

У. БУГАРИЧ, И. ВУКОВИЧ, доктора технических наук, З. ИЕЛИ
(Университет в Белграде, Машиностроительный факультет, Сербия)

Оптимальное управление движением систем, аналогичных математическому маятнику переменной длины

Рассмотрено движение математического маятника (с экскурсом в применение его при моделировании крановых устройств) при переходе точки подвеса из состояния покоя в состояние движения с постоянной скоростью в заданное время с затуханием колебаний в конце процесса. Для нахождения решений задачи применены принцип максимума Понтрягина и дискретный метод затухания колебаний. В качестве управляющей величины в обоих случаях использовано ускорение точки подвеса математического маятника. Рассмотрен случай с переменной длиной математического маятника.

Simple pendulum motion (also considering its application at crown block modelling) is considered at suspension point transition from the quiescent to motion state at constant velocity at preset time with damped vibrations at the end of the process. To solve the problem Pontryaguin maximal principle and discrete method of vibrations damping are used. As a control value in both cases simple pendulum suspension point acceleration is used. A case of simple pendulum of variable length is considered.

Введение

Моделирование работы мостовых перегружателей можно осуществить, проведя аналогию между крановой тележкой и грейфером с грузом (рис. 1), с одной стороны, и математическим маятником, длина которого меняется и точка подвеса движется, с другой. В данном случае точка подвеса маятника представляет собой центр тяжести крановой тележки, а материальная точка — грейфер с грузом.

Правомерность такой аналогии подтверждается трудами нескольких авторов [1—4], которые крановую тележку и груз моделируют динамической системой с двумя массами, взаимосвязанными нерастяжимым канатом. В этих трудах утверждаются законы колебания груза в вертикальной плоскости, а также обратное влияние этих колебаний на динамические нагрузки системы

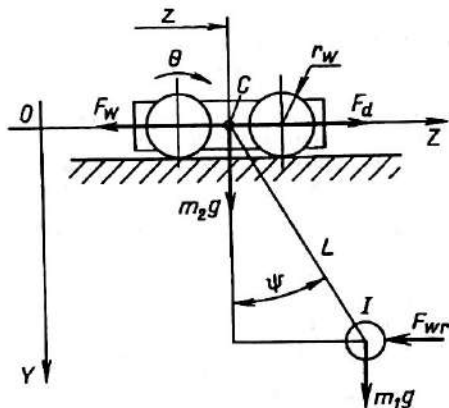


Рис. 1. Упрощенная схема движения крановой тележки и грейфера

при различных законах изменения приводной силы крановой тележки.

Уменьшение динамических нагрузок кранов требует максимально возможного устранения колебаний груза как в нестационарных (ускорение, торможение), так и в стационарных режимах движения крановых тележек. Задача уменьшения динамических нагрузок крановых систем применением упомянутой аналогии приводит к решению следующих двух задач о движении математического маятника: 1) движение математического маятника из состояния покоя на заданное расстояние с затуханием колебаний в конце процесса; 2) движение математического маятника из состояния движения с постоянной скоростью в начале периода торможения в состоянии равномерного движения с заданной скоростью в конце периода ускорения (т. е. в состоянии покоя в конце периода торможения) с затуханием колебаний в конце обоих периодов нестационарного движения.

А. Т. Заремба [5] решает задачу 1 о движении в течение минимального времени математического маятника постоянной длины, у которого скорость и ускорение (управляющие величины) ограничены по абсолютному значению. Н. Чыонг [6], принимая скорость точки подвешивания, ограниченную по абсолютной величине, за управляющую величину, получает решение для задач 1 и 2 при движении маятника через вязкую среду в течение минимального времени. Н. Н. Болотник и Н. Чыонг [7] решают задачу 1 о движении математического маятника переменной длины, принимая за управляющую величину приводную силу, ограниченную по абсолютному значению.

Другим подходом к решению задачи о движении математического маятника является применение принципа максимума Понтрягина. Б. Н. Соколов [8] с помощью принципа максимума, принимая за управляющую величину ускорение, ограниченное абсолютной величиной, определил, что в заданный момент выбором величины управления можно получить максимальное (минимальное) значение функционала, представляющее собой энергию математического маятника. Авторы работы [9] решают задачу 1 о движении математического маятника, принимая приводную силу за управляющую величину, применением принципа максимума. Функционал, который в данном случае надо минимизировать на заданном интервале времени, как раз и есть та самая управляющая величина, т. е. квадрат приводной силы. Дм. Зрнич, У. Бугарич и И. Вукович [10] с помощью принципа максимума решают задачу 2 о движении математического маятника, принимая ускорение за управляющую величину. Функционал, который на заданном интервале времени надо минимизировать, представляет

