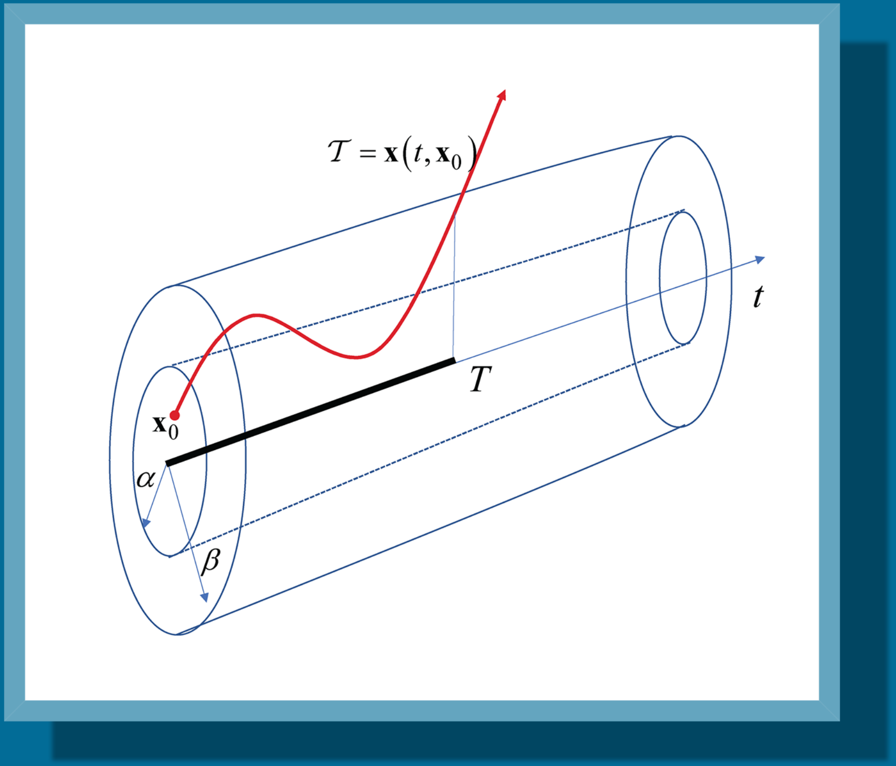
Михаило Лазаревић

СТАБИЛНОСТ ПОСЕБНИХ КЛАСА ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА НЕЦЕЛОГ И ЦЕЛОГ РЕДА СА КАШЊЕЊЕМ



Машински факултет
Универзитет у Београду,
2022

Михаило Лазаревић

СТАБИЛНОСТ ПОСЕБНИХ КЛАСА ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА НЕЦЕЛОГ И ЦЕЛОГ РЕДА СА КАШЊЕЊЕМ

ISBN-XXX-XX-XXXX-XXX-X

Михаило Лазаревић

СТАБИЛНОСТ ПОСЕБНИХ КЛАСА ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА НЕЦЕЛОГ И ЦЕЛОГ РЕДА СА КАШЊЕЊЕМ

Машински факултет
Универзитет у Београду
2022

Др Михаило П. Лазаревић,редовни професор
Машински факултет, Универзитет у Београду

Стабилност посебних класа динамичких система нецелог и целог реда са кашњењем

I издање

Монографија /Monograph

Рецезенти
Др Александар Обрадовић, ред. проф.Универзитет у Београду, Машински факултет
Др Томислав Шекара,ред. проф. Универзитет у Београду, Електротехнички факултет
др Сретен Стојановић, редовни професор, Технолошки факултет у Лесковцу, Универзитет у Нишу,

Издавач
Универзитет у Београду
Машински факултет Београд, 11000 Београд, ул.Краљице Марије 16
tel. (011) 3370-760, *fax*. (011) 3370-364 www.mas.bg.ac.rs

За издавача
Декан, др Владимир Поповић, ред. проф.
Уредник
Др Милан Лечић, ред.проф.
Председник комисије за издавачку делатност
Машинског факултета у Београду

Тираж: 200 примерака

Штампање I издања одобрила:
Комисија за издавачку делатност
Машинског факултета у Београду и
Декан Машинског факултета у Београду
Одлуком бр. 39/2022 од 15.12.2022.

Штампа: PLANETA print
Рузвелтова 10, 11000 Београд
www.planeta-print.rs
Београд, 2021.године
ISBN-978-86-6060-148-5

Др Михаило Лазаревић, ред.проф.
.

СТАБИЛНОСТ ПОСЕБНИХ КЛАСА ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА НЕЦЕЛОГ И ЦЕЛОГ РЕДА СА КАШЊЕЊЕМ

Машински факултет
Универзитет у Београду
2022

САДРЖАЈ

1.Основе стабилности система са кашњењем..1

1.1 Основни појмови система са кашњењем...1
1.2 Љапуновска стабилност система са кашњењем..4
1.2.1 Услови стабилности линеарних система са кашњењем у временском домену...5
1.3 Практична стабилност и стабилност система са кашњењем на коначном временском интервалу 6

2.Стабилност временски континуалних система са кашњењем нецелог реда
2.1 Анализа стабилности линеарног система нецелог реда са вишеструким временским кашњењем..13
2.2 Љапунов-Красовски теорема стабилности за системе нецелог реда са кашњењем ……...21
2.2.2 Нелинеарни систем нецелог реда са кашњењем..21
2.2.2 Теорема Љапунов-Красовски нецелог реда ……………….…..……...........22
2.3 Разумихинова теорема стабилности за системе нецелог реда са кашњењем 24
2.3.1. Теорема Разумихина нецелог реда.............…...24
2.3.2 Друга теорема Разумихина нецелог реда за системе са кашњењем нецелог реда...27
2.4 Проширење директног метода Љапунова на системе нецелог реда са кашњењем…33
2.4.1 Проширење директне методе Љапунова нецелог реда..33
2.5 Митаг-Лефлерова стабилност система нецелог реда са кашњењем...........................37
2.6 Анализа стабилности система нецелог реда са кашњењем: конструисање нових Љапуновљевих функција на основу истих за системе целог реда...................................39

3. Стабилност временски континуалних фракционих система са кашњењем нецелог реда на коначном временском интервалу...47

3.1 Стабилност на коначном временском интервалу система нецелог реда са кашњењем 47

4. Стабилност временски континуалних неутралних система са кашњењем целог реда 75

5. Стабилност временски континуалних неутралних система са кашњењем нецелог реда 83

6. Стабилност неутралних система са кашњењем нецелог реда на коначном временском интервалу..106

6.1 Стабилност временски континуалних неутралних система са кашњењем нецелог реда на коначном временском интервалу..106

6.2. Стабилност на коначном временском интервалу нелинеарних система нецелог реда са кашњењем са вишеструким нецелим изводима..118

6.3. Робусна стабилност на коначном временском интервалу неутралних система нецелог реда са кашњењем..124

6.4 Робусна стабилност на коначном временском интервалу нехомогеног неутралног двочланог система нецелог реда са временски променљим кашњењима у стању и управљању...136

6.5 Робусна стабилност на коначном временском интервалу нехомогеног неутралног вишечланог система нецелог реда са временски променљим кашњењима у стању и управљању...142

7. Стабилност на коначном временском интервалу изабране класе механичких неутралних система нецелог реда са кашњењем 150

7.1.1. Математички модел транслаторног инверзног клатна..150
7.1.2 Примена методе Д разлагања..151
7.2.1 Стабилност транслаторног инверзног клатна на коначном временском интервалу..154
7.2.2 Стабилност на коначном временском интервалу једног механички пригушног система нецелог реда са кашњењем..157

ДОДАЦИ

Додатак А– Нормирани векторски простори..160

Додатак Б - Основе рачуна нецелог реда........…………....…………………......…....162

Додатак Ц - Неки изводи из теорије диференцијалних једначина са померених аргументима...164

ЛИТЕРАТУРА………………..…………………………………………..……..…166

ПРЕДГОВОР

Системи са кашњењем су одувек привлачили пажњу научне и стручне јавности и тај интерес постоји и данас.

У математичком смислу разматрани системи су представљени комбинацијом диференцијално-диференцним једначинама са помереним аргументом, што повлачи читав низ допунских потешкоћа при њиховом решавању. Наиме, као системи бесконачне димензије, њихово проучавање у комплексном домену упућује на бављење са трансцедентним преносним функцијама, што у одређеним случајевима захтева допунску модификацију постојећих критеријума и метода који су развијени за обичне линеарне системе. Са друге стране, у последње време у жижи интересовања многих научника јесу динамички системи са кашњењем фракционог (нецелог) реда за разлику од постојећих динамичких система целог реда.

Примена и присуство фракционог рачуна *(fractional calculus*) у свим гранама науке и технике више је него евидентно јер омогућава да се уочени системи квалитетније, боље моделирају, односно развију и примене квалитетнији системи управљања. У том смислу бројни научни радови и обимна публицистичка делатност у пуној мери су исказали интерес који је за њих био показан. У математичком смислу, за разлику од „класичног“ диференцијалног и интегралног рачуна, овде степен може бити реалан број чак и комплексан број, тако да су одговарајући оператори диференцирања и интеграљења нелокални оператори и дати системи се сад могу описати са диференцијалним једначинама али фракционог реда тако да систем има више степени слободе. У специјалном случају када је степен целобројан онда се претходни оператори своде на *„класичне*“ операторе диференцирања и интеграљења.

У сфери испитивања стабилности, акценат у овој монографији је на истраживањима везаним за такозваном нељапуновском (техничком) стабилношћу што овде подразумева концепт стабилности на коначном временском интервалу (*finite time stability* -FTS), док се мањи број резултата односи на љапуновску стабилност истих. Наиме, уочено је да систем може имати нежељене показатеље прелазног процеса на пример недозвољени прескок или неприхватљиво дуго време смирења, тако да је оправдано кретање система посматрати унутар унапред прописаних граница и где се динамичко понашање система посматра на коначном временском интервалу. Границе до којих достиже одзив система било у принудном радном режиму или слободном представља веома значајан проблем што је иницирало појаву великог броја дефиниција FTS-а као и дефиниција практичне стабилности.

