4.22) потичу услед дејства напона флуида на површину честице, а како су Навије-Стоксове једначине нелинеарне, линеарност у (4.22) није физички оправдана [30], изузев у случају врло малих или врло великих Рејнолдсових бројева честице, када се ова адитивност може доказати. Ипак, оваква суперпозиција сила је уобичајена јер при практичним прорачунима овај приступ даје задовољавајуће резултате.

Сила отпора која делује на усамљену честицу при стационарном струјању израчунава се помоћу израза:

$$\mathbf{F}_d = -\frac{3}{4}\rho V_p \frac{C_d}{D_p} |\mathbf{u}_p - \mathbf{u}| (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}) \quad (4.23)$$

Једначина (4.23) важи за честицу која се налази у униформној струји флуида брзине \mathbf{u} далеко од честице. При коришћењу овог израза, у случају честице у струји

флуида са сложеном просторном структуром, претпоставља се да је пречник честице D_p много мањи од најмањих карактеристичних дужинских размера флуида тако да брзина \mathbf{u} представља брзину флуида коју присуство честице не мења. Да би једначина (4.23) могла да се примени, неопходно је занемарити и поремећаје струјања које индукују друге честице, па је поменута једначина важећа само у случају разблажених режима струјања. За коефицијент отпора најчешће се користи израз,

$$C_d = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}_p} (1 + 0.15 \text{Re}_p^{0.687}) & \text{за } \text{Re}_p < 1000 \\ 0.45 & \text{за } \text{Re}_p > 1000 \end{cases} \quad (4.24)$$

где је Рејнолдсов број честице,

$$\text{Re}_p = \frac{\rho D_p |\mathbf{u} - \mathbf{u}_p|}{\mu} \quad (4.25)$$

У случају малих вредности Рејнолдсових бројева честице, $\text{Re}_p < 1$, (4.24) се своди на Стоксову формулу [31]. Сила која потиче услед дејства напона непоремећене струје флуида на честицу је:

$$\mathbf{F}_s = \rho V_p \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho V_p \mathbf{g} \quad (4.26)$$

где први члан представља силу услед градијента притиска на честици а други члан представља силу потиска.

Када честица убрзава кроз флуид, постоји убрзање флуида у близини те честице на рачун њеног рада. Та појава доводи до тзв. силе додате (или виртуелне) масе која делује на честицу. Ова сила се може написати у облику, према [32],

$$\mathbf{F}_a = \frac{\rho V_p}{2} \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} \right) \quad (4.27)$$

Басетова сила узима у обзир историју кретања честице - ова сила не зависи

од само од тренутне брзине и тренутног убрзања честице, већ и од претходних убрзања честице, од почетног тренутка t_0 до посматраног тренутка t . Ова сила је дефинисана, према Basset [33],

$$\mathbf{F}_h = \frac{3}{2} D_p^2 \rho \sqrt{\pi \nu} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{(t-t')^{1/2}} \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt'} - \frac{d\mathbf{u}_p}{dt'} \right) \quad (4.28)$$

Интеграл у (4.28) чини прорачун Басетове силе веома захтевним - укупно време прорачуна струјања може се повећати за ред величине. Из тог разлога, при практичним прорачунима се ова сила често неоправдано занемарује. Басетова сила је занемарљива у односу на силу отпора само уколико је однос густине флуида и густине честица мали, $\rho/\rho_p < 10^{-3}$.

Сафманова сила узгона је последица разлике притиска на честици, услед градијента брзине у коме се честица налази (в. сл. 4.1а). Користећи аналитички резултат Saffman [34], Mei [35] је предложио следећи израз за Сафманову силу узгона:

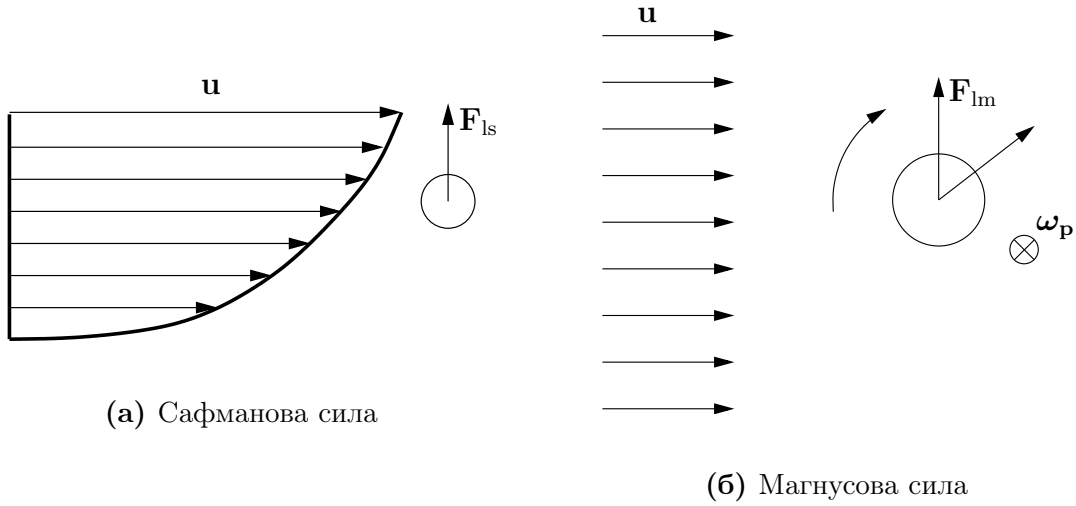
$$\mathbf{F}_{ls} = 1.615 D_p \mu \text{Re}_s^{1/2} c_{ls} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) \times \boldsymbol{\omega}] \quad (4.29)$$

где је $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ вртложност флуида, $\text{Re}_s = \frac{\rho D_p |\boldsymbol{\omega}|}{\mu}$ је Рејнолдсов број смицајног струјања коме је честица изложена, а коефицијент c_{ls} је поправни коефицијент који узима у обзир ефекат Рејнолдсовог броја Re_p ,

$$c_{ls} = \begin{cases} (1 - 0.3314 \beta^{1/2}) \exp -\frac{\text{Re}_p}{10} + 0.3314 \beta^{1/2} & \text{Re}_p \leq 40 \\ 0.0524 (\beta \text{Re}_p)^{1/2} & \text{Re}_p > 40 \end{cases} \quad (4.30)$$

где је $\beta = 0.5 \text{Re}_s / \text{Re}_p$.

Магнусова сила узгона је узрокована разликом притиска на честици услед ротације честице (в. сл. 4.1б). Користећи израз за ову силу дату у Rubinow and



Слика 4.1: Сафманова сила узгона која делује на честицу која се налази у смицајном струјању (слика а) и Магнусова сила узгона која делује на честицу угаоне брзине ω_p у униформној струји флуида (слика б).

Keller [36], Магнусова сила узгона се може приказати у следећем облику:

$$\mathbf{F}_{lm} = \frac{\pi}{8} D_p^3 \rho \frac{Re_p}{Re_R} c_{lr} [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p)] \quad (4.31)$$

где је $\boldsymbol{\Omega} = 0.5 \nabla \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_p$ а Рејнолдсов број ротације честице је дат са $Re_R = \rho D_p^2 |\boldsymbol{\Omega}| / \mu$. Коефицијент отпора, према Oesterle and Bui Dinh [37], за $Re_p < 2000$, је дат изразом,

$$c_{lr} = 0.45 + \left(\frac{Re_R}{Re_p} - 0.45 \right) \exp(-0.05684 Re_R^{0.4} Re_p^{0.3}) \quad (4.32)$$

4.4 Ојлеров приступ при проучавању кретања дисперзне фазе

При Ојлер-Ојлер приступу, дисперзна фаза се третира као континуална (непрекидна) средина и за њу се формирају одговарајуће једначине одржања. Према Anderson and Jackson [38], једначина континуитета и једначина количине кретања

дисперзне фазе су:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_d) + \nabla \cdot (\alpha_d \mathbf{u}_d) = 0 \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \rho_d \alpha_d \left[\frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial t} + \mathbf{u}_d \cdot \nabla \mathbf{u}_d \right] = & \alpha_d \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_d - \nabla p_d \\ & + \beta (\langle \mathbf{u} \rangle - \mathbf{u}_d) + \alpha_d \rho_d \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.34)$$

где су $\boldsymbol{\tau}_d$ и p_d смицајни напон и притисак дисперзне фазе, редоследно, а \mathbf{u}_d представља локалну осредњену брзину честица, дефинисану изразом:

$$\alpha_d(\mathbf{x}) \mathbf{u}_d(\mathbf{x}) = \int_{V_{d,\infty}} \mathbf{u}_p(\mathbf{y}) g(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) dV_y \quad (4.35)$$

где је $V_{d,\infty}$ запремина дисперзне фазе у запремини за осредњавање, $\mathbf{u}_p(\mathbf{y})$ представља брзину честице чија је координата тежишта \mathbf{y} , dV_y представља елементарну запремину, а $g(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ представља тежинску функцију која је позитивна, континуално диференцијабилна и опада са порастом растојања $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ од тачке \mathbf{x} у којој се врши осредњавање.

Предност модела Ојлер-Ојлер је примена истих метода решавања диференцијалних једначина континуалне и дисперзне фазе, а мана модела су комплексне емпиријске конститутивне једначине за смицајни напон и притисак дисперзне фазе.

Поглавље 5

Принцип LES симулације и моделирање утицаја вртлога малих размера

5.1 Преглед симулација и моделирања турбулентних струјања чистог флуида

Турбулентно струјање нестишљивог Њутновског флуида описано је једначином континуитета,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.1)$$

и једначином количине кретања,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5.2)$$

Принцип где се једначине (5.1) и (5.2) директно решавају, уз одговарајуће почетне и граничне услове, без коришћења било каквих претпоставки, назива се директна

нумеричка симулација (DNS). При овој врсти симулација, рачунају се сви вртлози, почевши од најмањих, дефинисаних размерама Колмогорова, до највећих дефинисаним карактеристичним размерама струјног простора. Мана овог приступа је велика цена прорачуна, пропорционална кубу Рејнолдсовог броја [39], што ограничава примену ових симулација на струјања са релативно малим вредностима Рејнолдсовог броја.

Да би се смањили захтеви за изразито великим рачунарским ресурсима, као и време нумеричког прорачуна, у инжењерским прорачунима се врши временско осредњавање (или пак осредњавање по ансамблу) једначина (5.1) и (5.2). На тај начин добијају се Рејнолдсове једначине (RANS) које описују промену просечних физичких величина. Услед процеса осредњавања, у овим једначинама појављује се шест нових непознатих величина - Рејнолдсови турбулентни напони, које је потребно моделирати како би се систем једначина затворио. У зависности од приступа моделирања, разликују се концепти засновани на турбулентној вискозности и концепти засновани на моделирању Рејнолдсових транспортних једначина. Мана RANS приступа је што се турбулентним моделима обухватају заједно и велики и мали вртлози, различитих карактера: велики вртлози носе највећи део енергије, анизотропни су и зависе од геометрије струјног простора и граничних услова, док су мали вртлози одговорни за дисипацију енергије и при великим Рејнолдсовим бројевима имају универзалан карактер.

Симулација великих вртлога (LES), која се и користи у овој тези, по својој концепцији представља средину између претходна два приступа: велики вртлози се директно прорачунавају, док се утицај малих вртлога моделира. Из тог разлога, LES симулације су знатно мање захтевне у погледу рачунарских ресурса (и времена) од одговарајућих DNS симулација истог струјања (јер се у LES симулацијама не прорачунавају директно мале размере на које се троши скоро све време прорачуна у DNS симулацији), а са друге стране, очекује да LES буде тачнији у односу на RANS у случајевима где је изражена нестационарност великих вртлога,

као нпр. при струјању преко тела неаеродинамичног облика[40].

5.2 Основне једначине LES-а

Операцијом филтрирања се раздвајају размере које се моделирају од великих размера које се рачунају директно. Ова операција је дефинисана изразом:

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{x}', t) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \Delta) d^3\mathbf{x}' \quad (5.3)$$

где је $\phi(\mathbf{x}', t)$ оригинална функција, $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$ је филтрирана функција, $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \Delta)$ је функција филтрирања једнака нули за вредности $\phi(\mathbf{x}', t)$ које се јављају при размерама мањим од величине филтера Δ .

У методи контролних запремина, најчешће се користи тзв. кутијаста филтер (енгл. box filter),

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \Delta) = \begin{cases} 1/\Delta, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq \Delta/2 \\ 0, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \Delta/2 \end{cases} \quad (5.4)$$

где је величина филтера Δ једнака трећем корену запремине прорачунске ћелије, $\Delta = \sqrt[3]{V}$. На тај начин величина филтера је дефинисана дискретизацијом, што се назива имплицитно филтрирање.

Филтрирањем једначина (5.1) и (5.2), коришћењем (5.3), добијају се следеће једначине,

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^R \quad (5.6)$$

где је

$$\boldsymbol{\tau}^R = \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u} \mathbf{u}} \quad (5.7)$$

резидуални тензор напона (или тензор напона размера мањих од величине про-
рачунске ћелије, енгл. subgrid-scale (SGS) stress tensor). Овај члан је аналоган
Рејнолдсовим турбулентним напонима, који се јављају при осредњавању Навије-
Стоксових једначина.

5.3 Моделирање SGS напона

У овом одељку се описују модели који су коришћени у овој дисертацији при LES
симулацијама чистог флуида у хоризонталном каналу правоугаоног попречног пре-
сека. Преглед других модела SGS напона могуће је наћи у [41, 42].

Концепт турбулентне вискозности

При моделирању SGS напона коришћењем концепта турбулентне вискозности (Бу-
синескове хипотезе), важи:

$$\boldsymbol{\tau}^R - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^R) \mathbf{I} = \nu_t (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) = 2\nu_t \bar{\mathbf{S}} \quad (5.8)$$

где је ν_t резидуална (SGS) турбулентна вискозност, а $\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T)$ је тензор
брзине деформисања филтрираног поља брзине. Користећи једначину (5.8), могуће
је трансформисати једначину (5.6) на облик:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + 2(\nu + \nu_t) \nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} \quad (5.9)$$

где је модификовани притисак $\bar{P} = \bar{p} - 1/3 \rho \text{tr}(\boldsymbol{\tau}^R)$.

У моделима базираним на овом концепту, неопходно је дефинисати турбулент-
ну вискозност ν_t .

Модел Смагоринског

Модел Смагоринског [43] заснован је на споменутом концепту турбулентне вискозности. Аналогно Прантловој путањи мешања, дефинише се резидуална (SGS) турбулентна вискозност,

$$\nu_t = l_s \bar{\mathbf{S}} = (C_s \Delta)^2 |\bar{\mathbf{S}}| \quad (5.10)$$

где је $l_s = C_s \Delta$ дужинска размера Смагоринског, C_s коефицијент Смагоринског, Δ је величина филтера а $|\bar{\mathbf{S}}| = (2\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{S}})^{1/2}$ је карактеристична филтрирана брзина деформисања.

Коефицијент C_s зависи од услова струјања и вредности овог параметра варирају од 0.065 до 0.25 [44].

Мана модела Смагоринског је превелика дисипација у близини зида: турбулентна вискозност ν_t у близини зида је велика, јер су и градијенти брзине велики. Међутим, како турбулентне флукуације у близини зида теже нули, тако и турбулентна вискозност у близини зида треба да тежи нули. Како би се осигурало овако понашање, може се користити Ван Дриестова функција пригушења, тако да је:

$$l_s = C_s \Delta [1 - \exp(-y^+/A^+)] \quad (5.11)$$

где је y^+ бездимензијско растојање од зида, а константа A^+ има вредност око 26.

WALE модел

У WALE моделу [45], турбулентна вискозност се рачуна помоћу израза:

$$\nu_t = (C_w \Delta)^2 \frac{(\bar{\mathbf{S}}^d : \bar{\mathbf{S}}^d)^{3/2}}{(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{S}})^{5/2} + (\bar{\mathbf{S}}^d : \bar{\mathbf{S}}^d)^{5/4}} \quad (5.12)$$

где је \mathbf{S}^d симетрични део квадрата тензора градијента брзине $\bar{\mathbf{g}}_u = \nabla \bar{\mathbf{u}}$,

$$\mathbf{S}^d = \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{g}}_u^2 + (\bar{\mathbf{g}}_u^T)^2 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{tr}(\bar{\mathbf{g}}_u^2) \right) \quad (5.13)$$

Израз (5.13) се може написати у следећем облику:

$$\mathbf{S}^d = \bar{\mathbf{S}}^2 + \bar{\mathbf{\Omega}}^2 - \frac{1}{3} \mathbf{I} [\operatorname{tr}(\bar{\mathbf{S}}^2) - \operatorname{tr}(\bar{\mathbf{\Omega}}^2)] \quad (5.14)$$

где је тензор вртложности,

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} (\nabla \bar{\mathbf{u}} - \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) \quad (5.15)$$

С обзиром на дефиницију (5.14), WALE модел узима у обзир брзину деформисања као и вртложност. Добра карактеристика овог модела је то што SGS турбулентна вискозност према зиду тежи нули код струјања ограничених зидом, тако да се код овог модела не користи функција пригушивања као ни динамичке процедуре.

Вредност константе C_w при дефинисању модела [45] је 0.5, док је каснијим истраживањима показано да се бољи резултати добијају са вредношћу 0.325 [46].

Динамички једно-једначински модел

Да би се избегло подешавање коефицијента при дефинисању турбулентне вискозности, при различитим типовима струјања (као што је то случај са коефицијентом Смагоринског C_s у изразу (5.10)), у динамичким моделима вредности коефицијента се израчунавају. Од динамичких модела, у дисертацији је коришћен динамички једно-једначински модел [47].

Транспортна једначина SGS кинетичке енергије је:

$$\frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla k_{\text{sgs}} = -\boldsymbol{\tau}^R : \nabla \bar{\mathbf{u}} - \varepsilon + \nabla \cdot (\nu_t \nabla k_{\text{sgs}}) \quad (5.16)$$

где чланови са десне стране једначине, редоследно, представљају продукцију, ди-

сипацију и транспорт SGS кинетичке енергије.

У динамичком једно-једначинском моделу неопходно је одредити вредности коефицијената C_v и C_ε .

SGS напони се моделирају користећи концепт турбулентне вискозности, једначина (5.8), при чему је SGS турбулентна вискозност дата са,

$$\nu_t = C_v k_{\text{sgs}}^{1/2} \Delta \quad (5.17)$$

Користећи димензијску анализу, дисипација енергије ε се може написати у облику,

$$\varepsilon = C_\varepsilon \frac{k_{\text{sgs}}^{3/2}}{\Delta} \quad (5.18)$$

У моделу нема претпоставке локалне равнотеже продукције и дисипације SGS кинетичке енергије. Услед тога, модел може урачунати нелокалне ефекте (транспорт енергије са мањих на веће вртлоге).

Концепт динамичких модела заснива се на коришћењу основног SGS модела, као нпр. модел Смагоринског, са величином филтера Δ . Затим, израчуната поља се још један пут филтрирају користећи “тест” филтер веће величине $\tilde{\Delta}$ (најчешће $\tilde{\Delta} = 2\Delta$). Разлика SGS напона ових поља представља Германов идентитет [48],

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} \quad (5.19)$$

Користећи (5.19), и претпостављајући исту функционалну форму SGS напона на обе величине филтера рачуна се коефицијент C_v ,

$$\mathbf{L} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \text{tr}(\mathbf{L}) = 2 C_v \mathbf{M} \quad (5.20)$$

где је

$$\mathbf{M} = \overline{\Delta} K^{1/2} \widetilde{\overline{\mathbf{S}}} - \overline{\Delta} \widetilde{k_{\text{sgs}}} \widetilde{\overline{\mathbf{S}}}, \quad K = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{L}) + \tilde{k}_{\text{sgs}}$$

Користећи метод најмањих квадрата, решавањем (5.20) се добија:

$$C_v = \frac{1 \mathbf{L} : \mathbf{M}}{2 \mathbf{M} : \mathbf{M}} \quad (5.21)$$

Користећи аналогију са (5.19) при прорачуну дисипације енергије, а потом користећи израз (5.18), добија се коефицијент C_ε ,

$$C_\varepsilon = \nu \frac{\left(\overline{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}} - \nabla \widetilde{\mathbf{u}} : \nabla \widetilde{\mathbf{u}} \right)}{\frac{K^{3/2}}{\widetilde{\Delta}} - \frac{\widetilde{k_{\text{sgs}}^{3/2}}}{\Delta}} \quad (5.22)$$

Поглавље 6

Метод коначних запремина

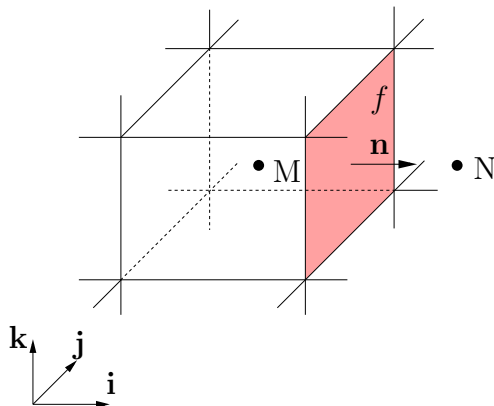
Проблеми струјања флуида најчешће се описују системом парцијалних диференцијалних једначина (ПДЈ): једначином континуитета, количине кретања и енергије, које задовољавају одговарајуће граничне услове. Егзактна решења ових једначина најчешће нису могућа изузев у случајевима једноставне геометрије (нпр. Куетово струјање и Поазејево струјање). Из тог разлога, једначине се решавају нумеричким методама: поступком дискретизације систем ПДЈ се трансформише у системе линеарних, алгебарских једначина чија решења представљају вредности одговарајућих физичких величина у дискретним тачкама прорачунског домена.

У овом поглављу се представља дискретизација методом коначних запремина. Принцип дискретизације обухвата дискретизацију домена и дискретизацију једначина [49, 5].

6.1 Дискретизација домена

При дискретизацији домена методом коначних запремина, континуални простор дели се на контролне запремине које се не преклапају (в. сл. 6.1). На тај начин се

континуални (струјни) простор испуњава коначним бројем контролних запремина (ћелија) које чине прорачунски домен - нумеричку мрежу. У овој дисертацији, свака контролна запремина у свом тежишту садржи вредност одговарајућих физичких величина флуида.



Слика 6.1: Ћелија облика квадрата при дискретизацији методом коначних запремина.

Мреже се могу поделити на три главна типа: структуриране, блок структуриране и неструктуриране мреже [50].

Структуриране мреже. Структуриране мреже се састоје од фамилија линија, са особином да чланови једне фамилије не секу линије своје фамилије, а сваку линију друге фамилије секу само једном. Позиција сваке контролне запремине једнозначно је дефинисана са три индекса, нпр. (i, j, k) , па је индексирање и проналажење суседних ћелија једноставно. Мана структурираних мреже је то што се оне могу користити само за геометријски једноставне домене. Такође, тешко је контролисати расподелу контролних запремина: да би се тачније прорачунале величине у случају великог градијента величина, потребно је повећати густину мреже у неком делу. Међутим, то повећање густине мреже у једном региону доводи до непотребног повећања густине мреже у другим деловима домена, услед чега се повећава време трајања нумеричког прорачуна.

Блок структуриране мреже. У блок структурираној мрежи, постоји подела домена на више структурираних мрежа. На тај начин, могуће је ефикасно конт-

ролисати густину мреже: на местима где су присутне велике просторне промене (градијенти) физичких величина, могуће је користити нумеричку мрежу велике просторне резолуције, док на местима где су градијенти величина мали, могуће је користити грубу мрежу. Блокови мреже могу да буду без преклапања и са преклапањем (тзв. химера мреже).

Неструктуриране мреже. Елементи (ћелије, контролне запремине) неструктуриране мреже могу имати било који геометријски облик и користећи ове мреже могуће је дискретизовати домене са комплексном геометријом. Такође, ћелије се могу концентрисати где год је потребно. У пракси, у 2Д, ћелије имају облик троугла или паралелограма, а у 3Д ћелије имају облик пирамиде или паралелопипеда. Такве мреже се могу генерисати аутоматски користећи постојеће алгоритме, првобитно развијене за методу коначних разлика. Мана ових мрежа је то што се на основу индекса ћелије, не могу извести закључци о положају суседних ћелија. Из тог разлога, локације ћелија и податке о суседним ћелијама потребно је дефинисати експлицитно. Програми који користе неструктуриране мреже су обично спорији од програма који користе структуриране мреже.

6.2 Дискретизација транспортне једначине

Диференцијални облик транспортне једначине величине ϕ је:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}}_{\text{временски извод}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \phi)}_{\text{конвективни члан}} + \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi)}_{\text{дифузиони члан}} = \underbrace{S_\phi(\phi)}_{\text{изворски члан}} \quad (6.1)$$

Једначина (6.1) је другог реда и како би се остварила добра тачност неопходно је да ред дискретизације буде већи или једнак од реда једначине која се дискретизује. Према томе, да би се добио метод дискретизације другог реда тачности, претпоставља се линеарна варијација променљиве $\phi(\mathbf{x}, t)$ око тачке M и тренутка

t ,

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_M) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) \cdot (\nabla\phi)_M \quad (6.2)$$

$$\phi(t + \Delta t) = \phi(t) + \Delta t \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^t \quad (6.3)$$

У методи коначних запремина захтева се да једначина (6.1) буде задовољена у контролној запремини V_M око тачке M у интегралном облику:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{V_M} \frac{\partial\rho\phi}{\partial t} dV + \int_{V_M} \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{u}}\phi) dV + \int_{V_M} \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) dV \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{V_M} S_\phi(\phi) dV \right] dt \quad (6.4)$$

Чланови једначине (6.4) се надаље дискретизују појединачно.

6.2.1 Дискретизација просторних чланова

При дискретизацији просторних чланова, користи се Гаусова теорема:

$$\int_{V_M} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{A_M} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dA \quad (6.5)$$

$$\int_{V_M} \nabla b dV = \oint_{A_M} b \mathbf{n} dA \quad (6.6)$$

где је \mathbf{a} векторска величина, b је скаларна величина а површ A_M ограничава запремину V_M .

Користећи да је расподела $\phi(\mathbf{x})$ око тачке M линеарна, једначина (6.2), добија се:

$$\int_{V_M} \phi(\mathbf{x}) dV = \phi_M V_M \quad (6.7)$$

С обзиром да се површ A_M састоји из неколико равних површи, као и да је расподела $\phi(\mathbf{x})$ око тачке M линеарна, једначина (6.5) се може трансформисати у

суму површинских интеграла на тим равним површима:

$$\int_{V_M} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{A_M} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dA = \sum_f \left(\int_f \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dA \right) = \sum_f \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{a}_f A_f \quad (6.8)$$

где \mathbf{a}_f представља вредност променљиве у тежишту равне површи. При сумирању, важи конвенција:

$$\sum_f \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{a}_f A_f = \sum_{\text{owner}} \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{a}_f A_f - \sum_{\text{neighbor}} \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{a}_f A_f \quad (6.9)$$

где се користи адресирање базирано на принципу власника и суседа (енгл. owner-neighbor addressing) [5, 51, 52]: ћелија која је власник неке површине има нижи индекс у листи ћелија мреже, а вектор нормале површине је увек усмерен од ћелије која је власник ка ћелији која је сусед.

Методe интерполације

При апроксимацијама интеграла неопходно је знати вредност променљиве ϕ на контролним површинама ћелија. Процена ових вредности врши се интерполацијом на основу вредности у суседним центрима ћелија. У литератури постоји велики број метода интерполације, а овде се излажу линеарна интерполација и узводна интерполација.

Линеарна интерполација

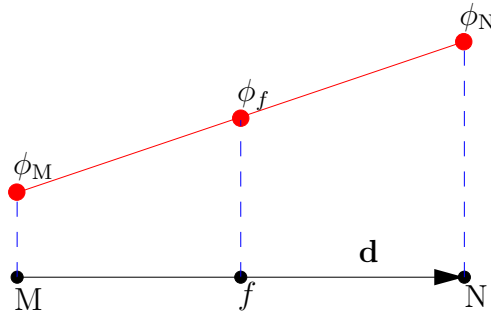
Претпостављајући линеарну варијацију променљиве ϕ између тачака М и N (в. сл. 6.2), њена вредност у тачки f је:

$$\phi_f = \phi_M f_x + (1 - f_x) \phi_N \quad (6.10)$$

где је f_x однос растојања fN и MN ,

$$f_x = \frac{fN}{MN} \quad (6.11)$$

Једначина (6.10) је другог реда тачности [50].



Слика 6.2: Интерполација вредности ϕ_f на површи f [5].

Узводна интерполација

Код узводне интерполације (енгл. upwind interpolation), у зависности од смера струјања вредност функције ϕ у тачки f , важи:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_M, & F \geq 0 \\ \phi_N, & F < 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

где F представља масени флуks кроз површ f ,

$$F = \mathbf{n}_f \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}})_f S \quad (6.13)$$

Овај метод интерполације је првог реда тачности, решења су ограничена али ова шема има нумеричку дифузију нарочито изражену када се правац струјања не поклапа са правцем простирања ћелија [50, 53]. Да би се добила тачна решења, потребно је користити веома фину мрежу при прорачунима.

Конвективни члан

Конвективни члан се дискретизује користећи једначину (6.8):

$$\int_{V_M} \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \phi) dV = \int_{A_M} \mathbf{n}_f \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \phi) dA \approx \sum_f \mathbf{n}_f \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}})_f \phi_f A_f = \sum_f F \phi_f \quad (6.14)$$

Величине $(\rho \mathbf{u})_f$ и ϕ_f рачунају се на основу вредности у центрима ћелија, користећи одговарајуће методе интерполације.

Дифузиони члан

Понављајући сличну процедуру као при дискретизацији конвективног члана, добија се:

$$\int_{V_M} \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) dV = \sum_f \mathbf{n}_f \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi)_f A_f = \sum_f (\Gamma_\phi)_f (\mathbf{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f) A_f \quad (6.15)$$

Ако је мрежа ортогонална, као што ће бити случај у овој дисертацији, важи:

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \phi)_f = \frac{\phi_N - \phi_M}{|\mathbf{d}|} \quad (6.16)$$

У случају неортогоналних мрежа, једначина (6.16) није другог реда и потребна је њена корекција [5].

Изворски члан

Пре дискретизације, изворски члан треба линеаризовати,

$$S_\phi(\phi) = S_c + S_M \phi \quad (6.17)$$

при чему S_c и S_M могу да зависе од ϕ . Користећи израз (6.7), добија се:

$$\int_{V_M} S_\phi(\phi) dV = S_c V_M + S_M V_M \phi_M \quad (6.18)$$

6.2.2 Временска дискретизација

Полазећи од (6.4), користећи (6.14), (6.15) и (6.17), добија се:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_M V_M + \sum_f F \phi_f - \sum_f (\Gamma_\phi)_f \mathbf{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f A_f \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} [S_c V_M + S_M V_M \phi_M] dt \quad (6.19)$$

За дискретизацију временског извода у овој дисертацији користи се метод диференцирања уназад (енгл. backward differencing in time). Овај метод је другог реда тачности при чему се занемарују временске промене величина на површима ћелије. Дискретизован облик временског извода $\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}$ добија се развијањем у Тејлоров ред у тренутку t око вредности $\phi(t + \Delta t)$:

$$\phi(t) = \phi(t + \Delta t) - \frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \quad (6.20)$$

Слично, развијањем у Тејлоров ред у тренутку $t - \Delta t$ око вредности $\phi(t + \Delta t)$, добија се:

$$\phi(t - \Delta t) = \phi(t + \Delta t) - 2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta t + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3) \quad (6.21)$$

Из једначина (6.20) и (6.21) добија се апроксимација другог реда временског извода у тренутку t ,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^n = \frac{\frac{3}{2} \phi^n - 2 \phi^{n-1} + \frac{1}{2} \phi^{n-2}}{\Delta t} \quad (6.22)$$

при чему је:

$$\phi^{n-2} = \phi(t - \Delta t) \quad (6.23)$$

$$\phi^{n-1} = \phi(t) \quad (6.24)$$

$$\phi^n = \phi(t + \Delta t) \quad (6.25)$$

Коначно, коришћењем (6.22), добија се облик дискретизоване транспортне једначине у којој је временски члан дискретизован методом диференцирања уназад,

$$\frac{\frac{3}{2}\phi^n - 2\phi^{n-1} + \frac{1}{2}\phi^{n-2}}{\Delta t} V_M + \sum_f F \phi_f^n - \sum_f (\Gamma_\phi)_f \mathbf{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f^n A_f = S_c V_M + S_M V_M \phi_M^n \quad (6.26)$$

6.3 Гранични услови

Услови који физичке величине морају да испуне на граничним површинама домена представљају граничне услове. Ови услови се деле на нумеричке и физичке граничне услове.

Нумерички гранични услови могу бити:

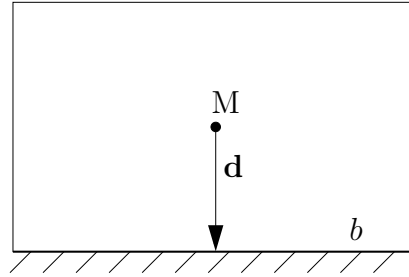
- Дириклеови или фиксни гранични услови којима је дефинисана вредност променљиве на граничној површи
- Нојманови гранични услови којима се дефинише градијент променљиве на граничној површи

Физички гранични услови представљају групу нумеричких граничних услова које променљиве морају да задовоље на одређеним површима. Ти гранични услови могу да се дефинишу при струјању флуида у улазним и излазним пресецима, на зидовима, равнима симетрије итд.

6.3.1 Нумерички гранични услови

Када се користи ортогонална нумеричка мрежа, као што је случај у овој дисерта-

цији, вектор \mathbf{d} , усмерен од тежишта ћелије до тежишта њене површи b на граници прорачунског домена, је управан на ту површ (в. сл. 6.3).



Слика 6.3: Ћелија која се налази на граници прорачунског домена.

Случај задате фиксне вредности променљиве на граници - Дириклеов гранични услов

Дириклеовим граничним условом дефинише се фиксна вредност променљиве ϕ на некој граничној површи b , $\phi = \phi_b$, што је битно при дискретизацији конвективних и дифузионих чланова на тој површи.

Конвективни члан. Према једначини (6.14), важи:

$$\int_{V_M} \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \phi) dV = \sum_f F \phi_f \quad (6.27)$$

С обзиром да је позната вредност ϕ на граничној површи b , на њој се конвективни члан редукује на $F_b \phi_b$, где је F_b флукс кроз површ b .

Дифузиони члан. Према једначини (6.15), важи:

$$\int_{V_M} \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) dV = \sum_f (\Gamma_\phi)_f \mathbf{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f A_f \quad (6.28)$$

Градијент на површи b се рачуна на основу вредности ϕ_b и величине у тежишту

ћелије:

$$\mathbf{n}_f \cdot (\nabla \phi)_b = \frac{\phi_b - \phi_M}{|\mathbf{d}|} \quad (6.29)$$

Случај задатог градијента променљиве на граници - Нојманов гранични услов

Код Нојмановог граничног услова, познат је скаларни производ јединичног вектора нормале \mathbf{n} на површ и градијента променљиве ϕ :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla \phi)_b = g_b \quad (6.30)$$

Конвективни члан. Вредност ϕ на површи b се рачуна на основу вредности из тежишта ћелије и задатог градијента,

$$\phi_b = \phi_M + \mathbf{d} \cdot (\nabla \phi)_b = \phi_M + |\mathbf{d}|g_b \quad (6.31)$$

Дифузиони члан. С обзиром на (6.15) и (6.30), дифузиони члан на граничној површи се своди на:

$$(\Gamma_\phi)_b \mathbf{n} A g_b \quad (6.32)$$

6.3.2 Физички гранични услови

Најчешћи физички гранични услови за струјање нестишљивог флуида су:

- Улазна површ. Задаје се брзинско поље, док је градијент притиска једнак нули.
- Излазна површ. Задаје се константно поље притиска, док је градијент брзине једнак нули.

-
- Непорозни зидови. Брзина флуида у контакту са зидом једнака је брзини зида. Како је проток флуида кроз зид једнака нули, градијент притиска је нула.
 - Раван симетрије. Градијент свих скаларних величина управно на ову раван једнак је нули. Компонента брзине управна на ову раван једнака је нули.
 - Периодичне површи. Ове површи се користе у случају апроксимације неограничених хомогених праваца при струјању у каналу. Пар периодичних површи развојених у простору, паралелан је у прорачунском систему и при томе све физичке величине једне површи идентичне су физичким величинама на другој површи. Из тог разлога, при овом граничном услову, нема посебних шема дискретизације.

6.4 Дискретизација филтрираних Навије-Стоксових једначина

При дискретизацији филтриране Навије-Стоксове једначине, конвективни члан и спрега притиска и брзине захтевају посебну пажњу.

6.4.1 Конвективни члан

Конвективни члан филтриране Навије-Стоксове једначине, $\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}})$ је нелинеаран и дискретизовани облик овог члана резултовао би квадратном функцијом брзине, услед чега би добијени систем алгебарских једначина био нелинеаран. Проблем је могуће решити коришћењем солвера за нелинеарне системе једначина или линеаризацијом члана. С обзиром да су солвери за нелинеарне системе сложени и захтевни у погледу прорачунских ресурса, линеаризација члана је чешћи избор.

Заменом ϕ са $\bar{\mathbf{u}}$ у једначини (6.14), добија се:

$$\begin{aligned} \int_{V_M} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) dV &= \oint_{A_M} \mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) dA = \sum_f (\mathbf{n}_f \cdot \bar{\mathbf{u}}_f) \bar{\mathbf{u}}_f A_f \\ &\approx \sum_f (\mathbf{n}_f \cdot \bar{\mathbf{u}}_f^{n-1}) \bar{\mathbf{u}}_f^n A_f = \sum_f F^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_f^n \end{aligned} \quad (6.33)$$

при чему се линеаризација члана постиже коришћењем вредности брзине (односно флукса F) из претходне итерације. Интерполацијом вредности на површима ћелије добија се,

$$\sum_f F^{n-1} \bar{\mathbf{u}}_f = a_{cM} \bar{\mathbf{u}}_M + \sum_N a_{cN} \bar{\mathbf{u}}_N \quad (6.34)$$

где су коефицијенти a_{cM} и a_{cN} експлицитне функције брзине $\bar{\mathbf{u}}^{n-1}$.