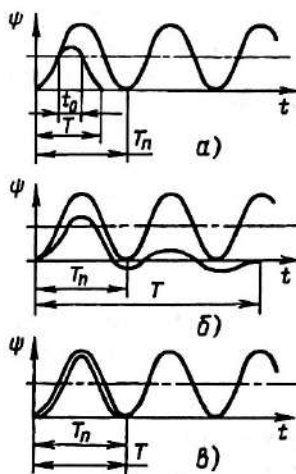


Рис. 2. Методы, обеспечивающие затухание колебаний маятника: а — дискретное; б — аналоговое; в — приспособляемое; T_n — период свободных колебаний маятника; T — период ускорения или замедления (торможения); t_0 — период, в котором ускорение/торможение прервано

собой сумму квадратов угла отклонения, угловой скорости отклонения и управления, т. е. ускорения.

Качественно различный подход при решении проблемы уменьшения динамических нагрузок крановых систем, т. е. затухания колебаний при движении крановой тележки и груза, встречаем в работах [11–14]. Авторы этих трудов на основе известных характеристик подъемных систем и их динамических моделей моделируют управляющие системы и определяют режимы работы приводных механизмов, необходимые для затухания колебаний, т. е. автоматизации грузоподъемных устройств. Другими словами, автоматизация грузоподъемных устройств осуществима, только если можно контролировать колебание груза.

Упомянутые выше труды основываются [15] на том, что, принимая во внимание время T ускорения (торможения) как референтную величину, существующие установки можно в основном отнести к трем характерным типам: 1) установки, у которых период свободного колебания маятника $T_n > T$; 2) установки, у которых $T_n < T$; 3) установки, у которых $T_n = T$. На основе соотношения величин T_n и T можно использовать методы, обеспечивающие затухание колебаний маятника (рис. 2): дискретное (а) (применение импульсов Дирака); аналоговое (б); приспособляемое (в).

В данной статье рассмотрена и задача 2 о движении математического маятника в период ускорения точки подвеса математического маятника (крановой тележки). Оптимальное решение определяли путем применения принципа максимума для системы с переменной длиной математического маятника. Наряду с этим искали также решение путем применения дискретного метода затухания колебаний.

Выгрузка сыпучего груза грузоподъемными установками с грейфером

В порту выгрузки сыпучего груза с судна осуществляется организация различных работ, связанных с управлением потоками материалов от судна до транспортной или складской системы технологической установки, обеспечивающей максимальное обслуживание судна с минимальными затратами. Для сыпучего груза

характерно, что затраты на транспорт и перегрузки составляют значительную часть его стоимости. В судоходный период порт работает семь дней в неделю круглосуточно. В таких рабочих условиях даже самое небольшое сокращение продолжительности выгрузочного цикла приводит к увеличению производительности и большой экономии энергии, необходимой для работы грузоподъемной техники.

В статье анализируется цикл выгрузки грузоподъемными установками с грейфером. С одной стороны, полная автоматизация процесса выгрузки стоит дорого, а с другой, — крановщик не может в течение продолжительного времени вручную повторять оптимальный выгрузочный цикл. Единственным осуществимым на практике решением является внедрение полуавтоматического цикла выгрузки, при котором часть работы выполняется вручную (движение грейфера контролирует крановщик), а часть — автоматически (движением грейфера управляет ЭВМ в соответствии с заданным алгоритмом).

Автоматическая часть полуавтоматического цикла выгрузки состоит из движения грейфера до бункера, опорожнения грейфера и обратного движения пустого грейфера от бункера до судна. Положение точки начала/окончания автоматической части полуавтоматического цикла выгрузки зависит от заданной геометрии системы, уровня воды в водоеме, уровня выгружаемого материала на судне и т. д. [13]. Ниже рассматривается только автоматическая часть полуавтоматического цикла выгрузки.

Математическая модель

Рассмотрим движение в вертикальной плоскости динамической системы, представляющей идеализированную модель крановой тележки и грейфера (см. рис. 1). Твердое тело массой m_1 соединено нерастяжимым канатом без массы с другим твердым телом массой m_2 , которая движется поступательно под действием тяговой силы F_d вдоль горизонтальной оси z . Предполагается, что тяговая сила F_d может действовать в положительном и отрицательном направлениях оси z . Это предположение на практике можно осуществить применением двигателя переменного тока. Масса m_1 движется в плоскости ZOY под действием силы в канате и гравитационной силы.