Ова монографија је првенствено настала као плод двадесетогодишњег бављења аутора проблематиком нељапуновске стабилности и представља природан наставак проширења концепата на поједине класе динамичких система нецелог и целог реда.

У овој монографији представљени су досадашњи најзначајнији резултати аутора из области стабилности система и то стабилности на коначном временском интервалу као и асимптотске стабилности а који су проистекли из научног истраживања и сарадње са докторантима и колегама који се баве овом проблематиком

На тај начин овде су представљени и резултати решавања проблема стабилности и стабилизације и то класе временски регуларних континуалних система са чистим временским кашњењем целог као и нецелог реда.

Посебан квалитет ове монографије представљају по први пут новодобијени резултати који се односе на одређивању критеријума стабилности за једну сложену класу неутралних система нецелог реда и целог реда са кашњењем чиме ова монографија добија на свом значају.

Изложена материја подржава актуелне трендове у овај области и предствља селективан текст који садржи и нека теоретска знања преузета из савремених уџбеника и радова из ове области а све са циљем да се заинтересованом читаоцу омогући лакши и непосреднији приступ овој сложеној проблематици.

Др Александру Обрадовићу, редовном професору Машинског факултета Универзитета у Београду, др Томиславу Шекари, редовном професору Електротехничког факултета Универзитета у Београду и др Сретену Стојановићу редовном професору, Технолошког факултета у Лесковцу, Универзитет у Нишу, захваљујем се на корисним сугестијама и труду око рецензије ове монографије.

За рад око техничке обраде монографије захвалан сам колеги Илији Лазаревићу, мастер инж. маш.

А у т о р

Београд, новембар, 2022. год.

1. Основе стабилности система са кашњењем

1. Основни појмови система са кашњењем[*]

Бројни процеси у природи, техничким и економским системима одређени су тако што је њихово понашање у наредним тренуцима зависно од предисторије њиховог понашања на строго одређеном интервалу. У савременим системима управљања, било у објекту и/или управљачком делу система, као и у одговарајућим мехатроничким системима постоје обично извесни простори где се предаја енергије и/или импулса, или пак померање радног тела са једног места на друго, не одвија се тренутно, већ са *неким кашњењем* и кашњења се често се јављају код електронских, механичких, биолошких, металуршких и хемијских система. Системи са кашњењем у основи су описани *диференцијалним једначинама са тзв. помереним аргументом*. Са математичке тачке гледишта то значи да поред разматране величине $x(t)$ у једначини мора фигурисати друга или та иста, узета у тренутку $(t-\tau)$ или $(t+\tau)$, где је τ - дато временско кашњење, тј. када у једначину улазе величине $x(t), x(t-\tau)$ тренутку $t, t-\tau$ није допуштено да се разматра као једна координата јер би тада постојала једна једначина са две промењиве. Превазилажење овог проблема је у налажењу допунске везе између $x(t)$ и $x(t-\tau)$, односно математичка формулација система са кашњењем представља се *системом диференцијалних једначина са кашњењем (са помереним аргументом)*. Ово значи да ће код система са кашњењем будуће стање процеса зависити од стања процеса на неком интервалу, који је претходио раније на строго одређеном временском интервалу.

Системи са кашњењем, у основи су *описани алгебарским или обичним диференцијалним једначинама са "помереним аргументом*". При састављању ових једначина, зависност између појединих величина требало би посматрати у једном те истом тренутку. Међутим, како је природа процеса таква да се физичке величине појављују раздељене у времену, онда их је неопходно свести на један те исти тренутак разматрања. Математички гледано то значи да ће се, поред разматране величине $x(t)$, појавити и нека друга или иста та величина узета у тренуцима $(t-\tau)$ или $(t+\tau)$. Када се у диференцијалној једначини понашања појаве изрази и за $x(t)$ и за $x(t-\tau)$ (и евентуално њихови изводи), онда је јасно да је реч о двема промењивама. Да се у једначини не би јављала неодређеност, неопходно је утврдити *допунску везу* између вредности $x(t)$ и $x(t-\tau)$. Са τ је означено чисто временско кашњење.

Код *диференцијалних једначина са помереним аргументом* неопходно је познавати закон промене промењиве не у једном фиксираном тренутку, већ на неком *одређеном почетном временском интервалу*.

Постојање временског кашњења, независно од његове појаве у управљању или/и стању, може проузроковати нежељене одзиве система, чак и нестабилност. Као што је познато, питање стабилности система представља једну од најважнијих особина било којег система управљања. При томе, проблем испитивања стабилности је један од

[*]излагање у овом делу је базирано на излагању које је дато у *Lazarević et al.* (2003).

најосновнијих и најважнијих задатака који треба решити приликом анализе и синтезе датог система управљања.

У савременој теорији система управљања предложени су и користе се различити концепти стабилности система, на пример: љапуновска, нељапуновска стабилност (практична стабилност, стабилност на коначном временском интервалу), апсолутне, асимптотске стабилности, комплетне стабилности, стабилност у целом итд. Дефиниције различитих видова стабилности у смислу Љапунова су свакако најпознатије и набројније и до сада су највише проучаване са многобројним проширењаима и/или модификацијама. Бројни радови су разматрали ову тему, са посебним нагласком на примену Љапуновљевог другог метода, или на примену идеје матричне мере, *Lee*, *Diant* (1981); *Mori* (1985); *Chen et al.* (1995).

Са друге стране систем може бити стабилан, али потпуно неупотребљив, због поседовања нежељних прелазних процеса. Стога је корисно посматрати стабилност таквог система са посебним освртом на поједине подскупове простора стања, који су *а приори* дефинисани за дати проблем. Поред тога, од посебног је значаја посматрање понашања динамичког система само на коначном временском интервалу.

Тако, у литератури се могу наћи бројне дефиниције такозване *техничке и практичне стабилности*. При томе концепт стабилности на коначном временском интервалу (КВИ) је само посебан случај концепта практичне стабилности и да концепт практичне стабилности нема локални карактер за разлику од концепта љапуновске стабилности.

Аутори *La Salle*, *Lefshet* (1961), *Weiss*, *Infante* (1965) су приказали различите значења стабилности на коначном временском интервалу за временски континуалне системе и константне границе кретања. Општији облик стабилности *(„практична стабилност са временом смиривања", практична експоненцијална стабилност*, итд.) који укључује претходне дефиниције стабилности на коначном временском интервалу приказао је и разматрао *Грујић* (1975а,1975б). Концепт стабилности на коначном временском интервалу, назван "*коначна стабилност*" представио је *Lashirer*, *Story* (1972), а даљи развој ових резултата објавили су *Lam*, *Weiss* (1974). Такође анализу линеарних система са кашњењем у контексту коначне и практичне стабилности, представили су и разматрали *Debeljković et al.* (1997,1998b,2001), *Lazarević et al.* (2001).

Овде је од посебног интереса да се испита стабилност система са кашњењем при чему се уочило да изучавање стабилности система са кашњењем далеко сложеније у односу на обичне системе. Наиме то следи из чињенице да су математички модели система са кашњењем дати у облику диференцијалних једначина са помереним аргументум, односно такве системе карактерише бесконачна димензионалност.

У наставку излагања биће размотрена основна питања која се односе на стабилност линеарних стационарних система са кашњењем.

У овим разматрањима посебна класа *временски континуалних система са кашњењем* описана је следећим моделом у простору стања:

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-\tau), \tag{1.1}$$

са почетном функцијом:

$$\boldsymbol{x}(t) = \psi_x(t), \; -\tau \le t \le 0, \tag{1.2}$$

Исто тако од интереса биће и системи који раде у принудном радном режиму

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-\tau) + B_0\boldsymbol{u}(t) + B_1\boldsymbol{u}(t-\tau), \tag{1.3}$$

са почетним функцијама:

$$\boldsymbol{x}(t) = \psi_x(t), \qquad -\tau \le t \le 0, \;\; \boldsymbol{u}(t) = \psi_u(t), \qquad -\tau \le t \le 0, \tag{1.4}$$

Динамичко понашање система датих јед. (1.1) или јед. (1.3) са припадајућим почетним функцијама, јед. (4.2) и јед.(4.4) дефинисано је на временском интервалу $J = \left[t_o, t_o + T\right]$, где величина Т може да буде било који реалан позитиван број или величина $+\infty$, тако да стабилност на коначном временском интервалу и практична стабилност могу изучавати једновремено. Са J_τ је означен временски интервал $J_\tau = \left[-\tau, 0\right]$, где је $J, J_\tau \in \mathbb{R}$. За временски промењљиве скупове, као границе до којих досежу трајекторије кретања система, претпоставља се да су *отворени,повезани и ограничени* . Нека је са S_α означен скуп свих *почетних стања* система $x\left(t_0\right) = x_0$ и са S_β означен скуп свих *дозвољених стања система* и, такви да овде важи $S_\alpha \subseteq S_\beta$ са општом нотацијом типа:

$$S_\rho = \left\{\boldsymbol{x} : \left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|_Q^2 < \rho\right\}, \tag{1.5}$$

где Q се претпоставља буде симетрична, позитивно дефинитна, реална матрица. Са S_ε означен је скуп допустивих управљања. Израз (1.2) се може приказати у својој најопштијој форми, као:

$$\boldsymbol{x}(t_o + \theta) = \psi_x(\theta), \; -\tau \le \theta \le 0, \; \psi_x(\theta) \in \Sigma\,, \tag{1.6}$$

где је t_0 је почетни тренутак за дати систем и Σ је Банахов простор континуалних функција дефинисаних на временском интервалу дужине τ, које пресликавају интервале $\left[t-\tau, t\right]$ у $\mathbb{R}^n$ тада се норма, може представити са:

$$\left\|\psi\right\|_C = \max_{-\tau \le \theta \le 0}\left\|\psi(\theta)\right\|\,, \tag{1.7}$$

Поред ове норме, користе се и уобичајене норме векора $\left\|\boldsymbol{x}\right\|_{(.)}$, $(.) = 1, 2, \infty$ и матричне норме $\left\|A\right\|_{(.)}$ индуковане тим вектором*. Такође, подразумевају се уобичајени услови за јед. (4.1-4.4) да се не појављују никакве потешкоће везане за питање *егзистенције, јединствености и непрекидности решења* у односу на почетне услове.