6.4.2 Једначина притиска

Из интегралног облика једначине количине кретања (6.19), користећи описану процедуру дискретизације, добија се следећи облик једначине количине кретања:

$$a_M \bar{\mathbf{u}}_M = \mathbf{H} - \nabla \bar{p} \quad (6.35)$$

Вектор \mathbf{H} се састоји од дела који укључује матрицу коефицијената помножену одговарајућим брзинама (за све суседне ћелије), дела који укључује нестационарни члан као и у општем случају, изворне чланове (у случају који се овде описује, не постоје изворски чланови):

$$\mathbf{H} = \sum_N a_N \bar{\mathbf{u}}_N + a_t \quad (6.36)$$

Када се израз (6.35) подели са a_M , добија се брзина $\bar{\mathbf{u}}_M$,

$$\bar{\mathbf{u}}_M = \frac{\mathbf{H}}{a_M} - \frac{\nabla \bar{p}}{a_M} \quad (6.37)$$

Интерполацијом брзине на површи ћелије, користећи (6.37), добија се:

$$\bar{\mathbf{u}}_f = \left(\frac{\mathbf{H}}{a_M} \right)_f - \left(\frac{\nabla \bar{p}}{a_M} \right)_f \quad (6.38)$$

Дискретизован облик једначине континуитета (5.5), је:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_f = \sum_f \mathbf{n}_f \cdot \bar{\mathbf{u}}_f A_f = 0 \quad (6.39)$$

Заменом (6.38) у (6.39), следи једначина:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{a_M} \nabla \bar{p} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{H}}{a_M} \right) = \sum_f \mathbf{n}_f \cdot \left(\frac{\mathbf{H}}{a_M} \right)_f A_f \quad (6.40)$$

Дискретизацијом градијента притиска на десној страни једначине (6.35) и дискретизацијом дивергенције са леве стране једначине (6.40), користећи правила која су коришћена при дискретизацији дифузионог члана у одељку 6.2.1, долази се до коначног облика дискретизованих Навије-Стоксових једначина за нестишљив флуид:

$$a_M \bar{\mathbf{u}}_M = \mathbf{H} - \sum_f \mathbf{n}_f \bar{p}_f A_f \quad (6.41)$$

$$\sum_f \mathbf{n}_f \cdot \left[\left(\frac{1}{a_M} \right) (\nabla \bar{p})_f A_f \right] = \sum_f \mathbf{n}_f \cdot \left(\frac{\mathbf{H}}{a_M} \right)_f A_f \quad (6.42)$$

За решавање система једначина (6.41) и (6.42) у овој дисетацији користи се PISO алгоритам.

6.5 PISO алгоритам за нестационарна струјања

PISO алгоритам за прорачун брзине и притиска при нестационарним струјањима, први пут је предложио Issa [54]. Овај алгоритам се може описати следећим

корацима:

1. Решава се једначина (6.41). С обзиром да егзактан градијент притиска није познат, при решавању те једначине користи се поље притиска из претходне итерације. На тај начин се добија апроксимација новог брзинског поља.
2. Користећи брзине добијене у претходном кораку, добија се \mathbf{H} из једначине (6.36) и формулише се једначина (6.42), из које се израчунава ново поље притиска.
3. Поље брзине добијено у кораку (1) треба кориговати услед нове расподеле притиска. Ова корекција се врши користећи једначину (6.37).

Корекција брзине, према једначини (6.37), састоји се од корекције услед промене притиска (члан $-\frac{\nabla p}{a_M}$) и корекције услед утицаја брзина у суседним ћелијама (члан $\frac{\mathbf{H}}{a_M}$). У овом алгоритму, друга наведена корекција се занемарује и сматра се да је укупна грешка у брзини последица промене поља притиска. Како то није тачно, потребно је кориговати члан \mathbf{H} , формулисати нову једначину притиска и понављати процедуру све док се не постигне одговарајући степен тачности [5, 55].

Поглавље 7

Стохастичко моделирање 3Д одбијања честице од изотропног храпавог зида

7.1 Стварање и особине виртуелног храпавог зида

7.1.1 Опис начина генерисања Гаусове храпаве површине

Виртуелни 3Д храпави зид (в. сл. 7.1) се ствара према процедури Garcia and Stoll [56], што је имплементирано и доступно на [57]. У овој процедури, Гаусова површина, која се у овој дисертацији користи као изотропни или анизотропни храпав зид, добија се дефинисањем RMS висине храпавости h (у правцу y осе) и корелационих дужинских размера у x и z правцу, c_{Lx} и c_{Lz} , редоследно. У случају изотропне површине, корелационе дужинске размере x и z правцу су идентичне, $c_{Lx}=c_{Lz}=c_L$.

Први корак при стварању ове храпаве површине је генерација некорелисаних Гаусових случајних бројева $y_n(x,z)$ са нултом просечном вредношћу и стандардном

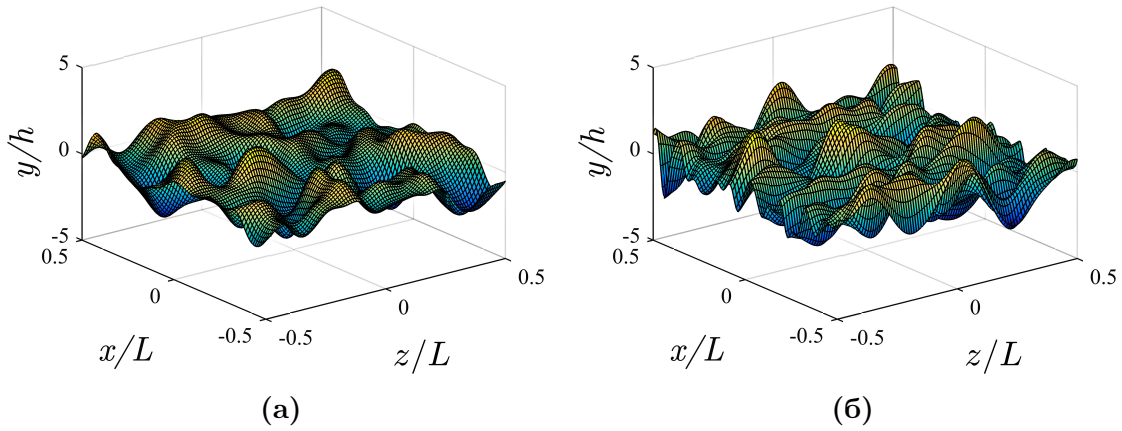
девијацијом h на мрежи у $x - z$ равни. Корелисана храпава површина се добија конволуцијом са просторним филтером,

$$y(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x', z - z') y_u(x', z') dx' dz' \quad (7.1)$$

где

$$f(x, z) = \frac{2}{\sqrt{\pi c_{L,x} c_{L,z}}} \exp\left(-\frac{2x^2}{c_{L,x}^2} - \frac{2z^2}{c_{L,z}^2}\right) \quad (7.2)$$

представља Гаусов филтер за генерацију површине. Једначина (7.1) се израчунава применом брзе Фуријеове трансформације (FFT).

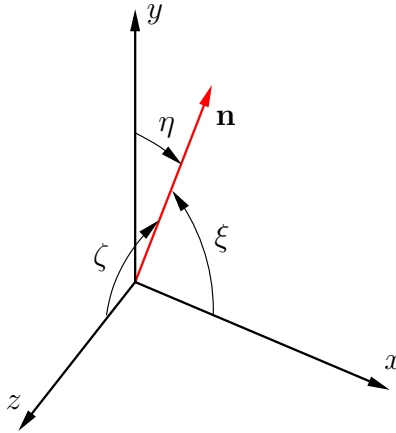


Слика 7.1: (а) Изотропни храпав зид за однос RMS висине неравнина и карактеристичне корелационе дужинске размере: $h/c_L = 0.063$ ($c_{L,x} = c_{L,z} = c_L$) (б) Анизотропни храпав зид за однос RMS висине неравнина и корелационе дужинске размере у x правцу: $h/c_{L,x} = 0.031$ и однос корелационих дужинских размера у x и z правцу: $c_{L,z}/c_{L,x} = 3$.

У детерминистичким симулацијама, место судара честице и зида се налази као пресек трајекторије центра честице и елементарне троугаоне ћелије виртуелног храпавог зида. Јединични вектори се онда могу формирати дуж две стране те ћелије у $y-x$ и $y-z$ равнима, и њихов векторски производ даје вектор нормале који је усмерен према току флуида.

7.1.2 Особине нормалног вектора изотропног виртуелног храпавог зида

Нека су $(\xi, \eta, \zeta) \in [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$ углови између јединичног вектора нормале \mathbf{n} и јединичних вектора дуж x , y и z осе, редоследно, као што је приказано на слици 7.2.



Слика 7.2: Углови које формира јединични вектор нормале \mathbf{n} виртуелног зида са координатним осама.

Пројекције јединичног виртуелног вектора нормале \mathbf{n} су онда дефинисане изразима,

$$n_x = \cos(\xi), \quad n_y = \cos(\eta), \quad n_z = \cos(\zeta), \quad (\xi, \eta, \zeta) \in [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi] \quad (7.3)$$

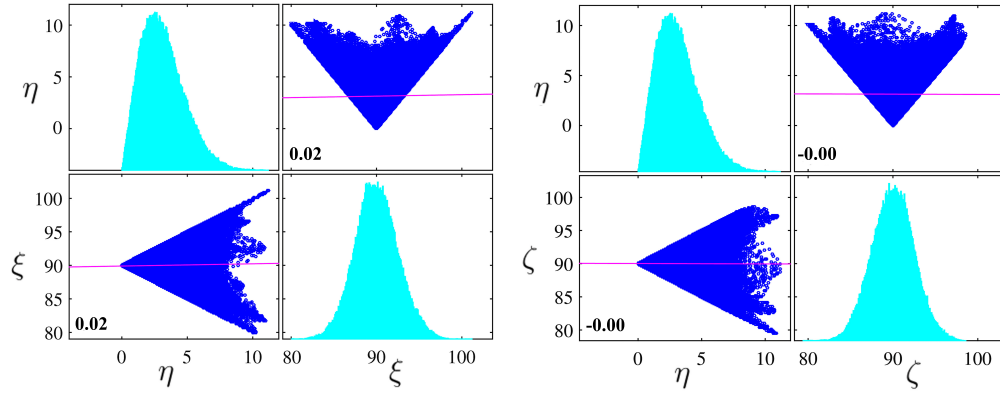
тако да се он може представити као,

$$\mathbf{n} = \cos(\xi) \mathbf{i} + \cos(\eta) \mathbf{j} + \cos(\zeta) \mathbf{k} \quad (7.4)$$

где су \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} ортогонални јединични вектори у правцима x , y и z осе, редоследно.

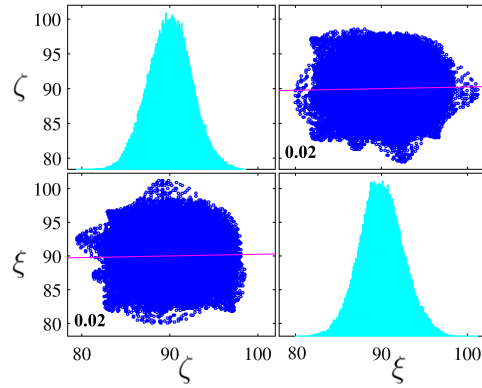
Корелациони дијаграми углова виртуелног вектора нормале (η, ξ) , (η, ζ) и (ζ, ξ) су приказани на слици 7.3, при чему су углови ξ , η и ζ рачунати у свакој ћелији виртуелног зида. Одговарајући дијаграми показују да углови ξ и ζ нису у корелацији

и да ови углови имају нормалне расподеле са просечним вредностима $\bar{\xi} = \bar{\zeta} = \pi/2$.



(а) Корелациони дијаграми $\eta - \xi$

(б) Корелациони дијаграми $\eta - \zeta$



(в) Корелациони дијаграми $\zeta - \xi$

Слика 7.3: Корелациони дијаграми углова ξ , η и ζ , вектора нормале \mathbf{n} виртуелног храпавог зида. Болдовани бројеви представљају корелационе коефицијенте између одговарајућих углова. Виртуелни зид за које су нацртани дијаграми на слици дефинисан је односом RMS висине неравнина и корелационе дужинске размере: $h/c_L = 0.031$ и бројем чворова мреже у x и z правцу $N_x = N_z = 500$. Димензија домена је много већа од корелационе дужинске размере c_L . Углови су изражени у степенима.

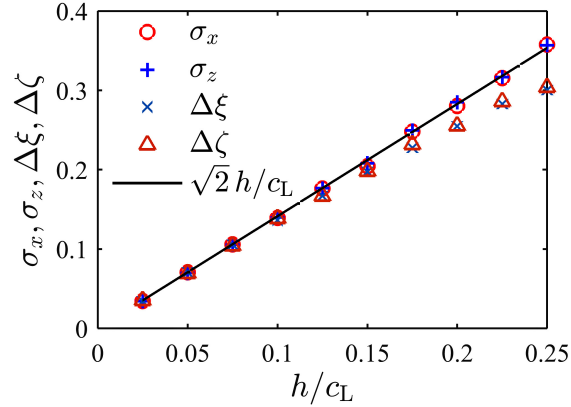
Према Tsang et al. [58], за једнодимензијски профил храпавости где углови неравнина имају Гаусову расподелу важи,

$$\sigma = \sqrt{2} \frac{h}{c_L} \tag{7.5}$$

где σ представља RMS нагиба храпавости.

На слици 7.4, вредност σ , која се добија из (7.5), пореди се са RMS вредношћу

нагиба виртуелног зида дуж x и z праваца, где су ови нагиби $s_x = -n_x/n_y$ и $s_z = -n_z/n_y$, редоследно, израчунати у свакој троугаоној ћелији, а пројекције вектора нормале су дефинисане са (7.3). Са слике се може видети да је поклапање веома добро за све израчунате вредности.



Слика 7.4: Зависност RMS нагиба изотропног виртуелног зида у x и z правцима, σ_x и σ_z , редоследно, и стандардних девијација углова вектора нормале виртуелног зида $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, од односа RMS висине храпавости h и корелационе дужинске размере c_L виртуелног храпавог зида. Испитивани виртуелни зидови имају $N_x = N_z = 500$ чворова у x и z правцима. Дужина домена је много већа од корелационе дужинске размере c_L .

Угао η може се директно израчунати преко углова ξ и ζ :

$$\eta = \arcsin\left(\sqrt{\cos^2(\xi) + \cos^2(\zeta)}\right), \quad \eta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (7.6)$$

Како су углови ξ , η и ζ повезани једначином (7.6), они не представљају три независна процеса.

7.1.3 Статистичко моделирање вектора нормале виртуелних зидова у случају мале храпавости

Нека су углови ξ и ζ вектора нормале виртуелног зида независне случајне променљиве, што је потврђено у (ζ, ξ) корелационим дијаграмима приказаним на слици 7.3. Здружена густина расподеле $P_{\xi\zeta}(\theta, \varphi)$ углова ξ и ζ се може написати у

облику,

$$P_{\xi\zeta}(\theta, \varphi) = P_{\xi}(\theta) P_{\zeta}(\varphi) \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi]^2 \quad (7.7)$$

За изотропну храпавост важе једнаке густине расподеле углова ξ и ζ ,

$$P_{\xi}(\theta) = P_{\zeta}(\theta), \quad \theta \in [0, \pi] \quad (7.8)$$

са просечним вредностима $\bar{\xi} = \bar{\zeta} = \pi/2$ и стандардним девијацијама $\Delta\xi = \Delta\zeta$ углова ξ и ζ , редоследно. Углови ξ и ζ могу се написати у следећем облику:

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \xi', \quad \zeta = \frac{\pi}{2} + \zeta' \quad (7.9)$$

Како се проучава случај мале храпавости, то значи да ефективне вредности углова ξ и ζ вектора нормале задовољавају релације:

$$|\xi'| \ll \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad |\zeta'| \ll \frac{\pi}{2} \quad (7.10)$$

односно, одговарајуће стандардне девијације ових углова задовољавају,

$$\Delta\xi \ll \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \Delta\zeta \ll \frac{\pi}{2} \quad (7.11)$$

За случај мале храпавости, (7.5) се своди на,

$$\Delta\xi = \Delta\zeta = \sqrt{2} \frac{h}{c_L} \quad (7.12)$$

с обзиром да је $s_x \approx \xi'$ и $s_z \approx \zeta'$. Са слике 7.4 се може видети да апроксимација мале храпавости (7.12) важи до приближно $\Delta\xi = \Delta\zeta = 0.13 \text{ rad}$ (7.5°).

7.1.4 Моделовање расподеле угла η и валидација детерминистичком симулацијом

Из једначина (7.6), (7.9) и (7.10), за случај мале храпавости, угао η се може написати у следећем облику:

$$\eta = \sqrt{\xi'^2 + \zeta'^2} \quad (7.13)$$

Користећи (7.13), маргинална густина расподеле $P_\eta(\theta)$ угла η се добија интеграцијом густине расподеле $P_{\xi\zeta}$ на кругу радијуса η и за изотропни храпави зид важи:

$$P_\eta(\theta) = \frac{\theta}{\Delta\xi^2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\Delta\xi^2}\right) \quad (7.14)$$

где је, по дефиницији,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\Delta\xi^2} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\Delta\xi^2}\right) d\theta = 1 \quad (7.15)$$

Средња вредност и варијанса густине расподеле угла η , дефинисане са (7.14) су:

$$\bar{\eta} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Delta\xi \quad (7.16)$$

$$\Delta\eta^2 = \left[2 - \frac{\pi}{2}\right] \Delta\xi^2 \quad (7.17)$$

У табели 7.1, просечне вредности и стандардне девијације угла η које се добијају из статистичког модела (7.16) и (7.17), пореде се са углом η генерисане виртуелне површине, за различите односе RMS висине неравнина h и корелационе дужинске размере c_L . Може се видети да је поклапање поређених величина веома добро. Стандардне девијације $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ које се добијају из нумеричких симулација су скоро идентичне као што је и очекивано за изотропни храпав зид.

Табела 7.1: Статистичке карактеристике угла вектора нормале виртуелног зида (у степенима). Испитани виртуални храпави зидови имају однос RMS висине неравнина и корелационе дужинске размере: h/c_L . Просечна вредност угла η је $\bar{\eta}$ а стандардне девијације угла ξ , η и ζ су $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ и $\Delta\zeta$ редоследно; NS означава нумеричку симулацију а SM означава статистички модел, (7.16) и (7.17).

h/c_L	$\Delta\xi_{NS}$	$\Delta\zeta_{NS}$	$\frac{180\sqrt{2}}{\pi} h/c_L$	$\bar{\eta}_{NS}$	$\Delta\eta_{NS}$	$\bar{\eta}_{SM}$	$\Delta\eta_{SM}$
0.031	2.42	2.45	2.51	3.05	1.60	3.03	1.58
0.037	2.98	3.02	3.00	3.75	1.99	3.73	1.95
0.044	3.54	3.60	3.56	4.49	2.33	4.44	2.32
0.050	3.97	4.00	4.05	5.03	2.58	4.97	2.60
0.056	4.55	4.53	4.54	5.72	2.96	5.70	2.98
0.063	5.08	5.05	5.10	6.39	3.28	6.36	3.33

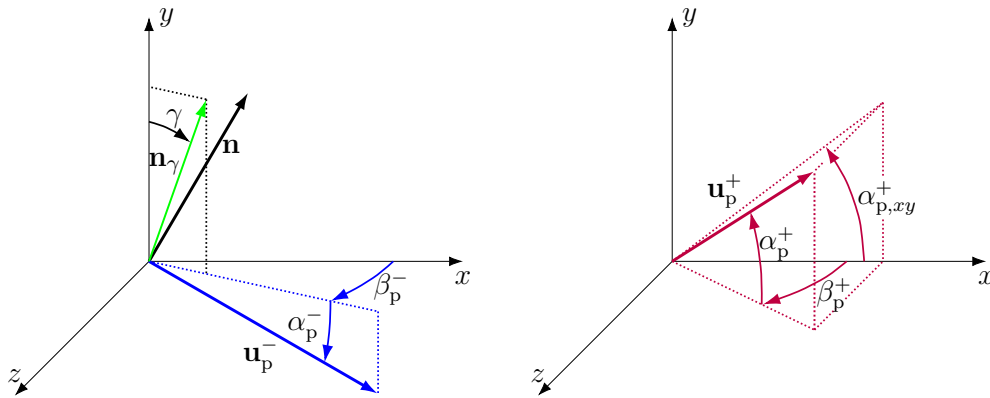
7.2 Нумеричке симулације 3Д еластичног судара честице са храпавим зидом и статистичка анализа

7.2.1 Опис нумеричке симулације

Нумеричка симулација је реализована на следећи начин. Изотропни виртуелни зид са RMS висином неравнина h и корелационом дужинском размером c_L се генерише на начин као што је то описано у одељку 7.1.1. Стандардне девијације угла вектора нормале овог зида, $\Delta\xi = \Delta\zeta$, дате су једначином (7.12). У овом одељку се испитују карактеристике зидова са стандардним девијацијама вектора нормале: $\Delta\xi = \Delta\zeta = 2.5^\circ$ и $\Delta\xi = \Delta\zeta = 5^\circ$.

Почетне x и z координате центра честице се узоркују из униформне расподеле, а почетна y позиција је мало већа од највеће неравнине у прорачунском домену. Затим се проналази тачка удара честице и рачуна се јединични вектор нормале \mathbf{n} у тој тачки. Пројекције вектора долазне брзине \mathbf{u}_p^- се рачунају користећи матрице трансформације у локалном координатном систему (x^L, y^L, z^L) , где је оса y^L дуж

вектора \mathbf{n} (карактеристике честица које прилазе зиду су означене са $^-$ а карактеристике честица које се одбијају од зида су означене са $^+$, као што је приказано на слици 7.5). Рачунају се еластични судари честица са зидом ($u_p^{L+} = u_p^{L-}$, $v_p^{L+} = -v_p^{L-}$, $w_p^{L+} = w_p^{L-}$), а потом се добијене компоненте брзине трансформишу у координатни систем (x, y, z) . После одбијања од зид, честица се прати и њени поновни судари са зидом се рачунају, уколико ти судари постоје. Честица се прати све док не прође највишу неравнину у домену.

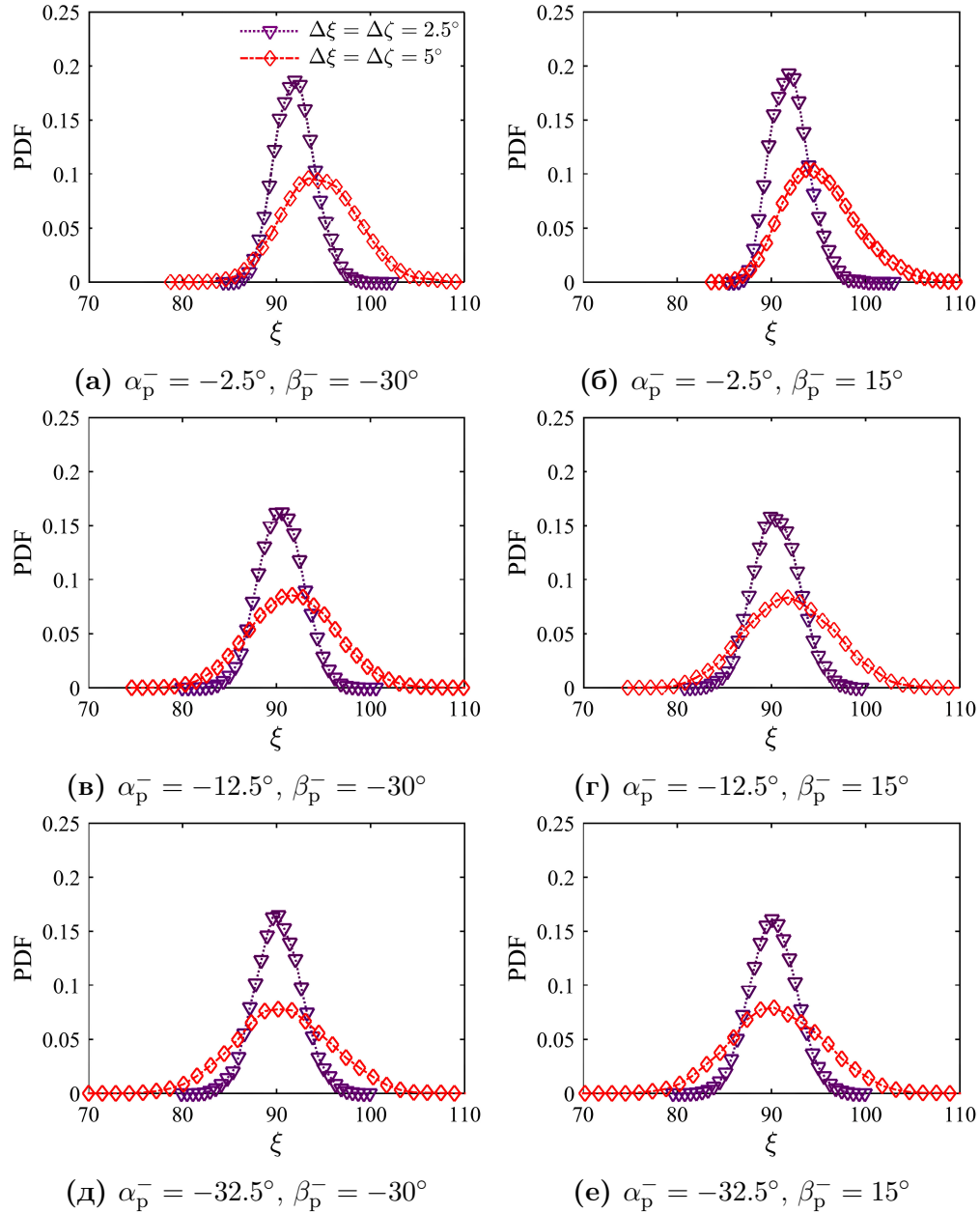


Слика 7.5: Карактеристични углови долазне брзине \mathbf{u}_p^- честице и карактеристични углови брзине \mathbf{u}_p^+ честице после одбијања од зида. Вектор нормале \mathbf{n} виртуелног зида и јединични вектор \mathbf{n}_γ су дефинисани у (7.4) и (7.21), редоследно, а угао γ задовољава (7.23).

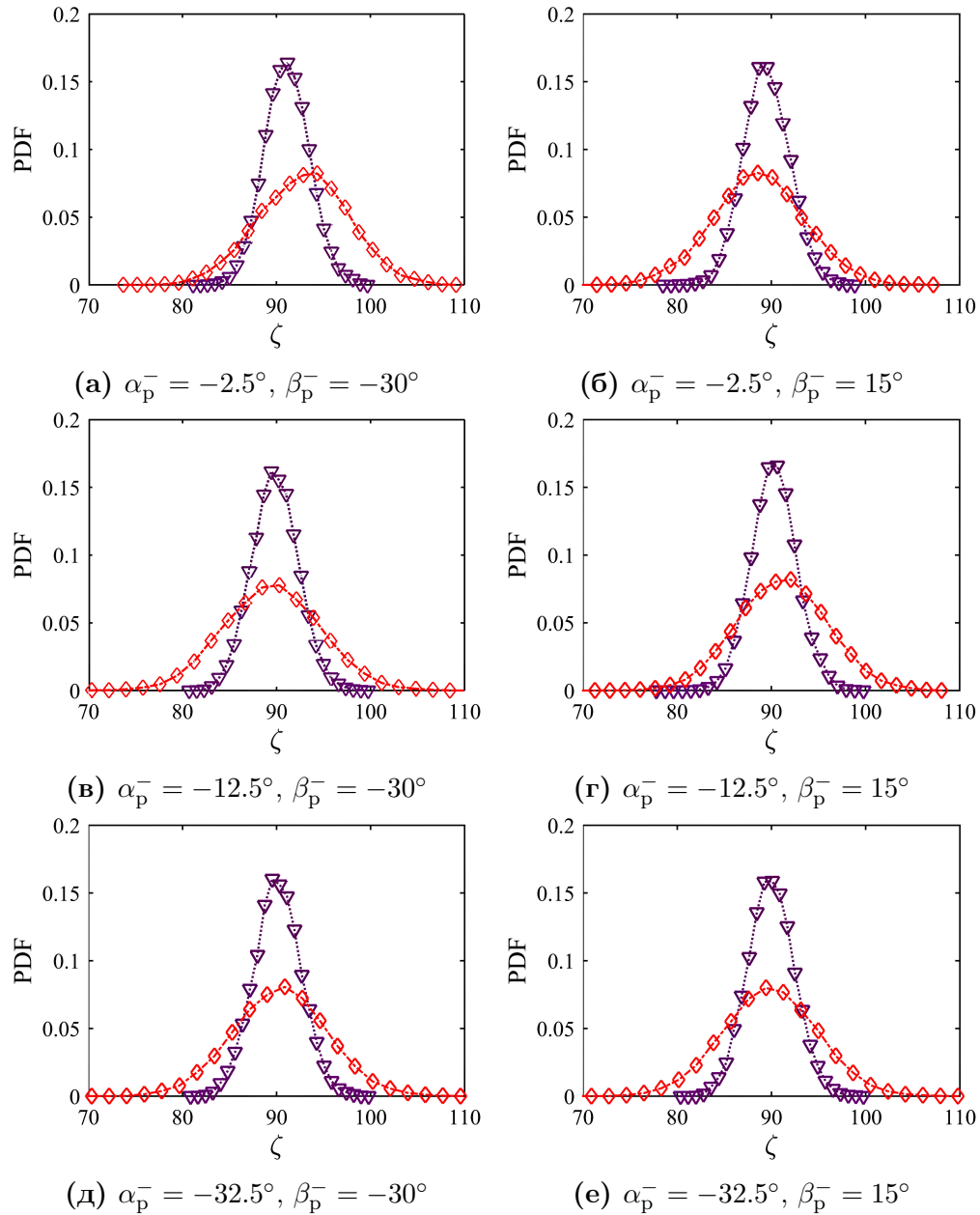
7.2.2 Статистичка анализа 3Д одбијања честице од изотропног храпавог зида

Густине расподеле првих углова вектора нормале ξ и ζ које виде честице које прилазе виртуелном зиду, при угловима α_p^- и β_p^- , у случају различитих виртуелних зидова чије су стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta$, приказане су на сликама 7.6 и 7.7, редоследно. Са ових слика се може видети да при великим угловима α_p^- ($|\alpha_p^-| \gg \Delta\xi$ и $\Delta\zeta$) честица које прилазе зиду, расподела угла ξ и ζ је нормална са просечном вредношћу $\pi/2$ и стандардном девијацијом израчунатој према (7.12), при првом судару честице са зидом. Међутим, када угао $|\alpha_p^-|$ честице

која прилази зиду опада, густине расподеле ових углова постају асиметричне, а просечне вредности ових расподела се мењају. Овакво понашање је последица тзв. ефекта сенке [2]. Утицај ефекта сенке на ове расподеле је већи у случају пораста стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta$ са 2.5° на 5° .



Слика 7.6: Густине расподеле угла ξ при првом судару честице са зидом, израчунате из детерминистичке симулације за изотропне зидове окарактерисане стандардним девијацијама углова вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta$, за различите вредности углова α_p^- и β_p^- .



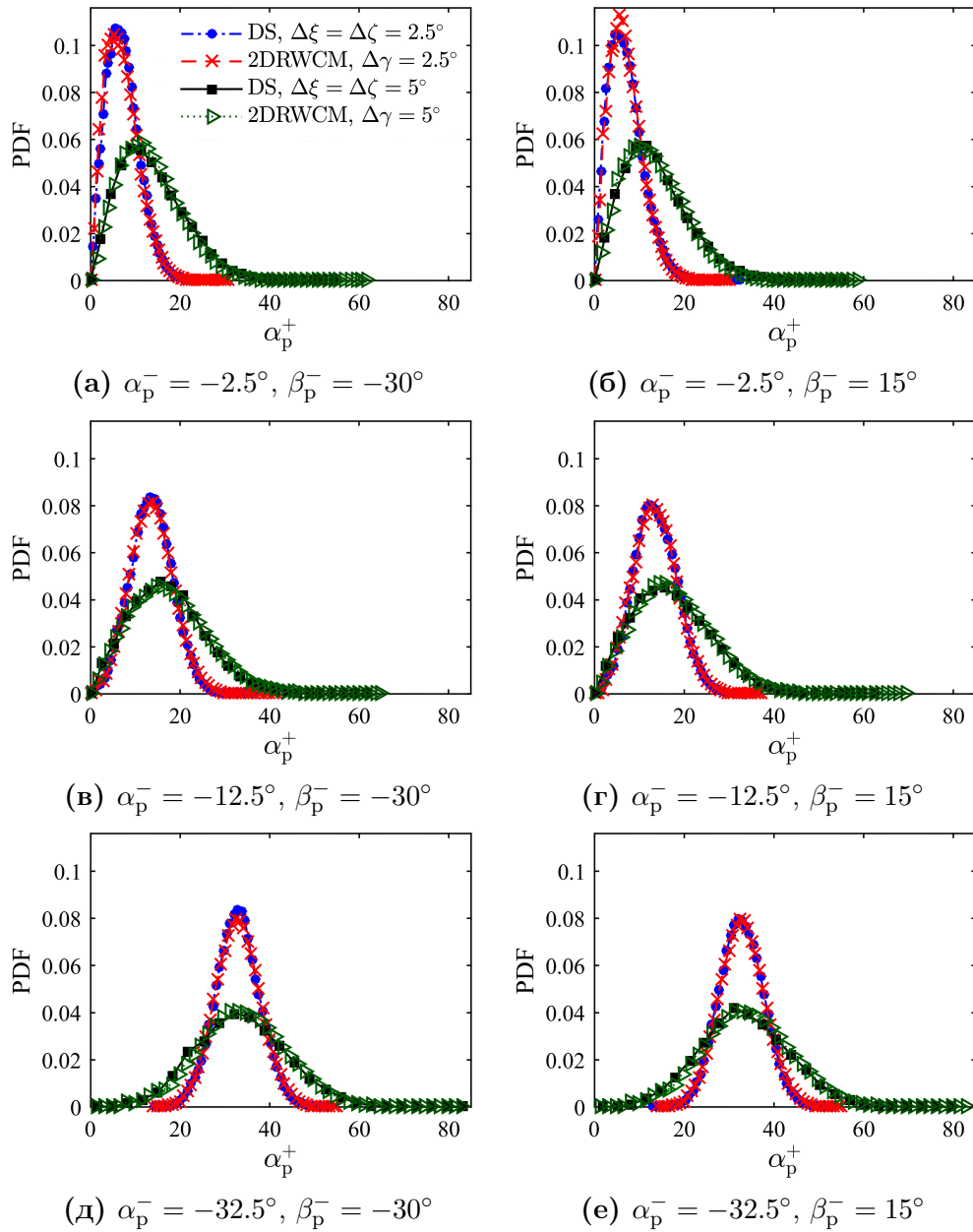
Слика 7.7: Густине расподеле угла ζ при првом судару честице са зидом, израчунате из детерминистичке симулације за изотропне зидове окарактерисане стандардним девијацијама угла вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta$, за различите вредности угла α_p^- и β_p^- . Легенда је иста као на слици 7.6.