Обозначения, использованные в математической модели: z — мгновенное положение центра тяжести крановой тележки; ψ — угол отклонения каната от вертикали; g — ускорение свободного падения; $m_1 = 12\,500$ кг — масса груза и грейфера; $m_w = 253,5$ кг — масса колеса тележки; $m_2 = 15\,000$ кг — масса крановой тележки; L — мгновенная длина каната (длина каната меняется при подъеме и опускании грейфера); $r_w = 0,2$ м — радиус колеса тележки; θ — угол поворота колеса ($z = \theta r_w$); F_d — тяговая сила; F_{wr} — сила сопротивления (ветер), действует на грейфер и зависит от площади грейфера (не принимается во внимание); F_w — сила сопротивления движению тележки:

$$F_w = g(m_1 + m_2)(2f + \mu d)\beta/D_w, \quad (1)$$

где $d = 0,1$ м — диаметр оси колеса тележки; $D_w = 2r_w$ — диаметр колеса тележки; $\mu = 0,012$ — коэффициент трения между осью и ступицей колеса; $f = 0,05 \cdot 10^{-2}$ — коэффициент трения колеса по рельсу; $\beta = 2,3$ — коэффициент, учитывающий сопротивление, возникающее из-за перекосов тележки.

Применяя уравнения Лагранжа второго порядка, получаем систему из двух дифференциальных уравнений, описывающих движение крановой тележки и грейфера. Для небольших углов отклонения каната ($\psi \in 0 \div 10^\circ$) систему можно записать в виде [10, 17]:

$$\begin{cases} (m_1 + 2m_t + m_2)\ddot{z} + m_1 L \ddot{\psi} + m_1 \dot{\psi} \dot{L} - \\ - m_1 L \dot{\psi}^2 + 2m_1 \dot{L} \dot{\psi} = F_d - F_w - F_w r; \\ \ddot{z} + L \ddot{\psi} + 2\dot{L} \dot{\psi} = -g\psi - F_{wp}/m_1. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнение (3) полученной системы представляет собой дифференциальное уравнение математического маятника, длина которого изменяется, точка подвеса движется и на материальную точку которого действует сила сопротивления движению.

Управление движением тележки и грейфера при затухании колебаний

При теоретическом рассмотрении дискретного затухания колебаний (см. рис. 2, а) уравнение (3) полученной системы будет рассматриваться отдельно.

Дискретное затухание колебаний можно осуществить в три этапа движения точки подвеса математического маятника (центра тяжести крановой тележки). Если принять, что в течение первого этапа в уравнении (3) $\ddot{z}(t) = \text{const}$, то скорость точки подвеса математического маятника на этом этапе будет меняться с постоянным ускорением/замедлением. На втором этапе движения ускорения нет, т. е. $\ddot{z}(t) = 0$ (период t_0), и скорость точки подвеса математического маятника (центра тяжести крановой тележки) равна достигнутой в конце первого этапа. Если и на третьем этапе принять, что $\ddot{z}(t) = \text{const}$, то скорость точки подвеса маятника будет меняться с постоянным ускорением/замедлением от начальной скорости, равной скорости в конце второго этапа, до какой-то требуемой окончательной скорости движения в конце периода ускорения, т. е. до состояния покоя в конце периода торможения. Продолжительность отдельных этапов необходимо определять, решая систему трансцендентных уравнений, полученную решением дифференциального уравнения (3), для каждого этапа с соответствующими начальными условиями. При этом необходимо выдерживать условие, чтобы в конце периода ускорения/торможения угол отклонения каната и его угловая скорость были равны нулю.

Постоянная, полученная из условия $\ddot{z}(t) = \text{const}$, значит, что ускорение/замедление точки подвеса математического маятника (центра тяжести крановой тележки) постоянно, т. е. что скорость точки подвеса математического маятника изменяется одинаково ускоренно/за-

медленно и равна отношению требуемой скорости в конце/начале периода (данного этапа) ускорения/торможения к продолжительности периода ускорения/торможения.