И коначно, треба рећи још у овом уводном делу, да се подразумевају уобичајени услови везани за јед. (1.1 – 1.4) да се не појављују никакве потешкоће везане за питања *егзистенције*, *јединствености* и *непрекидности решења* у односу на почетне податке.

---

* *Видети додатак А*

2.Стабилност временски континуалних система са кашњењем нецелог реда

Већ више од шездесет година примена фракционог рачуна (*fractional calculus*) који представља генерализацију класичног интегралног рачуна, привлачи пажњу научне и стручне јавности широм света. Примена и присуство фракционог рачуна у свим гранама науке и технике више је него евидентно јер омогућава да се уочени системи квалитетније, боље моделирају, односно развију и примене квалитетнији системи управљања. У математичком смислу, за разлику од „класичног“ диференцијалног и интегралног рачуна, овде степен може бити реалан и комплексан број, тако да су одговарајући оператори диференцирања и интеграљења нелокални оператори и дати системи се сад могу описати са интегро-диференцијалним једначинама али нецелог реда тако да одговарајући модели имају више степени слободе. У специјалном случају када је степен целог реда онда се претходни оператори своде на *„класичне*“ операторе диференцирања и интеграљења. Посебан значај теорија фракционог рачуна има у реализацији квалитетнијих система управљања динамичким системима чији су одговарајући напредни модели одређени такође применом фракционог рачуна, чиме је сада омогућено да се применом управљања нецелог реда побољшају перформансе управљачког система, односно датог система управљања.

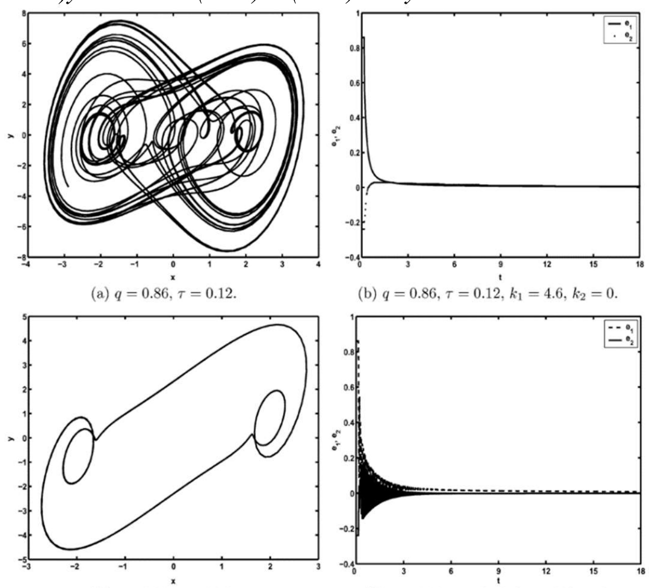
Уочено је да постоје неколико нерешених проблема и један од њих је проблем стабилности система са кашњењем која је од главног интереса у теорији управљања. Временско кашњење је врло честа појава у различитим техничким системима, нпр. електричне, пнеуматске и хидрауличне мреже, хемијски процеси и дуги далеководи. Постојање чистог временског кашњења, без обзира на његово присуство у контроли и/или стању, може изазвати непожељан прелазни процес система, или уопште, чак и нестабилност. Бројни извештаји су објављени по овом питању, са посебним освртом на примену другог метода Љапунова. Последњих година значајна пажња је посвећена стабилности системима са кашњењем који су сада нецелог реда и који се као такви појављују у многи физичким системима и процесима у стварном свету. У том смислу у овом поглављу од интереса је размотрити стабилност временски континуалних система са кашњењем нецелог реда.

2.1 Анализа стабилности линеарног система нецелог реда са вишеструким временским кашњењем

Основне дефиниције фракционих извода

Уопштено говорећи, три дефиниције нецелог извода, односно, Грунвалд–Летников нецели извод, Риман–Лувилов нецели извод, и Капутов нецели извод, се углавном

Теорема 2. *Ако k_1 и k_2 задовољавају оба услова (2.30) и (2.31), онда је нулто решење система (2.31) глобално асимптотски стабилно у смислу Љапунова. Стога је синхронизацију између система (2.25) и (2.26) могуће постићи.*



(a) $q = 0.86$, $\tau = 0.12$. (b) $q = 0.86$, $\tau = 0.12$, $k_1 = 4.6$, $k_2 = 0$.

(c) $q = 0.66$, $\tau = 0.12$. (d) $q = 0.66$, $\tau = 0.12$, $k_1 = 6$, $k_2 = 6$.

Слика 1. *Атрактор хаоса и гранични круг нецелобројног Дафиновог осцилатора са кашњењем. (а) атрактор хаоса, (б) грешка синхронизације атрактора хаоса, (ц) гранични круг и (д) грешка синхронизације граничног круга.*

Резултати нумеричке симулације су дати на Слици 1. Атрактор хаоса можемо наћи за $q = 0.86$, $\tau = 0.12$ и гранични круг за $q = 0.66$, $\tau = 0.12$, видети Слику 1(а) и (ц), респективно. Ови гранични скупови се могу синхронизовати покретач-одзив конфигурацијом (2.25) и (2.26). За атрактор хаоса, изабрани су управљачки параметри $k_1 = 4.6$ и $k_2 = 0$, а за гранични круг су изабрани параметри $k_1 = 6$ и $k_2 = 6$, видети Слику 1(б) и (д). Наравно, могуће је одабрати другачије параметре управљања тако да буду у складу са *Теоремом 2*. Нумеричке симулације су спроведене применом *Адамс-Башфорт-Мултонове* шеме, детаљније видети (*Diethelm, et. al,2002).*

2.2 Љапунов-Красовски теорема стабилности за системе нецелог реда са кашњењем

Овде је од интереса да се дефинише и примени одговарајућа теорема Љапунов-Красовски за нелинеарни систем нецелог реда са временским кашњењем.

2.2.1 Нелинеарни систем нецелог реда са кашњењем

Нека је $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ скуп непрекидних функција које врше пресликавање интервала $[a,b]$у $\mathbb{R}^n$. У многим ситуацијама, потребно је да се идентификује максимално временско кашњење система *r*. У овом случају нас често занима скуп пресликавања непрекидне функције из $[-r, 0]$ у $\mathbb{R}^n$, што се може једноставније написати као $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. За било које $A > 0$ и било коју непрекидну функцију времена $\psi \in C([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + A$ и нека је $\psi_t \in C$ сегмент функције ψ дефинисан као $\psi_t(0) = \psi(t_0 + \theta), -r \leqslant \theta \leqslant 0$.

Разматра се Капутов нелинеарни систем нецелог реда са кашњењем:

$$ {}_{t_0}^{c}D_t^q(t) = f(t, x_t), \tag{2.35}$$

где је $x(t) \in \mathbb{R}^n, 0 < q < 1$ и $f: \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$. Потребно је задати почетно стање промењљивих $x(t)$ у временском интервалу дужине r, на пример од $x(t)$ до t_oтј.,

$$x_{t_o} = \phi \tag{2.36}$$

где је $\phi \in C$ дато. Другим речима $x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), -r \leqslant \theta \leqslant 0$ дефинисати непрекидну норму функције $t_o - r$ следећим изразом:

$$\|\phi\|_c = \max_{a \leqslant \theta \leqslant b} \|\phi(\theta)\| \tag{2.37}$$

Дефиниција 2.2.1: За систем описан једначином (2.35) тривијално решење $x(0) = 0$ је *стабилно* ако за било које $t_0 \in \mathbb{R}$ и било које $\varepsilon > 0$, постоји $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ такво да из $\|x_{t_0}\| < \delta$ следи $\|x(t)\| < \varepsilon$ за $t \geqslant t_0$.

Каже се да је асимптотски стабилан ако за било које $t_0 \in \mathbb{R}$ и било које $\varepsilon > 0$ постоји $\delta_0 = \delta_0(t_0, \varepsilon) > 0$ тако да $\|x_{t_0}\|_c < \delta_0$ имплицира $\lim_{x \to \infty} x\,(t) = 0$. Систем је равномерно стабилан ако је стабилан и ако се $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ може одабрати независно од t_0.

Систем је равномерно асимптотски стабилан ако је равномерно стабилан и ако постоји $\delta_0 > 0$ и ако постоје функције $\delta(\varepsilon), \mathrm{T}(\varepsilon)$ такве да $\|x_{t_0}\|_c < \delta_0$ и $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$ имплицирају да је $\|x(t)\| < \varepsilon$.