На слици 7.8 приказане су густине расподеле угла α_p^+ добијене из детерминистичких симулација за различите вредности угла α_p^- и β_p^- . При великим угловима α_p^- ($|\alpha_p^-| \gg \Delta\xi$ и $\Delta\zeta$), расподела угла α_p^+ је приближно нормална са

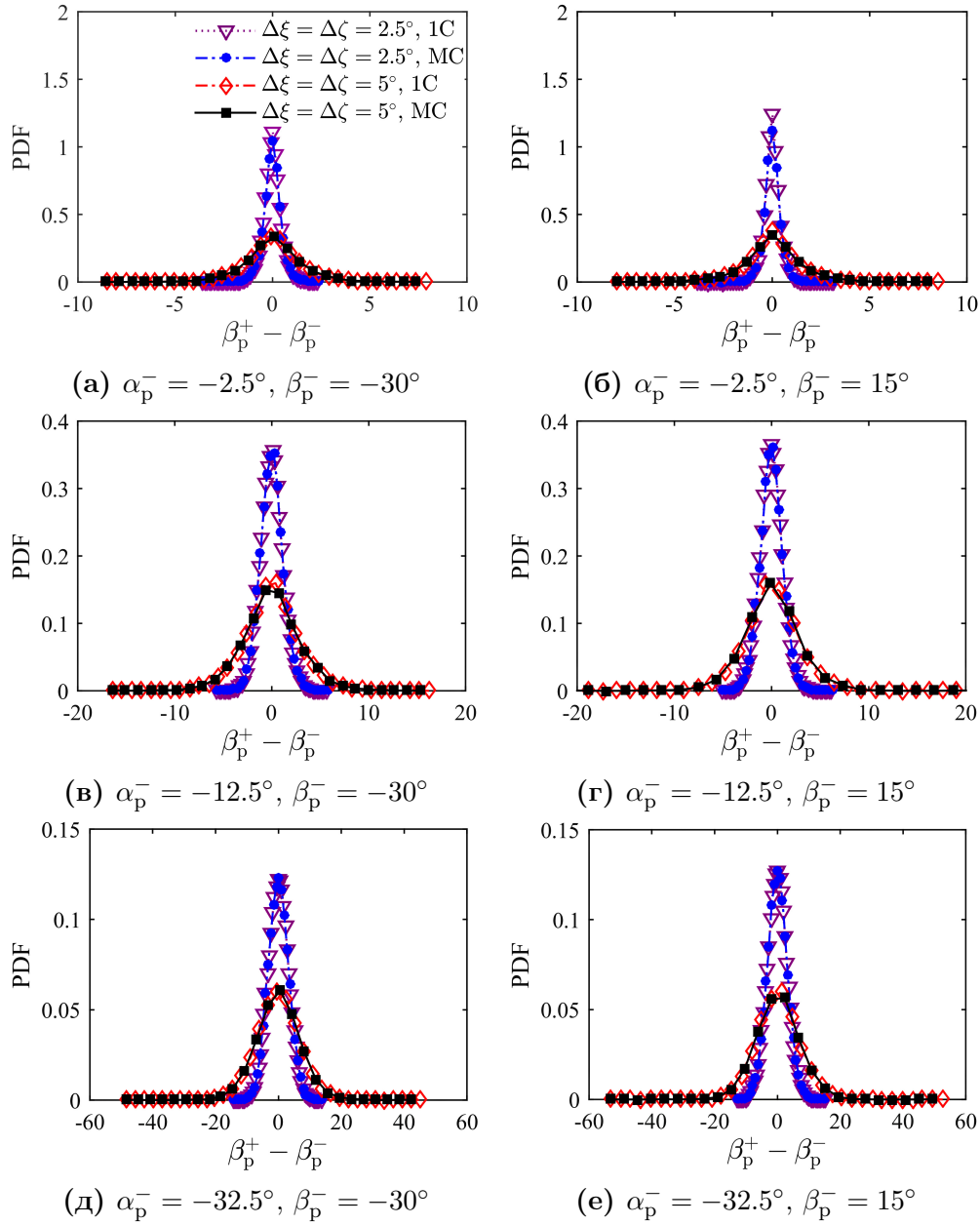
просечном вредношћу једнакој $|\alpha_p^-|$ и стандардном девијацијом приближно једнакој $\Delta\xi = \Delta\zeta$. Када угао $|\alpha_p^-|$ опада, запажа се велико померање густине расподеле према малим вредностима и та расподела више није Гаусова. Понашање је у сагласности са 2Д ефектом сенке који је проучаван у Sommerfeld and Huber [2].

Густине расподеле угла α_p^+ добијене из детерминистичких симулација се затим пореде са резултатима 2Д модела који обухвата вишеструке сударе честице и зида Kopan et al. [6]. Слагање између ове две расподеле је веома добро, што сугерише да 2Д модел [6] може бити примењен за рачунање последњег угла α_p^+ , у случају 3Д одбијања честице од зида.

Међутим, 2Д приступ [6] не може да предвиди трансверзалну девијацију угла $\beta_p^+ - \beta_p^-$. Густине расподеле овог угла су приказане на слици 7.9, за случај првог и последњег одбијања честице од зид, при различитим угловима α_p^- и β_p^- и два зида различите храпавости. Ове густине расподеле се слажу веома добро за случај првог и последњег одбијања честице од зид, што сугерише да вишеструки судари честице и зида не утичу на расподелу трансверзалне девијације угла. Може се видети да је ова расподела Гаусова са стандардном девијацијом која расте са повећањем угла $|\alpha_p^-|$. Такође се запажа да та стандардна девијација расте и са повећањем стандардне девијације угла вектора нормале, $\Delta\xi = \Delta\zeta$. Густине расподеле трансверзалне девијације угла $\beta_p^+ - \beta_p^-$ су независне од угла β_p^- , што је очекивано с обзиром да је површина изотропна.



Слика 7.8: Густина расподеле (PDF) угла α_p^+ честице која се враћа у струјање, при различитим долазним угловима честице α_p^- и β_p^- за изотропне површине које су дефинисане стандардном девијацијом углова вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta$. DS означава детерминистичку симулацију а 2DRWCM означава 2Д модел [6] који се примењује у долазној равни честице за $\Delta\gamma = \Delta\xi = \Delta\zeta$.



Слика 7.9: Густина расподеле (PDF) трансверзалне девијације угла $\beta_p^+ - \beta_p^-$ израчуната из детерминистичке симулације за различите вредности углова α_p^- и β_p^- за зидове са стандардном девијацијом угла вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta$. 1C означава расподелу израчунату са првим углом β_p^+ одбијања честице, а MC представља расподелу израчунату са последњим углом одбијања β_p^+ .

7.3 Статистичко моделирање 3Д судара честице и изотропног храпавог зида

7.3.1 Моделирање првог вектора нормале изотропног виртуелног зида које честице виде при великим угловима

Као што је приказано на сликама 7.6 и 7.7, при великим угловима α_p^- ($|\alpha_p^-| \gg \Delta\xi$ и $\Delta\zeta$) и малој храпавости (7.11), први углови ξ и ζ , које честице виде када прилазе зиду, имају Гаусове расподеле са нултом просечном вредношћу и стандардним девијацијама $\Delta\xi = \Delta\zeta$.

У овом одељку статистичко моделирање је извршено за велике углове $|\alpha_p^-|$ честица, тако да се ефекат сенке на густине расподеле угла вектора нормале може занемарити.

Према слици 7.5, брзина \mathbf{u}_p^- , се може написати у облику:

$$\mathbf{u}_p^- = |\mathbf{u}_p^-| \cos(\alpha_p^-) \mathbf{t}_p^- + |\mathbf{u}_p^-| \sin(\alpha_p^-) \mathbf{j}, \quad \alpha_p^- \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \quad (7.18)$$

где је \mathbf{t}_p^- јединични вектор колинеаран са пројекцијом долазне брзине \mathbf{u}_p^- на хоризонталну раван,

$$\mathbf{t}_p^- = \cos(\beta_p^-) \mathbf{i} - \sin(\beta_p^-) \mathbf{k}, \quad \beta_p^- \in [-\pi, \pi] \quad (7.19)$$

Може се приметити да за сваки јединични вектор \mathbf{n} који види честица брзине \mathbf{u}_p^- , мора да важи,

$$\mathbf{u}_p^- \cdot \mathbf{n} < 0 \quad (7.20)$$

Нека је јединични вектор \mathbf{n}_γ , приказан на слици 7.5, дефинисан у долазној

равни честице преко угла који формира са y -осом,

$$\mathbf{n}_\gamma = -\sin(\gamma) \mathbf{t}_p^- + \cos(\gamma) \mathbf{j}, \quad \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (7.21)$$

тако да важи,

$$\mathbf{u}_p^- \cdot \mathbf{n}_\gamma = \mathbf{u}_p^- \cdot \mathbf{n} \quad (7.22)$$

Користећи (7.18) и (7.21), (7.22) може се написати,

$$|\mathbf{u}_p^-| \sin(\alpha_p^- - \gamma) = \mathbf{u}_p^- \cdot \mathbf{n} \quad (7.23)$$

што је еквивалентно следећој скаларној једначини,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_p^- - \gamma) &= \cos(\beta_p^-) \cos(\alpha_p^-) \cos(\xi) + \sin(\alpha_p^-) \cos(\eta) \\ &\quad - \sin(\beta_p^-) \cos(\alpha_p^-) \cos(\zeta) \end{aligned} \quad (7.24)$$

Једначина (7.24) има увек јединствено решење за $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$. За случај мале хрпавости, (7.24) доводи до апроксимације првог реда за угао γ ,

$$\gamma = \cos(\beta_p^-) \xi' - \sin(\beta_p^-) \zeta' \quad (7.25)$$

За велике углове $|\alpha_p^-|$ и малу хрпавост, с обзиром да су углови ξ' и ζ' независни случајни процеси са нултом просечном вредношћу $\bar{\xi}' = \bar{\zeta}' = 0$ и стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, угао γ је случајан процес са нултом просечном вредношћу $\bar{\gamma} = 0$ и варијансом $\Delta\gamma^2$ као што следи:

$$\Delta\gamma^2 = \cos^2(\beta_p^-) \Delta\xi^2 + \sin^2(\beta_p^-) \Delta\zeta^2 \quad (7.26)$$

Ако су углови ξ' и ζ' Гаусови процеси, густина расподеле $P_\gamma(\theta)$ угла γ је Гаусова:

$$P_\gamma(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\gamma^2}} \exp\left(\frac{-\theta^2}{2\Delta\gamma^2}\right), \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (7.27)$$

На слици 7.10, расподела првог угла γ коју честице виде када прилазе зиду, израчуната из детерминистичке симулације, пореди се са расподелом углова нагиба виртуелног зида добијеног из 2Д ефективне расподеле Sommerfeld and Huber [2], израчунатој са стандардном девијацијом угла храпавости $\Delta\gamma$ виртуелног зида једнакој стандардној девијацији вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta$. Слагање ових дистрибуција је одлично за било који угао α_p^- . За велике углове $|\alpha_p^-|$, расподела угла γ је приближно Гаусова са $\Delta\gamma = \Delta\xi$, што се слаже са (7.27). При ниским угловима $|\alpha_p^-|$, услед ефекта сенке, густина расподеле угла γ помера се у десно. Налази се да је густина расподеле угла γ независна од трансверзалног угла β_p^- .

Нека је угао γ^* дефинисан тако да важи,

$$\gamma^* = \sin(\beta_p^-) \xi' + \cos(\beta_p^-) \zeta' \quad (7.28)$$

Угао γ^* је онда случајан процес са нултом просечном вредношћу $\overline{\gamma^*} = 0$ и варијансом $\Delta\gamma^{*2}$ израженом као:

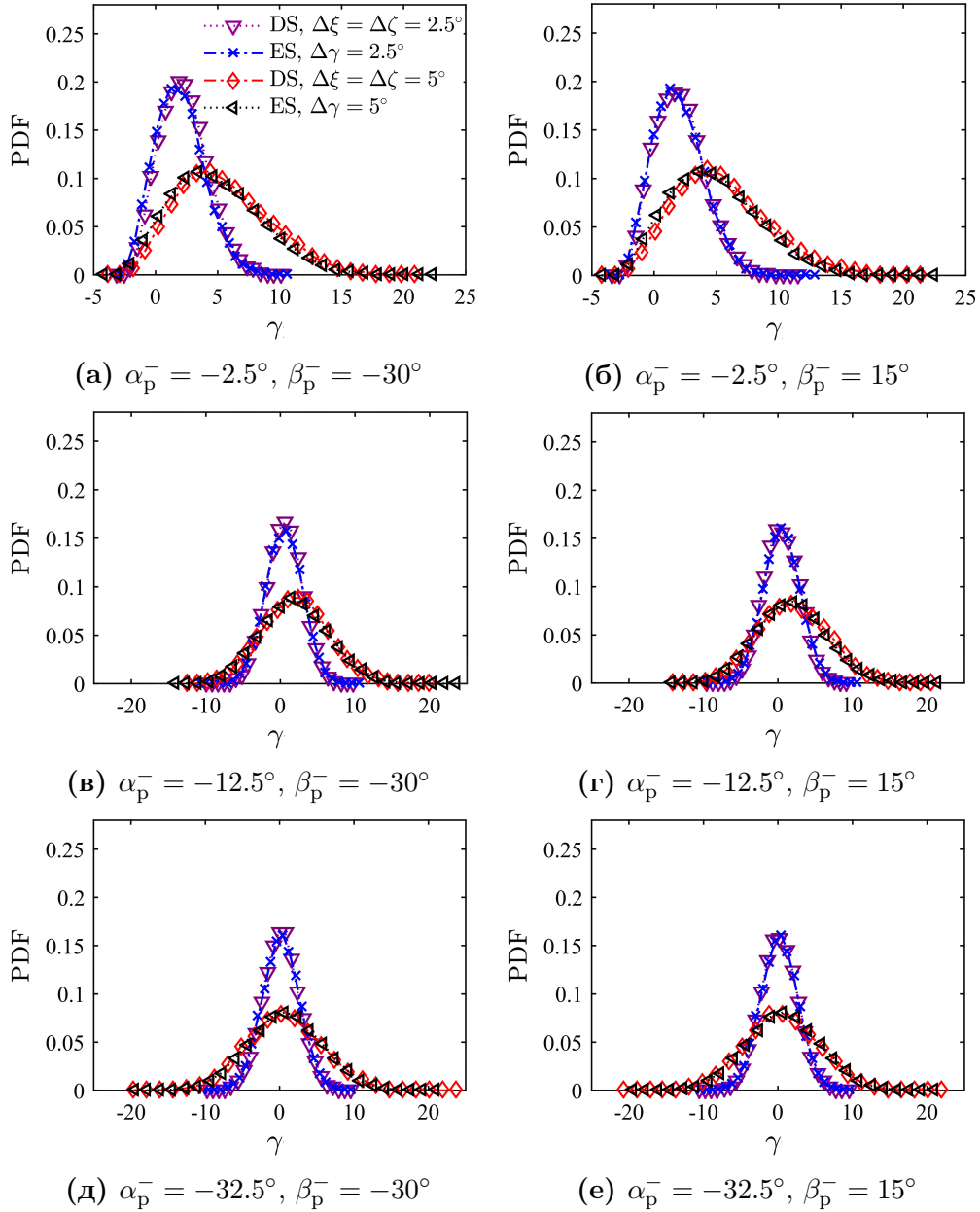
$$\Delta\gamma^{*2} = \sin^2(\beta_p^-) \Delta\xi^2 + \cos^2(\beta_p^-) \Delta\zeta^2 \quad (7.29)$$

Ако су углови ξ' и ζ' Гаусови процеси, густина расподеле $P_{\gamma^*}(\theta)$ угла γ^* је онда Гаусова:

$$P_{\gamma^*}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\gamma^{*2}}} \exp\left(\frac{-\theta^2}{2\Delta\gamma^{*2}}\right), \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (7.30)$$

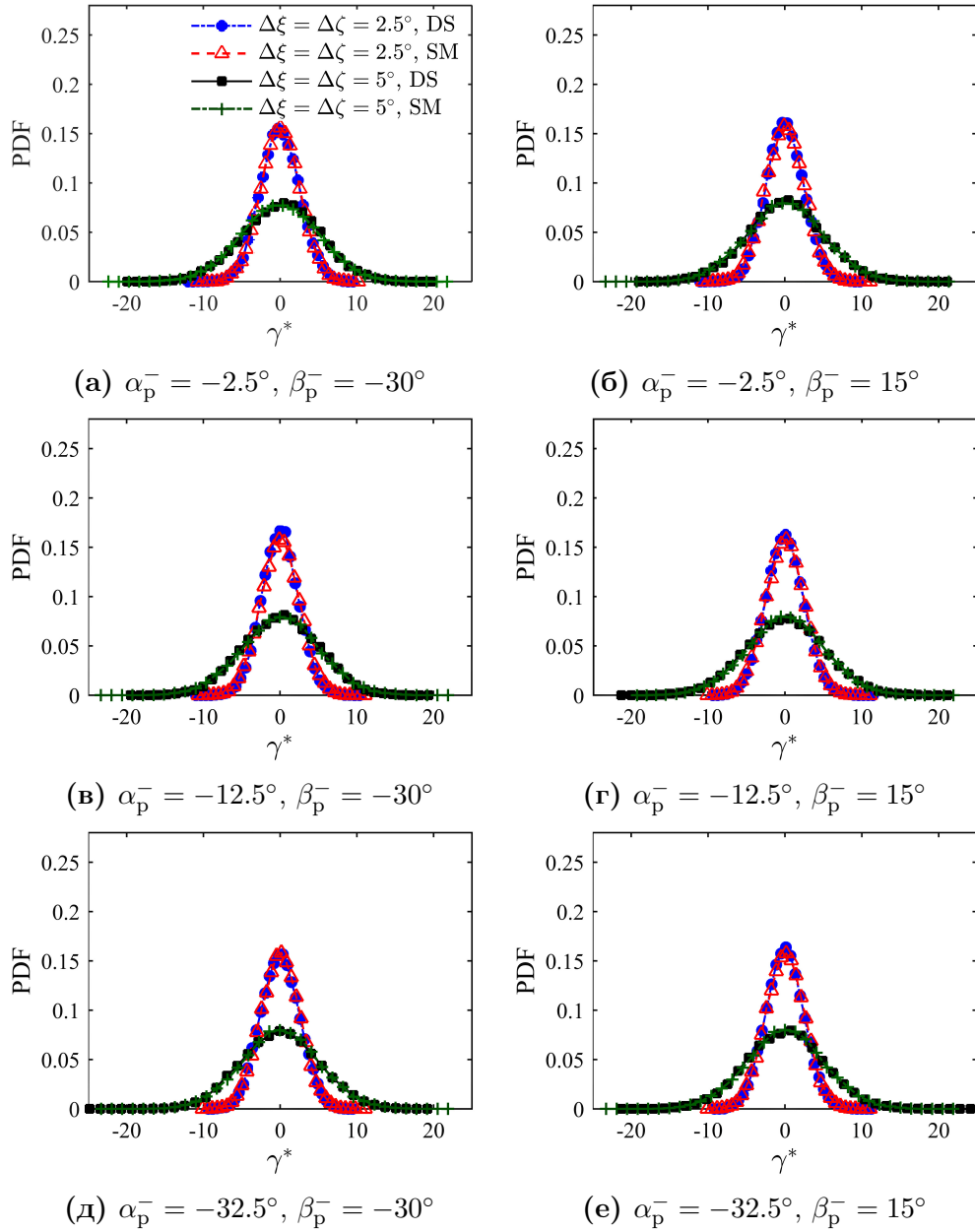
На слици 7.11 приказане су густине расподеле угла γ^* израчунате из детерминистичке симулације користећи (7.28) и модел Гаусове расподеле дате са (7.30), за различите вредности углова α_p^- и β_p^- . Слагање ових расподела је одлично.

Иако угао γ^* зависи од углова ξ и ζ , као што се види у (7.28), где оба угла ξ и ζ зависе од углова α_p^- и β_p^- , расподела угла γ^* не зависи од углова α_p^- и β_p^- и ефекат сенке не утиче на ову расподелу.



Слика 7.10: Поређење густина расподеле првог угла γ које виде честице у детерминистичкој симулацији (DS) за изотропне зидове окарактерисане стандардном девијацијом $\Delta\xi = \Delta\zeta$ са ефективном Зомерфелдовом расподелом (ES) израчунатој у долазној равни честице са стандардном девијацијом угла храпавости виртуелног зида $\Delta\gamma = \Delta\xi$, за различите вредности углова α_p^- и β_p^- .

Зато, по конструкцији, углови γ и γ^* су ортогонални независни Гаусови процеси. Коначно, за изотропни храпави зид, углови γ и γ^* су случајне променљиве



Слика 7.11: Густине расподеле (PDF) првог угла γ^* које виде честице у детерминистичкој симулацији (DS), израчунате користећи (7.28) и поређење са статистичким моделом (SM), једначина (7.30), за различите вредности углова α_p^- и β_p^- .

које се моделирају са две независне Гаусове расподеле са нултим просечним вредностима и стандардним девијацијама $\Delta\gamma = \Delta\gamma^*$, једнаким идентичним стандардним девијацијама $\Delta\xi = \Delta\zeta$ вектора нормале виртуелног храпавог зида.

Углови (ξ, η, ζ) првог вектора нормале \mathbf{n} храпавог зида, које виде честице када прилазе зиду, могу се израчунати из пара случајних променљивих γ и γ^* датих независним стохастичким процесима према Гаусовим расподелама (7.27) и (7.30). Користећи (7.25) и (7.28), углови ξ и ζ могу се написати у следећим облицима,

$$\xi = \cos(\beta_p^-) \gamma + \sin(\beta_p^-) \gamma^* + \frac{\pi}{2} \quad (7.31)$$

$$\zeta = -\sin(\beta_p^-) \gamma + \cos(\beta_p^-) \gamma^* + \frac{\pi}{2} \quad (7.32)$$

а користећи (7.13), добија се угао η ,

$$\eta = \sqrt{\gamma^2 + \gamma^{*2}} \quad (7.33)$$

У случају великих углова $|\alpha_p^-|$, не очекују се вишеструки судари честице и зида и први еластични судар честице са зидом доводи до следећег израза за брзину \mathbf{u}_p^+ којом се честица враћа у струју флуида:

$$\mathbf{u}_p^+ = \mathbf{u}_p^- - 2 (\mathbf{u}_p^- \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (7.34)$$

Једначина (7.34) се може написати у следећем облику,

$$\mathbf{u}_p^+ = \mathbf{u}_p^- - 2 (\mathbf{u}_p^- \cdot \mathbf{n}_\gamma) \mathbf{n}_\gamma - 2 (\mathbf{u}_p^- \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} - \mathbf{n}_\gamma) \quad (7.35)$$

где други члан представља 2Д еластично одбијање честице од виртуелног зида са вектором нормале \mathbf{n}_γ у долазној равни а трећи члан представља бочни утицај на брзину честице услед 3Д одбијања честице од изотропне храпаве површине.

7.3.2 Карактеризација бочног ефекта за велике долазне углове честица

Јединични вектор нормале на долазну раван честице може се дефинисати као:

$$\mathbf{s}_p^- = \mathbf{t}_p^- \times \mathbf{j} = \sin(\beta_p^-) \mathbf{i} + \cos(\beta_p^-) \mathbf{k} \quad (7.36)$$

За случај зида мале храпавости, дефинисане са (7.11), бочна компонента вектора нормале виртуелног зида може се написати, користећи (7.4), (7.21) и (7.36), у следећем облику:

$$\mathbf{n} - \mathbf{n}_\gamma = -\gamma^* \mathbf{s}_p^- \quad (7.37)$$

Стога, према (7.35) и (7.37), ЗД ефекат на брзину честица при еластичном судару честице и зида при великом углу $|\alpha_p^-|$, је:

$$\delta \mathbf{u}_p^+ = 2 [\mathbf{u}_p^- \cdot \mathbf{n}] \gamma^* \mathbf{s}_p^- = w_p^+ \mathbf{s}_p^- \quad (7.38)$$

Из (7.23) и (7.38) добија се:

$$w_p^+ = 2 |\mathbf{u}_p^-| \sin(\alpha_p^-) \gamma^* \quad (7.39)$$

Коначно, за било коју брзину $|\mathbf{u}_p^-|$ честица, пројекција w_p^+ је случајна променљива нулте просечне вредности и стандардне девијације σ_p^+ дате са,

$$\sigma_p^+ = 2 |\mathbf{u}_p^-| \sin(|\alpha_p^-|) \Delta \gamma^* \quad (7.40)$$

По дефиницији, бочни угао $\beta_p^+ - \beta_p^-$ при одбијању честице је написан у следећем облику,

$$\sin(\beta_p^+ - \beta_p^-) = -\frac{w_p^+}{|\mathbf{u}_p^+| \cos(\alpha_p^+)} \quad (7.41)$$

Из (7.39) и (7.41), за еластично одбијање честице од зида, следи,

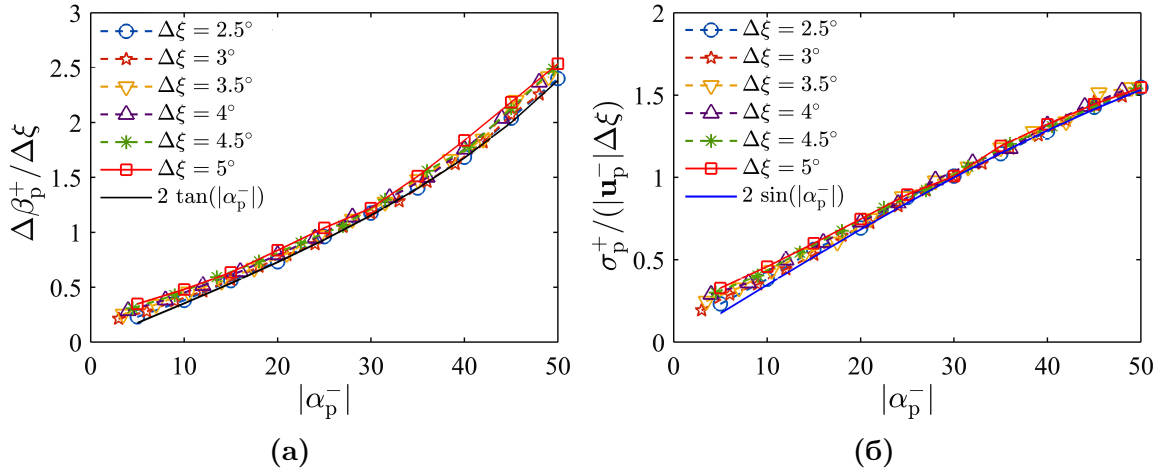
$$\beta_p^+ = \beta_p^- - 2 \tan(\alpha_p^-) \gamma^* \quad (7.42)$$

Коначно, налази се да је угао $\beta_p^+ - \beta_p^-$ случајна променљива са нултом просечном вредношћу и стандардном девијацијом:

$$\Delta\beta_p^+ = 2 \tan(|\alpha_p^-|) \Delta\gamma^* \quad (7.43)$$

где је стандардна девијација $\Delta\gamma^*$ дата са (7.29).

На слици 7.12 су представљени бочни карактеристични параметри, $\Delta\beta_p^+/\Delta\xi$ и $\sigma_p^+/(|\mathbf{u}_p^-| \Delta\xi)$, при 3Д еластичном одбијању честице од изотропног храпавог зида, у зависности од угла $|\alpha_p^-|$. Слагање између ових параметара израчунатих из детерминистичке симулације и предвиђања модела (7.40) и (7.43) је одлично чак и за мале вредности угла $|\alpha_p^-|$.



Слика 7.12: Зависност бездимензијских бочних карактеристика честице од угла α_p^- , индукованих сударом честице са виртуелним зидом чија је стандардна девијација углова вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta$: (а) однос стандардне девијације $\Delta\beta_p^+$ дисперзије бочног угла честице и стандардне девијације $\Delta\xi$ (б) однос стандардне девијације σ_p^+ дисперзије бочне брзине честице и производа интензитета долазне брзине $|\mathbf{u}_p^-|$ и стандардне девијације $\Delta\xi$.

7.3.3 Моделирање првог јединичног вектора нормале виртуелног зида који види честица при било ком долазном углу

За мале углове α_p^- , реда величине угла γ вектора нормале виртуелног зида, статистички приступ за моделирање вектора нормале \mathbf{n} виртуелног зида, одељак 7.3.1, не осигурава задовољење услова $\mathbf{u}_p^- \cdot \mathbf{n} < 0$. Овај услов је део ефекта сенке који је описан у Sommerfeld and Huber [2] за 2Д одбијање честице од зид. У том раду, аутори предлажу модификовану Гаусову густине расподеле угла нагиба виртуелног зида, која по конструкцији задовољава услов $\mathbf{u}_p^- \cdot \mathbf{n} < 0$. У 3Д приступу који се овде предлаже, према (7.23), овај услов се може написати као $\gamma > \alpha_p^-$ и доводи до коришћења модификоване густине расподеле само за угао γ . Према томе, угао γ^* има нормалну расподелу дату са (7.30) док угао γ има ефективну Зомерфелдову расподелу.

У пракси, углови γ и γ^* се рачунају из два независна случајна процеса $(\gamma, \gamma^*) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$:

- Угао γ има ефективну Зомерфелдову расподелу која обухвата ефекат сенке, дату са, ако је $\gamma > \alpha_p^-$:

$$P_{eff}(\gamma|\alpha_p^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\gamma^2}} \frac{\sin(\alpha_p^- - \gamma)}{\sin(\alpha_p^-)} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\Delta\gamma^2}\right) g(\alpha_p^-, \gamma) \quad (7.44)$$

а ако је $\gamma \leq \alpha_p^-$:

$$P_{eff}(\gamma|\alpha_p^-) = 0 \quad (7.45)$$

са

$$g(\alpha_p^-, \Delta\gamma) = 1 / \int_{\alpha_p^-}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\gamma^2}} \frac{\sin(\alpha_p^- - \gamma)}{\sin(\alpha_p^-)} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\Delta\gamma^2}\right) d\gamma \quad (7.46)$$

и стандардном девијацијом $\Delta\gamma$ која следи из (7.26).

- Угао γ^* има нормалну густину расподеле дату са (7.30).

Коначно, при првом удару честице у виртуелни храпави изотропни зид, углови вектора нормале рачунају се из једначина (7.31) до (7.33).

7.3.4 Моделирање вишеструких судара честице са виртуелним зидом

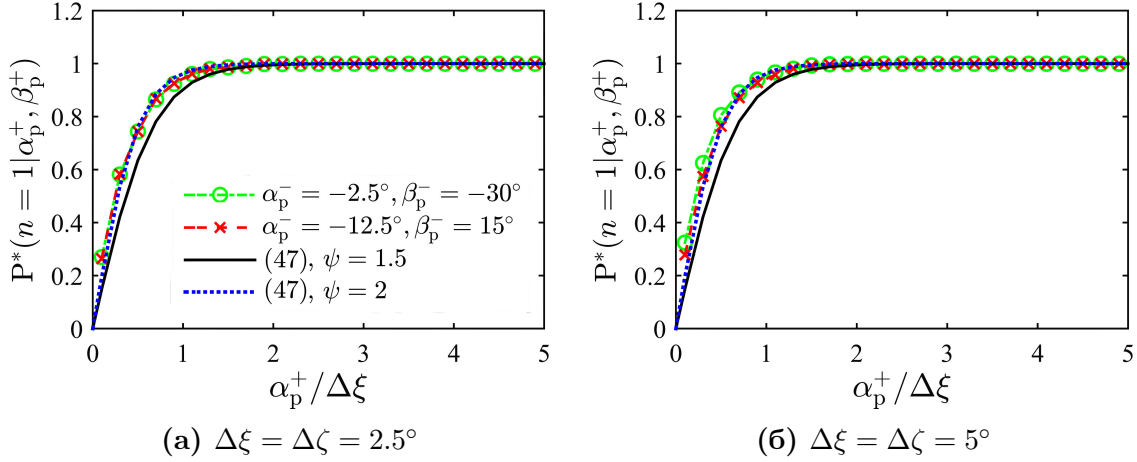
У раду Sommerfeld and Huber [2] истакнуто је да после судара честице са зидом неопходно је да буде испуњен услов $\alpha_p^+ > 0$ како би се честица вратила у струјни ток: аутори су једноставно понављали процедуру судара честице са зидом узоркујући увек нови први угао виртуелног зида γ све док се тај услов не оствари. У Kopan et al. [6], показује се да честице које се одбијају малим углом $\alpha_p^+ > 0$ могу да доживе неколико судара честице и зида пре него што се те честице врате у струју флуида. Приступ у [6], базиран је на аналитичком моделу вероватноће да честица има само један судар са зидом и понављању процедуре судара у случају да постоји више судара честице са зидом. Ова методологија може да се прошири за 3Д одбијање честице од храпавог зида.

Након судара честице и изотропног храпавог зида, уколико постоје вишеструки судари честице са зидом, честица након одбијања од зида види исти угао неравнина зида у свим правцима. Тај угао неравнина има Гаусову расподелу са нултом просечном вредношћу и стандардом девијацијом $\Delta\gamma = \Delta\xi = \Delta\zeta$. Из тог разлога, предлаже се занемаривање 3Д ефеката на вишеструке сударе честица са зидом.

Према Kopan et al. [6], вероватноћа да ће честице за неки угао α_p^- имати само један судар са зидом, може се написати као:

$$P^*(n = 1|\alpha_p^+) = \begin{cases} \tanh(\psi \frac{\alpha_p^+}{\Delta\gamma}) & \text{ако је } \alpha_p^+ \geq 0 \\ 0 & \text{ако је } \alpha_p^+ < 0 \end{cases} \quad (7.47)$$

где је $\psi = 1.5$.



Слика 7.13: Поређење теоријске вероватноће (7.47) за различите коефицијенте ψ са вероватноћом, израчуаном из детерминистичке симулације, да честица има само један судар са зидом пре враћања у струју флуида, за изотропни зид са стандардном девијацијом вектора нормале зида $\Delta\xi = \Delta\zeta$, за различите углове α_p^- и β_p^- .

На слици 7.13 се пореде вероватноће да ће честица имати само један судар са зидом при различитим угловима α_p^- и β_p^- у детерминистичкој симулацији са одговарајућом теоријском вероватноћом (7.47), са варираним коефицијентом ψ . Боље слагање са детерминистичким симулацијама се добија за $\psi = 2$ него за $\psi = 1.5$, највероватније зато што процедура за генерисање површине није иста као она која је коришћена у Kopan et al. [6]. Ова разлика у коефицијенту ψ нема значајан ефекат на статистичке карактеристике одбијања честице и оригинална вредност $\psi = 1.5$ се задржава.

Следи да вероватноћа да честице имају само један судар са зидом не зависи од углова β_p^- и β_p^+ :

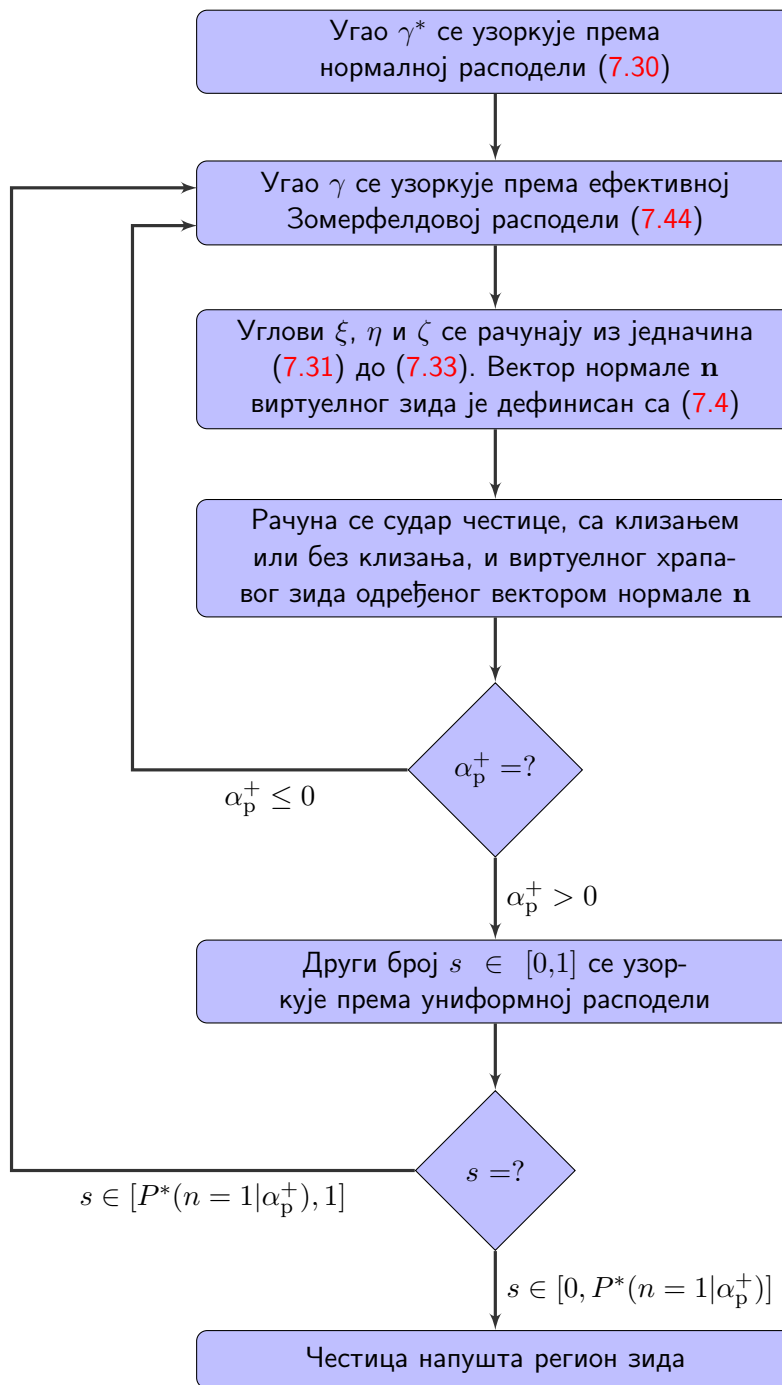
$$P^*(n = 1|\alpha_p^+, \beta_p^+, \beta_p^-) = P^*(n = 1|\alpha_p^+) \quad (7.48)$$

7.3.5 Стохастичка процедура за израчунавање 3Д одбијања честице од изотропног храпавог зида мале храпавости при Лагранжовом поступку за проучавање кретања честице

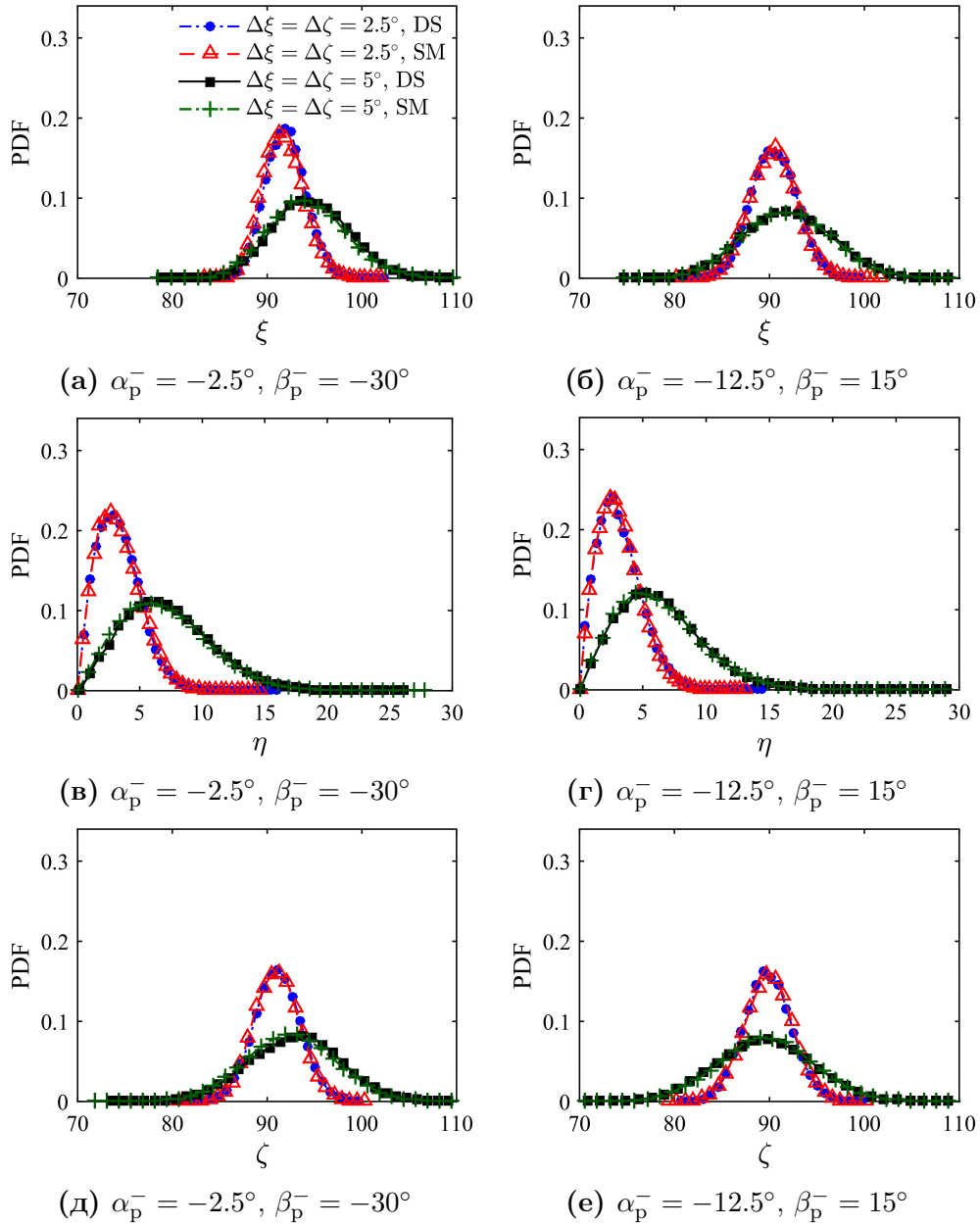
У Лагранжовом приступу, честице се прате у струјном току и када центар било које честице достигне удаљеност половине пречника честице од граничне макроскопске глатке површине, моделирање ефикасног виртуелног храпавог зида је према стохастичкој процедури приказаној на слици 7.14. Ова процедура је изведена у сагласности са статистичким моделом предложеним за моделирање расподеле углова γ и γ^* у одељку 7.3.3.

