

## STABILIZATION OF AN INVERTED DOUBLE PENDULUM BY FRACTIONAL ORDER CONTROLLER: D-DECOMPOSITION APPROACH

Petar D. Mandić, Mihailo P. Lazarević

Department of Mechanics

Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade

Belgrade, Serbia

E-mail: [pmandic@mas.bg.ac.rs](mailto:pmandic@mas.bg.ac.rs), [mlazarevic@mas.bg.ac.rs](mailto:mlazarevic@mas.bg.ac.rs)

### ABSTRACT

Many systems in nature are inherently under-actuated, with fewer actuators than degrees of freedom. However, even with reduced number of actuators, these systems are able to produce complex movements. To be capable of performing such motions, complex control algorithms must be implemented. Classical benchmark examples for studying problems of this kind include inverted pendulum systems. This paper deals with stability problem of two types of inverted pendulum controlled by a fractional order PD controller. Double inverted and cart inverted pendulum are highly nonlinear mechanical systems with one control input and two degrees of freedom. Detailed mathematical model of both pendulums are derived using the Rodriguez method. Stabilization of pendulum around its unstable equilibrium point is achieved by using the fractional order PD <sup>$\alpha$</sup>  controller, in combination with partial feedback linearization technique. There are several methods for determining stability region of a closed loop system, and D-decomposition is one of them. Herein, D-decomposition method is applied to the inverted pendulum case, and determining its stability regions in parameters space of a fractional order PD controller is presented. D-decomposition for linear fractional systems is investigated, and for the case of linear parameters dependence. Fractional order control laws are represented by a transfer functions which are not rational, which gives rise to a problem of practical implementation of the corresponding control algorithms. A method for rational approximation of linear fractional order systems used in this paper is computationally efficient, accurate, and relies on the interpolation of the frequency characteristics of the system on a predefined set of target frequencies. The performance of the proposed method is demonstrated with experimental verification of the stabilization control of the inverted pendulum system.

**Keywords:** inverted pendulum, fractional order PID control, asymptotic stability, D-decomposition technique, rational approximations.

### REFERENCES

- [1] Čović, V., Lazarević, M.P. (2009), *Robot Mechanics*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade (in Serbian).
- [2] Neimark, Y.I. (1949), “D-decomposition of the space of the quasipolynomials” *Appl. Math. Mech.* 13, pp. 349-380 (in Russian).
- [3] Freidovich, L.B., Robertsson, A., Shiriaev A.S., Johansson R. (2008), “Periodic motions of the Pendubot via virtual holonomic constraints: theory and experiment” *Automatica* 44, pp.785–791.
- [4] Šekara, T.B., Rapačić, M.R., Lazarević, M.P. (2013), “An efficient method for approximation of non-rational transfer functions” *Electronics* 17, pp. 40-44.
- [5] Mandić, P.D., Lazarević, M.P., Šekara, T.B. (2016), “D-decomposition technique for stabilization of Furuta pendulum : fractional approach” *Bull. Pol. Ac.: Tech* 64, pp. 189-196.

## СТАБИЛИЗАЦИЈА ИНВЕРЗНОГ ДВОСТРУКОГ КЛАТНА ПРИМЕНОМ КОНТРОЛЕРА НЕЦЕЛОГ РЕДА: МЕТОДА Д-РАЗЛАГАЊА

Петар Д. Мандић, Михаило П. Лазаревић

Катедра за Механику  
Машински факултет Универзитета у Београду  
Београд, Србија  
E-mail: [pmandic@mas.bg.ac.rs](mailto:pmandic@mas.bg.ac.rs), [mlazarevic@mas.bg.ac.rs](mailto:mlazarevic@mas.bg.ac.rs)

### АПСТРАКТ

Многи системи у природи су нередувантни са становишта управљања, тј. имају мање управљачких величина него степени слободе. Међутим, ови системи способни су за извођење сложених покрета. Да би то било могуће, морају се применити сложени управљачки алгоритми. Класични примери оваквих система које изучавају научници су системи типа инверзног клатна. У овом раду, приказана су два типа инверзног клатна управљаних помоћу фракционог ПД регулатора. Двоструко инверзно клатно и линеарно инверзно клатно су нелинеарни механички системи са једном управљачком величином и два степена слободе. Користећи Родригов приступ описани су математички модели оба клатна. Стабилизација клатна око нестабилног положаја равнотеже постигнута је употребом фракционог ПД регулатора, у комбинацији са техником парцијалне feedback линеаризације. Што се тиче домена стабилности затвореног система управљања, постоји више метода за његово рачунање, а метода Д-разлагања је једна од њих. Овде је метода Д-разлагања примењена за случај инверзног клатна и за одређивање домена стабилности у параметраској равни фракционог регулатора. Приказана је примена ове методе за линеарне фракционе системе, и за случај линеарне зависности између параметара. Управљачки алгоритми фракционог типа су представљени нерационалним преносним функцијама, услед чега се јавља проблем практичне имплементације наведених алгоритама. У овом раду је примењен метод за рационалну апроксимацију линеарних фракционих система који је погодан за имплементацију на рачунару, и заснива се на интерполацији фреквентне карактеристике система на основу претходно изабраних карактеристичних фреквенција. Ефикасност ове методе демонстрирана је експериментално на примеру лабораторијског инверзног клатна.

**Кључне речи:** инверзно клатно, фракциони ПИД управљачки алгоритам, асимптотска стабилност, метода Д-разлагања, рационалне апроксимације.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Čović, V., Lazarević, M.P. (2009), *Robot Mechanics*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade (in Serbian).
- [2] Neimark, Y.I. (1949), “D-decomposition of the space of the quasipolynomials” *Appl. Math. Mech.* 13, pp. 349-380 (in Russian).
- [3] Freidovich, L.B., Robertsson, A., Shiriaev A.S., Johansson R. (2008), “Periodic motions of the Pendubot via virtual holonomic constraints: theory and experiment” *Automatica* 44, pp.785–791.
- [4] Šekara, T.B., Rapačić, M.R., Lazarević, M.P. (2013), “An efficient method for approximation of non-rational transfer functions” *Electronics* 17, pp. 40-44.
- [5] Mandić, P.D., Lazarević, M.P., Šekara, T.B. (2016), “D-decomposition technique for stabilization of Furuta pendulum : fractional approach” *Bull. Pol. Ac.: Tech* 64, pp. 189-196.