Систем је глобално асимптотски стабилан ако је асимптотски стабилан и δ_0 може бити призвољно велики, коначан број (*Kequin et. al,2003).*

2.2.2 Теорема Љапунов-Красовски нецелог реда

Ефикасан метод за одређивање стабилност система са временским кашњењем је као и код система без кашњења метода Љапунова. Пошто у систему са кашњењем, „стање" у тренутку t захтева да вредност $x(t)$ буде у интервалу t, тј. x_t, природно је очекивати да за систем са временским кашњењем, Љапуновљева функција буде функционал $V(t, x_t)$ који зависи од x_t, која такође треба да мери одступање x_t од тривијалног нултог решења. Нека је $V(t, \phi)$ диференцијабилна и нека је $x_t(\tau, \phi)$ решење (2.35) у тренутку t са почетним условом $x_\tau = \phi$. Затим налазимо Капутов извод од $V(t, x_t)$ у односу на t и израчунавамо га у тренутку $t = \tau$ на следећи начин:

$$ {}_{t_0}^{c}D_t^q V(\tau, \phi) = {}_{t_0}^{c}D_t^q V\big(t, x_t(\tau, \phi)\big)\Big|_{t=\tau, x_t, \phi} = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^{t} \frac{V'(s, x_s)}{(t-s)^q} ds\Big|_{t=\tau, x_t, \phi} \tag{2.38}$$

где је $0 < q < 1$.

Теорема 3: Претпоставимо да функција $f: \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ врши пресликавање из $\mathbb{R} \times C$ у $\mathbb{R}^n$ и нека су непрекидне неопадајуће функције, где су $\alpha_1(s), \alpha_2(s)$позитивне за $s > 0$, и важи$\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$. Ако постоји непрекидна диференцијабилна функција $f: \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ где је $S_\rho = \{\phi \in C: \|\phi\|_C < \rho\}$ такво да:

$$\alpha_1(\|\phi(0)\|) \leqslant V(t, \phi) \leqslant \alpha_2(\|\phi\|_c), \tag{2.39}$$

и

$${}_{t_0}^{c}D_t^q V(t, \phi) \leqslant -\alpha_3(\|\phi(0)\|), 0 < q \leqslant 1. \tag{2.40}$$

Онда је тривијално решење за (2.35) *равномерно стабилно*. Ако је $\alpha_3(s) > 0$ за $s > 0$ онда је решење *равномерно асимптотски стабилно*. Додатно, ако је $\lim\limits_{s\to\infty} \alpha_1(s) = \infty$ онда је решење *глобално равномерно асимптотски стабилно*.

Напомена: Верзија ове теореме која укључује извод целог реда може се наћи у (*Kequin et. al,2003).*

Доказ: За било које $\varepsilon > 0$, пошто је функција α_2 непрекидна и важи $\alpha_2(0) = 0$, можемо наћи довољно мало $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такво да важи $\alpha_2(\delta) < \alpha_1(\varepsilon)$. Стога, за било које почетно време t_0 и било који почетни услов $x_{t_0} = \phi$ са $\|\phi\|_c < \delta$, имамо да је ${}_{t_0}^{c}D_t^q V(t, x_t) \leqslant 0$ и стога према особини 4 следи $V(t, x_t) \leqslant V(t_0, \phi)$ за било које $t \geqslant t_0$. Одавде следи:

$$\alpha_1(\|x(t)\|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant V(t_0, \phi) \leqslant \alpha_2(\|\phi\|_c) \leqslant \alpha(\delta) < \alpha_1(\varepsilon) \tag{2.41}$$

што даље имплицира да је $\|x(t)\| < \varepsilon$ за $t \geqslant t_0$. Овим је доказана равномерна стабилност система. Да би се доказала равномерна асимптотска стабилност, нека услови $0 < \varepsilon < \rho$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ одговарају равномерној стабилности. Бира се $\varepsilon_0 \leqslant \rho$ и одређујемо $\delta_0 = \delta(\varepsilon_0) > 0$ где је ε_0 фиксна вредност. Даље је потребно одабрати $\left\|x_{t_0}\right\|_c \leqslant \delta_0$ и $T(\varepsilon) = \left[\frac{\alpha_2(\delta_0)}{\alpha_3(\delta(\varepsilon))} \Gamma(1+q)\right]^{\frac{1}{q}}$где $\delta(\varepsilon)$ одговара равномерној стабилности. Нека је $\left\|x_{t_0}\right\|_c \leqslant \delta_0$ онда имали бисмо $\left\|x_{t_0}\right\|_c \leqslant \delta_0$ за све $t \geqslant t_0$

$$-\alpha_3(\|x(t)\|) \leqslant -\alpha_3\big(\delta(\varepsilon)\big). \tag{2.42}$$

Стога имамо,

$${}_{t_0}^{c}D_t^q V(t, x_t) \leqslant -\alpha_3\big(\delta(\varepsilon)\big), t \geqslant t_{0,} \tag{2.43}$$

и на основу Особине 2. и 3. закључујемо

$${}_{t_0}^{c}D_t^q \left(V(t, x_t) + \alpha_3\big(\delta(\varepsilon)\big)\frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(1+q)}\right) \leqslant 0. \tag{2.44}$$

Користећи *Особину 4.* имамо

$$\alpha_1(\|x(t)\|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant V(t_0, \phi) \leqslant \alpha_2(\|\phi\|_c) \leqslant \alpha(\delta) < \alpha_1(\varepsilon). \tag{2.45}$$

Као резултат следи

$$\begin{aligned} V(t,x_t) &\leqslant V(t_0,\phi)-\alpha_3\big(\delta(\varepsilon)\big)\frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(1+q)} \\ &\leqslant \alpha_2(\|\phi\|_c)-\alpha_3\big(\delta(\varepsilon)\big)\frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(1+q)} \quad , \\ &\leqslant \alpha_2(\delta_0)-\alpha_3\big(\delta(\varepsilon)\big)\frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(1+q)}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

која се за $t=t_0+T(\varepsilon)$ своди на

$$0<\alpha_1\big(\delta(\varepsilon)\big)\leqslant V\big(t_0+T,x_{t_0+T}\big)\leqslant \alpha_2(\delta_0)-\frac{\alpha_3(\delta(\varepsilon))}{\Gamma(1+q)}T^q=0. \tag{2.47}$$

Ова контрадикција доказује да постоји $t_1\in[t_0,t_0+T(\varepsilon)]$ такво да је $\|x(t_1)\|<\delta(\varepsilon)$. Стога, у било ком случају имамо $\|x(t)\|<\varepsilon$, $t\geqslant t_0+T(\varepsilon)$кад год је $\|x_{t_0}\|_c<\delta_0$, чиме се доказује равномерна асимптотска стабилност тривијалног решења система (2.35). Коначно ако важи $\lim\limits_{s\to\infty}\alpha_1(s)=\infty$, онда вредност δ_0 може бити произвољно велика и ε се може изабрати након што вредност δ_0 задовољи услов $\alpha_2(\delta_0)<\alpha_1(\varepsilon)$, и стога глобална равномерна асимптотска стабилност може бити добијена. Из претходног доказа се може закључити да је довољно да функције $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ и $V(t,.)$ буду дефинисане у околини нуле осим у случају глобалне стабилности. Такође примећује се да је довољно да доња граница V буде позитивна функција $\phi(0)$.

2.3 Разумихинова теорема стабилности за системе нецелог реда са кашњењем

Када систем укључује временско кашњење, треба га посматрати као функционалну диференцијалну једначину (ФДЕ). Недавно, теорија стабилности Разумихина се све више користи за доказивање стабилности система са временским кашњењем *(Hale,Lunel 1993),* пошто је формирање Љапунов-Красовског функционала тежи од формирања Љапунов-Разумихин функционала. Према томе, овде се презентује примена Разумихинове теорије која је примењена за нелинеарне системе са временским кашњењем нецелог реда, *(Baleanu et. al, 2010).*

2.3.1. Теорема Разумихина нецелог реда

Као и у проучавању система без кашњења, ефикасан метод за одређивање стабилности система са временским кашњењем је Љапуновљев метод. Пошто је у систему са временским кашњењем „стање“ у тренутку t захтевало вредност $x(t)$ у интервалу $x(t)$, односно x_t, природно је очекивати да је за систем са временским кашњењем, одговарајућа Љапуновљева функција функционал $V(t,x_t)$ у зависности од x_t, која такође треба да мери одступање x_t од тривијалног решења 0.

Нека је $V(t,\phi)$ диференцијабилна, и нека је $x_t(\tau,\phi)$ решење (2.35) у тренутку t са почетним условом $x_\tau=\phi$. Затим израчунавамо Капутов извод од $V(t,x_t)$ у односу на t и процењујемо га у тренутку $t=\tau$ на следећи начин:

2.5 Митаг-Лефлерова стабилност система нецелог реда са кашњењем

Основни циљ у овом делу је да се формулише Митаг-Лефлерова теорема стабилности за нелинеарне системе са временским кашњењем нецелог реда,(*Sadati,et al, 2010*).

2.5.1. Митаг-Лефлерова функција

Слично експоненцијалној функцији која се често користи у решењима система целог реда, функција која се често користи у решењима система нецелог реда је Митаг-Лефлерова функција, (*Podlubny,1999*) дефинисана као

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)}, \tag{2.117}$$

где је $\alpha > 0$ и $z \in \mathbb{C}$. Митаг-Лефлерова функција са два параметра се најчешће појављује и има следећи облик:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)}, \tag{2.118}$$

где је $\alpha > 0, \beta > 0$, и $z \in \mathbb{C}$. За $\beta = 1$ добијамо $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$.

Као и у проучавању система без кашњења, ефикасан метод за одређивање стабилности система са временским кашњењем је метода Љапунова. Пошто у систему са временским кашњењем „стање" у тренутку t захтева вредност $x(t)$ у интервалу $[t-r, t]$, односно x_t, природно је очекивати да за систем са временским кашњењем одговара Љапуновљева функција која је у облику функционала $V(t, x_t)$ у зависности од x_t, која такође треба да мери одступање x_t од тривијалног решења 0.