7.3.6 Валидација моделованих вектора нормале виртуелног зида при првом одбијању честице

На слици 7.15 је приказано поређење густина расподеле углова ξ , η и ζ вектора нормале при првом судару честице и зида, израчунатих из детерминистичке симулације и одговарајућим моделираним угловима добијених на основу алгоритма са слике 7.14 (при чему се занемарује могућност вишеструких судара честице и зида, с обзиром да се само моделира први судар честице и зида). Испитују се различити углови α_p^- и β_p^- и два изотропна зида. Слагање између 3Д детерминистичке симулације и 3Д стохастичког модела је веома добро.



Слика 7.14: Алгоритам за израчунавање 3Д одбијања честице од изотропног храпавог зида мале храпавости.



Слика 7.15: Зависност расподеле угла вектора нормале од углава α_p^- и β_p^- први првом судару честице са изотропним храпавим зидом. Поређење резултата стохастичког модела (SM) и резултата детерминистичке симулације (DM).

7.4 Примена стохастичког модела судара честице са изотропним храпавим зидом

7.4.1 Поређење густина расподела углова при одбијању честица користећи резултате експерименталних мерења, детерминистичких и стохастичких симулација

На слици 7.16 изведени стохастички модел се пореди у $x - y$ равни са експерименталним мерењима [2], са 2Д моделом вишеструких судара честице и зида и 3Д детерминистичком симулацијом, док у $y - z$ равни 3Д стохастички модел се пореди само са 3Д детерминистичком симулацијом, с обзиром да нема расположивих експерименталних резултата у тој равни.

Да би се поредили резултати 3Д стохастичког модела и 3Д детерминистичких симулација са експерименталним мерењима у $x - y$ равни, угао $\alpha_{p,xy}^+$ (в. сл. 7.5) се дефинише као:

$$\alpha_{p,xy}^+ = \arctan \left[\frac{\tan(\alpha_p^+)}{\cos(\beta_p^+)} \right] \quad (7.49)$$

Укупно се симулира 10^5 судара честице са изотропним зидом, користећи стохастички модел и детерминистичку симулацију.

У експерименталној конфигурацији Sommerfeld and Huber [2], зидови канала су направљени од челика а честице су стаклене, пречника $D_p = 500 \mu\text{m}$. Стандардна девијација угла храпавости виртуелног зида за такву конфигурацију је $\Delta\gamma = 3.8^\circ$ а измерена хоризонтална пројекција просечне брзине честице има нормалну расподелу са просечном вредношћу $u_p^- = 5.91 \text{ m/s}$ и стандардном девијацијом $\Delta u_p^- = 1.16 \text{ m/s}$. У симулацијама је узето да угаона брзина честица има Гаусову расподелу са просечном вредношћу $\omega_{pz} = 16336 \text{ rad/s}$ и стандардном девијацијом $\Delta\omega_{pz} = 5655 \text{ rad/s}$, према процени ових величина изложеној у [2], с обзиром да ове

величине нису мерене у експерименту. У експерименту, режим струјања флуида је турбулентан, у хидраулички глатким цевима.

Коефицијент реституције e_w и коефицијент трења μ_w зависе од угла α_p^- , као што је дефинисано у [2]:

$$e_w(\alpha_p^-) = \begin{cases} \frac{e_h - 1}{\alpha_e} |\alpha_p^-| + 1 & \text{ако је } |\alpha_p^-| \in [0, \alpha_e] \\ e_h & \text{ако је } |\alpha_p^-| > \alpha_e \end{cases} \quad (7.50)$$

и

$$\mu_w(\alpha_p^-) = \begin{cases} \frac{\mu_h - \mu_0}{\alpha_\mu} |\alpha_p^-| + \mu_0 & \text{ако је } |\alpha_p^-| \in [0, \alpha_e] \\ e_h & \text{ако је } |\alpha_p^-| > \alpha_e \end{cases} \quad (7.51)$$

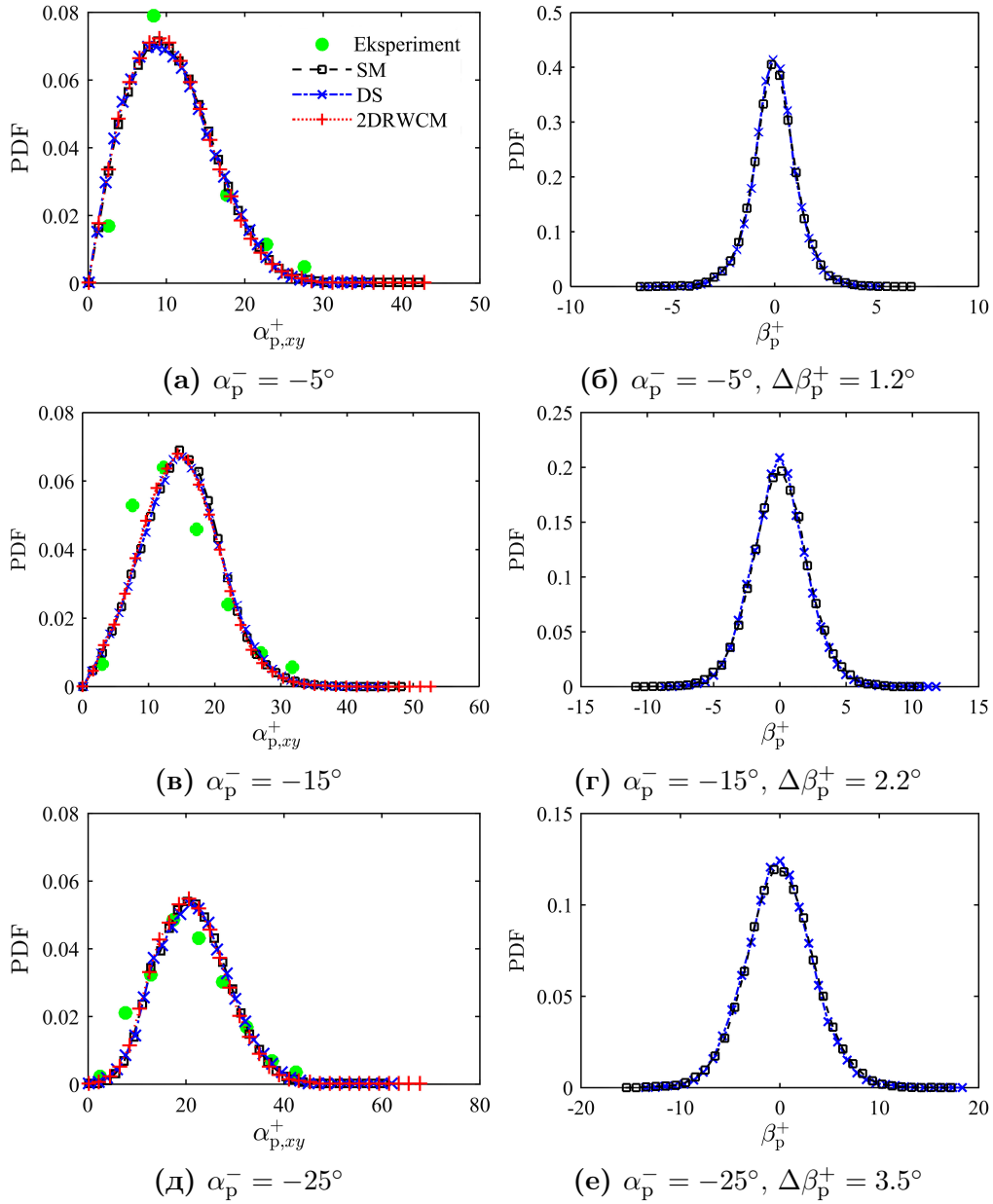
Како би се обезбедила стандардна девијација угла храпавости виртуелног зида $\Delta\gamma = 3.8^\circ$, у детерминистичким симулацијама виртуелна површина има однос RMS висине неравнина и корелационе дужинске размере једнак 0.047 ($h/c_L = 0.047$). Како је тачна вредност расподеле углова β_p^- из експеримента непозната, у стохастичком моделу за судар честице и изотропног зида и у 3Д детерминистичкој симулацији, узето је да честице имају долазни угао $\beta_p^- = 0^\circ$. На тај начин, одбијање честица у $y - z$ равни је директна последица 3Д карактера храпавости.

У 3Д процедурама, судар честице са зидом се рачуна према [13]. Судар без трења се дешава ако је задовољен следећи услов:

$$v_p^- < \frac{-2}{7\mu_w(1 + e_w)} |\mathbf{u}| \quad (7.52)$$

где је интензитет брзине $|\mathbf{u}|$ између честице и зида у контактної тачки дат са:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(u_p^- + \frac{D_p}{2}\omega_{pz}^-\right)^2 + \left(w_p^- - \frac{D_p}{2}\omega_{px}^-\right)^2} \quad (7.53)$$



Слика 7.16: Распреде углова честица које се враћају у струјни ток из експерименталних резултата [2], 3Д стохастичког модела (SM), детерминистичких резултата (DS) и 2Д модела (2DRWCM) [6], за различите вредности углова α_p^- и $\beta_p^- = 0^\circ$ и виртуелни зид са стандардним девијацијама углова вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta = 3.8^\circ$.

Једначине за судар честице и зида без клизања су:

$$u_p^+ = \frac{5}{7} \left(u_x^- - \frac{D_p}{5} \omega_{pz}^- \right) \quad \omega_{px}^+ = \frac{2 w_p^-}{D_p}$$

$$\begin{aligned}
v_p^+ &= -e_w v_p^- & \omega_{py}^+ &= \omega_{py}^- & (7.54) \\
w_p^+ &= \frac{5}{7} \left(w_p^- + \frac{D_p}{5} \omega_{pz}^- \right) & \omega_{pz}^+ &= -\frac{2 u_p^-}{D_p}
\end{aligned}$$

Уколико услов (7.52) није испуњен, судар сферне честице са зидом са клизањем се рачуна једначинама:

$$\begin{aligned}
u_p^+ &= u_p^- + \varepsilon_x \mu_w (1 + e_w) v_p^- & \omega_{px}^+ &= \omega_{px}^- - 5 \varepsilon_z \mu_w (1 + e_w) \frac{v_p^-}{D_p} \\
v_p^+ &= -e_w v_p^- & \omega_{py}^+ &= \omega_{py}^- & (7.55) \\
w_p^+ &= w_p^- + \varepsilon_z \mu_w (1 + e_w) v_p^- & \omega_{pz}^+ &= \omega_{pz}^- + 5 \varepsilon_x \mu_w (1 + e_w) \frac{v_p^-}{D_p}
\end{aligned}$$

где су ε_x и ε_z :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{|\mathbf{u}|} \left(u_p^- + \frac{D_p}{2} \omega_{pz}^- \right) \quad \varepsilon_z = \frac{1}{|\mathbf{u}|} \left(w_p^- - \frac{D_p}{2} \omega_{px}^- \right) \quad (7.56)$$

У применама 2Д модела, судар честице са хрпавим зидом се рачуна према процедури описаној у [6].

Као што се види са слике 7.16, у $x - y$ равни, слагање експерименталних резултата, 2Д и 3Д модела је веома добро за долазне углове $\alpha_p^- = -5^\circ$, $\alpha_p^- = -15^\circ$ и $\alpha_p^- = -25^\circ$.

Иако је треће урачунато при сударима честице са зидом, расподела углова β_p^+ при одбијању честице је Гаусова, као што је то случај при еластичном одбијању честице од зид, са нултом просечном вредношћу и стандардном девијацијом угла одбијања β_p^+ која расте са порастом угла $|\alpha_p^-|$, као што се види на сликама 7.16б, г и е.

7.4.2 Стандардна девијација бочне компоненте брзине при одбијању честице од зида, у зависности од материјала зида и пречника честице

На слици 7.17 приказана је зависност односа стандардне девијације бочне компоненте брзине и интензитета просечне брзине, $\sigma_p^+ / |\mathbf{u}_p^-|$ од односа долазног угла честице и стандардне девијације угла вектора нормале, $|\alpha_p^-| / \Delta\xi$, користећи детерминистичке и стохастичке симулације са експерименталним параметрима [2] за различите материјале зида и стаклене честице, за бочне долазне углове честице $\beta_p^- = 0^\circ$. Међутим, како је симулирани зид изотропан, добијени резултати су независни од угла β_p^- .

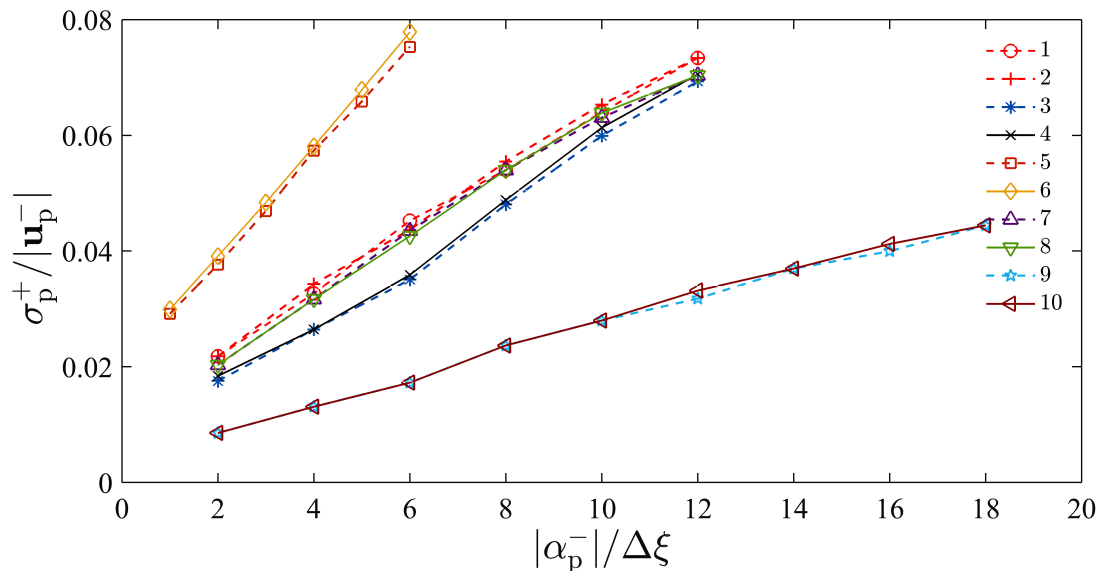
У свим симулираним случајевима, угаона брзина честица је иста као у одељку 7.4.1. Максималне вредности долазних углова честица у симулацијама нису прелазиле 40° , пошто је у оригиналном експерименту канал мале висине и долазни углови честица су мали.

Између расположивих материјала зида и величина честица, највећа дисперзија бочних углова честице је за челични зид и стаклене честице пречника $D_p = 100 \mu\text{m}$ (што је еквивалентно виртуелном изотропном зиду чија су стандардне девијације угла вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta = 5.3^\circ$). За ову конфигурацију, при највећим симулираним долазним угловима честице, стандардна девијација интензитета генерисане бочне брзине σ_p^+ је око 8% интензитета долазне брзине. Најмања дисперзија је за случај полираног челичног зида и пречника честице $D_p = 100 \mu\text{m}$ (што је еквивалентно изотропном зиду са стандардном девијацијом углова вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta = 2.3^\circ$): при највећим симулираним долазним угловима честице, стандардна девијација интензитета генерисане бочне брзине σ_p^+ је око 4% интензитета долазне брзине.

Челични зид и честице пречника $D_p = 500 \mu\text{m}$, као и зид од плексигласа и

честице пречника $D_p = 100 \mu\text{m}$, описаних стандардним девијацијама угла вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta = 3.8^\circ$, имају приближно једнаке дисперзије бочних угла честице. Иако гумени зид и честице пречника $D_p = 100 \mu\text{m}$ имају стандардну девијацију угла вектора нормале $\Delta\xi = \Delta\zeta = 3.8^\circ$, бочна дисперзија честица је мало нижа него што је то случај у претходне две конфигурације са истом вредношћу стандардне девијације угла вектора нормале.

У свим симулираним случајевима, слагање између резултата детерминистичке симулације и стохастичког модела је одлично.



Слика 7.17: Поређење резултата детерминистичке симулације (DS) и 3Д стохастичког модела (SM), односа стандардне девијације бочне брзине честице индукване сударом честице са зидом и интензитета долазне брзине честице, $\sigma_p^+ / |\mathbf{u}_p^-|$, у зависности од односа долазног угла α_p^- честице и стандардних девијација $\Delta\xi = \Delta\zeta$ угла вектора нормале за различите материјале зидова и стаклене честице пречника D_p . 1: Челик, $D_p = 500 \mu\text{m}$, $\Delta\xi = 3.8^\circ$, DS. 2: Челик, $D_p = 500 \mu\text{m}$, $\Delta\xi = 3.8^\circ$, SM. 3: Гума, $D_p = 100 \mu\text{m}$, $\Delta\xi = 3.8^\circ$, DS. 4: Гума, $D_p = 100 \mu\text{m}$, $\Delta\xi = 3.8^\circ$, SM. 5: Челик, $D_p = 100 \mu\text{m}$, $\Delta\xi = 5.3^\circ$, DS. 6: Челик, $D_p = 100 \mu\text{m}$, $\Delta\xi = 5.3^\circ$, SM. 7: Плексиглас, $D_p = 100 \mu\text{m}$, $\Delta\xi = 5.3^\circ$, DS. 8: Плексиглас, $D_p = 100 \mu\text{m}$, $\Delta\xi = 5.3^\circ$, SM. 9: Полирани челик, $D_p = 100 \mu\text{m}$, $\Delta\xi = 2.3^\circ$, DS. 10: Полирани челик, $D_p = 100 \mu\text{m}$, $\Delta\xi = 2.3^\circ$, SM.

Поглавље 8

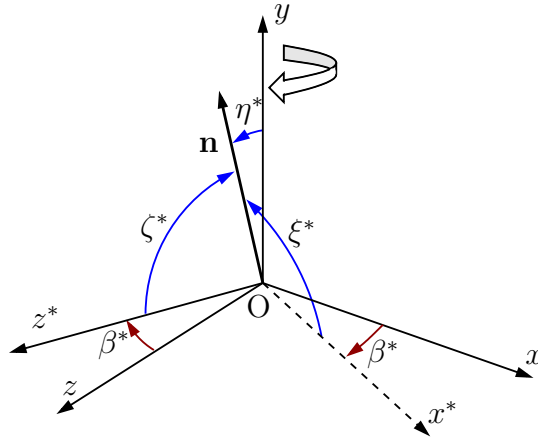
Стохастичко моделирање 3Д одбијања честице од анизотропног храпавог зида

8.1 Особине анизотропног виртуелног храпавог зида

8.1.1 Особине нормалног вектора анизотропног виртуелног храпавог зида

Као што је речено у одељку 7.1.2, углови између јединичног вектора нормале \mathbf{n} виртуелног храпавог зида и јединичних вектора дуж координатних оса су $(\xi, \eta, \zeta) \in [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$, као што је приказано на слици 7.2.

Јединични вектор нормале \mathbf{n} виртуелног зида у координатном систему $Oxyz$ се одређује према једначини (7.4).



Слика 8.1: Углови вектора нормале \mathbf{n} са јединичним векторима дуж оса координатног система $Ox^*y^*z^*$. Координатни систем $Oxyz$ се ротира око y -осе за угао β^* .

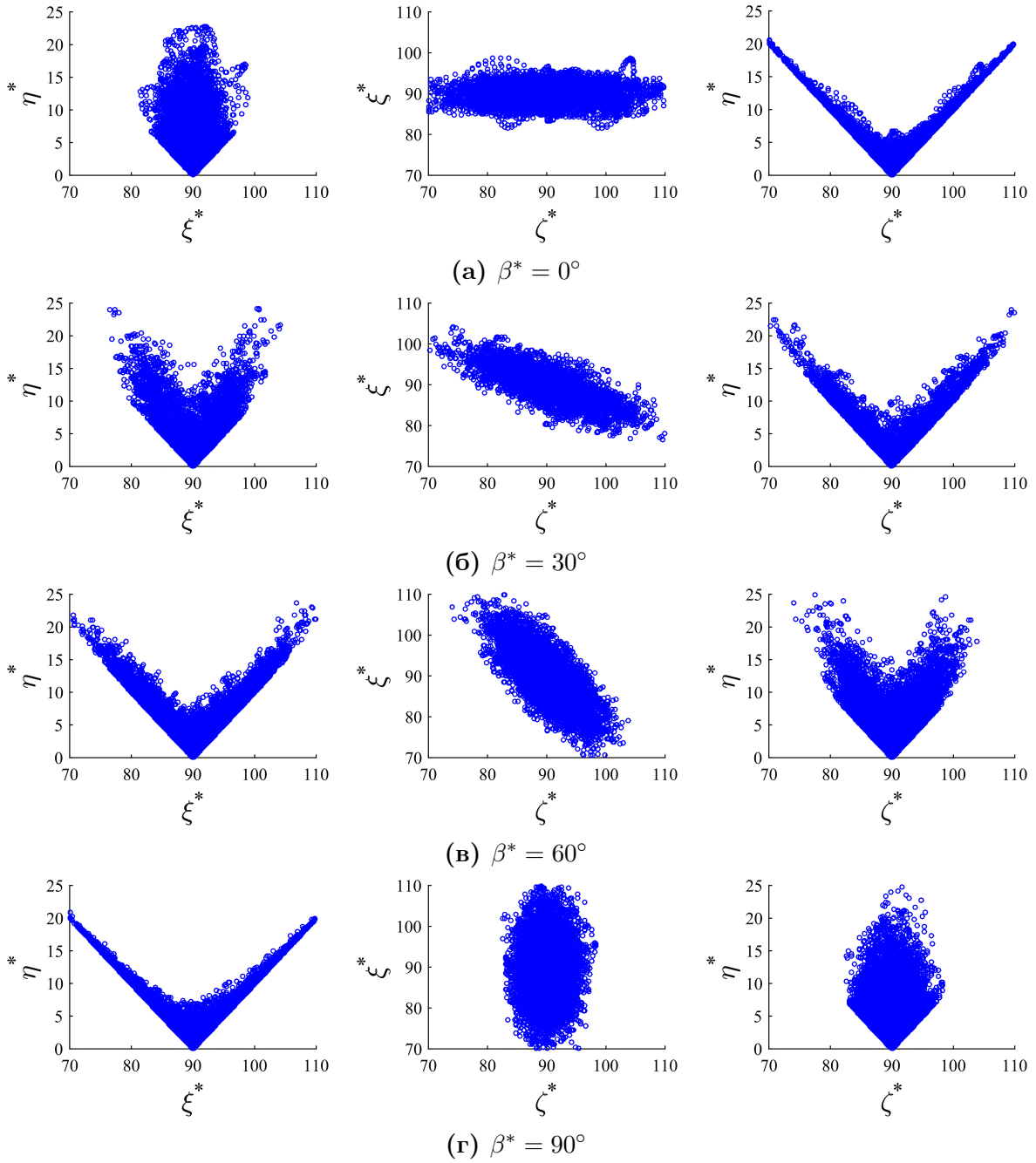
Нека су ξ^* , η^* и ζ^* углови које вектор нормале \mathbf{n} заклапа са осама x^* , y^* и z^* , редоследно, ротираног координатног система $Ox^*y^*z^*$, као што је приказано на слици 8.1. Како би се истражиле особине ових углова дуж различитих x^* праваца, корелациони дијаграми углова (ξ^*, η^*) , (ζ^*, ξ^*) и (ζ^*, η^*) су приказани на слици 8.2 а одговарајући корелациони коефицијенти су приказани у табели 8.1. Ови коефицијенти су дефинисани изразом,

$$\rho_{\lambda\vartheta} = \frac{\Delta(\lambda\vartheta)}{\Delta\lambda\Delta\vartheta} \quad (8.1)$$

где λ и ϑ могу представљати углове ξ^* , η^* и ζ^* , $\Delta(\lambda\vartheta)$ је коваријанса углова λ и ϑ , а $\Delta\lambda$ и $\Delta\vartheta$ су стандардне девијације углова λ и ϑ , редоследно.

Из одговарајућих вредности корелационих коефицијената и облика корелационих дијаграма, може се закључити да углови ξ^* и ζ^* нису у корелацији за правце одређене угловима $\beta^* = 0^\circ$ и $\beta^* = 90^\circ$, док за углове $\beta^* = 30^\circ$ и $\beta^* = 60^\circ$, тј. за углове између 0° и 90° , постоји корелација углова ξ^* и ζ^* . Углови ξ^* и ζ^* у свим истраженим случајевима имају нормалне расподеле.

На основу вредности корелационих коефицијената $\rho_{\xi\eta}^*$ и $\rho_{\eta\zeta}^*$ из детерминистичке симулације, табела 8.1, закључује се да углови η^* и ξ^* , као и углови η^* и ζ^* нису



Слика 8.2: Корелациони дијаграми углава ξ^* , η^* и ζ^* вектора нормале \mathbf{n} дуж праваца x^* одређених углом β^* . Истражена површина има RMS висину неравнина $h = 0.37 \mu\text{m}$ и корелационе дужинске размере у x и z правцу, $c_{L,x} = 12 \mu\text{m}$ и $c_{L,z} = 4 \mu\text{m}$, редоследно.

у корелацији за све углове β^* . Међутим, на основу облика одговарајућих дијаграма закључује се да су ове променљиве зависне, што је оправдано с обзиром да су углови повезани аналитички, изразом (7.4).

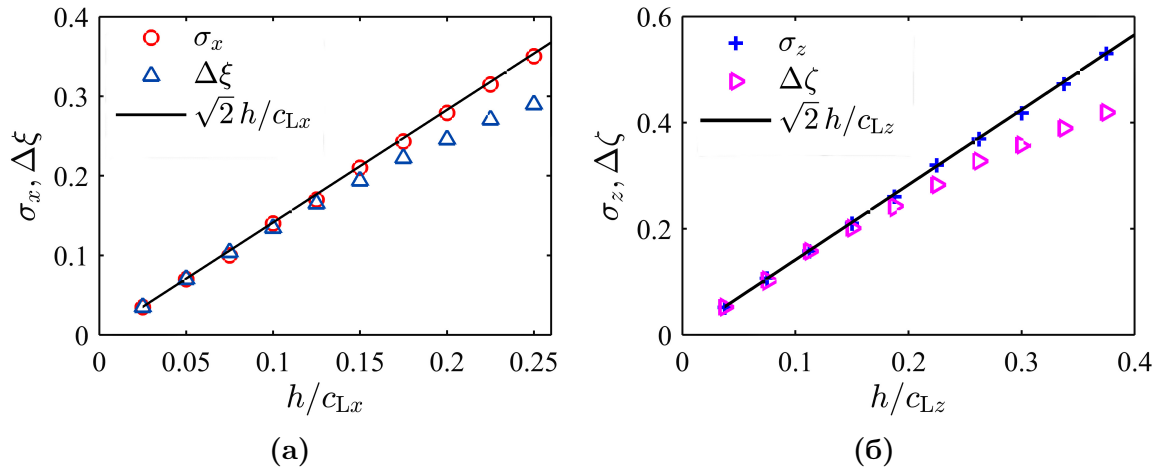
8.1.2 Веза параметера анизотропне површине и стандардне девијације углова вектора нормале виртуелног зида

На слици 8.3 је приказано поређење резултата теоријског израза за RMS вредност нагиба храпавости 1Д профила дефинисаног изразом (7.5) са RMS вредношћу нагиба дуж x правца (слика а) и z правца (слика б), где су ови нагиби израчунати у нумеричкој симулацији у свакој троугаоној ћелији мреже, $s_x = -n_x/n_y$ и $s_z = -n_z/n_y$, редоследно. Као што се може видети, слагање обе зависности је веома добро.

Случај мале храпавости површине који се проучава и у овом одељку је дефинисан изразима (7.9), (7.10) и (7.11).

Може се видети са слике 8.3 да је слагање RMS нагиба храпавости добијеног из (7.5) са малим вредностима стандардне девијације углова вектора нормале виртуелног зида $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ одлично. Зато, до приближно $\Delta\xi = \Delta\zeta = 0.13 \text{ rad}$ (7.5°), важи,

$$\Delta\xi = \sqrt{2} \frac{h}{c_{L,x}} \quad \Delta\zeta = \sqrt{2} \frac{h}{c_{L,z}} \quad (8.2)$$



Слика 8.3: Зависност RMS нагиба анизотропног виртуелног зида у x и z правцима, σ_x и σ_z , редоследно, и стандардних девијација углова вектора нормале виртуелног зида $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, од односа RMS висине храпавости h и корелационе дужинске размере $c_{L,x}$ (слика а) и односа RMS висине храпавости h и корелационе дужинске размере $c_{L,y}$ (слика б). Дужина домена је много већа од корелационих дужинских размера $c_{L,x}$ и $c_{L,z}$.

8.1.3 Вектор нормале виртуелног зида у ротираном координатном систему

Коришћењем релација за ротацију координатног система $Oxyz$ за угао β^* око y осе (в. сл. 8.1) и релација за случај мале храпавости (7.11), могу се добити следеће корелације углова:

$$\begin{aligned}\Delta(\xi^*)^2 &= \cos^2(\beta^*) \Delta\xi^2 + \sin^2(\beta^*) \Delta\zeta^2 \\ \Delta(\zeta^*)^2 &= \sin^2(\beta^*) \Delta\xi^2 + \cos^2(\beta^*) \Delta\zeta^2 \\ \Delta(\xi^*\zeta^*) &= \sin(\beta^*) \cos(\beta^*) [(\Delta\xi^2 - \Delta\zeta^2)]\end{aligned}\tag{8.3}$$

У табели 8.1 су приказане вредности корелација и корелационих коефицијената углова вектора нормале виртуелне површине, добијених применом израза (8.3) и рачунањем у нумеричкој симулацији. Слагање резултата добијених на ова два начина је веома добро.

Табела 8.1: $\Delta\xi^*$ и $\Delta\zeta^*$ су стандардне девијације углова ξ^* и ζ^* у ротираном координатном систему $Ox^*y^*z^*$; корелациони коефицијенти (8.1) углова (ξ^*, ζ^*) , (ξ^*, η^*) и (η^*, ζ^*) су означени са $\rho_{\xi\zeta}^*$, $\rho_{\xi\eta}^*$ и $\rho_{\eta\zeta}^*$, редоследно. Вредности израчунате из нумеричке симулације су означене са NS а вредности које следе из статистичког модела (8.3) су означене са SM. Вредности стандардних девијација су у степенима, док су корелациони коефицијенти бездимензијски.

β^*	$\Delta\xi_{NS}^*$	$\Delta\zeta_{NS}^*$	$\rho_{\xi\zeta}^* _{NS}$	$\rho_{\xi\eta}^* _{NS}$	$\rho_{\eta\zeta}^* _{NS}$	$\Delta\xi_{SM}^*$	$\Delta\zeta_{SM}^*$	$\rho_{\xi\zeta}^* _{SM}$
0	2.32	7.59	0.05	0.03	-0.02	2.50	7.50	0.00
30	4.38	6.09	-0.73	0.02	0.04	4.53	6.53	-0.76
60	6.66	4.30	-0.73	-0.06	0.00	6.53	4.53	-0.76
90	7.67	2.45	-0.08	0.00	0.03	7.50	2.50	0.00

8.2 Статистичка анализа резултата нумеричке симулације 3Д еластичног судара честице са анизотропним зидом

Поступак нумеричке симулације 3Д еластичног судара честице и анизотропног храпавог зида је сличан као при судару честице са изотропним храпавим зидом, одељак 7.2.1.

У овом одељку ће бити приказане карактеристике одбијања честица од два анизотропна храпава зида, одређена са $(\Delta\xi, \Delta\zeta) = (2.5^\circ, 7.5^\circ)$ и $(\Delta\xi, \Delta\zeta) = (7.5^\circ, 2.5^\circ)$.

Углови ξ и ζ првог вектора нормале које виде честице које прилазе зиду са различитим угловима α_p^- и β_p^- , приказани су на сликама 8.4-8.7. Као што се може видети са ових слика, при великим угловима α_p^- ($|\alpha_p^-| \gg \Delta\xi$ и $\Delta\zeta$), расподела углова ξ и ζ је Гаусова, са приближно нултом просечном вредношћу и стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, редоследно.

Како се угао $|\alpha_p^-|$ смањује, због ефекта сенке, за угао $\beta_p^- = 0^\circ$ честице која прилази зиду, расподела угла ξ се мења док расподела угла ζ остаје иста, а за долазни угао $\beta_p^- = 90^\circ$ расподела угла ζ се мења, док расподела угла ξ остаје иста.

Са друге стране, за углове $\beta_p^- = 30^\circ$ и 60° , расподеле углова ξ и ζ мењају облик.

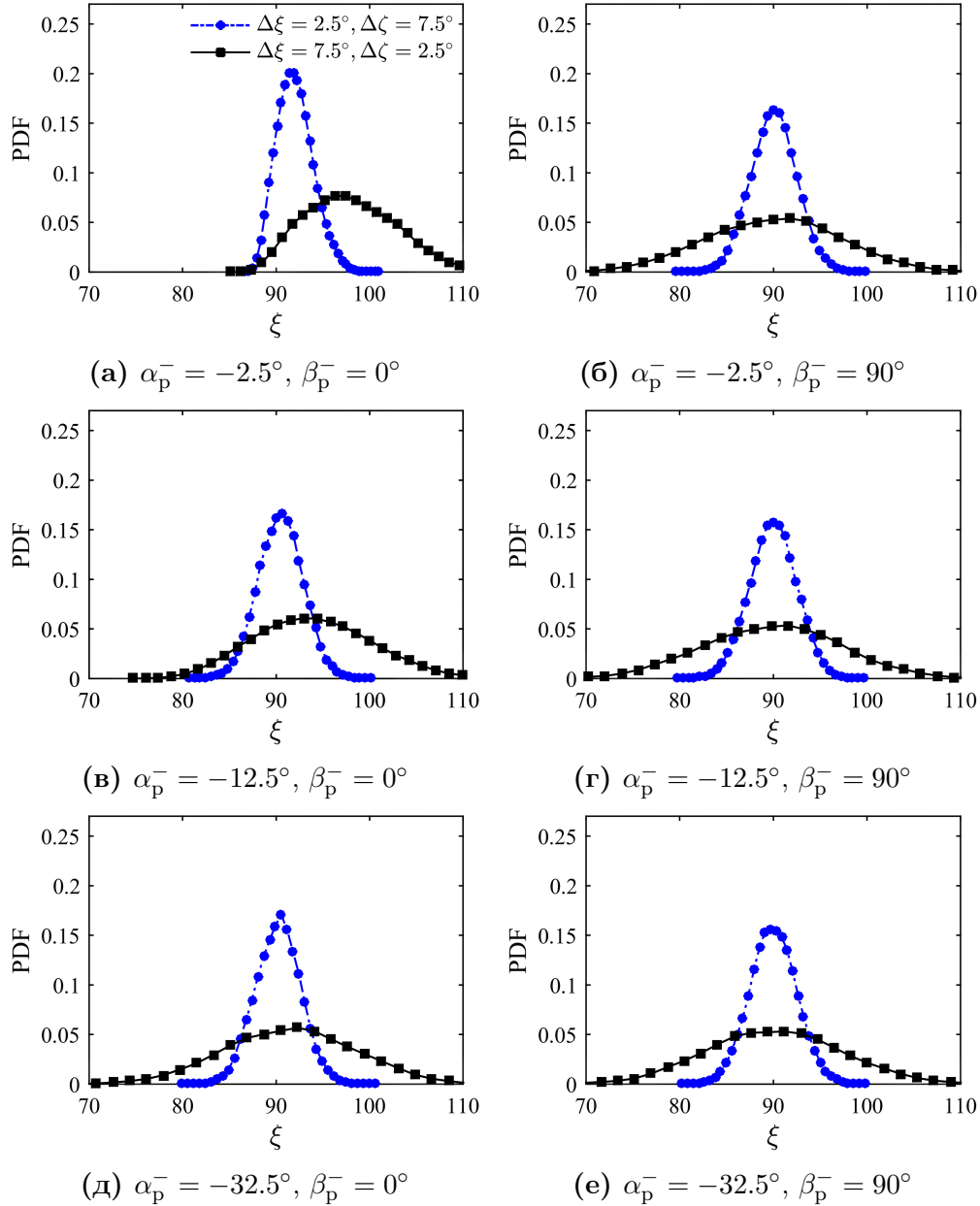
Утицај ефекта сенке на расподеле угла ξ је мање изражен за виртуалне зидове са стандардном девијацијом углова вектора нормале ($\Delta\xi = 2.5^\circ$, $\Delta\zeta = 7.5^\circ$) као и на расподеле угла ζ за виртуелни зид са стандардном девијацијом углова вектора нормале ($\Delta\xi = 7.5^\circ$, $\Delta\zeta = 2.5^\circ$).