Дефиниција 2.5.1. Нека је $V(t,\phi)$ диференцијабилна, и нека је $x_t(\tau,\varphi)$ решење (2.35) у тренутку t са почетним условом $x_\tau = \varphi$. Затим, израчунавамо Риман-Лувилове и Капутове изводе од $V(t,x_t)$ у односу на t и процењујемо га у тренутку $t=\tau$ на следећи начин,

$$\begin{aligned} {}_{t_0}^{RL}D_t^q V(\tau,\varphi) &= {}_{t_0}^{RL}D_t^q V(t, x_t(\tau,\varphi))\Big|_{t=\tau, x_t=\varphi} = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} \frac{V(s,x_s)}{(t-s)^q} ds\right)\Big|_{t=\tau, x_t=\varphi} \\ {}_{t_0}^{c}D_t^q V(\tau,\varphi) &= {}_{t_0}^{c}D_t^q V(t, x_t(\tau,\varphi))\Big|_{t=\tau, x_t=\varphi} = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^{t} \frac{V'(s,x_s)}{(t-s)^q} ds\Big|_{t=\tau, x_t=\varphi}. \end{aligned} \tag{2.119}$$

где је $0 < q \leq 1$.

Теорема 12. Претпоставимо да су α_1, α_2 и β позитивне константе и да су $V, w: C([-r,0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ непрекидни функционали. Ако су следећи услови испуњени за све $\varphi \in C([-r,0], \mathbb{R}^n)$:

(1) $\alpha_1 \parallel \varphi(0) \parallel^2 \leq V(\varphi) \leq \alpha_2 \parallel \varphi \parallel_\infty^2$,

(2) $\beta V(\varphi) \leq w(\varphi)$,

(3) $V(x_t(\varphi))$ има извод нецелог реда α за свако $\phi \in C([-r,0], \mathbb{R}^n)$,

(4) ${}_{t_0}^{c}D_t^\gamma V(x_t(\varphi)) \leq -w(x_t(\varphi))$ за свако $t \geq t_0$ and $0 < \gamma \leq 1$.

онда

$$\| x(t,\varphi) \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \| \varphi \|_\infty \left(E_\gamma(-\beta t^\gamma)\right)^{\frac{1}{2}},\ t \geq t_0, \varphi \in \mathcal{C}([-r,0],\mathbb{R}^n) \tag{2.120}$$

То значи да је решење система (2.35) стабилно у смислу Митаг-Лефлера.

Доказ. С обзиром на било који $\varphi \in \mathcal{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$, услов (2.36) имплицира да

$$-w(\varphi) \leq -\beta V(\varphi). \tag{2.121}$$

Из (2.121) и услова (4) Теореме 12. имамо

$${}_{t_0}^{c}D_t^\gamma V(x_t(\varphi)) + \beta V(x_t(\varphi)) \leq 0, \tag{2.122}$$

или

$${}_{t_0}^{c}D_t^\gamma V(x_t(\varphi)) + \beta V(x_t(\varphi)) + M(t) = 0, \tag{2.123}$$

где је $M(t) \geq 0$ за $t \geq 0$.
Из (2.36) имамо $V\left(x_{t_0}(\varphi)\right) = V(\phi)$. Тада је решење (2.123) са почетним условом $V\left(x_{t_0}(\varphi)\right) = V(\varphi)$ дато са

$$\begin{aligned} V(x_t(\varphi)) &= V(\varphi)E_\gamma(-\beta t^\gamma) - \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}(-\beta(t-\tau)^\gamma)M(\tau)d\tau \\ &= V(\varphi)E_\gamma(-\beta t^\gamma) - M(t) * \left(t^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}(-\beta t^\gamma)\right), \end{aligned} \tag{2.124}$$

где је * оператор конволуције. Пошто су и $t^{\gamma-1}$ и $E_{\gamma,\gamma}(-\beta t^\gamma)$ ненегативне функције, следи да

$$V(x_t(\varphi)) \leq V(\varphi)E_\gamma(-\beta t^\gamma),\ t \geq t_0. \tag{2.125}$$

Тада услови (1) и (2) Теореме 12., дају

$$\alpha_1 \| x(t,\varphi) \|^2 \leq V\left(x_t(\varphi)\right) \leq V(\varphi)E_\gamma(-\beta t^\gamma) \leq \alpha_2 \| \varphi \|_\infty^2 E_\gamma(-\beta t^\gamma). \tag{2.126}$$

Поређењем леве и десне стране, имамо

$$\| x(t,\varphi) \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \| \varphi \|_\infty \left(E_\gamma(-\beta t^r)\right)^{1/2},\ t \geq t_0, \varphi \in \mathcal{C}([-r,0],\mathbb{R}^n). \tag{2.127}$$

Лема 3. Нека је $\gamma \in (0,1)$ и $V(0) \geq 0$, онда

$${}_{t_0}^{c}D_t^\gamma V(t) \leq {}_{t_0}^{RL}D_t^\gamma V(t). \tag{2.128}$$

Доказ. Користећи особине и везу Капутовог и РЛ извода имамо ${}_{t_0}^{c}D_t^\gamma V(t) = {}_{t_0}^{RL}D_t^\gamma V(t) - V(t_0)(t-t_0)^{-\gamma}/\Gamma(1-\gamma)$. Због услова да је $\gamma \in (0,1)$ и $V(t_0) \geq 0$, добијамо ${}_{t_0}^{c}D_t^\gamma V(t) \leq {}_{t_0}^{RL}D_t^\gamma V(t)$.

Теорема 13. Претпоставимо да су претпоставке у Теореми 12 задовољене осим што се ${}_{t_0}{}^{c}D_t^\gamma$ замењује са ${}_{t_0}^{RL}D_t^\gamma$, онда је

$$\| x(t,\varphi) \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \| \varphi \|_\infty \left(E_\gamma(-\beta t^\gamma)\right)^{1/2},\ t \geq t_0, \varphi \in \mathcal{C}([-r,0],\mathbb{R}^n). \tag{2.129}$$

Доказ. Из Леме 3 и $V(x_t(\varphi)) \geq 0$ следи да ${}_{t_0}{}^{c}D_t^{\gamma} V(x_t(\varphi)) \leq {}_{t_0}^{RL}D_t^{\gamma} V(x_t(\varphi))$ што имплицира ${}_{t_0}^{c}D_t^{\gamma} V(x_t(\varphi)) \leq {}_{t_0}^{RL}D_t^{\gamma} V(x_t(\varphi)) \leq -w(x_t(\varphi))$ за свако $t \geq t_0$. Следећи исти доказ као у Теореми 12 добија се

$$\| x(t,\varphi) \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \| \varphi \|_\infty \left(E_\gamma(-\beta t^r)\right)^{\frac{1}{2}},\ t \geq t_0, \varphi \in \mathcal{C}([-r,0],\mathbb{R}^n). \qquad (2.130)$$

Последица 1. За $\gamma = 1$ има експоненцијалну стабилност (*Kharitonov, Hinrichsen,2004)*

$$\| x(t,\varphi) \| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \| \varphi \|_\infty \left(E_1(-\beta t^{\gamma})\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \| \varphi \|_\infty e^{(-(1/2)\beta t)},\ t \geq t_0, \varphi \in \mathcal{C}([-r,0],\mathbb{R}^n). \qquad (2.131)$$

2.6 Анализа стабилности система нецелог реда са кашњењем: конструисање нових Љапуновљевих функција на основу истих за системе целог реда

Стабилност равнотежног стања система временског кашњења целог реда

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau)), \tau \in [0,\infty), \qquad (2.132)$$

може се проверити директном методом Љапунова разматрањем одговарајућег кандидата за функцију Љапунова. Овде је од интереса да се издвоје услови по којима се својства стабилности система (2.132) остају и за његов еквивалент али сада нецелог реда, (*Badri V., M.S. Tavazoei ,2019*) дате као

$$ {}_{to}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = f(x(t), x(t-\tau)), \quad \tau \in [0,\infty), \quad \alpha \in (0,1), \qquad (2.133)$$

У ствари, директна метода Љапунова је прилагођена нелинеарним системима нецелог реда, (*Li et al, 2009, Li et al, 2010*). Овај метод је преформулисан из (*Li et al, 2010)* на следећи начин.

Теорема 14. Нека $\boldsymbol{x} = 0$ је равнотежно стање система нецелог реда ${}_{to}^{C}D_t^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) = f(x,t)$ реда $\alpha \in (0,1]$. Претпоставимо да постоји Љапуновљева функција $V(x,t)$ тако да

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \|x\| \leq V(x,t) \leq \gamma_2 \|x\| \\ &{}_{to}^{C}D_t^{\beta} \boldsymbol{x}(t) \leq -\gamma_3 \|x\|, \end{aligned} \qquad (2.134)$$

3. Стабилност временски континуалних фракционих система са кашњењем нецелог реда на коначном временском интервалу

Сва разматрања, без губитка општости, која су везана за класе временски континуалних система целог реда са кашњењем, могу се у целости, преузети и у даљим разматрањима. При томе, неопходно је водити рачуна о специфичностима појединих класа система са кашњењем нецелог реда, и то у погледу вредности нецелог реда фракциног извода као природи самог чистог временског кашњења, (*Стојановић, и др. 2019).* Са друге стране, познато је да идеја о операторима нецелог (фракционог) реда стара преко триста година, тј. колико и идеја о операторима целог реда, тек је последњих четрдесет година постала популарна међу научницима и истраживачима, са сталним порастом примене фракционих (нецелих) оператора. Данас се са великом сигурношћу може рећи да примена фракционих (нецелих) оператора у науци и инжењерству представља један потпуно нов правац.