Густине расподеле угла α_p^+ честица које се одбијају од зида, за различите углове α_p^- и β_p^- којим честица прилази зиду, приказане су на сликама 8.8 и 8.9. При великим угловима α_p^- ($|\alpha_p^-| \gg \Delta\xi$ и $\Delta\zeta$), угао α_p^+ има приближно нормалну расподелу са просечном вредношћу приближно једнакој апсолутној вредности долазног угла честице, $|\alpha_p^-|$. Када се угао α_p^- смањује, густина угла α_p^+ мења облик и просечна вредност те расподеле се смањује. Ово понашање је последица ефекта сенке.

На слици 8.8, за углове $\beta_p^- = 0^\circ$ или 90° честица које прилазе зиду, густине расподеле углова α_p^+ при одбијању честица од зида се пореде са резултатима примененог 2Д стохастичког модела Konan et al. [6]. За ове углове честица, стандардна девијација углова виртуелног зида $\Delta\gamma$, неопходна за примену овог стохастичког модела једнака је $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, редоследно. Слагање густина расподела израчунатих из детерминистичке симулације и 2Д стохастичког модела је веома добро.

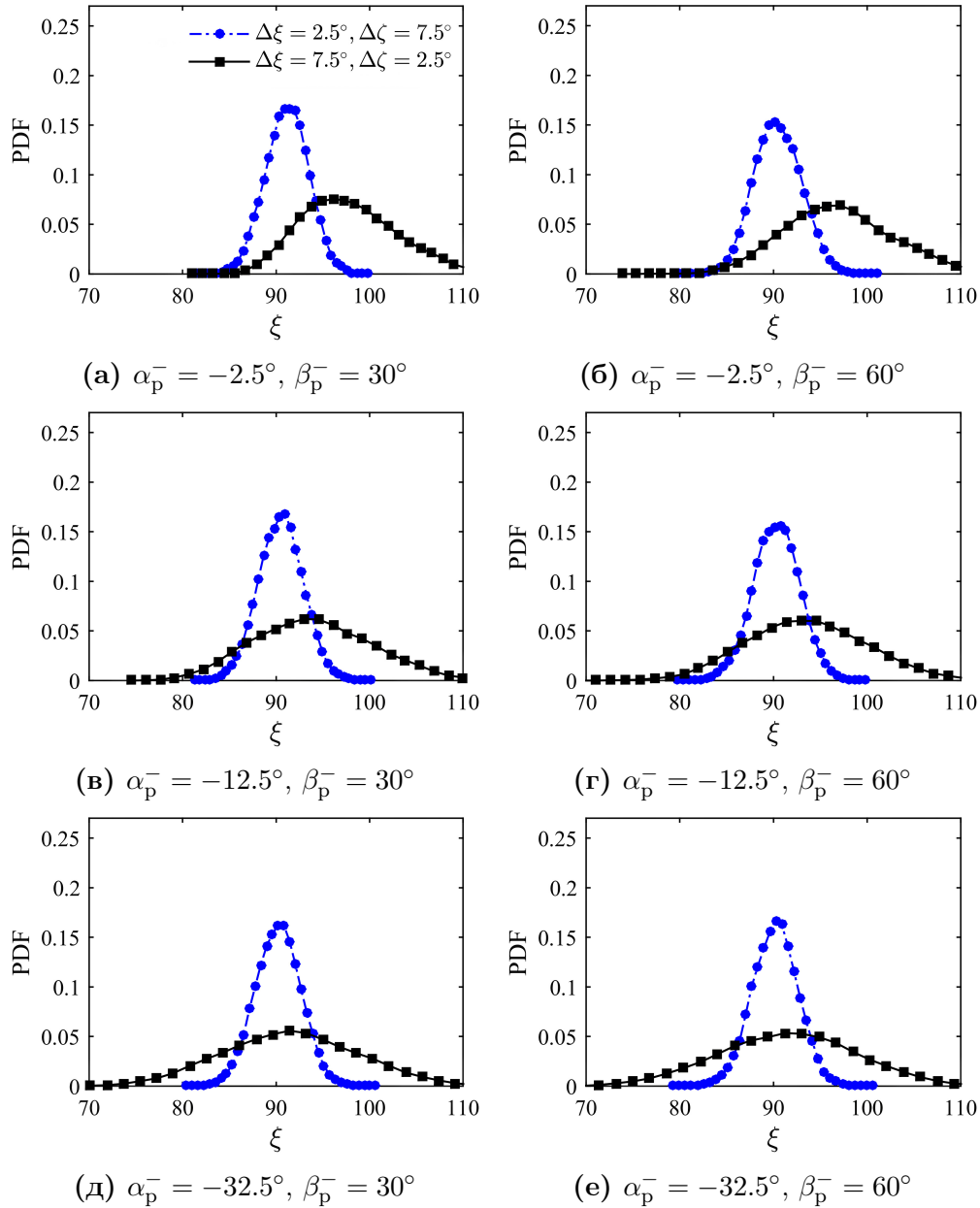
Међутим, стандардна девијација $\Delta\gamma$ нагиба виртуелног зида, која је неопходна за прорачун угла α_p^+ стохастичким 2Д моделом [6], је непозната уколико је угао β_p^- честице која прилази зиду између 0° и 90° .

На слици 8.10 су приказане густине расподеле бочне девијације угла одбијања, $\beta_p^+ - \beta_p^-$ за бочне долазне углове честица, $\beta_p^- = 0^\circ$ и 90° . Ове расподеле су Гаусове са нултом просечном вредношћу и стандардном девијацијом која се повећава како долазни угао честице, $|\alpha_p^-|$, расте. Ово понашање је такође карактеристика густина расподеле бочне девијације угла одбијања, $\beta_p^+ - \beta_p^-$, у случају одбијања честица од 3Д изотропног хрпавог зида, што је описано у одељку 7.2.2.



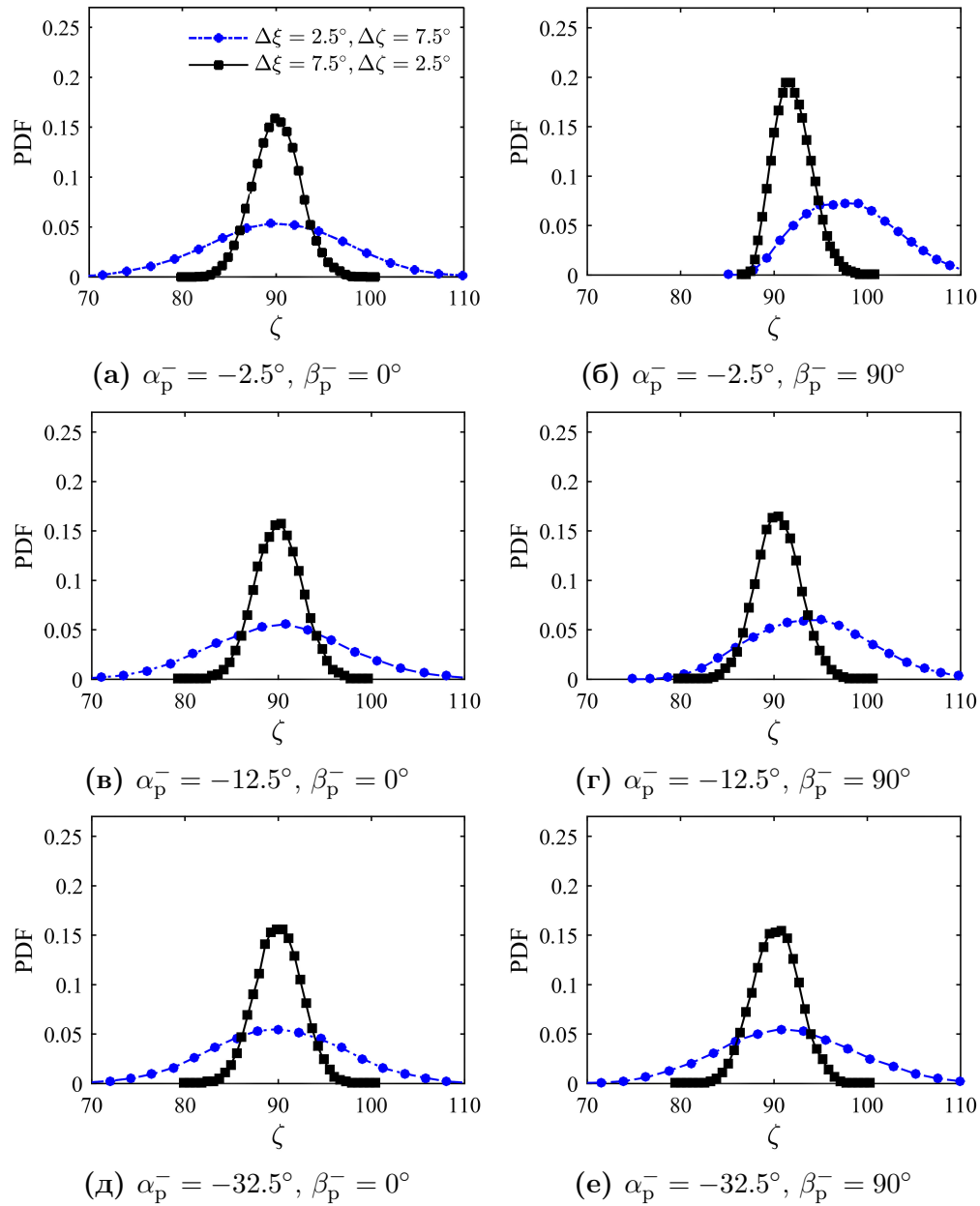
Слика 8.4: Густине расподеле (PDF) угла ξ вектора нормале зида израчунате из детерминистичке симулације за анизотропне зидове чије су стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, при првом судару честице и зида. Ове расподеле су израчунате за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$.

Густине расподеле бочног угла одбијања честица, $\beta_p^+ - \beta_p^-$, за долазне углове честица, $\beta_p^- = 0^\circ$ и 90° , приказаних на слици 8.11, нису симетричне и немају Гаусову расподелу. За све случајеве који су испитани у нумеричкој симулацији, просечне

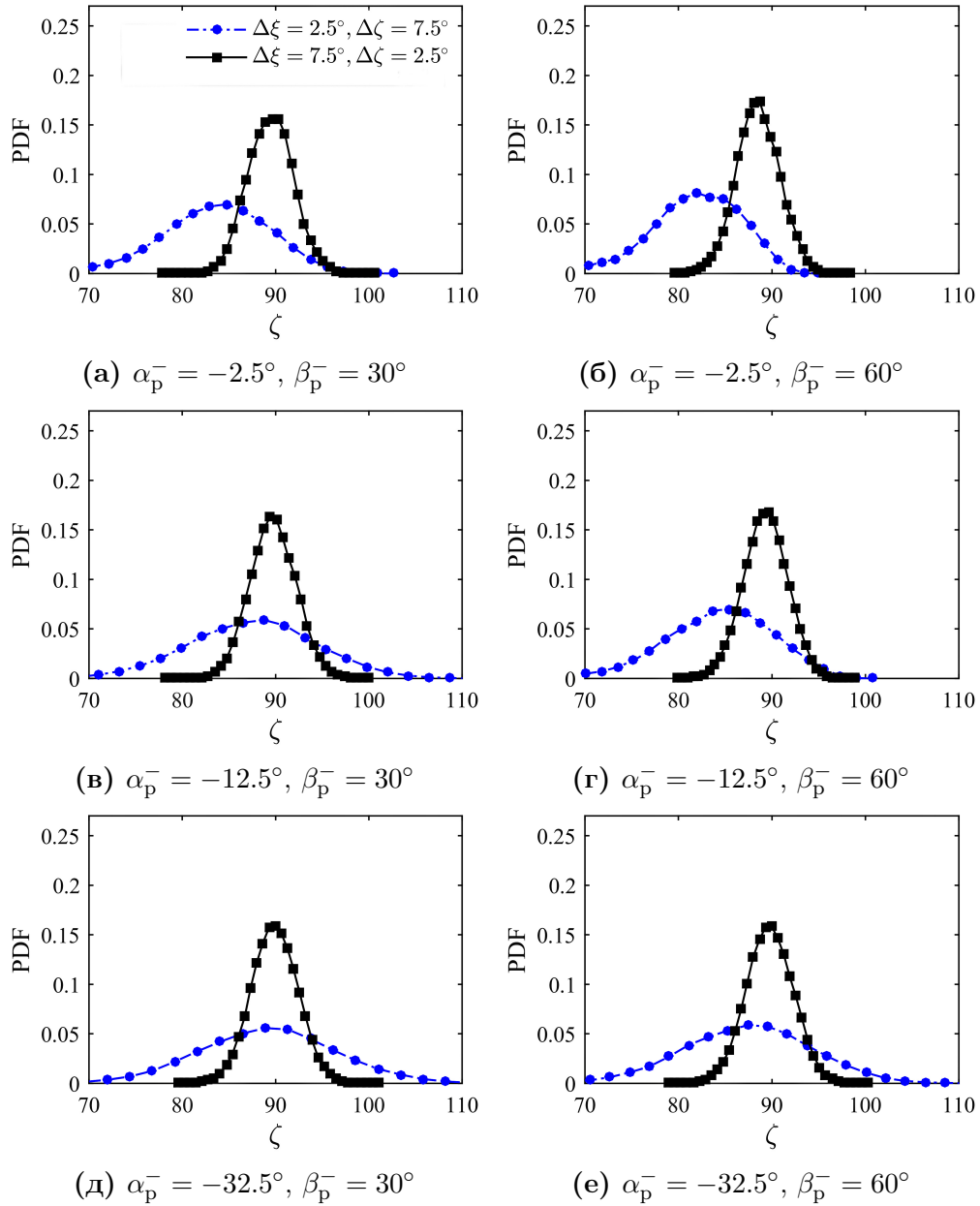


Слика 8.5: Густине расподеле (PDF) угла ξ вектора нормале зида израчунате из детерминистичке симулације за анизотропне зидове чије су стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, при првом судару честице и зида. Ове расподеле су израчунате за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$.

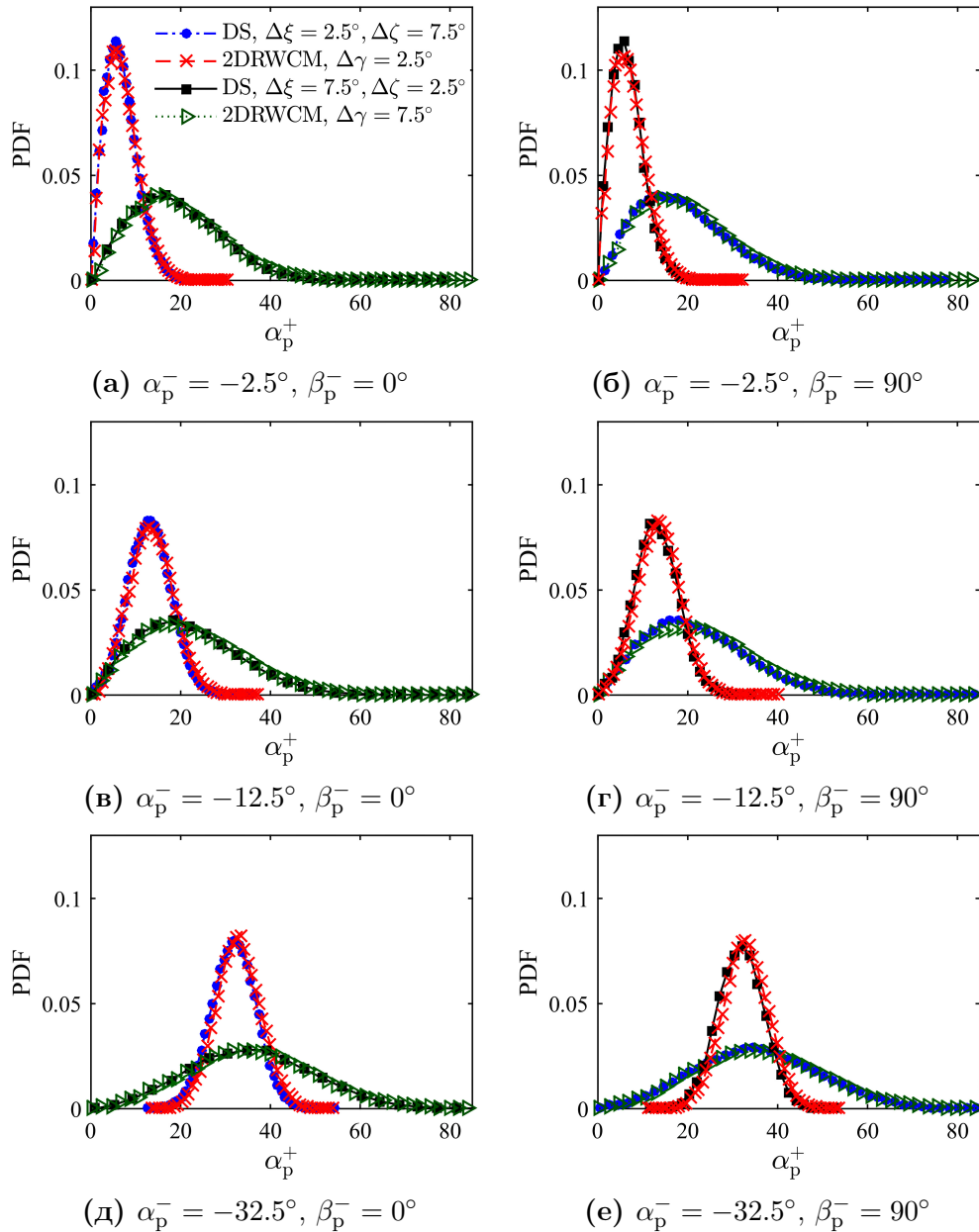
вредности ових расподела су мале, реда величине стандардних девијација $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, углова вектора нормале виртуелног храпавог зида. Стандардне девијације ових расподела се повећавају када угао $|\alpha_p^-|$ честице која прилази зиду, расте.



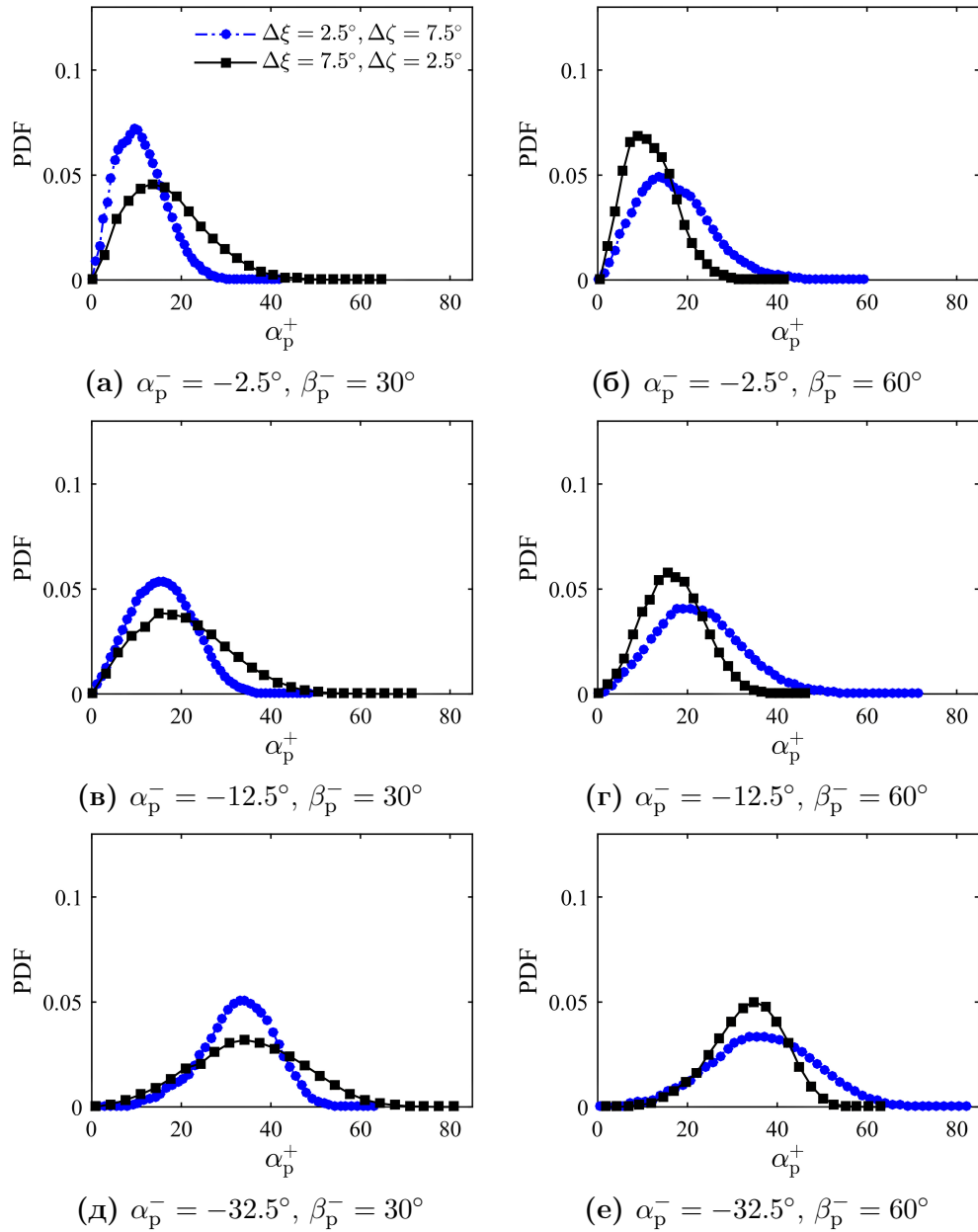
Слика 8.6: Густине расподеле (PDF) угла ζ вектора нормале зида израчунате из детерминистичке симулације за анизотропне зидове чије су стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, при првом судару честице и зида. Ове расподеле су израчунате за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$.



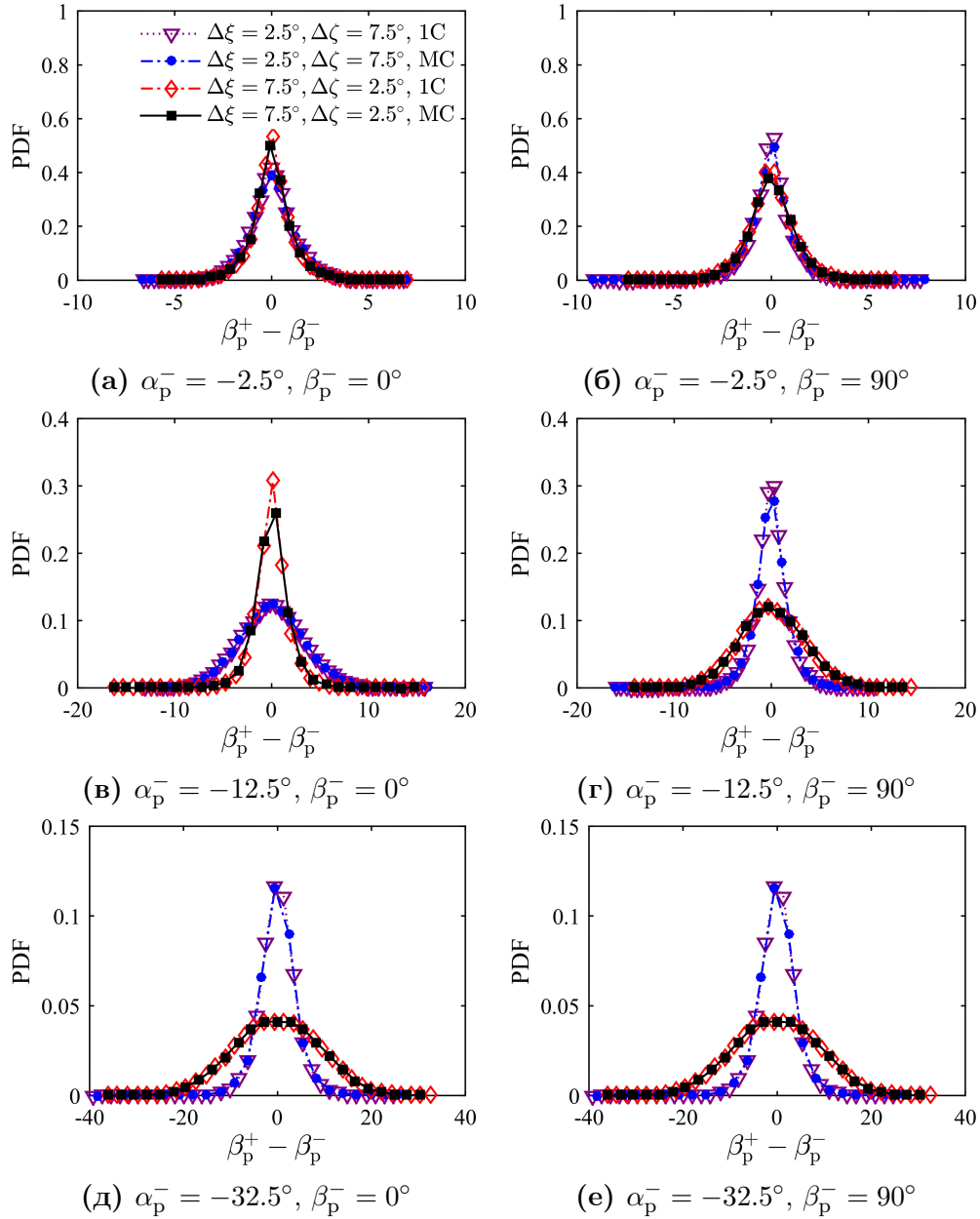
Слика 8.7: Густине расподеле (PDF) угла ζ вектора нормале зида израчунате из детерминистичке симулације за анизотропне зидове чије су стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, при првом судару честице и зида. Ове расподеле су израчунате за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$.



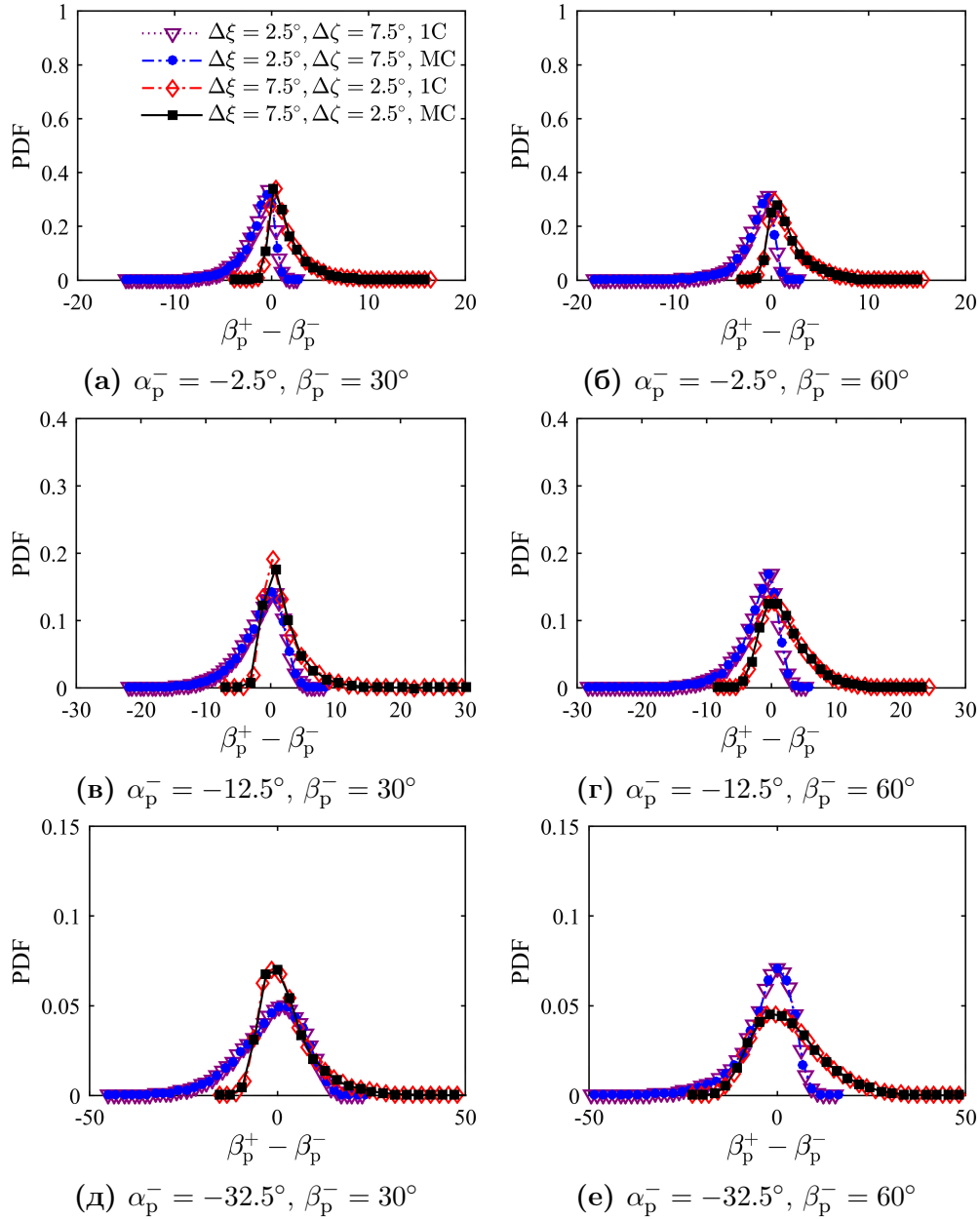
Слика 8.8: Густине расподеле (PDF) последњег угла одбијања честице, α_p^+ , пре враћања честице у струјни ток. Ове расподеле су израчунате из детерминистичких симулација (DS) и 2Д стохастичког модела [6] (2DRWCM) за анизотропне зидове окарактерисаних стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ углова вектора нормале, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$.



Слика 8.9: Густине расподеле (PDF) последњег угла одбијања честице, α_p^+ , пре враћања честице у струјни ток. Ове расподеле су израчунате из детерминистичких симулација (DS) и 2Д стохастичког модела [6] (2DRWCM) за анизотропне зидове окарактерисаних стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ углова вектора нормале, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$.



Слика 8.10: Густине расподеле (PDF) бочних углова честице, $\beta_p^+ - \beta_p^-$, у случају првог (1C) и последњег (MC) одбијања честице од зида. Ове расподеле су израчунате из детерминистичких симулација за анизотропне зидове окарактерисаним стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$.



Слика 8.11: Густине расподеле (PDF) бочних углова честице, $\beta_p^+ - \beta_p^-$, у случају првог (1C) и последњег (MC) одбијања честице од зида. Ове расподеле су израчунате из детерминистичких симулација за анизотропне зидове окарактерисаним стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$.

8.2.1 Стохастичко моделирање углова ξ^* и ζ^* за било који угао β^*

Нека су углови вектора нормале, ξ^* и ζ^* , случајни процеси, $(\xi^*, \zeta^*) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$. Ови углови имају просечне вредности једнаке $\pi/2$,

$$\overline{\xi^*} = \overline{\zeta^*} = \frac{\pi}{2} \quad (8.4)$$

што се потврђује прорачунима у нумеричкој симулацији.

При анизотропној храпавости, варијансе углова ξ^* и ζ^* се разликују, а ако је угао β^* различит од нуле, коваријанса ξ^* и ζ^* је различита од нуле,

$$\Delta(\xi^*)^2 \neq \Delta(\zeta^*)^2, \quad \Delta(\xi^*\zeta^*) \neq 0 \quad (8.5)$$

Како се проучава случај мале храпавости, важе једначине (7.11).

Ако су углови ξ^* и ζ^* Гаусови процеси, густина расподеле $P_{\xi^*\zeta^*}(\theta, \varphi)$ углова ξ^* и ζ^* је 2Д Гаусова расподела,

$$P_{\xi^*\zeta^*}(\theta, \varphi) = A_{\xi\zeta}^* \exp(-B_{\xi}^* [\theta - \overline{\xi^*}]^2 - B_{\zeta}^* [\varphi - \overline{\zeta^*}]^2 - 2 B_{\xi\zeta}^* [\theta - \overline{\xi^*}][\varphi - \overline{\zeta^*}]) \quad (8.6)$$

где је $A_{\xi\zeta}^* = 1/\sqrt{4\pi^2 \det \Sigma^*}$, Σ^* представља корелациони тензор,

$$\Sigma^* = \begin{bmatrix} \Delta(\xi)^* & \Delta(\xi^*\zeta^*) \\ \Delta(\xi^*\zeta^*) & \Delta(\zeta)^* \end{bmatrix}$$

а коефицијенти B_ξ^* , B_ζ^* и $B_{\xi\zeta}^*$ су одређени изразима,

$$\begin{aligned} B_\xi^* &= 1/2 [\sin^2(\beta^*)\Delta\xi^2 + \cos^2(\beta^*)\Delta\zeta^2] / [\Delta\xi^2\Delta\zeta^2] \\ B_\zeta^* &= 1/2 [\cos^2(\beta^*)\Delta\xi^2 + \sin^2(\beta^*)\Delta\zeta^2] / [\Delta\xi^2\Delta\zeta^2] \\ B_{\xi\zeta}^* &= -1/2 \sin(\beta^*) \cos(\beta^*) [\Delta\xi^2 - \Delta\zeta^2] / [\Delta\xi^2\Delta\zeta^2] \end{aligned} \quad (8.7)$$

који следе из израза,

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} B_\xi^* & B_{\xi\zeta}^* \\ B_{\xi\zeta}^* & B_\zeta^* \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma}^{*-1}/2$$

уз коришћење релација (8.3).

Условне вероватноће углова ξ^* и ζ^* су:

$$P_{\xi^*}(\theta|\varphi) = P_{\xi^*}(\theta|\zeta^* = \varphi) = P_{\xi^*\zeta^*}(\theta, \varphi)/P_{\zeta^*}(\varphi) \quad (8.8)$$

$$P_{\zeta^*}(\varphi) = \int P_{\xi^*\zeta^*}(\theta, \varphi) d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta(\zeta^*)^2} \exp\left(-\frac{[\varphi - \bar{\zeta}^*]^2}{2\Delta(\zeta^*)^2}\right) \quad (8.9)$$

и

$$P_{\zeta^*}(\varphi|\theta) = P_{\zeta^*}(\varphi|\xi^* = \theta) = P_{\xi^*\zeta^*}(\theta, \varphi)/P_{\xi^*}(\theta) \quad (8.10)$$

$$P_{\xi^*}(\theta) = \int P_{\xi^*\zeta^*}(\theta, \varphi) d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta(\xi^*)^2} \exp\left(-\frac{[\theta - \bar{\xi}^*]^2}{2\Delta(\xi^*)^2}\right) \quad (8.11)$$

По дефиницији, важи,

$$\int P_{\xi^*}(\theta|\varphi) d\theta = \int P_{\zeta^*}(\varphi|\theta) d\varphi, \quad \forall \varphi, \theta \quad (8.12)$$

Нумеричке симулације потврђују да углови ξ^* и ζ^* имају нормалне расподеле (8.11) и (8.9), редоследно, са просечним вредностима приближно једнаким $\bar{\xi}^* = \bar{\zeta}^* = \pi/2$ и стандардним девијацијама које следе из (8.3).

8.2.2 Моделирање првих углова вектора нормале анизотропног зида које честице виде при великим долазним угловима

Нека су углови γ и γ^* дати једначинама (7.25) и (7.28), редоследно, с тим што су у случају анизотропних зидова, углови ξ и ζ случајне променљиве које имају 2Д Гаусову расподелу:

$$P_{\xi\zeta}(\theta, \varphi) = A_{\xi\zeta} \exp(-B_{\xi}[\theta - \bar{\xi}]^2 - B_{\zeta}[\varphi - \bar{\zeta}]^2) \quad (8.13)$$

где су:

$$A_{\xi\zeta} = \frac{1}{2\pi \Delta\xi \Delta\zeta}, \quad B_{\xi} = \frac{1}{2\Delta\xi^2}, \quad \text{и} \quad B_{\zeta} = \frac{1}{2\Delta\zeta^2} \quad (8.14)$$

са просечним вредностима $\bar{\xi} = \bar{\zeta} = \pi/2$ и стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ ($\Delta\xi \neq \Delta\zeta$).

Из (7.25), (7.28), (8.3) и (8.13) следи да γ и γ^* такође имају 2Д Гаусову расподелу, одређеном са,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \bar{\gamma}^* = 0 \\ \Delta\gamma^2 &= \cos^2(\beta_p^-) \Delta\xi^2 + \sin^2(\beta_p^-) \Delta\zeta^2 \\ \Delta\gamma^{*2} &= \sin^2(\beta_p^-) \Delta\xi^2 + \cos^2(\beta_p^-) \Delta\zeta^2 \\ \Delta(\gamma\gamma^*) &= \sin(\beta_p^-) \cos(\beta_p^-) [\Delta\xi^2 - \Delta\zeta^2] \end{aligned} \quad (8.15)$$

која одговара густини расподеле,

$$P_{\gamma\gamma^*} = A_{\gamma\gamma^*} \exp(-B_{\gamma}\theta^2 - B_{\gamma^*}\varphi^2 - 2B_{\gamma\gamma^*}[\theta\varphi]) \quad (8.16)$$

где су,

$$A_{\gamma\gamma^*} = \frac{1}{2\pi \Delta\xi \Delta\zeta} \quad (8.17)$$

и

$$\begin{aligned} B_\gamma &= \Delta\gamma^{*2} / [2 \Delta\xi^2 \Delta\zeta^2] = \frac{\sin^2(\beta_p^-)\Delta\xi^2 + \cos^2(\beta_p^-)\Delta\zeta^2}{2 \Delta\xi^2 \Delta\zeta^2} \\ B_{\gamma^*} &= \Delta\gamma^2 / [2 \Delta\xi^2 \Delta\zeta^2] = \frac{\cos^2(\beta_p^-)\Delta\xi^2 + \sin^2(\beta_p^-)\Delta\zeta^2}{2 \Delta\xi^2 \Delta\zeta^2} \\ B_{\gamma\gamma^*} &= -\sin(\beta_p^-) \cos(\beta_p^-) \frac{\Delta\xi^2 - \Delta\zeta^2}{2 \Delta\xi^2 \Delta\zeta^2} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Коначно, углови вектора нормале виртуелног зида, ξ и ζ , следе из (7.31), (7.33), (7.32).

8.2.3 Моделирање првог вектора нормале анизотропног зида при било ком долазном углу честице

Као што је речено у одељку 7.3.3, када је угао $|\alpha_p^-|$ мали, реда величине стандардних девијација $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, честице не виде са једнаком вероватноћом позитивне и негативне углове неравнина зида. Да би се урачунао овај ефекат, Sommerfeld and Huber [2] предлажу расподелу која задовољава услов $\gamma > \alpha$ да се честица после судара са зидом враћа у струјни ток.

Стохастичко моделирање углова γ и γ^* при судару честице са анизотропним зидом може се извршити према следећем процесу:

- Углови γ и γ^* се узоркују према 2Д Гаусовој расподели датој са (8.16)
- Угао γ мора да задовољи ефективну Зомерфелдову расподелу која урачунава ефекат сенке, при чему је ова расподела дата изразима (7.44) и (7.45). У супротном, узорковани пар углова (γ, γ^*) се одбацује.

Густине расподеле првог угла γ које су израчунате путем детерминистичких симулација и ефективном Зомерфелдовом расподелом (7.44), за различите углове

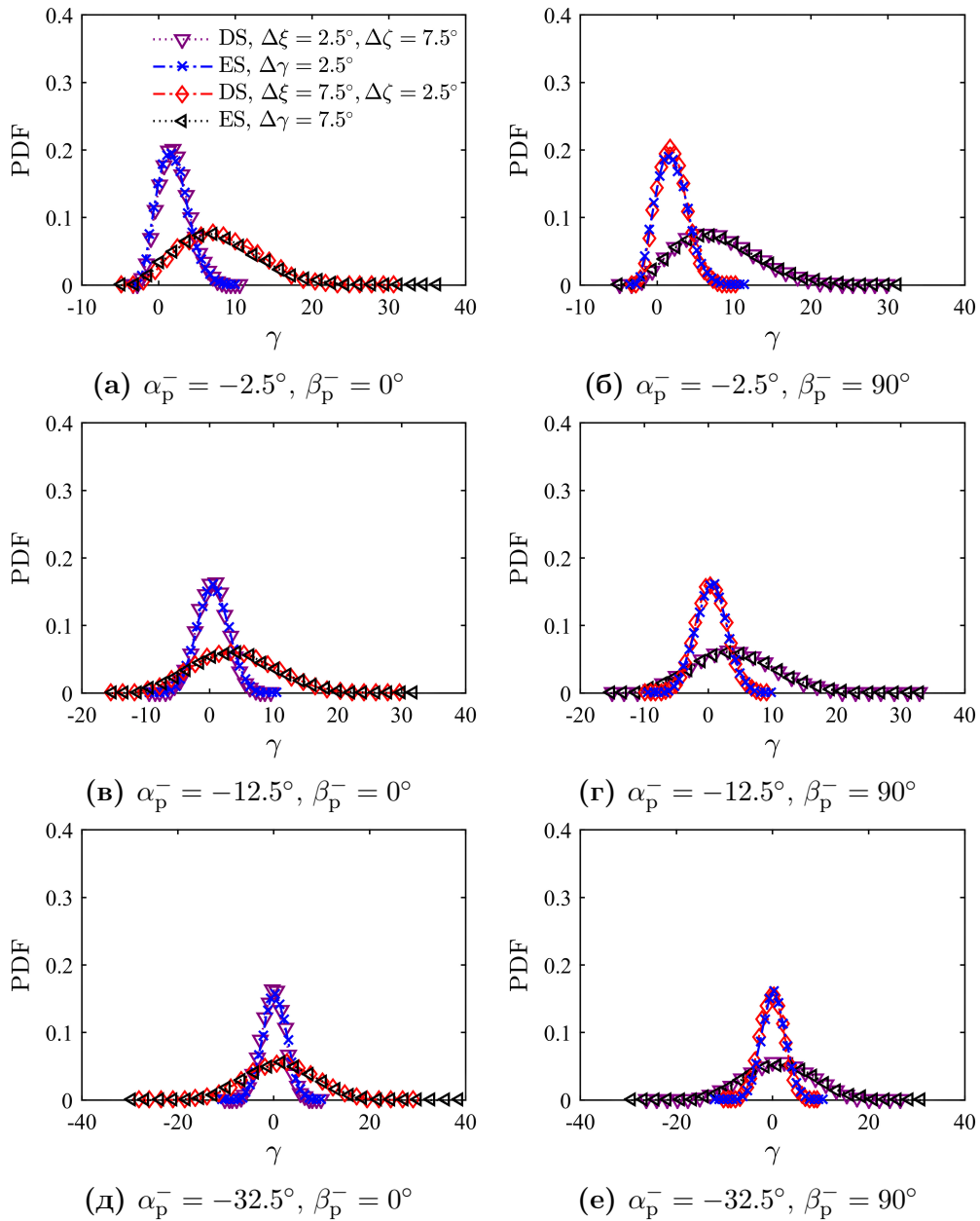
α_p^- и β_p^- којим честица прилази зиду, приказане су на сликама 8.12 и 8.13. Слагање ових расподела је веома добро за све долазне углове честица. Може се видети да при великим угловима честица, α_p^- ($|\alpha_p^-| \gg \Delta\xi$ и $\Delta\zeta$), угао γ има нормалну расподелу са стандардном девијацијом $\Delta\gamma$ која следи из (8.15). Када угао $|\alpha_p^-|$ опада, расподела угла γ се мења због ефекта сенке.

На сликама 8.14 и 8.15 су приказане густине расподеле угла γ^* при првом судару честице и зида, добијених детерминистичком симулацијом и статистичким моделом (8.16), за различите долазне углове честица, α_p^- и β_p^- . Слагање резултата ових симулација и модела је веома добро. За бочне долазне углове честица, $\beta_p^- = 0^\circ$ и 90° , угао γ^* има нормалну расподелу са нултом просечном вредношћу и стандардном девијацијом $\Delta\gamma^*$ која следи из (8.15), независно од угла α_p^- којим честица прилази зиду. Међутим, за углове $\beta_p^- = 30^\circ$ и 60° , угао γ^* има приближно нормалну расподелу са просечном вредношћу која се мења када се угао α_p^- ($|\alpha_p^-| \gg \Delta\xi$ и $\Delta\zeta$) којим честица прилази зиду смањује, док стандардна девијација те расподеле остаје приближно константна.

8.2.4 Моделирање вишеструких судара честица са зидом

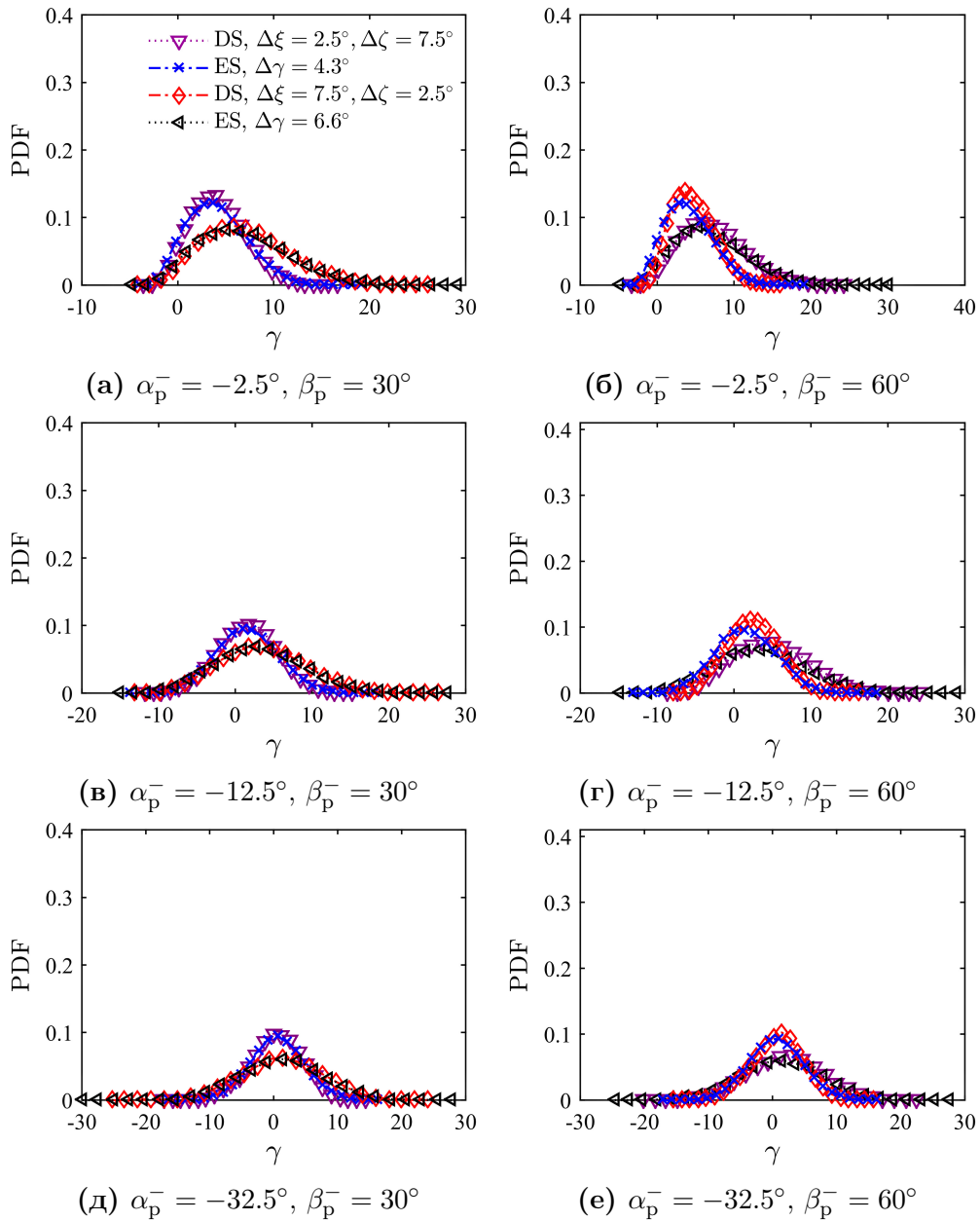
Према раду Kopan et al. [6], густина расподеле углова одбијања честица које имају само један судар са зидом пре враћања у струјни ток је приближно једнака густини расподеле углова одбијања честица које имају више судара са зидом. Ова вероватноћа је израчуната у детерминистичкој симулацији судара честице са 2Д зидом генерисаног у складу са приступом Sommerfeld and Huber [2]. Аналитички облик ове вероватноће наведен је у одељку 7.3.4, једначина (7.47).

На слици 8.16 је приказана вероватноћа да честице имају само један судар са зидом према изразу (7.47), за $\psi = 1.5$ и $\Delta\gamma$ из (8.15) као и вероватноћа да честице имају само један судар са зидом, израчуната из детерминистичке симулације за анизотропне површине са различитим степенима храпавости и различитим долаз-



Слика 8.12: Густине расподеле (PDF) угла γ при првом судару честице и зида, израчунате из детерминистичке симулације и ефективне Зомерфелдове расподеле за анизотропне зидове окарактерисане стандардном девијацијом угла вектора нормале, $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$.

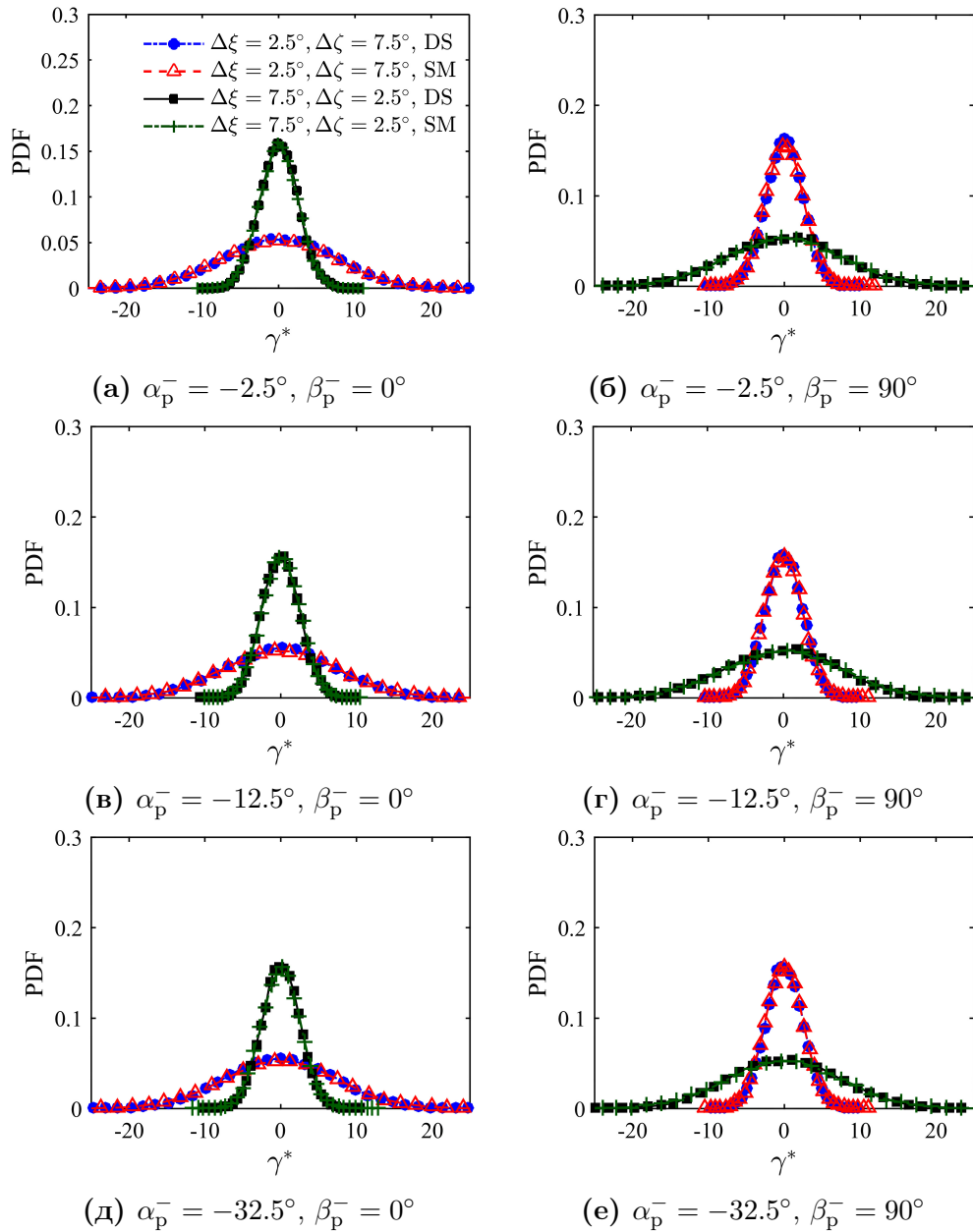
ним угловима честице, α_p^- и β_p^- . Слагање ових вероватноћа је веома добро. Разлог је што су вишеструки судари честице са зидом најважнији за честице са малим долазним углом $|\alpha_p^-|$ и после одбијања тих честица од зид, оне добијају мали боч-



Слика 8.13: Густине расподеле (PDF) угла γ при првом судару честице и зида, израчунате из детерминистичке симулације и ефективне Зомерфелдове расподеле за анизотропне зидове окарактерисане стандардном девијацијом угла вектора нормале, $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$.

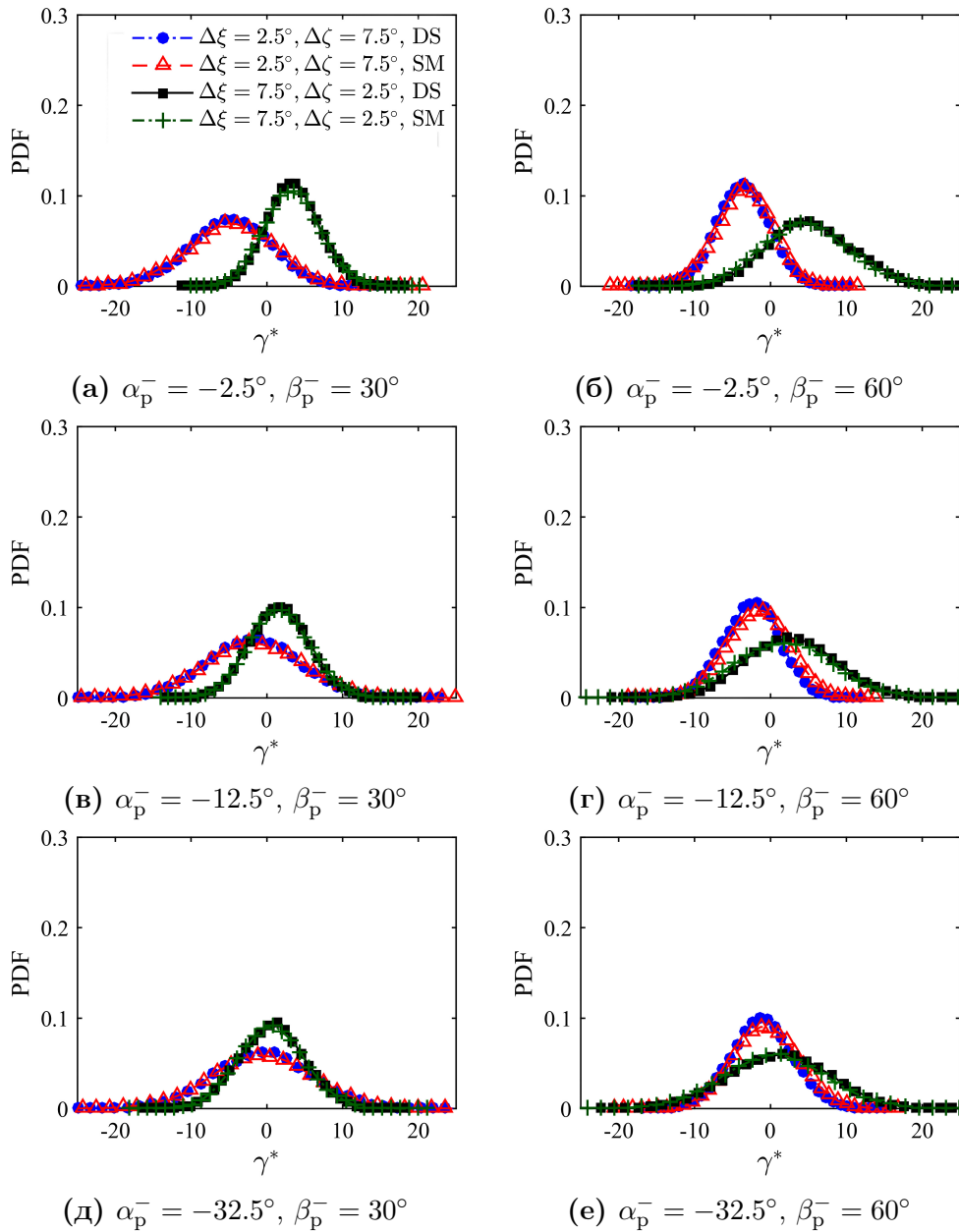
ни угао, реда величине $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ па је њихово кретање приближно $2D$ у долазној равни честица.

Закључује се да у случају судара честице са анизотропним зидом, вероватноћа



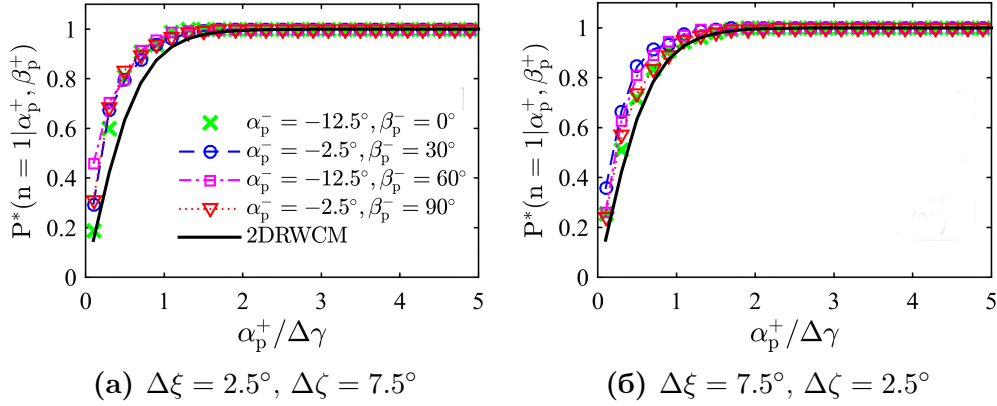
Слика 8.14: Густине расподеле (PDF) угла γ^* при првом судару честице и зида, израчунате из детерминистичке симулације (DS) и статистичким моделом (8.16) за неизентропске зидове окарактерисане стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ углова вектора нормале, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$.

да честице имају само један судар са зидом пре враћања у струјни ток остаје непромењена у односу на израз за вероватноћу да честице имају само један судар са 2Д зидом Kopan et al. [6], израз (7.47).



Слика 8.15: Густине расподеле (PDF) угла γ^* при првом судару честице и зида, израчунате из детерминистичке симулације (DS) и статистичким моделом (8.16) за неизентропске зидове окарактерисане стандардним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ углова вектора нормале, за различите вредности угла α_p^- и вредности $\beta_p^- = 30^\circ$ и $\beta_p^- = 60^\circ$.

Вероватноћа да честице имају само један судар са зидом пре враћања у струјни ток не зависи од угла β_p^- којим честица прилази зиду и од угла β_p^+ након одбијања честице од зида, што је случај и при судару честице са изотропним зидом, израз



Слика 8.16: Поређење аналитичког израза (7.47) за вероватноћу да честица има само један судар са зидом пре враћања у струјни ток, према [6] (2DRWCM), са вероватноћом да честица има само један судар са зидом, израчунатој у детерминистичкој симулацији удара честице у анизотропни зид окарактерисан стандарним девијацијама $\Delta\xi$ и $\Delta\zeta$ углова вектора нормале, за различите углове, α_p^- и β_p^- .

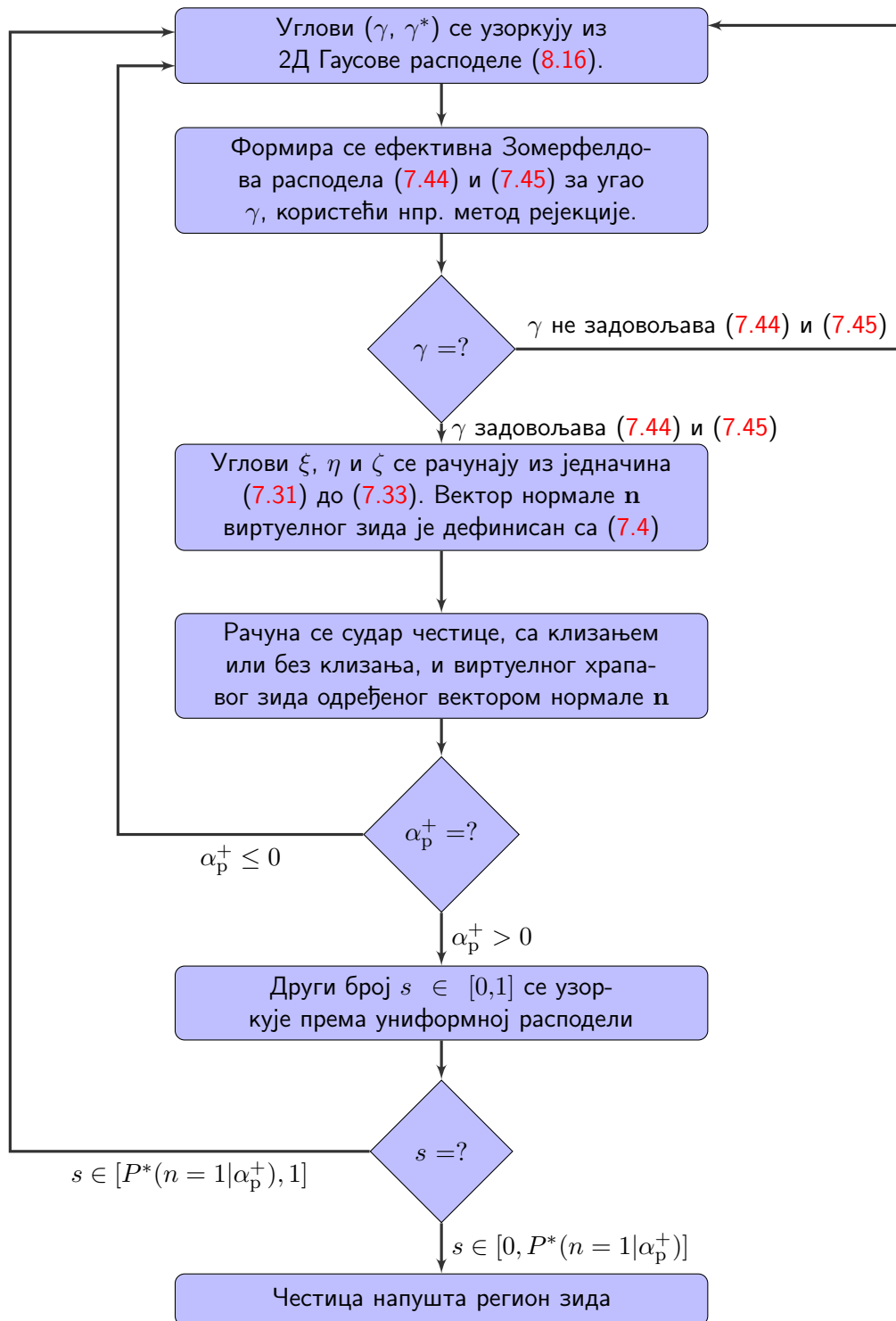
(7.48).

8.2.5 Стохастичка процедура за прорачун 3Д одбијања честице од анизотропног зида мале храпавости при Лагранжовом поступку

У Лагранжовом поступку, како би се урачунало одбијање честице од анизотропног храпавог зида, када центар честице достигне удаљеност једнаку половини пречника честице од граничне макроскопски глатке површине, треба применити стохастичку процедуру са слике 8.17.

8.2.6 Валидација моделованих углова вектора нормале при првом судару честице са анизотропним зидом

На слици 8.18 је показано поређење густина расподеле углова вектора нормале, ξ и ζ , при првом одбијању честице од зида, користећи детерминистичке симулације



Слика 8.17: Алгоритам за израчунавање 3Д одбијања честице од анизотропног храпавог зида мале храпавости.

и стохастичку процедуру са слике 7.14 (при чему се занемарује могућност више-струких судара честице и зида, с обзиром да се само моделира први судар честице и зида). Као што се види, слагање је одлично за све испитане углове α_p^- и β_p^- , у случају виртуелних зидова одређених стандардном девијацијама углова вектора нормале, $(\Delta\xi, \Delta\zeta) = (2.5^\circ, 7.5^\circ)$ и $(\Delta\xi, \Delta\zeta) = (7.5^\circ, 2.5^\circ)$.

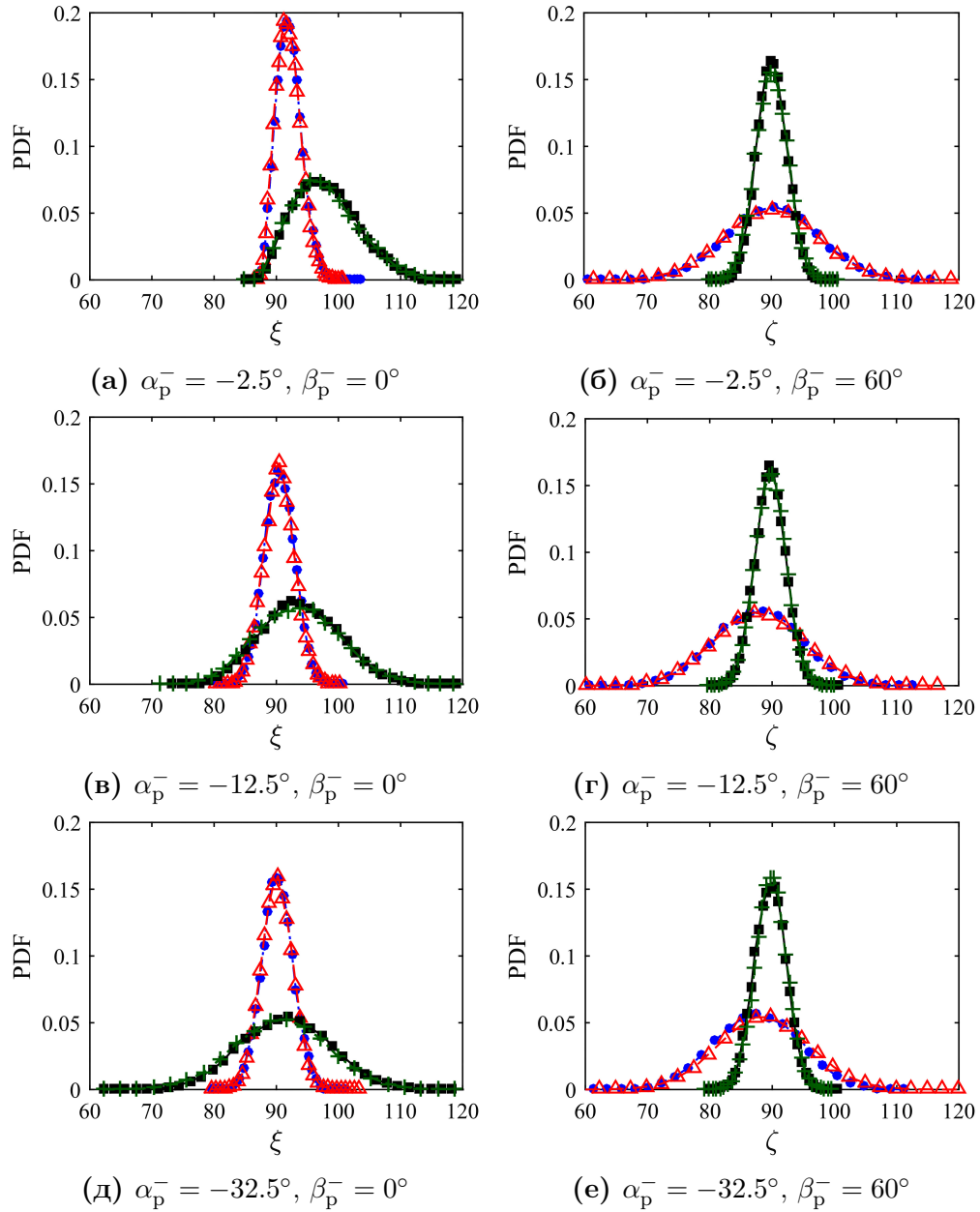
8.3 Примена стохастичког модела судара честице са анизотропним храпавим зидом

8.3.1 Поређење густина расподеле углова одбијања честице из експерименталних мерења, детерминистичких и стохастичких симулација

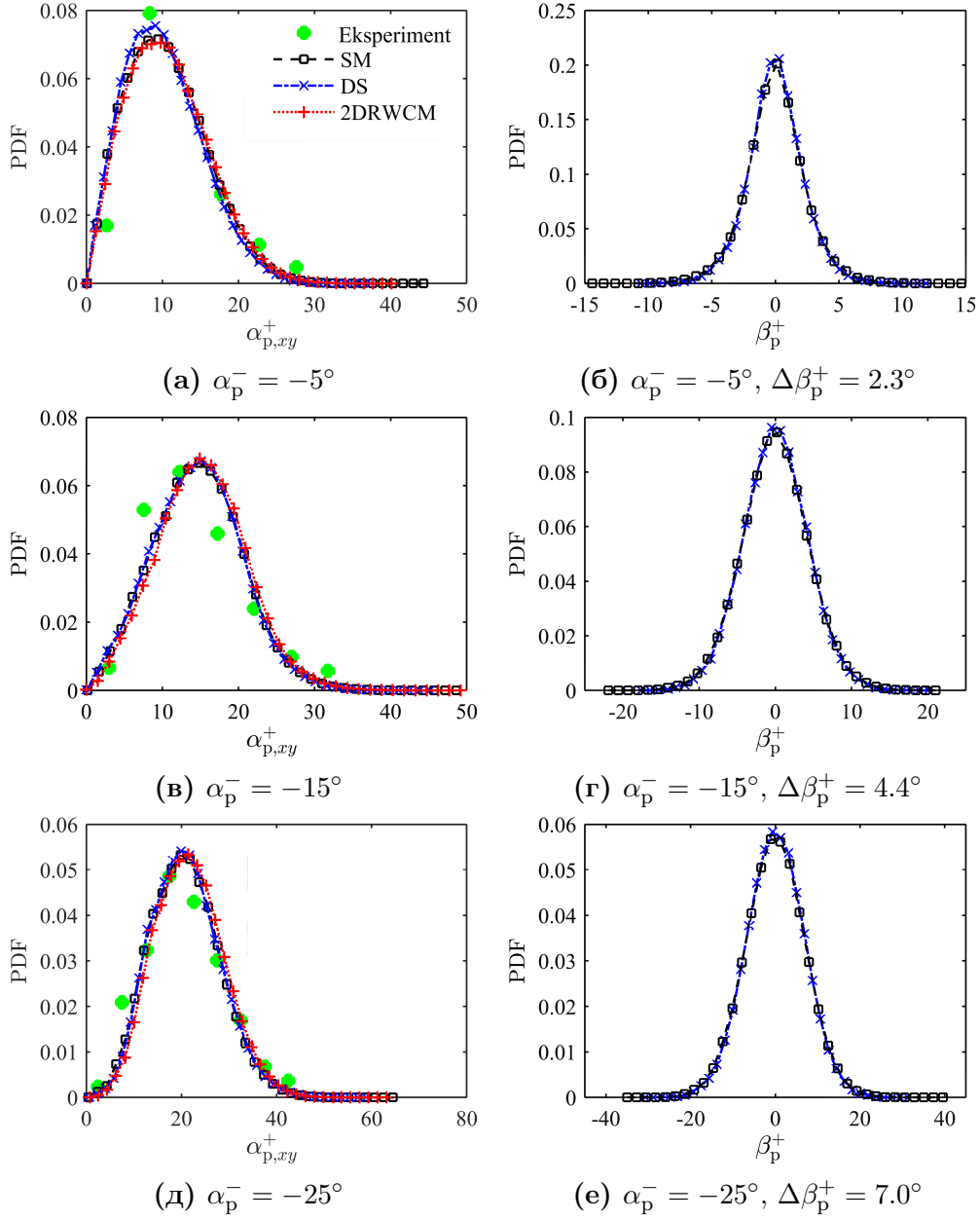
У $x - y$ равни, експериментални резултати [2] угла одбијања $\alpha_{p,xy}^+$ (в. сл. 7.16) стаклених честица пречника $500 \mu\text{m}$ од челичног зида пореде се са резултатима 3Д детерминистичке симулације, 2Д стохастичког модела [6] и предложене стохастичке процедуре за одбијање честице од анизотропног зида док у $y - z$ равни пореде се само резултати 3Д детерминистичких и стохастичких симулација судара честице и анизотропног зида, из разлога што експериментални резултати нису доступни у овој равни. Угао $\alpha_{p,xy}^+$ је дефинисан изразом (7.49).

Изабрана комбинација величине честица и структуре храпавог зида је еквивалентна виртуелном храпавом зиду чија је стандардна девијација угла нагиба зида $\Delta\xi = 3.8^\circ$.

Како вредност стандардне девијације $\Delta\zeta$ угла ζ вектора нормале виртуелног зида, није одређена у експерименту, у детерминистичкој симулацији се усваја највећа вредност ове девијације за случај мале храпавости површине, $\Delta\zeta = 7.5^\circ$,



Слика 8.18: Валидација моделованих углова вектора нормале при првом судару честице са анизотропним зидом. Углови којима честица прилази зиду су означени са α_p^- и β_p^- . Легенда је иста као на слици 8.15.