Математичко моделирање и симулација динамичких система и процеса, базирано на примени нецелих оператора који са математичке тачке гледишта представљају тзв. нелокалне операторе природно води ка добијању одговарајућих диференцијалних једначина нецелог реда и потреби за њиховим решавањем и анализом. Оне су биле су предмет истраживања многих научника и истраживача, због њиховог појављивања и присуства у различитим пољима науке, попут инжењерства,физике, хемије, (*Samko et. al,1993; Mainardi, 1996; Podlubny, 1999).*

3.1 Стабилност на коначном временском интервалу система нецелог реда са кашњењем

Као што је раније истакнуто, да систем може бити стабилан али потпуно безвредан јер поседује непожељне особине у прелазном режиму. Стога, може бити корисно размотрити стабилност таквих система, узевши у обзир одређен подскупове простора стања, који су дефинисани првенствено у датом проблему на коначном временском интервалу. Овде је превасходно од интереса проучавање класе аутономних система - *система са кашњењем* који је дат одговарајућом векторском фракционом диференцијалном једначином са фракционим изводом нецелог реда $0<\alpha<1$ у простору (псеудо)стања

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}}=A_0x(t)+A_1x(t-\tau), \tag{3.1}$$

и почетном функцијом:

$$\boldsymbol{x}(t)=\psi_x(t),\ -\tau\le t\le 0, \tag{3.2}$$

Једначина (3.1) назива се *хомогена* или *неуправљана једначина стања*, где је $x(t)$ вектор стања, A_0 и A_1 су константне матрице система одговарајућих димензија, а τ је чисто временско кашњење, $\tau=const,(\tau>0)$. Динамичко понашање аутономног система, јед. (3.1) дефинисано је на временском интервалу $J=\{t_0,t_0+T\},\quad J\in R$, где величина T може бити или позитиван реалан број или симбол $+\infty$, тако да се стабилност на коначном временском интервалу и практична стабилност могу обрађивати истовремено. Претпоставља се да су стационарна подешавања, коришћена као границе трајекторија система, отворена, повезана и ограничена. Нека индекс "ε" означава групу свих допустивих стања система, а индекс "δ" групу свих почетних стања система, таквих да је $S_\delta \subseteq S_\varepsilon$. Уопштено, можемо писати:

$$S_\rho = \left\{ x : \left\| x(t) \right\|_Q^2 < \rho \right\}, \tag{3.3}$$

где се претпоставља да је Q симетрична, позитивно одређена реална матрица. Израз (3.2) се може написати у свом општем облику као:

$$x(t_0 + \theta) = \psi_x(\theta), \; -\tau \le \theta \le 0, \; \psi_x(\theta) \in C[-\tau, 0], \tag{3.4}$$

где је t_0 почетни тренутак посматрања система (3.1) и $C[-\tau, 0]$ је *Банах*-ов простор непрекидних функција на временском интервалу дужине τ, које пресликавају интервал $[t-\tau, t]$ на R^n са нормом дефинисаном на следећи начин:

$$\left\| \psi \right\|_C = \max_{-\tau \le \theta \le 0} \left\| \psi(\theta) \right\|. \tag{3.5}$$

Такође,матрична мера се широко користи у литератури за питања стабилности система са временским кашњењем. Матрична мера μ, дате матрице $A \in C^{n \times n}$ се дефинише на следећи начин:

$$\mu(A) = \lim_{\omega \to 0} \frac{\left\| I + \omega A \right\| - 1}{\omega}. \tag{3.6}$$

Матрична мера дефинисана јед. (3.6) се може даље дефинисати на три различита начина, што зависи од употребе норме у дефиницији, (*Desoer*,*Vidysagar* 1975).

$$\mu_1(A) = \max_k \left(\mathrm{Re}(a_{kk}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{n} |a_{ik}| \right), \tag{3.7а}$$

$$\mu_2(A) = \max_k \left(\mathrm{Re}(a_{kk}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{n} |a_{ik}| \right), \tag{3.7б}$$

и

$$\mu_\infty(A) = \max_i \left(\mathrm{Re}(a_{ii}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{n} |a_{ki}| \right). \tag{3.7ц}$$

Претпоставља се да су уобичајени услови глаткоће присутни, па се постојање, јединственост и непрекидност решења с обзиром на почетние информације не доводи у питање.

Даље се формулише Теорема 1. којом су дати довољни услови стабилности на коначном временском интервалу система (3.1) *(Lazarević, Debeljković, 2005)*

Теорема 1. Аутономни систем дат јед. (3.1) који задовољава услов (3.2) је *стабилан на коначном временском интервалу* у односу на $\{\delta,\varepsilon,\tau,t_o,J,\}$, $\delta<\varepsilon$ ако је следећи услов задовољен:

$$\left[1+\frac{\sigma_{\max}^{A}\left(t-t_0\right)^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\right]\cdot e^{\frac{\sigma_{\max}^{A}(t-t_0)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}}\leq\varepsilon/\delta,\quad\forall t\in J. \tag{3.8}$$

где је са $\sigma_{max}(.)$ означена највећа сингуларна вредност матрице (.) тј.:

$$\sigma_{\max}^{A}=\sigma_{\max}\left(A_0\right)+\sigma_{\max}\left(A_1\right), \tag{3.9}$$

односно са $\Gamma(.)$ је означена Ојлерова гама функција.

Доказ: Применом добро познате *Bellman-Gronwall*-ове леме добијени су довољни услови стабилности на коначном временском интервалу, *(Lazarević, Debeljković, 2005).*

*Примедба 1***.** Ако је $\alpha=1$, добија се систем целог реда са кашњењем тј.(3.10).

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=A_0\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau), \tag{3.10}$$

односно добијају се познати резултати (*види Lazarević M. P. et al* ,(2000)).

$$\left[1+\frac{\sigma_{\max}^{A}\left(t-t_0\right)^{1}}{1}\right]\cdot e^{\frac{\sigma_{\max}^{A}(t-t_0)^{1}}{1}}\leq\varepsilon/\delta,\quad\forall t\in J.,\Gamma(2)=1 \tag{3.11}$$

Даље се излажу резултати до којих је дошао аутор и који су приказани у раду, *Lazarević,* (2006). Ту је спроведена анализа стабилности на коначном временском интервалу затвореног система аутоматског управљања ЗСАУ са кашњењем - роботског система *Newcastle* са једним степеном слободе где је примењено одговарајуће PD^{α} управљање затвореном систему управљања нецелог реда. Проблем довољних услова је проучаван што омогућава да трајекторије система остају унутар пре свега задатих подешавања за одређену класу линеарних система са временским кашњењем описаних једначинама са нецелим изводима у простору стања. Довољни услови за ову врсту стабилности добијени су коришћењем *Bellman-Gronwall*-ове леме. Одговарајућа једначина кретања *Newcastle* робота у случају PD^{α} регулатора је:

$$m\ddot{q}(t)+c\dot{q}(t)+kq(t)=Q_d\left(t\right)+K_P\left[q_d\left(t-\tau\right)-q\left(t-\tau\right)\right]+K_D\left[q_d^{(\alpha)}\left(t-\tau\right)-q^{(\alpha)}\left(t-\tau\right)\right], \tag{3.12}$$

где је жељено управљање дато следећим изразом:

$$Q_d\left(t\right)=m\ddot{q}_d(t)+c\dot{q}_d(t)+kq_d(t) \tag{3.13}$$

За мале пертурбације $y(t)$ које су дефинисане на следећи начин $y\left(t\right)=q_d\left(t\right)-q\left(t\right)$, након линеаризације (3.12) добија се следећа линеарна диференцијална једначина нецелог реда са кашњењем:

$$\ddot{y}(t)+2\beta\dot{y}(t)+\omega^2 y(t)=k_P y(t-\tau)+k_D y^{(\alpha)}(t-\tau), \tag{3.14}$$

где су:

$$\begin{aligned}&\alpha=1/2, \quad K_P=100, \quad K_D=100, \quad 2\beta=c/m=12.8,\\&\omega^2=k/m=17.8, \quad k_P=-K_P/m=-0.04, \quad k_D=-K_D/m=-0.04.\end{aligned} \tag{3.15}$$

односно,почетни услови су: (3.16)

$$y(t)=\varphi(t)\neq 0, \qquad -\tau\leq t\leq 0, \dot{y}(t)=\varphi(t)=0, \qquad -\tau\leq t\leq 0, \quad y^{(\alpha)}(t)=\eta(t)=0, \quad -\tau\leq t\leq 0.$$

Израз (3.14) се може приказати као фракциони систем нецелог реда увођењем смене: $x_1(t)=y(t), x_2(t)=y^{(\alpha=1/2)}(t), x_3(t)=\dot{y}(t)=y^{(1)}(t), x_4(t)=y^{(3/2)}(t)$, тј. ако се уведе вектор стања $x(t)=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ добија се:

$$D_t^{1/2}x(t)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-\omega^2&0&-2\beta&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\k_P&k_D&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t-\tau)\\x_2(t-\tau)\\x_3(t-\tau)\\x_4(t-\tau)\end{pmatrix}= \tag{3.17}$$

$$=A_0x(t)+A_1x(t-\tau),$$

са почетном функцијом стања:

$$x(t)=\psi_x(t), \quad -\tau\leq t\leq 0. \tag{3.18}$$

Овде се разматра проблем одређивања довољних услова који омогућавају трајекторијама система да остану унутар претходно задатих вредности за одређену класу линеарних аутономних система са кашњењем нецелог реда.

Теорема 2. (*Lazarević,* (2006). Систем описан јед. (3.17) који задовољава почетни услов, јед. (3.18) је је *стабилан на коначном временском интервалу*, у односу на $\{\delta,\varepsilon,\tau,J_0\}$, $\delta<\varepsilon$ ако је задовољен следећи услов:

$$\left(1+\frac{\mu_{\max}^A t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{\mu_{\max}^A t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}}\leq \varepsilon/\delta, \quad \forall t\in J_0, \quad J_0\in[0,T] \tag{3.19}$$

где је $\mu_{\max}(\cdot)$ највећа сингуларна вредност матрице $(\cdot)$, тј.:

$$\mu_{\max}^A=\mu_{\max}(A_0)+\mu_{\max}(A_1), \tag{3.20}$$

Доказ Теореме 2 се спроводи на сличан начин као у доказу Теореме 1. и овде се изоставља.