Слика 8.19: Густине расподеле углова одбијања честица, $\alpha_{p,xy}^+$, стаклених честица од челичног зида, при различитим долазним угловима честица, α_p^- и $\beta_p^- = 0^\circ$. Ове расподеле су добијене из експеримента [2], стохастичког модела (SM) и 2Д модела (2DRWCM) [6]. Стандардна девијација бочног угла одбијања честица је $\Delta\beta_p^+$.

како би се видео највећи утицај стандардне девијације $\Delta\zeta$ вектора нормале виртуелног зида на карактеристике одбијања честице од зида.

Како би се представила ова конфигурација у детерминистичкој симулацији, генерисани виртуелни зид има RMS висине неравнина $h = 0.47 \mu\text{m}$ и корелационе дужинске размере у x и z правцу, $c_{L,x} = 10 \mu\text{m}$ и $c_{L,z} = 5 \mu\text{m}$, редоследно.

Брзине честица као и једначине за прорачун не-еластичног судара честице са зидом су дефинисане у одељку 7.4.1.

На сликама 8.19 (а), (в) и (д) су приказане густине расподеле угла одбијања честица, $\alpha_{p,xy}^+$, за различите долазне углове честица, α_p^- и $\beta_p^- = 0^\circ$. Слагање расподела добијених из експеримента [2], стохастичког модела (SM) и 2Д модела (2DRWCM) [6] је добро, што доводи до закључка да утицај стандардне девијације $\Delta\zeta$ на густине расподеле угла α_p^+ није велики.

У $y - z$ равни, иако је треће укључено при прорачуну судара честице и зида, расподела угла бочне дисперзије честица остаје Гаусова. Како долазни угао честица, $|\alpha_p^-|$, расте, стандардна девијација $\Delta\beta_p^+$ угла бочне дисперзије честица расте. Слагање резултата детерминистичке и стохастичке симулације је одлично.

Предложени стохастички модел за судар честице са анизотропном површином своди се на 2Д модел Konan et al. [6], ако је корелациона дужинска размера у z правцу знатно већа од оне у x правцу ($c_{L,z} \gg c_{L,x}$), а ако су оне једнаке у оба правца ($c_{L,x} = c_{L,z}$), предложени модел описује 3Д судар честице са изотропним зидом.

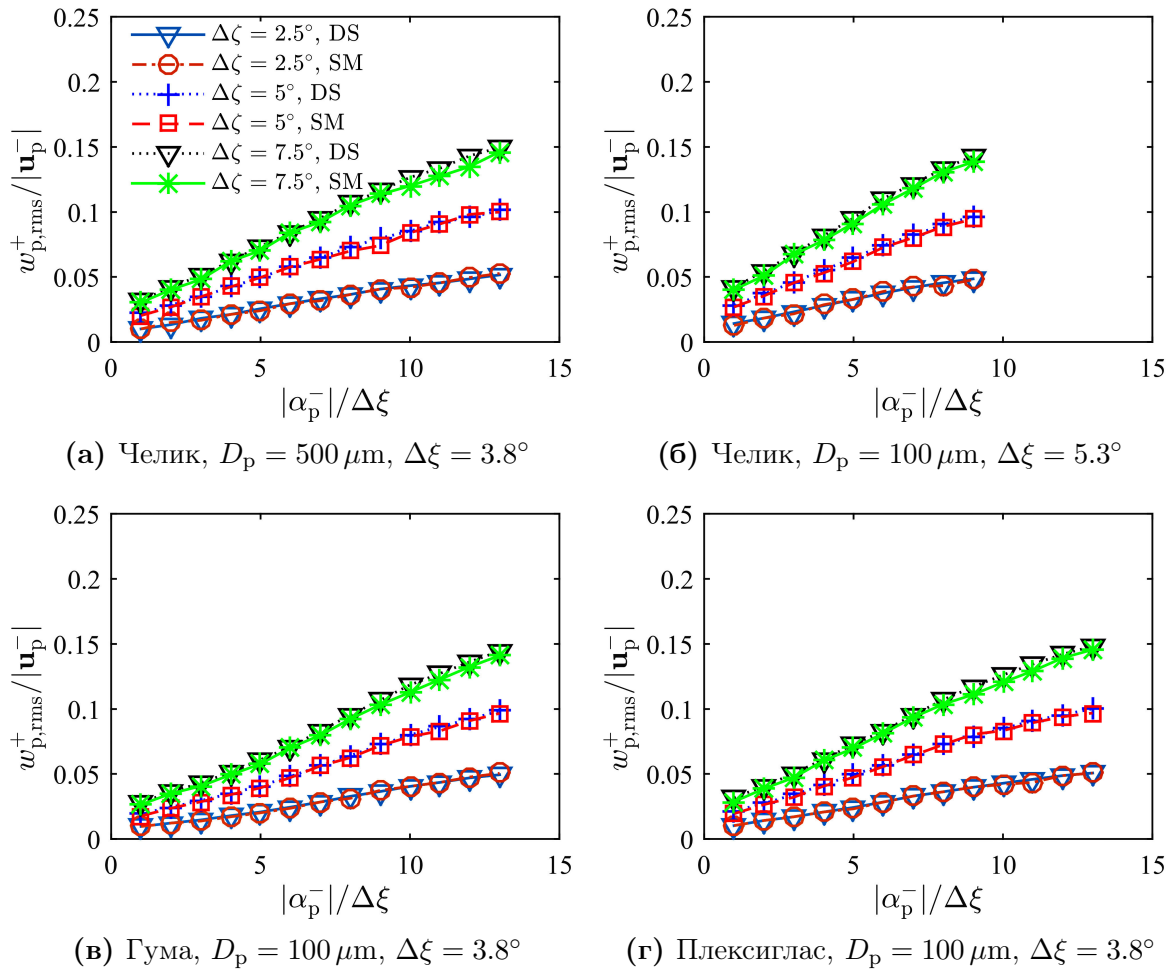
8.3.2 RMS попречне пројекције брзине при одбијању честица од зида, у зависности од материјала зидова и пречника честице

При турбулентном струјању мешавине честица и ваздуха у хоризонталном каналу правоугаоног попречног пресека, у експерименту Sommerfeld and Huber [2], као што је речено у претходном одељку, углови одбијања честице су снимљени у $x - y$ равни, за различите материјале зида и стаклене честице различитих пречника. Како нема информација у експерименту о вредности стандардне девијације $\Delta\zeta$, у овом одељку ова вредност је варирана у опсегу од 2.5° до 7.5° и пореде се резултати одговарајућих стохастичких и детерминистичких симулација, за судар честица са анизотропним зидовима. Симулирају се углови $|\alpha_p^-|$ до приближно 50° , јер је канал у оригиналном експерименту мале висине и долазни углови $|\alpha_p^-|$ честице према зиду су мали. Како би се проценило стварање попречне пројекције брзине честица после судара честица са зидом, усваја се да су бочни углови честица једнаки нули, $\beta_p^- = 0^\circ$. Расподела овог угла је у општем случају непозната. Сви детаљи везано за експеримент могу се наћи у [2].

На слици 8.20 су приказане попречне карактеристике одбијања честице од анизотропног храпавог зида чија је стандардна девијација $\Delta\xi$ вектора нормале виртуелног зида, одређена експериментално за различите комбинације материјала зидова и стаклених честица различитих пречника. Ове комбинације су:

- челични зид и честице пречника $D_p = 500 \mu\text{m}$ ($\Delta\xi = 3.8^\circ$, слика 8.20а),
- челични зид и честице пречника $D_p = 100 \mu\text{m}$ ($\Delta\xi = 5.3^\circ$, слика 8.20б),
- гумени зид и честице пречника $D_p = 100 \mu\text{m}$ ($\Delta\xi = 3.8^\circ$, слика 8.20в) и
- зид од плексигласа и честице пречника $D_p = 100 \mu\text{m}$ ($\Delta\xi = 3.8^\circ$, слика 8.20г).

RMS попречне пројекције брзине честица, $w_{p,\text{rms}}^+$, после одбијања честица од



Слика 8.20: Зависност односа RMS попречне пројекције брзине честица, $w_{p,\text{rms}}^+$, генерисане при судару честице са зидом и интензитета долазне брзине честице, $|\mathbf{u}_p^-|$, од односа долазног угла $|\alpha_p^-|$ и стандардне девијације $\Delta\xi$ вектора нормале виртуелног зида, за различите вредности стандардне девијације $\Delta\zeta$ вектора нормале виртуелног зида, при долазном углу $\beta_p^- = 0^\circ$ честице. Честице су направљене од стакла, пречника D_p а зидови су направљени од различитих материјала, као што је описано у [2]. DS представља детерминистичку симулацију, а SM представља стохастички модел за судар честице са анизотропним зидом.

анизотропног зида, у свим испитаним случајевима повећавају се када долазни угао $|\alpha_p^-|$ и стандардна девијација $\Delta\zeta$ расту. За највеће испитане односе долазног угла честице и стандардне девијације угла вектора нормале, $|\alpha_p^-|/\Delta\xi$, у свим експерименталним случајевима RMS попречне пројекције брзине, $w_{p,\text{rms}}^+$, износе око 15% интензитета долазне брзине честице, $|\mathbf{u}_p^-|$. Слагање резултата детерминистичке и

стохастичке симулације је веома добро у свим случајевима.

Док је утицај хрпавости на пројекцију брзине честица управну на зид канала највећи при малим долазним угловима $|\alpha_p^-|$, утицај хрпавости на стварање попречне пројекције брзине w_p^+ је израженији при већим долазним угловима $|\alpha_p^-|$ честице.

Поглавље 9

LES струјања чистог флуида и LES-DPS мешавине гаса и честица у хоризонталном каналу правоугаоног попречног пресека

9.1 Опис експеримента

Ваздух (или мешавина ваздуха и честица) струји у хоризонталном каналу правоугаоног попречног пресека. Дужина канала је 6 m, а његова висина и ширина је 35 mm и 350 mm, редоследно. Средња брзина ваздуха у свим извршеним експериментима је $U_b = 20 \text{ m/s}$ а динамичка вискозност ваздуха је $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Честице које се убацују у струју ваздуха на почетку канала су сферне, направљене од стакла, густине $\rho_p = 2450 \text{ kg/m}^3$. Горњи и доњи зид канала су плоче које могу да се мењају, што омогућава експерименте са зидовима различите храпавости. Експерименти су извршени за различите пречнике честица (од 60 до 625 μm) и различите степене пуњења дисперзне фазе. На дужини 5.8 m од улаза у канал, врше

се мерења брзине флуида и честица. Детаљан опис експерименталне инсталације могуће је пронаћи у Sommerfeld and Kussin [10].

9.2 LES симулација турбулентног струјања чистог флуида

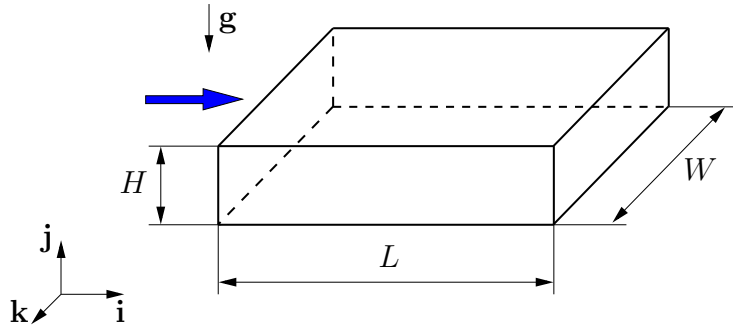
LES симулације у овој дисертацији извршене су користећи програмски пакет OpenFOAM, верзија 1706.

9.2.1 Прорачунски домен

С обзиром да је на мерном месту експерименталне конфигурације, описане у одељку 9.1, развијено турбулентно струјање, при LES симулацији може се користити знатно мањи прорачунски домен у поређењу са стварном дужином канала, при чему се користе периодични гранични услови у x и z правцу. Смањивањем прорачунског домена смањују се трошкови прорачуна, али са друге стране, пар периодичних граница домена треба да буде довољно удаљен, како ови гранични услови не би утицали негативно на резултате струјања. При симулацијама које су изведене у овој дисертацији, прорачунски домен има дужину 140 mm, висину 35 mm и ширину 52.5 mm, као што је приказано на слици 9.1. Провера адекватности избора овог домена извршена је анализом корелација брзине, у одељку 9.3.3.

9.2.2 Карактеристике LES симулације струјања чистог флуида

Струјање нестишљивог флуида је описано филтрираном једначином континуитета (5.5) и филтрираном једначином количине кретања (5.6).



Слика 9.1: Шематски приказ дела канала ($L = 140 \text{ mm}$, $H = 35 \text{ mm}$ и $W = 52.5 \text{ mm}$) у коме се врше LES симулације.

У LES симулацији, при турбулентном струјању у каналу могуће је остварити или константан масени проток или константан градијент притиска [59, 60]. У LES симулацијама чије се резултати представљају у овој дисертацији, изабран је услов константног масеног протока. Градијент притиска је повезан са тангенцијалним напоном на зиду путем израза [61],

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\tau_w}{\delta} \quad (9.1)$$

где је $\delta = \frac{H}{2}$. Према томе, вредност просечне брзине U_b једнака је просечној брзини која је дефинисана у експериментима (око 20 m/s), а вредност привидне брзине, $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$, израчунава се у симулацији.

При покретању симулације, струјање је ламинарно и окарактерисано одсуством механизма којим би се започео процес преласка ламинарног у турбулентно струјање. Из тог разлога, почетни параболички профил брзине се модификује према [62] тако да се стварају вртлози са одговарајућим статистичким особинама у близини зида и уводе се нестабилности у струјни ток, услед чега струјање врло брзо постаје турбулентно.

Након периода $50 \delta/u_\tau$, када се сматра да је формирано статистички стационарно турбулентно струјање, у LES симулацији врши се временско осредњавање

брзине у трајању око $110 \delta / u_\tau$, након чега се симулација завршава. Потом, брзине се осредњавају у x и z правцу.

9.2.3 Дискретизација

Број ћелија у x , y и z правцу је 135, 160 и 142, редоследно, па је укупан број ћелија у прорачунском домену 3 067 200. Мрежа је блок-структурирана, са равномерном величином ћелија у x и z правцу, док је у y правцу мрежа финија према зидовима, са односом висина ћелија на оси и висина ћелија у контакту са зидом $r_E = 37$.

Временска дискретизација је постигнута методом диференцирања уназад. Временски корак симулације флуида је променљив а максимална вредност Курантовог броја је $Co = 0.5$. При дискретизацији конвективног члана и градијената, користи се линеарна интерполација, док је при је дискретизацији флуксева турбулентне кинетичке енергије и тензора вртлога малих размера коришћена TVD интерполациона шема, базирана на узводној и линеарној интерполацији. За решавање спреге притиска и брзине користи се PISO алгоритам.

9.2.4 Гранични услови

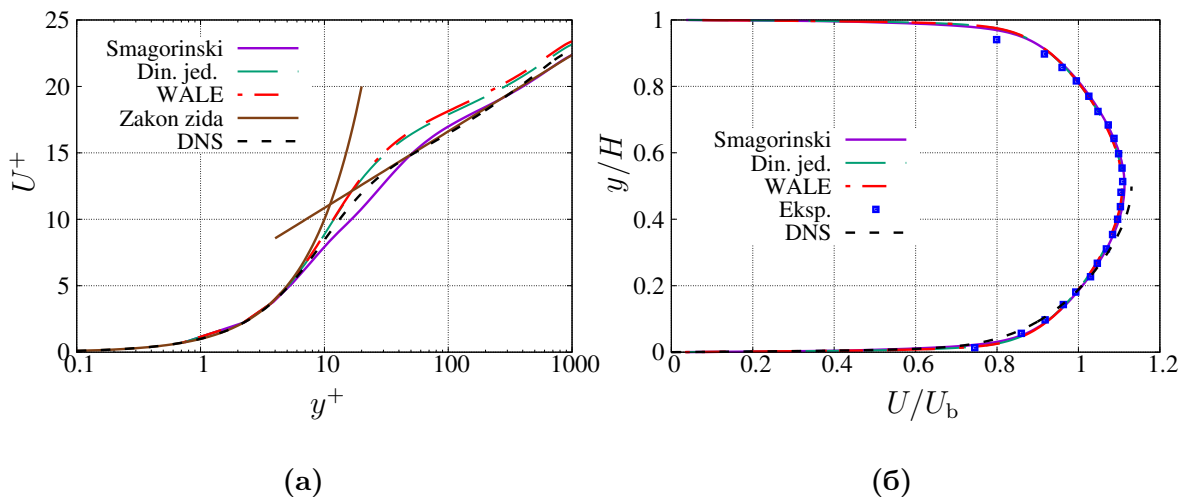
Као што је речено, у x и z правцу прорачунски домен је периодичан (постоји један пар периодичних површи за $x = 0$ и $x = L$, а други пар периодичних површи је за $z = 0$ и $z = W$), а у y правцу струјање је ограничено зидовима. На зидовима важи услов лепљења за брзину, $\bar{\mathbf{u}} = 0$, а за притисак важи Нојманов услов $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$. У зависности од модела апроксимације вртлога малих размера, уколико је потребно, користи се да је на зидовима кинетичка енергија вртлога малих размера једнака нули, $k_{sgs} = 0$.

9.3 Анализа резултата LES симулација турбулентног струјања чистог флуида

У овом одељку пореде се резултати LES симулација за чист флуид, добијених применом различитих SGS модела: модела Смагоринског, динамичког једно-једначинског и WALE модела.

9.3.1 Профили просечне брзине флуида

На слици 9.2а приказана је просечна брзина флуида у близини зида, а на слици 9.2б приказана је просечна брзина флуида дуж висине канала. На овим сликама приказују се и профили који су добијени DNS симулацијом Lee and Moser [7] за Рејнолдсов број базиран на привидној брзини и половини висине канала, $Re_\tau = 1000$, док је у свим LES симулацијама струјања флуида у каналу $Re_\tau \approx 1200$. Од наведе-



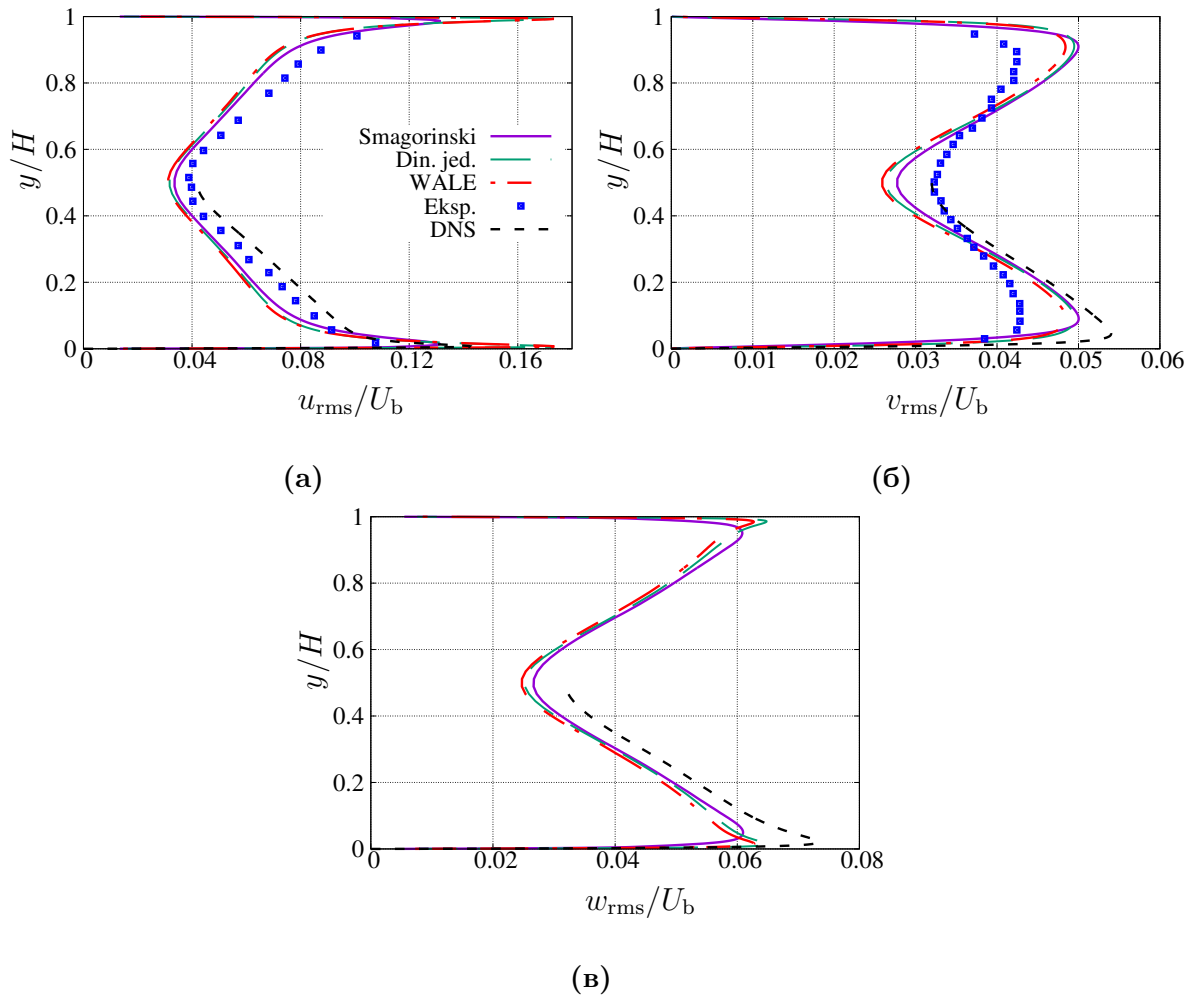
Слика 9.2: Просечна брзина флуида у близини зида (слика а) и просечна брзина флуида дуж висине канала (слика б), добијене коришћењем модела Смагоринског, динамичког једно-једначинског и WALE модела. DNS вредности су узете из [7], а експериментални резултати су узети из [8].

них LES модела, најбоље поклапање са законом зида остварује модел Смагоринског, док остали модели имају мало одступање од овог закона. Дуж висине канала,

профил просечне брзине флуида за све наведене LES моделе има добро слагање са експерименталним резултатима [8] као и резултатима DNS симулације.

9.3.2 Профили RMS флукуација брзине флуида

На слици 9.3 приказују се RMS флукуација брзине дуж висине канала. Слагање



Слика 9.3: RMS подужних (слика а), управно на зид канала (слика б) и попречних (слика в) флукуација брзине флуида, добијених коришћењем модела Смагоринског, динамичког једно-једначинског и WALE модела. DNS вредности су узете из [7], а експериментални резултати су узети из [8].

резултата LES симулација за све коришћене SGS моделе са одговарајућим екс-

перименталним вредностима и резултатима DNS симулације је задовољавајуће у случају RMS подужних флукуације брзине флуида док у случају RMS флукуација брзине флуида управно на зид постоји мало одступање од експерименталних резултата. RMS попречних флукуација брзине флуида нису измерене у експерименту, али се ове вредности добро слажу са резултатима DNS симулација.

9.3.3 Корелације брзине

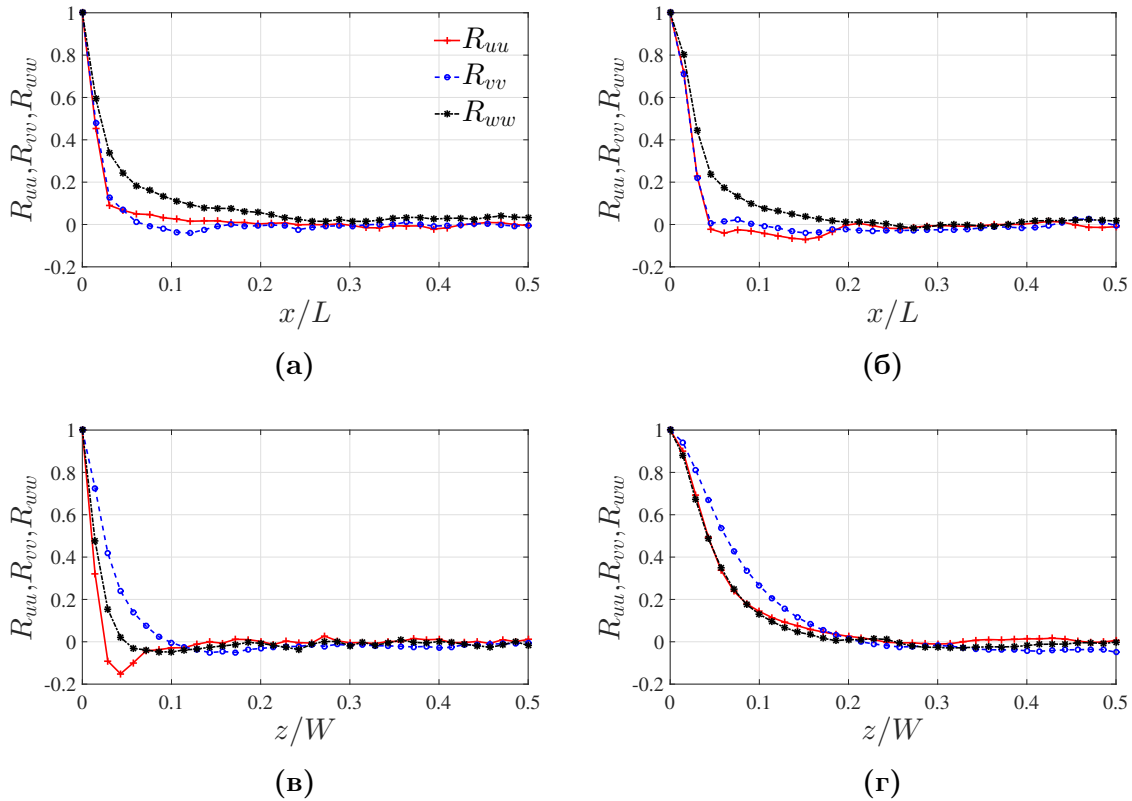
1Д нормализоване корелације брзине у тачкама A и C рачунају се на следећи начин [63, 61]:

$$R_{u_i u_j}(x_k^A, r_k) = \frac{1}{u_{i,\text{rms}}(x_k^A) u_{j,\text{rms}}(x_k^A + r_k)} \langle u'_i(x_k^A) u'_j(x_k^A + r_k) \rangle_t \quad (9.2)$$

где је са x_k^A дефинисана координата тачке A , са $r_k = x_k^C - x_k^A$ дефинисано је растојање између тачака A и C , а индекс rms означава средњу квадратну вредност флукуација брзине, $u_{\text{rms}} = (\langle u'^2 \rangle_t)^{1/2}$.

На слици 9.4 приказане су подужне и попречне нормализоване корелације брзине, за тачке на центру канала и за тачке близу зида ($y^+ \approx 100$). Као што се може видети са слике, корелације брзине у x правцу опадају до нуле на растојању $0.25 L$, а у z правцу корелације брзине опадају до нуле на растојању $0.2 W$.

Према Moir and Kim [64], прорачунски домен у x као и z правцу треба да буде барем двоструко већи од дужине на којој нормализоване корелације брзина опадају до нуле. Како је овај услов испуњен, закључује се да је изабрани домен довољне величине.



Слика 9.4: 1Д корелације брзине. (а) Подужне корелације брзине у близини зида ($y^+ \approx 100$) (б) подужне корелације брзине дуж центра канала (в) Попречне корелације брзине у близини зида ($y^+ \approx 100$) (г) попречне корелације брзине дуж центра канала. Канал је дужине L , а ширине W .

9.4 LES-DPS симулације турбулентног струјања мешавине гаса и честица

9.4.1 Почетни и гранични услови при LES-DPS симулацији

У почетном тренутку, сферне честице су равномерно распоређене у домену, при чему је почетна брзина честица једнака просечној брзини флуида, $U_b = 20 \text{ m/s}$. Као што је дефинисано у експерименту, честице су монодисперзне, пречника D_p , густине $\rho_p = 2450 \text{ kg/m}^3$. Број честица је дефинисан степеном пуњења. Прорачунски домен је периодичан у x и z правцу и честице не могу да напусте прорачунски до-

мен. Вредност максималног Курантовог броја дисперзне фазе је $Co_d = 0.3$. Струјно поље флуида добијено у последњем тренутку LES симулације представља почетно струјно поље носеће фазе при LES-DPS симулацији.

9.4.2 Основне једначине струјања мешавине гаса и честица

С обзиром да је режим струјања мешавине гаса и честица разблажен, при струјању нестишљивог флуида важи филтрирана једначина континуитета (5.5) и филтрирана једначина количине кретања (5.6). За моделирање вртлога малих размера изабран је модел Смагоринског јер је са њим постигнуто најбоље слагање брзине са законом зида, као и задовољавајуће слагање са расположивим експерименталним и DNS резултатима.

У извршеним LES-DPS симулацијама, силе које делују на честице су сила отпора, гравитациона сила и силе услед међусобних судара честица, па се једначина кретања честице (4.20) своди на:

$$m_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{F}_d + m_p \mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{coll}} \quad (9.3)$$

док су остале силе које делују на честицу, дате једначином (4.22), занемарене.

9.4.3 Судар честица и храпавих зидова

При судару честица и храпавих зидова, примењују се одговарајући стохастички модели: 2Д модел Kopan et al. [6] ако је $\Delta\zeta = 0^\circ$, 3Д изотропни модел ако је $\Delta\xi = \Delta\zeta$ и 3Д анизотропни модел ако је $\Delta\xi < \Delta\zeta$. У оквиру дисертације, ови стохастички модели су имплементирани у програмски пакет OpenFOAM.

При тим сударима, важе једначине (7.55) и (7.56), при чему се занемарује угаона брзина честица, а коефицијент реституције и коефицијент трења при судару

честице и зида дати су изразима, према [65]:

$$\begin{aligned}e_w &= \{1 - 0.0136 \alpha_p^-, 0.7\} \\ \mu_w &= \{0.5 - 0.0175 \alpha_p^-, 0.15\}\end{aligned}\tag{9.4}$$

9.4.4 Поступак LES-DPS симулације

Након покретања симулације, сматра се да се статистички стационарно стање струјања постиже за $t_s = 0.5$ s. Потом, у току симулације врши се временско осредњавање брзина честица у струјном пољу у периоду $t_e = 1$ s и симулација се завршава. Након тога, брзине честица се осредњавају у подужном и попречном правцу. Користећи одабрана времена t_s и t_e добијају се конвергиране вредности брзина честица.

9.5 Модел меких сфера

У LES-DPS симулацијама у којима се обухватају међусобни судари честица, ови судари се израчунавају применом модела меких сфера.

У моделу меких сфера, који су први пут предложили Cundal and Strack [66], честице су деформабилне и при судару честица могуће је њихово преклапање. На основу величине овог преклапања (које је обично знатно мање у односу на пречник честица), релативне брзине честица, претходног стања судара, облика и физичких карактеристика честица, рачунају се одговарајуће контактне силе којима је честица изложена приликом судара.

При судару, кретање честице a одређено је једначином типа (4.20), где је резултујућа сила услед судара честица, \mathbf{F}_{coll} , једнака збиру индивидуалних контактних

сила којима околне честице b делују на посматрану честицу a ,

$$\mathbf{F}_{\text{coll}} = \sum_{b \in \text{CL}} (\mathbf{F}_{ab}^n + \mathbf{F}_{ab}^t) \quad (9.5)$$

где су индивидуалне контактне силе подељене на нормалне и тангенцијалне компоненте, а CL (енгл. contact list) означава листу честица које окружују честицу a [67].

Једначина обртног кретања честице a је:

$$I_p \frac{d\boldsymbol{\omega}_{p,a}}{dt} = \mathbf{T}_a \quad (9.6)$$

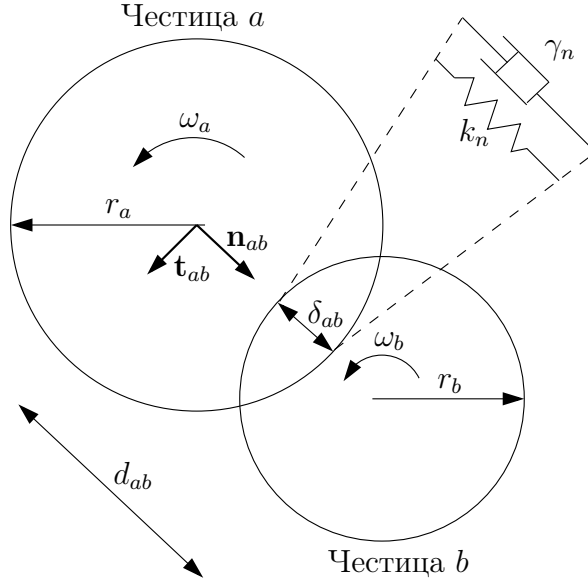
где је I_p момент инерције честице, $\boldsymbol{\omega}_{p,a}$ је угаона брзина честице, \mathbf{T}_a је момент силе који зависи само од тангенцијалних компоненти индивидуалних контактних сила,

$$\mathbf{T}_a = \sum_{b \in \text{CL}} R_a \mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{F}_{ab}^t \quad (9.7)$$

Интеграљењем једначина (4.20) и (9.6), за сваку честицу, са малим временским корацима, добијају се детаљне информације о кретању дисперзне фазе. С друге стране, мана овог приступа је што су за овакав прорачун потребни велики компјутерски ресурси. Интеграљење овог система једначина могуће је применом методе прескакања (енгл. leapfrog method).

9.5.1 Прорачун контактне силе

Контактна сила се може моделирати помоћу аналогije са системом опруге и пригушивача (в. сл. 9.5). У овом моделу, нормална компонента контактне силе између



Слика 9.5: Шематски приказ судара две честице [9] коришћењем модела меких сфера.

честица a и b једнака је,

$$\mathbf{F}_{ab}^n = -k_n \delta_{ab} \mathbf{n}_{ab} - 2\gamma_n m_{\text{eff}} \mathbf{u}_{p,ab}^n \quad (9.8)$$

Преклапање честица δ_{ab} одређено је изразом:

$$\delta_{ab} = (R_b + R_a) - |\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a| \quad (9.9)$$

Јединични вектор нормале n_{ab} је:

$$\mathbf{n}_{ab} = \frac{\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a}{|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a|} \quad (9.10)$$

Релативна брзина између честица a и b је:

$$\mathbf{u}_{p,ab} = \mathbf{u}_{p,a} - \mathbf{u}_{p,b} + (R_a \boldsymbol{\omega}_a + R_b \boldsymbol{\omega}_b) \times \mathbf{n}_{ab} \quad (9.11)$$

Нормална компонента ове брзине је:

$$\mathbf{u}_{p,ab}^n = (\mathbf{u}_{p,ab} \cdot \mathbf{n}_{ab}) \mathbf{n}_{ab} \quad (9.12)$$

а њена тангенцијална компонента је:

$$\mathbf{u}_{p,ab}^t = \mathbf{u}_{p,ab} - \mathbf{u}_{p,ab}^n \quad (9.13)$$

Тангенцијална компонента контактне силе рачуна се према једначини:

$$\mathbf{F}_{ab}^t = -\mu_c |\mathbf{F}_{ab}^n| \mathbf{t}_{ab} \quad (9.14)$$

Јединични вектор тангенте је:

$$\mathbf{t}_{ab} = \frac{\mathbf{u}_{p,ab}^t}{|\mathbf{u}_{p,ab}^t|} \quad (9.15)$$

Из (9.3), када се узме у обзир само нормална контактна сила, следи једначина за преклапање честица у нормалном правцу:

$$\frac{d^2 \delta_{ab}}{dt^2} + 2\gamma_n \frac{d\delta_{ab}}{dt} + \omega_0^2 \delta_{ab} = 0 \quad (9.16)$$

где је фактор пригушења,

$$\gamma_n = -\frac{\omega_0 \ln(e_c)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(e_c)}} \quad (9.17)$$

фреквенција непригушеног осцилатора,

$$\omega_0 = \sqrt{k_n/m_{\text{eff}}} \quad (9.18)$$

и редукована маса система, m_{eff} , је:

$$\frac{1}{m_{\text{eff}}} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} \quad (9.19)$$

Аналитичким решавањем једначине (9.16), уз почетне услове:

$$\dot{\delta}_{ab}(0) = |\mathbf{u}_{p,0}^n|, \quad \delta(T_c) = 0 \quad (9.20)$$

где је време трајања контакта,

$$T_c = \frac{\pi}{\omega_0^2 - \gamma_n^2} \quad (9.21)$$

добија се тренутна вредност преклапања честица,

$$\delta_{ab} = -\frac{|\mathbf{u}_{p,0}^n|}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_n^2}} \exp(-\gamma_n t) \sin(\omega_0^2 - \gamma_n^2 t) \quad (9.22)$$

С обзиром на (9.22), максимална вредност преклапања честица је:

$$\delta_{ab}^{max} \approx \frac{1}{2}(e_c + 1) \frac{|\mathbf{u}_{p,0}^n| T_c}{\pi} \quad (9.23)$$

Према изложеном моделу, коефицијент k_n је параметар који се подешава како би се осигурао услов $\frac{\delta_{ab}^{max}}{D_p} < 5\%$. Временски корак Δt_p при коме се решава кретање честица је

$$\Delta t_p = T_c / N_c \quad (9.24)$$

где је N_c број циклуса у којим се прорачунавају судари честица. Према [67], препоруке за вредност N_c су од 10 до 20.

У LES-DPS симулацијама је узето да је коефицијент реституције при међусобним сударима честица, $e_c = 0.9$, а коефицијент трења μ_c је једнак нули.

У оквиру дисертације, извршена је имплементација описаног модела меких сфера у програмски пакет OpenFOAM.