*Пример 1***.** Нека је дат линеарни фракциони систем нецелог реда са временским чистим кашњењем, у следећем облику у простору (псеудо)стања:

$$\frac{d^{1/2}x(t)}{dt^{1/2}}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-17.8&0&-12.8&0\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-0.04&-0.04&0&0\end{pmatrix}x(t-0.1) \qquad (3.21)$$

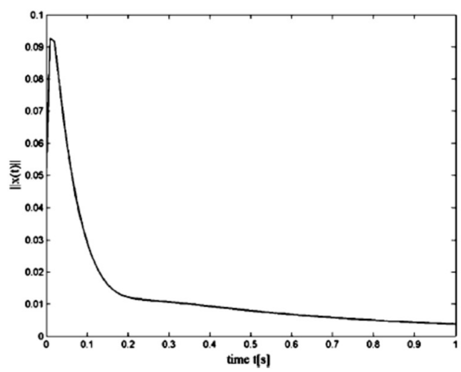
Проверава се стабилност на коначном временском интервалу $\{t_0=0, J=\{0,1\}, \delta=0.06, \varepsilon=100, \tau=0.1\}$, где је $\psi_x(t)=(0.05,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\forall t\in[-0.1,0]$. Из почетних вредности и (3.21), добија се:

$$\left\|\psi_x(t)\right\|_C<0.06,\ \mu_{\max}(A_0)=21.95,\ \mu_{\max}(A_1)=21.95,\ \mu_{\max}=21.95,\ \Gamma(1+1/2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=0.886. \qquad (3.22)$$

На основу формулисаног критеријума стабилности из Теореме 2. следи:

$$\left[1+\frac{21.95T_{\mathrm{e}}^{1/2}}{0.866}\right]\cdot \mathrm{e}^{\frac{21.95T_{\mathrm{e}}^{1/2}}{0.866}}\leq 100/0.06 \Rightarrow T_{\mathrm{e}}\approx 0.05\ \mathrm{s}. \qquad (3.23)$$

При чему T_{e} представља "процењено време" стабилности на коначном временском интервалу. Такође, нумерички резултати се могу добити за доказивање аналитичке предикције, израза (3.23), за следеће параметре: $\alpha=1/2$, $h=0.01s$, $\tau=0.1s$, $\psi_x(t)=(0.05,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\forall t\in[-0.1,0]$ где је одређена норма $\left\|x(t)\right\|$ на временском интервалу $[0,1]$ као што је приказано на сл. 1.



Слика.1. Тренд промене норме $\left\|x(t)\right\|$

Надаље, овде се разматра класа нелинеарних аутономних пертурбованих система описаних диференцијалним једначинама са временским кашњењем са нецелим изводима, дата следећом једначином у простору стања:

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}}=(A_0+\Delta A_0)x(t)+(A_1+\Delta A_1)x(t-\tau)+f_0(x(t)), \qquad (3.24)$$

са почетним функцијама система описаним јед. (4.190) и векторском функцијом f_0 која задовољава јед. (3.2). Векторска функција f_0 представља нелинеарну пертурбацију у односу на $x(t)$, а матрице $\Delta A_0, \Delta A_1$ представљају пертурбације у систему система. Такође уводи се и следећа претпоставка:

$$\left\| f_0\left(x(t)\right)\right\| \leq c_0 \left\| x(t)\right\|,\ t \in \left[0,\infty\right), \tag{3.25}$$

где је $c_0 \in R^+$ позната реална позитивна матрица. За случај када је $\alpha = 1$ добија се класа класичних, нелинеарних пертурбованих система са временским кашњењем целог реда, описана преко једначине у простору стања:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{dt}} = \left(\mathrm{A}_0 + \Delta\mathrm{A}_0\right)x(t) + \left(\mathrm{A}_1 + \Delta\mathrm{A}_1\right)x(t-\tau) + f_0\left(x(t)\right). \tag{3.26}$$

Овде је неопходно решити проблем одређивања довољних услова, који омогућавају да кретања система остају унутар *а приори* дефинисаних скупова за дату класу нелинеарних аутономних пертурбованих система (3.24) описаних диференцијалним једначинама са временским кашњењем и нецелим изводима, (*Lazarević,*2007a,2008).

Теорема 3. Нелинеарни аутономни систем, описан јед. (3.26), који задовољава почетне услове дефинисане јед. (3.2) и јед. (3.25) је *стабилан на коначном временском интервалу* у односу на $\left\{\delta,\varepsilon,t_o,J,\right\}$, $\delta < \varepsilon$, ако је задовољен следећи услов:

$$\left(1 + \frac{\mu_p\left(t-t_0\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) e^{\frac{\mu_p\left(t-t_0\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}} \leq \varepsilon/\delta,\ \forall t \in J\,, \tag{3.27}$$

где су одговарајући параметри одређени следећим релацијама:

$$\begin{aligned} &\mu_{Aoco} = \sigma_{Ao} + \gamma_{\Delta A_0} + c_0, \\ &\sigma_{A1\Delta} = \sigma_{A1} + \gamma_{\Delta A_1},\ \mu_p = \mu_{Aoco} + \sigma_{A1\Delta}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Доказ. Сам поступак доказа Теореме 3 је аналоган поступку доказа претходних Теорема 1,2**.** У складу са особинама извода нецелог реда датог система $0 < \alpha < 1$, решење се може добити у облику *Volterra* – е интегралне једначине:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \left(A_0 + \Delta A_0\right)\mathbf{x}(t) + \\ +\left(A_1 + \Delta A_1\right)\mathbf{x}(t-\tau) + f_0\left(\mathbf{x}(t)\right) \end{pmatrix} ds. \tag{3.29}$$

Применом норме $\left\|(\cdot)\right\|$ на јед. (3.29) и коришћењем одговарајућих особина дате норме, добија се:

$$\left\|\mathbf{x}(t)\right\| \leq \left\|\mathbf{x}(t_0)\right\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \left(\left(t-s\right)^{\alpha-1}\right) \left\| \begin{matrix} A_0\mathbf{x}(s) + \Delta A_0\mathbf{x}(s) + A_1\mathbf{x}(s-\tau) + \\ +\Delta A_1\mathbf{x}(s-\tau) + f_0\left(\mathbf{x}(s)\right) \end{matrix} \right\| ds. \tag{3.30}$$

Ако се сада примени норма на (3.26) са узимањем у обзир претпоставке (3.25) произилази да је:

6. Стабилност неутралних система са кашњењем нецелог реда на коначном временском интервалу

6.1 Стабилност временски континуалних неутралних система са кашњењем нецелог реда на коначном временском интервалу

Неутрални системи са временским кашњењем добивају повећани интерес захваљујући њиховим успешним применама у популацијској екологији, дистрибуираним мрежама састављеним од проводника без губитака, измењивачима топлоте, роботима у контакту са крутом околином, управљању манипулатора са ограничењима са мерењем временског кашњења, системима који требају информације о претходним величинама стања и тако даље.

У скорије време, развојем теорије диференцијалних једначина нецелог реда догодио се нагли раст у истраживању неутралних система нецелог реда са временским кашњењем. Проблем анализе стабилности таквих система је једна од најзанимљивијих тема у теорији управљања јер је анализа стабилности један од најважнијих проблема за системе управљања. Али стабилност оваквих система показује се као врло комплексан проблем јер ови системи укључују изводе стања са временским кашњењем и постојање временског кашњења је често узрок нестабилности иако је проблем за системе са временским кашњењем изучаван већ много година. У многим радовима, многи научници су искористили Љапуновљеву технику, методу карактеристичне једначине или Гронвалов приступ извођења довољних услова за стабилност система.

У овом поглављу посматра се неутрални систем са кашњењем диференцијалне једначине нецелог реда у облику, (*Liu, Jiang, 2014*)

$$
\begin{aligned}
&{}^{c}D_{0}^{\alpha}\left[x(t)-Cx(t-\tau)\right]=Ax(t)+\mathrm{B}x(t-\tau)+f(t) \qquad (6.1)\\
&x(t)=\varphi(t),\ -\tau\le t\le 0,
\end{aligned}
$$

где је са ${}^{c}D_{0}^{\alpha}$ означен Капутов нецели извод реда $\alpha\left(0<\alpha\le 1\right)$, $A,B,C\in R^{nxn}, f\in C\left(R,R^{n}\right)$ и $\varphi\in C^{1}\left(\left[-\tau,0\right],R^{n}\right)$. Интеграл нецелог реда функције $f\in L^{1}([a,b],\mathbb{R})$ реда $\alpha\in\mathbb{R}^{+}$ је дефинисан као:

$$
I_{a^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds, \qquad (6.2)
$$

док је Риман-Лиувилов и Капутов извод нецелог реда који ће се даље користити респективно дефинисан као

$$
\begin{aligned}
D_{a^+}^{\alpha}f(t)&=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds,\\
{}^{c}D_{a^+}^{\alpha}f(t)&=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

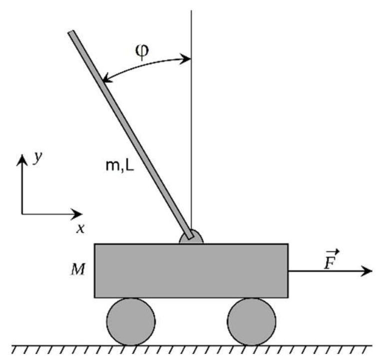
где је $n=[\alpha]+1$ и $[\alpha]$ означава цеобројни део од α, *(Podlubny, 1999).* У даљем излагању користиће се следеће ознаке, $I_{0}^{\alpha}f(t)$ и ${}^{c}D_{0}^{\alpha}f(t)$ као $I^{\alpha}f(t)$ и $D^{\alpha}f(t)$, респективно.