9.6 Симулирани случајеви струјања мешавине гаса и честица

LES-DPS симулације извршене су за два случаја:

1. **Случај 1.** Зидови канала имају малу храпавост, са просечном разликом суседних највећих и најмањих висина неравнина једнакој $R_0 = 2.32 \mu\text{m}$. Честице имају пречник $D_p = 130 \mu\text{m}$. Степен пуњења дисперзне фазе, једначина (3.4), је $m = 1$. Ова комбинација структуре храпавости и пречника честица одговара виртуелном зиду стандардне девијације $\Delta\xi = 1.4^\circ$.
2. **Случај 2.** Зидови канала имају умерену храпавост, са просечном разликом суседних највећих и најмањих висина неравнина једнакој $R_1 = 6.83 \mu\text{m}$. Честице имају пречник $D_p = 195 \mu\text{m}$. Степен пуњења дисперзне фазе је $m = 0.7$. Ова комбинација структуре храпавости и пречника честица одговара виртуелном зиду стандардне девијације $\Delta\xi = 5.1^\circ$.

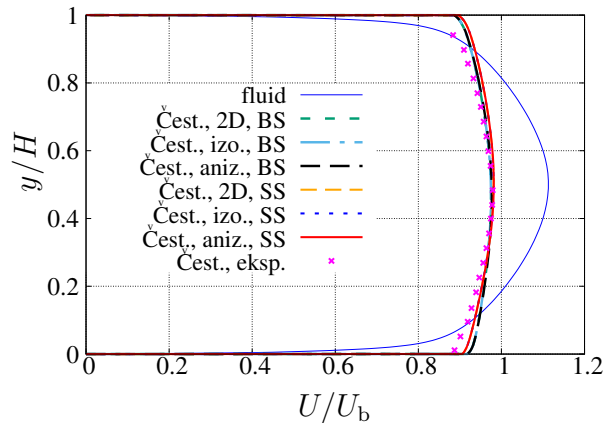
Варијацијом стандардне девијације угла ζ вектора нормале виртуелног зида, $\Delta\zeta$, разматра се струјање мешавине гаса и честица у случају различите храпавости зидова канала (2Д храпав зид: $\Delta\zeta = 0^\circ$, изотропни храпав зид: $\Delta\xi = \Delta\zeta$ и анизотропни храпави зид: $\Delta\xi < \Delta\zeta$, где је $\Delta\zeta = 7.5^\circ$).

9.7 Анализа резултата LES-DPS симулација

9.7.1 Случај 1.

Профили просечне брзине честица

Профили просечних брзина честица, при наведеној струјној конфигурацији при малој храпавости зидова канала, добијени у LES-DPS симулацијама са 2Д, изотропном, и анизотропном храпавошћу зида канала, са и без урачунатих међусобних судара честица, приказани су на слици 9.6. За све храпавости зидова канала, при којим су извршене LES-DPS симулације, постоји мало одступање добијене просечне брзине честица у близини зида канала у односу на вредности које су измерене у експерименту, а према центру канала, ово одступање се смањује.



Слика 9.6: Профил просечне брзине честица пречника $D_p = 130 \mu\text{m}$ дуж висине канала. Степен пуњења дисперзне фазе је 1. При судару честица и зида канала, виртуелни зид има стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi = 1.4^\circ$ и $\Delta\zeta$ која зависи од типа храпавости зида канала. 2D храпавост: $\Delta\zeta = 0^\circ$; изотропна храпавост: $\Delta\zeta = 1.4^\circ$; анизотропна храпавост: $\Delta\zeta = 7.5^\circ$. BS: нису урачунати међусобни судари честица. SS: урачунати су међусобни судари честица. Експериментални резултати су узети из [8].

Тип храпавости површине (2Д, изотропна и анизотропна храпавост) има мали утицај на профил просечне брзине честица дуж висине канала, што се види са слике 9.6.

Када су у прорачун укључени међусобни судари честица, запажа се мало смањење просечне брзине честица у доњој половини канала и повећање просечне брзине струјања честица у горњој половини канала.

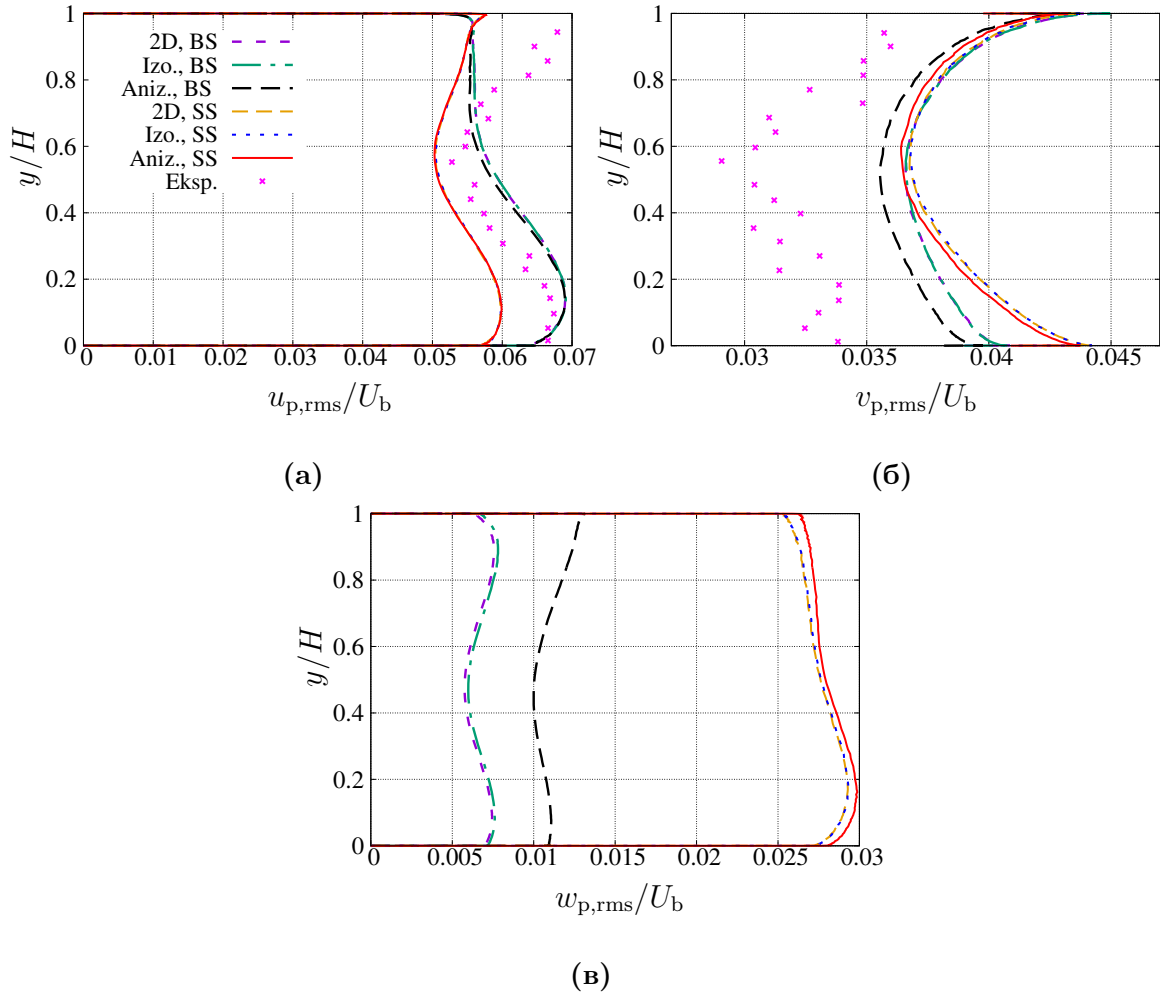
Профили RMS флуктуација брзине честица

За описану струјну конфигурацију при малој храпавости зидова канала, са слике 9.7 се види да када нису урачунати међусобни судари честица, у случају анизотропног зида канала у односу на 2Д и изотропни зид, долази до благог смањења RMS хоризонталних флуктуација брзине честица у горњој половини канала, смањују се и RMS вертикалне флуктуације брзине честица дуж целе висине канала, али долази до пораста RMS попречних флуктуација брзине честица.

Када се при прорачуну урачунају међусобни судари честица, RMS хоризонталних флуктуација брзине честица се смањују, што је у сагласности са [68] и ове вредности постају једнаке за све типове храпавости зидова канала. За 2Д и изотропни зид канала, међусобни судари честица утичу на повећање RMS вертикалних флуктуација брзина честица у доњој половини канала, чиме ови профили постају симетрични, а у случају анизотропног зида, RMS вертикалне флуктуације брзине честица се благо повећавају дуж читаве висине канала, чиме се у погледу ових флуктуација, губи разлика између 2Д, изотропних и анизотропних зидова.

Слагање профила RMS хоризонталних флуктуација брзине честица и RMS вертикалних флуктуација брзина честица израчунатих у LES-DPS симулацијама, када су у прорачун укључени међусобни судари честица, са одговарајућим експерименталним резултатима је врло добро, за све типове храпавости зида канала.

Када се занемаре међусобни судари честица, вредности RMS попречних флуктуација брзине честица у случају анизотропне површине веће су у односу на случајеве када зид има 2Д и изотропну храпавост. Профили RMS попречних флуктуација брзине честица у случају 2Д и изотропног зида су приближно симетрични



Слика 9.7: RMS флукуације брзина честица пречника $D_p = 130 \mu\text{m}$ дуж висине канала. Степен пуњења дисперзне фазе је 1. При судару честица и зида канала, виртуелни зид има стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi = 1.4^\circ$ и $\Delta\zeta$ која зависи од типа храпавости зида канала. 2D храпавост: $\Delta\zeta = 0^\circ$; изотропна храпавост: $\Delta\zeta = 1.4^\circ$; анизотропна храпавост: $\Delta\zeta = 7.5^\circ$. BS: нису урачунати међусобни судари честица. SS: урачунати су међусобни судари честица. Експериментални резултати су узети из [8].

док у случају анизотропног зида, ови профили су благо несиметрични.

Међутим, када се у прорачун узму у обзир међусобни судари честица, вредности RMS попречних флукуација брзине честица за све три храпаве површине су приближно једнаке, што доводи до закључка да у случају зидова мале храпавости, међусобни судари честица имају доминантан утицај на RMS попречних флукуација брзине честица.

9.7.2 Случај 2.

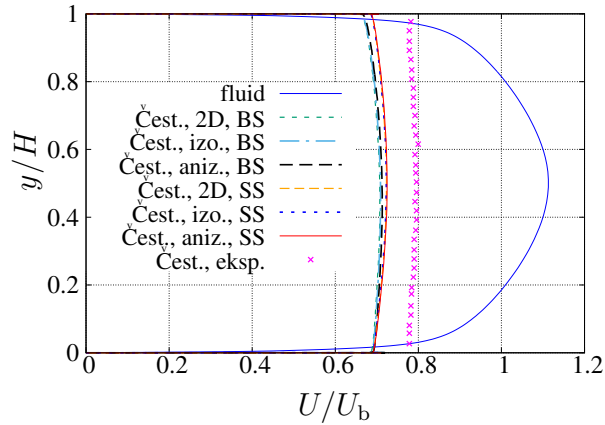
Профили просечне брзине честица

На слици 9.8 су приказани профили просечне брзине честица за наведену струјну конфигурацију при умереној храпавости зидова канала, са и без урачунатих међусобних судара честица, за 2Д, изотропну и анизотропну храпавост зидова канала. И у овом случају запажа се да тип храпавости нема велики утицај на профил просечне брзине честица дуж висине канала. Међусобни судари честица изазивају благ пораст просечне брзине честица према горњем зиду канала. Профили просечне брзине честица израчунати у LES-DES симулацијама са урачунатим међусобним сударима честица, за све типове храпавости зидова канала, имају одступање између 10% на зиду канала до 7% на средини канала, у поређењу са резултатима експерименталних мерења.

У односу на профиле просечне брзине честица при струјној конфигурацији са малом храпавости зидова канала (в. сл. 9.6), профили просечних брзина честица при струјној конфигурацији са умереном храпавости зидова канала (в. сл. 9.8) су равномернији и вредност просечне брзине честица је мања.

Профили RMS флукуација брзине честица

Када се занемаре међусобни судари честица, са слике 9.9а се види да RMS хоризонталних флукуација брзине честица не зависе од типа храпавости површине (2Д, изотропна или анизотропна), док се са слике 9.9б види да у случају анизотропне површине, RMS вертикалних флукуација брзине честица је мало мања у односу на случај 2Д и изотропног храпавог зида. Са порастом стандардне девијације $\Delta\zeta$ угла вектора нормале површине, исто у случају када се занемаре међусобни судари честица, долази до повећавања RMS попречних флукуација брзине честице, што се види са слике 9.9в.

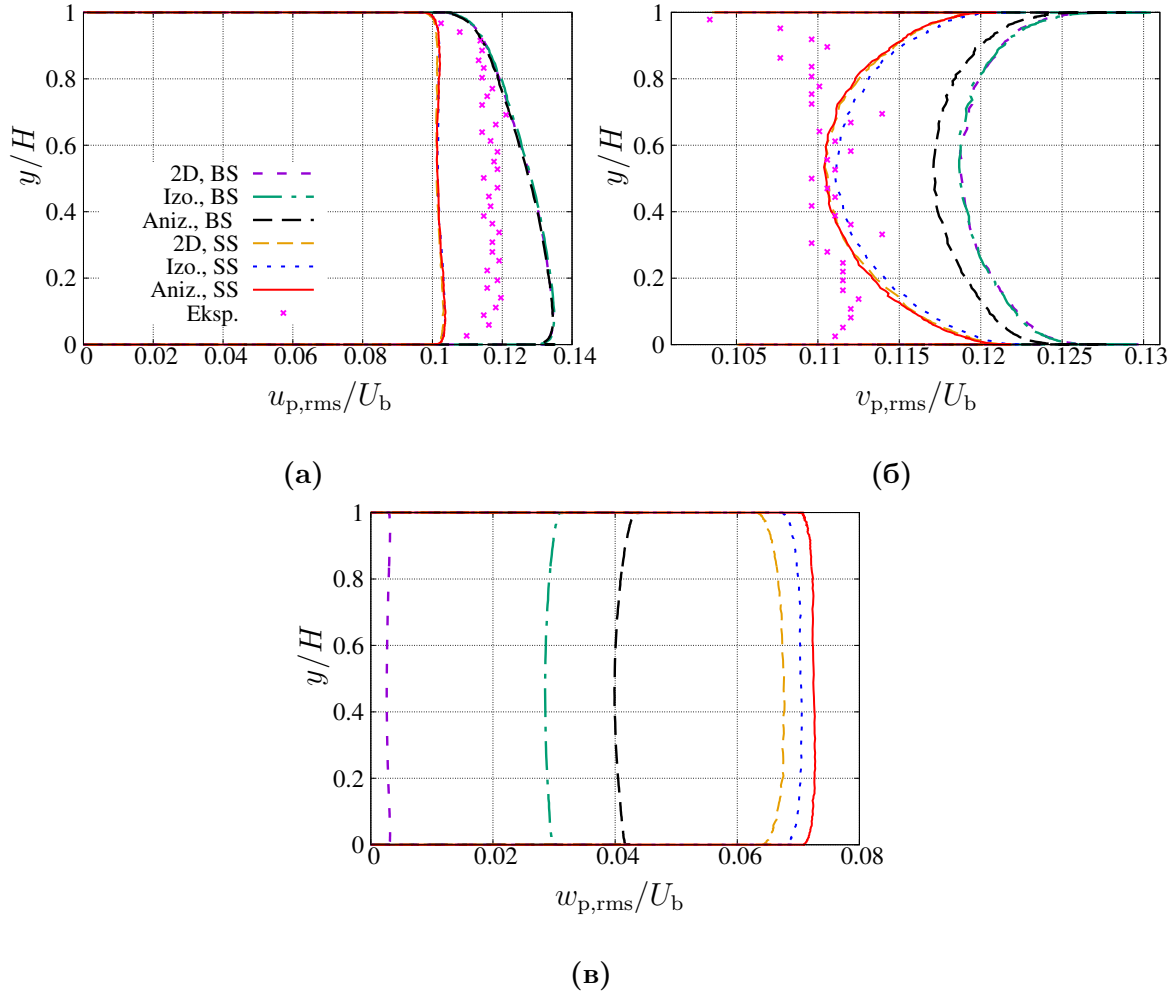


Слика 9.8: Профил брзине честица пречника $D_p = 195 \mu\text{m}$ дуж висине канала. Степен пуњења дисперзне фазе је 0.7. При судару честица и зида канала, виртуелни зид има стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi = 5.1^\circ$ и $\Delta\zeta$ која зависи од типа храпавости зида канала. 2D храпавост: $\Delta\zeta = 0^\circ$; изотропна храпавост: $\Delta\zeta = 5.1^\circ$; анизотропна храпавост: $\Delta\zeta = 7.5^\circ$. BS: нису урачунати међусобни судари честица. SS: урачунати су међусобни судари честица. Експериментални резултати су узети из [69].

Међусобни судари честица утичу на изотропизацију струјања честица, смањивањем RMS хоризонталних и RMS вертикалних флукуација брзине честица, а повећањем RMS попречних флукуација брзине честица. Када су урачунати међусобни судари честица, профили RMS хоризонталних флукуација брзине честица су приближно равномерни по попречном пресеку при овој струјној конфигурацији.

Слагање вредности RMS вертикалних флукуација брзине честице израчунаних у симулацији са одговарајућим експерименталним резултатима је врло добро, док RMS хоризонталних флукуација брзине честице врло мало одступа од експерименталних вредности.

У погледу RMS вертикалних и попречних флукуација брзине честице, када се узме у обзир утицај међусобних судара честица, утицај типа храпавости површине опада и још једном се потврђује да међусобни судари честица имају доминантан утицај на вредности RMS попречних флукуација брзине честица.



Слика 9.9: RMS флукуације брзина честица пречника $D_p = 195 \mu\text{m}$ дуж висине канала. Степен пуњења дисперзне фазе је 0.7. При судару честица и зида канала, виртуелни зид има стандардне девијације углова вектора нормале $\Delta\xi = 5.1^\circ$ и $\Delta\zeta$ која зависи од типа храпавости зида канала. 2D храпавост: $\Delta\zeta = 0^\circ$; изотропна храпавост: $\Delta\zeta = 5.1^\circ$; анизотропна храпавост: $\Delta\zeta = 7.5^\circ$. BS: нису урачунати међусобни судари честица. SS: урачунати су међусобни судари честица. Експериментални резултати су узети из [69].

Поглавље 10

Закључак и правац будућих истраживања

Предмет изучавања ове дисертације су струјања мешавине честица и гаса, ограничена храпавим зидом.

Услед геометрије храпаве површине и долазних углова честица, судар честице и храпаве површине је увек 3Д, што се при постојећим моделима за судар честице и површине често занемарује. Како би се добио што реалнији математички модел за одбијање честице од храпаве површине, чиме се омогућава тачнији прорачун особина носеће и дисперзне фазе, у овој дисертацији развијене су стохастичке процедуре за 3Д одбијање честица од изотропног и анизотропног зида у оквиру Лагранжовог приступа. Ове процедуре представљају наставак постојећих 2Д модела за одбијање честице од зида, Sommerfeld and Huber [2] и Konan et al. [6].

У дисертацији се при анализи судара честице и храпавог зида у детерминистичким симулацијама користи концепт виртуелног зида: уместо интеракције честице и стварне храпаве површине, анализира се еквивалентна интеракција центра честице и виртуелног зида. Виртуелни зид се генерише као корелисана изотропна

или анизотропна Гаусова храпава површина, према процедури Garcia and Stoll [56].

Најпре се анализира судар честице са изотропним храпавим зидом при различитим долазним угловима честице. Извршена је статистичка анализа углова вектора нормале зида које честица види када прилази зиду. Као и при 2Д моделима [2, 6], видљив је ефекат сенке: при великим нападним угловима честице у односу на макроскопски гладак зид, при првом судару честице са зидом, расподеле углова ξ и ζ су Гаусове, док се при малим нападним угловима те расподеле мењају. Бочна девијација угла којим се одбија честица, $\beta_p^+ - \beta_p^-$, има Гаусову расподелу са нултом просечном вредношћу и стандардном девијацијом која расте са порастом долазног угла честице $|\alpha_p^-|$. Расподела угла α_p^+ пре враћања честице у струјни ток, добијена из детерминистичке симулације, добро се слаже са стохастичким моделом Konan et al. [6] примењеним у долазној равни честице. Да би се остварила веза са овим моделом, у долазној равни честице дефинише се јединични вектор \mathbf{n}_γ , са особином да је скаларни производ овог вектора и вектора долазне брзине \mathbf{u}_p^- једнак скаларном производу вектора нормале \mathbf{n} и вектора долазне брзине \mathbf{u}_p^- . Како би се урачунао ефекат бочног одбијања честице, уводи се угао γ^* који има Гаусову расподелу. Показује се да на овај угао не утичу ни ефекат сенке као ни ефекат вишеструких судара честица са зидовима. Изведена је и одговарајућа стохастичка процедура за судар честице и изотропног зида.

Потом, извршена је анализа судара честице са анизотропним зидом при различитим долазним угловима честице. Као и у случају изотропног зида, у случају великих углова $|\alpha_p^-|$ честица, углови ξ и ζ имају Гаусове расподеле, док при мањим вредностима $|\alpha_p^-|$, расподеле углова ξ и ζ се мењају услед ефекта сенке. Бочна девијација угла којим се одбија честица, $\beta_p^+ - \beta_p^-$, више није симетрична као при судару честице са изотропним зидом. Расподела угла α_p^+ пре враћања честице у струјни ток, добро се слаже са примењеним 2Д моделом Konan et al. [6] у случају долазног угла $\beta_p^- = 0^\circ$ и $\beta_p^- = 90^\circ$, док је за све друге вредности угла β_p^- неопходно одредити параметар $\Delta\gamma$ који се користи у 2Д моделу. Користећи статистичко мо-

делирање при ротацији оса координатног система као и резултате при моделирању судара честице са изотропним зидом, закључено је да при великим угловима $|\alpha_p^-|$ углови γ и γ^* имају 2Д Гаусову расподелу. Предложена је одговарајућа стохастичка процедура за одбијање честице од анизотропног зида.

Резултати примене стохастичких модела за судар честица са изотропним и анизотропним зидовима, упоређени су са расположивим експерименталним мерењима и резултатима детерминистичких симулација. У свим истраженим случајевима, слагање резултата је веома добро.

Како би се упоредили утицаји различитих типова храпавости зидова (2Д храпавост: $\Delta\zeta = 0^\circ$), изотропна храпавост: $\Delta\xi = \Delta\zeta$ и анизотропна храпавост: $\Delta\xi < \Delta\zeta$) при пнеуматском транспорту кроз хоризонтални канал правоугаоног попречног пресека, користећи програмски пакет OpenFOAM извршене су LES-DPS симулације струјања мешавине гаса и честица. Да би се извршиле те симулације, у OpenFOAM су имплементиране стохастичке процедуре за судар честице и зида као и модел меких сфера који је описан у одељку 9.5.

При струјању чистог флуида, при LES симулацијама тестирани су модел Смагоринског, динамички једно-једначински модел и WALE модел. Иако су сви тестирани модели дали добро слагање профила просечне брзине и RMS флукуација брзине флуида дуж висине канала, у поређењу са експерименталним мерењима [10] и расположивом DNS симулацијом [7], најбоље слагање са законом зида дао је модел Смагоринског, услед чега је он коришћен при симулацији носеће фазе при LES-DPS симулацијама.

Адекватност избора величине прорачунског домена при LES симулацији проверена је прорачуном корелација брзине чистог флуида.

LES-DPS симулације су извршене за случај мале храпавости зидова канала са просечном разликом суседних највећих и најмањих висина неравнина једнакој $R_0 = 2.32 \mu\text{m}$, са честицама пречника $D_p = 130 \mu\text{m}$ и степеном пуњења дисперзне

фазе $m = 1$ и за случај умерене храпавости зидова са просечном разликом суседних највећих и најмањих висина неравнина једнакој $R_1 = 6.83 \mu\text{m}$, са честицама пречника $D_p = 195 \mu\text{m}$ и степеном пуњења дисперзне фазе $m = 0.7$. Добијени резултати се добро слажу са расположивим експерименталним мерењима. Највећи ефекат нових модела за судар честице са храпавим зидом остварује се на RMS попречне флукуације брзине честица, у случају занемарених међусобних судара честица. У пракси, то је случај када је запреминска концентрација честица мала. При већим концентрацијама честица, међусобни судари честица имају доминантну улогу и утицај храпавости на RMS попречне флукуације брзине честица опада.

Извршена LES-DPS симулација струјања мешавине честица и гаса у хоризонталном каналу представља један пример примене нових стохастичких модела за судар честице са храпавим зидом. У будућим истраживањима могуће је упоредити утицај храпавости зида при пнеуматском транспорту кроз хоризонталне и вертикалне цеви, вертикалне канале, колена као и при флуидизацији. Очекивано је да се највећа предност развијених модела за судар честице и зида, у односу на постојеће 2Д моделе, остварује при изразитом 3Д кретању честица. Стохастичке процедуре за судар честице и храпавог зида у овој дисертацији дефинисане су у Ојлер-Лагранж окружењу. Ове процедуре је могуће прилагодити и симулацијама типа Ојлер-Ојлер.

Литература

- [1] Y. Tsuji, T. Oshima, and Y. Morikawa, “Numerical simulation of pneumatic conveying in a horizontal pipe,” *KONA*, vol. 3, pp. 38–51, 1985.
- [2] M. Sommerfeld and N. Huber, “Experimental analysis and modelling of particle-wall collisions,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 25, pp. 1457–1489, 1999.
- [3] B. Andersson, R. Andersson, L. Hakansson, M. Mortensen, R. Sudiyo, and B. V. Wachem, *Computational Fluid Dynamics for Engineers*. Cambridge University Press, 2012.
- [4] C. Crowe, J. Schwarzkopf, M. Sommerfeld, and Y. Tsuji, *Multiphase flows with droplets and particles*. CRC Press, 2012.
- [5] H. Jasak, *Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flow*. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996.
- [6] N. A. Konan, O. Kannengieser, and O. Simonin, “Stochastic modeling of the multiple rebound effects for particle-rough wall collisions,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 35, pp. 933–945, 2009.
- [7] M. Lee and R. D. Moser, “Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 5200$,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 774, pp. 395–415, 2015.
- [8] S. Laín and M. Sommerfeld, “Numerical calculation of pneumatic conveying in horizontal channels and pipes: Detailed analysis of conveying behaviour,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 39, pp. 105 – 120, 2012.
- [9] J. Capecelatro, P. Pepiot, and O. Desjardins, “Numerical characterization and modeling of particle clustering in wall-bounded vertical risers,” *Chemical Engineering Journal*, vol. 245, pp. 295 – 310, 2014.

-
- [10] M. Sommerfeld and J. Kussin, “Wall roughness effects on pneumatic conveying of spherical particles in a narrow horizontal channel,” *Powder Tech.*, vol. 142, pp. 180–192, 2004.
- [11] P. Fede, O. Simonin, and A. Ingram, “3D numerical simulation of a lab - scale pressurized dense fluidized bed focussing on the effect of the particle particle restitution coefficient and particle - wall boundary conditions,” *Chemical Engineering Science*, vol. 142, pp. 215–235, 2016.
- [12] D. Radenkovic and O. Simonin, “Stochastic modelling of three-dimensional particle rebound from isotropic rough wall surface,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 109, pp. 35 – 50, 2018.
- [13] Y. Tsuji, Y. Morikawa, T. Tanaka, N. Nakatsukasa, and M. Nakatani, “Numerical simulation of gas-solid two-phase flow in a two-dimensional horizontal channel,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 13, no. 5, pp. 671–684, 1987.
- [14] T. Frank, K.P.Schade, and D. Petrak, “Numerical simulation and experimental investigation of a gas-solid two-phase flow in a horizontal channel,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 19, pp. 187–198, 1993.
- [15] M. Sommerfeld and N. Huber, “Modelling of particle-wall collisions in confined gas-particle flows,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 18, pp. 905–926, 1992.
- [16] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*. Elsevier, 2007.
- [17] J. Kussin and M. Sommerfeld, “Experimental studies on particle behaviour and turbulence modification in horizontal channel flow with different wall roughness,” *Experiments in Fluids*, vol. 33, pp. 143–159, 2002.
- [18] M. Sommerfeld, “Analysis of collision effects for turbulent gas-particle flow in a horizontal channel: Part I. particle transport,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 29, pp. 675–699, 2003.
- [19] M. Sommerfeld, “Analysis of collision effects for turbulent gas-particle flow in a horizontal channel: Part II. Integral properties and validation,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 29, pp. 701–718, 2003.
- [20] M. Benson, T. Tanaka, and J. Eaton, “Effects of wall roughness on particle velocities in a turbulent channel flow,” *ASME J. Fluids Eng.*, vol. 127, pp. 250–256, 2005.

-
- [21] K. Squires and O. Simonin, “LES-DPS of the effect of wall roughness on dispersed-phase transport in particle-laden turbulent channel flow,” *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol. 29, pp. 619–629, 2006.
- [22] A. Vreman, “Turbulence characteristics of particle-laden pipe flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 584, pp. 235–279, 2007.
- [23] N. A. Konan, O. Simonin, and K. D. Squires, “Detached eddy simulations and particle Lagrangian tracking of horizontal rough wall turbulent channel flow,” *Journal of Turbulence*, vol. 12, pp. 1–21, 2011.
- [24] M. Breuer, M. Alletto, and F. Langfeldt, “Sandgrain roughness model for rough walls within Eulerian-Lagrangian predictions of turbulent flows,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 43, pp. 157–175, 2012.
- [25] G. Malloupas and B. van Wachem, “Large eddy simulation of turbulent particle-laden channel flow,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 54, pp. 65–75, 2013.
- [26] Z. Cheng and M. Zhu, “Analyzing the effect of wall roughness on gas-particle flow in confined channels based on a virtual-wall-group concept,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 77, pp. 158–170, 2015.
- [27] A. Vreman, “Turbulence attenuation in particle-laden flow in smooth and rough channels,” *J. Fluid Mech.*, vol. 773, pp. 103–136, 2015.
- [28] C. Crowe, *Multiphase flow handbook*. CRC Press, 2006.
- [29] A. Prosperetti and G. Tryggvason, eds., *Computational Methods For Multiphase Flow*. Cambridge University Press, 2007.
- [30] G. Gouesbet and A. Berlemont, “Eulerian and Lagrangian approaches for predicting the behaviour of discrete particles in turbulent flows,” *Progress in Energy and Combustion Science*, vol. 25, pp. 133–159, 1999.
- [31] C. Crnojević, *Transport čvrstih materijala fluidima*. Mašinski Fakultet Univerziteta u Beogradu, 2002.
- [32] T. Auton, “The lift force on a spherical body in rotational flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 183, pp. 199–218, 1987.
- [33] A. B. Basset, “On the motion of a sphere in a viscous liquid,” *Chemical Engineering Science*, vol. 179, pp. 43–63, 1888.

-
- [34] P. Saffman, “The lift on a small sphere in a shear flow,” *J. Fluid Mech.*, vol. 11, pp. 447–459, 1965.
- [35] R. Mei, “An approximate expression for the shear lift force on a spherical particle at finite reynolds number,” *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 18, pp. 145–147, 1992.
- [36] S. Rubinow and J. Keller, “The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous liquid,” *J. Fluid Mech.*, vol. 11, pp. 447–459, 1961.
- [37] B. Oesterlé and T. Bui Dinh, “Experiments on the lift of a spinning sphere in a range of intermediate reynolds numbers,” *Exp. Fluids*, vol. 25, pp. 16–22, 1998.
- [38] T. B. Anderson and R. Jackson, “Fluid mechanical description of fluidized beds. equations of motion,” *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, vol. 6, no. 4, pp. 527–539, 1967.
- [39] P. Davidson, *Turbulence*. Oxford University Press, 2004.
- [40] S. B. Pope, *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [41] P. Sagaut, *Large eddy simulation for incompressible flow*. Springer, 2006.
- [42] M. Lesieur, *Turbulence in fluids*. Springer, 2008.
- [43] J. Smagorinsky, “General circulation experiments with the primitive equations,” *Monthly Weather Review*, vol. 91, no. 3, pp. 99–164, 1963.
- [44] L. Davidson, *Fluid mechanics, turbulent flow and turbulence modelling*. Chalmers University of Technology, 2016.
- [45] F. Nicoud and F. Ducros, “Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor,” *Flow, Turbulence and Combustion*, vol. 62, no. 3, pp. 183–200, 1999.
- [46] SAS, “Subgrid-Scale Models.” https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/flu_th/flu_th_sec_les_sgs_models.html, 2019. Accessed: 20 Jan. 2019.
- [47] W. W. Kim and S. Menon, “A new dynamic one-equation subgrid scale model for Large Eddy Simulations,” in *33rd Aerospace Sciences and Meeting and Exhibit*, (Reno, USA), p. 9, AIAA, 1 1995.
- [48] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. Cabot, “A dynamic subgrid scale eddy viscosity model,” *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 3, no. 1760, 1991.

-
- [49] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal & External Flows*. Elsevier, 2007.
- [50] J. Ferziger and M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002.
- [51] T. Marić, J. Höpken, and K. Mooney, *The OpenFOAM Technology Primer*. Sourceflux, 2014.
- [52] A. Čočić, *Modeliranje i numeričke simulacije vihornih strujanja*. PhD thesis, Mašinski Fakultet Univerziteta u Beogradu, 2013.
- [53] F. Moukalled, L. Mangani, and M. Darwish, *The Finite Volume Method In Computational Fluid Dynamics*. Springer, 2016.
- [54] R. I. Issa, “Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting,” *Journal of Computational Physics*, vol. 62, pp. 40–65, Jan. 1986.
- [55] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Pearson, 2007.
- [56] N. Garcia and E. Stoll, “Monte Carlo calculation for electromagnetic-wave scattering from random rough surfaces,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 52, pp. 1798–1801, 1984.
- [57] D. Bergström, “MySimLabs.” http://www.mysimlabs.com/surface_generation.html, 2012. Accessed: 2 Feb. 2017.
- [58] L. Tsang, J. A. King, and K.-H. Ding, *Scattering Of Electromagnetic Waves: Theories and Applications*. New York: John Wiley and Sons, 2000.
- [59] L. Berselli, T. Iliescu, and W. Layton, *Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows*. Springer, 2006.
- [60] T. Mukha and M. Liefvendahl, “Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow,” tech. rep., Uppsala University, 05 2015.
- [61] R. L. Panton, *Incompressible flow*. Wiley, 2013.
- [62] E. de Villiers, *The Potential of Large Eddy Simulation for the Modeling of Wall Bounded Flows*. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 2006.
- [63] C. Crnojević, *Mehanika fluida*. Mašinski Fakultet Univerziteta u Beogradu, 2018.

-
- [64] P. Moin and J. Kim, “Numerical investigation of turbulent channel flow,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 118, p. 341–377, 1982.
- [65] S. Laín, M. Sommerfeld, and J. Kussin, “Experimental studies and modelling of four-way coupling in particle-laden horizontal channel flow,” *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 23, no. 5, pp. 647 – 656, 2002.
- [66] P. Cundall and O. Strack, “A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies,” *Geotechnique*, vol. 29, pp. 47–65, 1979.
- [67] H. Walter and B. Epple, eds., *Numerical Simulations of Power Plants and Firing Systems*. Springer, 2017.
- [68] S. Laín and M. Sommerfeld, “Euler/Lagrange computations of pneumatic conveying in a horizontal channel with different wall roughness,” *Powder Technology*, vol. 184, no. 1, pp. 76 – 88, 2008.
- [69] J. Kussin, *Experimentelle Studien zur Partikelbewegung und Turbulenzmodifikation in einem horizontalen Kanal bei unterschiedlichen Wandrauigkeiten*. PhD thesis, Universität Halle - Wittenberg, 2004.

Биографија аутора

Дарко Р. Раденковић је рођен 06.12.1986. год. у Београду, општина Савски венац, Србија. Машински факултет Универзитета у Београду је уписао школске 2005/06 године. Основне академске студије завршио је са просечном оценом 9.79 (девет и 79/100). Мастер академске студије, модул Термоенергетика, завршио је са просечном оценом 10 (десет). За време студија био је стипендиста Министарства просвете као и Фонда за младе таленте.

Докторске студије на Машинском факултету Универзитета у Београду уписао је школске 2010/11. године. На Машинском факултету Универзитета у Београду радио је као асистент на Катедри за механику флуида у два изборна периода, од 24. 12. 2010. год. до 24. 12. 2016. год. У настави, држао је аудиторне вежбе из следећих предмета: Механика флуида Б, Механика флуида М, Динамика гасова, Транспорт флуида цевима и Класична и уљна хидраулика.

Тренутно је запослен као самостални стручни сарадник у Лабораторији за механику флуида.

Познаје програмске језике и пакете: FORTRAN, C++, MatLab, LaTeX, AutoCad, Microsoft Office и SolidWorks.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани: Дарко Раденковић

Број индекса: Д04/10

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

УТИЦАЈ ХРАПАВОСТИ ЗИДОВА КАНАЛА ПРИ СТРУЈАЊУ МЕШАВИНЕ ГАСА И ЧЕСТИЦА У УНУТРАШЊИМ ТУРБУЛЕНТНИМ СТРУЈАЊИМА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду,

12. јуна 2019. године

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора Дарко Раденковић

Број индекса Д04/10

Студијски програм _____

Наслов рада УТИЦАЈ ХРАПАВОСТИ ЗИДОВА КАНАЛА ПРИ
СТРУЈАЊУ МЕШАВИНЕ ГАСА И ЧЕСТИЦА У
УНУТРАШЊИМ ТУРБУЛЕНТНИМ СТРУЈАЊИМА

Ментор проф. др Милан Лечић

Потписани _____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду,

12. јуна 2019. године

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

УТИЦАЈ ХРАПАВОСТИ ЗИДОВА КАНАЛА ПРИ СТРУЈАЊУ МЕШАВИНЕ ГАСА И ЧЕСТИЦА У УНУТРАШЊИМ ТУРБУЛЕНТНИМ СТРУЈАЊИМА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду,

12. јуна 2019. године

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.