7. Стабилност на коначном временском интервалу изабране класе механичких неутралних система нецелог реда са кашњењем

Овде је од интереса проучити нека питања стабилности (стабилности на коначном временском интервалу и/или асимптотске стабилности) дате класе механичких система неутралног типа нецелог реда са кашњењем. Прво се разматра транслаторно инверзно клатно које је приказано на слици 1.

7.1.1. Математички модел транслаторног инверзног клатна

Шематски приказ транслаторног инверзног клатна дат је на слици 1. У питању је механички систем са два степена слободе, при чему су положај колица и клатна означени са x, θ, респективно. Управљање овим механичким системом се врши помоћу хоризонталне силе F која делује на колица. Значи, у питању је тзв. подактуаторски-нередудантни систем (са становишта управљања) са два степена слободе и једном управљачком величином.



Слика 1. Транслаторно инверзно клатно

При томе следећи параметри система су: M - маса колица, m - маса клатна, L - укупна дужина клатна, $0.5L$ - растојање тачке вешања клатна до центра масе клатна, J - аксијални момент инерције клатна у односу на тачку вешања клатна, k_v - коефицијент отпора средине. Овде ће се искористити Родригов приступ *Čović, Lazarević, (2009)* приликом извођења математичког модела система. Као што је већ напоменуто, генералисане координате q_1 и q_2 представљаће положај колица x и угао клатна θ респективно. Диференцијалне једначине кретања инверзног клатна написане у коваријантном облику Лагранжевих једначина друге врсте гласе:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{\gamma\alpha}\ddot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}\dot{q}_{\alpha}\dot{q}_{\beta} = Q_{\gamma}, \quad \gamma = 1,2 \tag{7.1}$$

где коефицијенти $a_{\alpha\beta}$ представљају коефицијенте метричког тензора $\left[a_{\gamma\alpha}\right] \in R^{2\times 2}$, а $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$

$\alpha,\beta,\gamma=1,2$ означавају Кристофелове симболе прве врсте. Генералисане силе Q_γ могу се представити следећим изразом (7.2), при чему Q_γ^g, Q_γ^v, Q_γ^a представљају генералисане силе Земљине теже, вискозног трења, и погонских сила, респективно:

$$Q_\gamma = Q_\gamma^g + Q_\gamma^v + Q_\gamma^a, \quad \gamma = 1,2\,. \tag{7.2}$$

Диференцијалне једначине кретања записане у развијеној форми су сада облика:

$$\left(m+M\right)\ddot{x} - \frac{ml}{2}\ddot{\theta}\cos\theta + \frac{ml}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta = F, \tag{7.3а}$$

$$-\frac{ml}{2}\ddot{x}\cos\theta + \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} = \frac{mgl}{2}\sin\theta - k_\upsilon\dot{\theta} \tag{7.3б}$$

Даље је потребно спровести упрошћавање горе изведених динамичких једначина понашања. У ту сврху, користићемо технику која је се заснива на *инверзној динамици управљаног систем*а тј. примениће се *метода парцијалне feedback линеаризације Khalil (2002)* чији је циљ упрошћавање математичког модела посматраног система. Први корак је израчунавање $\ddot{\theta}$ и замена у (7.3а), где после сређивања једначина (7.3а) добија следећи облик:

$$\left(m+M-\frac{3}{4}m\cos^2\theta\right)\ddot{x} - \frac{3}{4}\frac{mg}{4}\sin\theta\cos\theta + \frac{ml}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta + \frac{3}{2}\frac{k_\upsilon}{l}\dot{\theta}\cos\theta = F, \tag{7.4}$$

Сада се може управљачка сила F изабрати као*, (Mandić, et al.2017):*

$$F = \left(m+M-\frac{3}{4}m\cos^2\theta\right)u - \frac{3}{4}\frac{mg}{4}\sin\theta\cos\theta + \frac{ml}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta + \frac{3}{2}\frac{k_\upsilon}{l}\dot{\theta}\cos\theta,\ , \tag{7.5}$$

где $u\left(t\right)$ представља нову управљачку величину. На тај начин једначине (73а,73б) се могу приказати као:

$$\ddot{x}\left(t\right) = u\left(t\right), \tag{7.6а}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\sin\theta - \frac{k_\upsilon}{J}\dot{\theta} + \frac{1}{L}\cos\theta\cdot u \tag{7.6б}$$

при чему је $g \approx 9.81\left[m/s^2\right]$ и $L = 2l/3$, $l-$ укупна дужина клатна. Из горњих једначина видимо да положај колица не утиче на кретање клатна.

7.1.2 Примена методе Д разлагања

Да бисмо пројектовали управљачки систем морамо линеаризовати једн. (7.7) око нестабилног равнотежног положаја $\left(\dot{x},\varphi,\dot{\varphi}\right)=\left(0,0,0\right)$. Овакав управљачки систем може се искористити и за управљање нелинеарног система, под условом да кретање система не одступа много од равнотежног положаја *Khalil, (2002)*. Дакле, линаризацијом горњег система добијамо следеће једначине:

$$\ddot{x} = u \tag{7.7а}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{k_\upsilon}{J}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta + \frac{1}{L}\cdot u \tag{7.7б}$$

Сада је циљ применити адекватно управљање u тако да се постигне асимптотска стабилност за $(\dot{x},\varphi,\dot{\varphi})$. Да бисмо то реализовали, предлаже се увођење следеће управљање које укључује регулатор ПДА нецелог типа у којој се јавља и чисто временско кашњење:

$$u(t)=-K_p\theta(t-\tau)-K_d\dot{\theta}(t-\tau)-K_a\ddot{\theta}(t-\tau)-K_\alpha\theta^\alpha(t-\tau)-K_x\dot{x}(t), \tag{7.8}$$

где K_p,K_d,K_a,K_α,K_x означавају пропорционална и диференцијална појачања првог и другог реда регулатора, а α је извод нецелог реда. Замењујући (7.8) у једн. (7.7) и занемарујући $k_\upsilon \approx 0$ добијамо:

$$\ddot{x}(t)+K_x\dot{x}(t)=-K_p\theta(t-\tau)-K_d\dot{\theta}(t-\tau)-K_a\ddot{\theta}(t-\tau)-K_\alpha\theta^\alpha(t-\tau) \tag{7.9а}$$

$$L\ddot{\theta}(t)-g\theta(t)+K_p\theta(t-\tau)+K_d\dot{\theta}(t-\tau)+K_a\ddot{\theta}(t-\tau)+K_\alpha\theta^\alpha(t-\tau)=-K_x\dot{x}(t) \tag{7.9б}$$

У циљу анализе стабилности разматраног система овде је погодно применити методу Д-разлагања за решавање овог проблема, (*Neimark, 1949)*. Користећи метод Д-разлагања може се одредити скуп свих вредности подешљивих параметара управљачког система за које је разматрани систем стабилан. На тај начин, може се одредити потенцијална област стабилности у одговарајућој параметарској равни оивичене контурама. Даље се може потврдити да уочена области стабилности јесте област стабилности, применом добро познатих критеријума стабилности у теорији управљања (Најквистов, Хурвицов, Раусов). У циљу примене методе Д-разлагања неопходно је одредити карактеристични полином система (7.9). тј.

$$f(s)=Ls^3+K_xLs^2-gs-K_xg+se^{-\tau s}\left(K_p+K_ds+K_as^2+K_\alpha s^\alpha\right) \tag{7.10}$$

Овде ће се испитивати утицај параметара K_p, K_d и α на асимптотску стабилност система описаног једн. (7.9). Даље је потребно одредити криву разлагања и ова крива се добија заменом $s=j\omega$ у (7.10) и изједначавајући полином са нулом добија се: (7.11)

$$f(j\omega)=L(j\omega)^3+K_xL(j\omega)^2-g(j\omega)-K_xg+(j\omega)e^{-\tau j\omega}\left(K_p+K_d(j\omega)+K_a(j\omega)^2+K_\alpha(j\omega)^\alpha\right)=0$$

где је сада могуће да (7.11) раздвојимо на реални и имагинарни део:

$$f(j\omega)=\mathrm{Re}(\omega,K_P,K_D,\alpha)+j\,\mathrm{Im}(\omega,K_P,K_D,\alpha)=0, \tag{7.12}$$

где је потребно применити познате смене: $e^{-j\tau\omega}=\cos(\omega\tau)-j\sin(\omega\tau)$, $(j\omega)^\alpha=\omega^\alpha\left(\cos(\alpha\pi/2)+j\sin(\alpha\pi/2)\right)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\omega,K_P,K_D,\alpha)&=(\omega\sin(\omega\tau))K_P-\omega^2\cos(\omega\tau)K_d-K_xL\omega^2-K_xg+\\&+\omega\sin(\omega\tau)\left[-K_a\omega^2+K_\alpha\omega^\alpha\cos(\alpha\pi/2)\right]-\omega\cos(\omega\tau)K_\alpha\omega^\alpha\sin(\alpha\pi/2)=0\\&=a_{11}K_p+a_{12}K_d-b_1=0\end{aligned} \tag{7.13а}$$

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

681.5.037

ЛАЗАРЕВИЋ, Михаило, 1964-
Стабилност посебних класа динамичких система нецелог и целог реда са кашњењем / Михаило П. Лазаревић. - 1. изд. - Београд : Универзитет, Машински факултет, 2022 (Београд : Planeta print). - IX, 170 стр. : илустр. ; 24 cm

Тираж 200. - Библиографија: стр. 166-170 и уз свако поглавље.

ISBN 978-86-6060-148-5

а) Системи аутоматског управљања -- Стабилност

COBISS.SR-ID 84403209