Чтобы осуществить оптимальное движение грейфера (затухание колебаний) в нестационарных периодах (ускорение, торможение), уравнение (3) рассмотрим отдельно. Данное уравнение можно записать в виде:

$$\ddot{\psi} = -(g/L)\psi - (2\dot{L}/L)\dot{\psi} - \ddot{z}/L. \quad (4)$$

Считая ускорение \ddot{z} крановой тележки управляемым и вводя новые переменные:

$$\psi = y_1; \quad \dot{\psi} = y_2; \quad \dot{z} = y_3; \quad \ddot{z} = u, \quad (5)$$

можем заменить уравнение (4) системой уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = -(g/L)y_1 - (2\dot{L}/L)y_2 - u/L; \\ \dot{y}_3 \end{cases} \quad (6)$$

Проблема состоит в определении такого управления u , при котором система в период ускорения из исходного состояния

$$t = t_0 = 0, \quad y_1(t_0) = 0, \quad y_2(t_0) = 0, \quad y_3(t_0) = 0 \quad (7)$$

придет в состояние

$$t = t_c, \quad y_1(t_c) = 0, \quad y_2(t_c) = 0, \quad y_3(t_c) = V_t, \quad (8)$$

а в период торможения из исходного состояния

$$t = t_0 = 0, \quad y_1(t_0) = 0, \quad y_2(t_0) = 0, \quad y_3(t_0) = V_t \quad (9)$$

придет в состояние

$$t = t_c, \quad y_1(t_c) = 0, \quad y_2(t_c) = 0, \quad y_3(t_c) = 0, \quad (10)$$

где V_t — скорость крановой тележки в стационарном режиме движения, причем интервал времени $[t_0, t_c]$ заранее известен.

Обусловим определение оптимального управления требованием:

$$\int_{t_0}^{t_c} \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + u^2) dt \rightarrow \min. \quad (11)$$

Это условие оптимальности предупреждает появление больших отклонений каната и больших величин управления. Проблема, выраженная отношениями (6)+(11), приведена к форме, позволяющей непосредственно применить принцип максимума [18], для чего преобразуем выражения (6) и (11) в функцию

$$H = \lambda_1 y_2 + \lambda_2 [-(g/L)y_1 - (2\dot{L}/L)y_2 - u/L] + \lambda_3 u - (y_1^2 + y_2^2 + u^2)/2, \quad (12)$$

где $\dot{\lambda}_1 = -\partial H/\partial y_1$; $\dot{\lambda}_2 = -\partial H/\partial y_2$; $\dot{\lambda}_3 = -\partial H/\partial y_3$.

По теореме принципа максимума функция (12) при оптимальном решении имеет максимальное значение. Из необходимого условия экстремума $\partial H/\partial u = 0$ и $\partial^2 H/\partial u^2 > 0$ получаем управление $u = \ddot{z} = -(1/L)\lambda_2 + \lambda_3$.

Подставив выражение (11) в уравнения (6) и (12), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = -(g/L)y_1 - (2\dot{L}/L)y_2 + (1/L^2)\lambda_2 - (1/L)\lambda_3; \\ \dot{y}_3 = -(1/L)\lambda_2 + \lambda_3; \\ \dot{\lambda}_1 = (g/L)\lambda_2 + y_1; \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 + (2\dot{L}/L)\lambda_2 + y_2; \\ \dot{\lambda}_3 = 0, \end{cases} \quad (13)$$

для решения которых имеем достаточное число условий: (7)–(10).

Таким образом, полученная система дифференциальных уравнений (13) с граничными условиями (7)–(10) представляет двуточечную граничную проблему.

Задача о движении математического маятника (крановой тележки и груза) будет решаться для граничных условий, установленных выражениями (7), (8) для периода ускорения, и в случае изменения (уменьшения) длины математического маятника (каната), так как не существует разницы в форме решения, когда задача о движении математического маятника решается для граничных условий (7), (8) и (9), (10).

Изменение тяговой силы, приложенной к точке подвеса математического маятника (крановой тележки) и необходимой для осуществления требуемого движения во времени, получается подстановкой соответствующих значений угла отклонения каната, угловой скорости и углового ускорения отклонения каната, скорости и ускорения (управления) точки подвеса, полученных некоторым из представленных способов, в уравнение (2) системы дифференциальных уравнений.

Затухание колебаний при переменной длине математического маятника

Дифференциальное уравнение (3) в случае линейного закона изменения длины каната и изменения скорости точки подвеса математического маятника с постоянным ускорением/замедлением ($\ddot{z}(t) = c$) принимает вид:

$$(L_s \pm V_{h(1)}t)\ddot{\psi} \pm 2V_{h(1)}\dot{\psi} + g\psi = -c, \quad (14)$$

где L_s — длина каната в начале периода ускорения/торможения, m ; $V_{h(1)}$ — скорость подъема (знак "–")/опускания ("+") груза, т. е. изменения длины каната.

Предположили [17], что решение дифференциального уравнения (14) имеет вид $\psi = f(\tau)$, где $\tau = L_s \pm V_{h(1)}t$, а функция — вид $f = \tau^m F(\xi)$, в то время как аргумент функции F — вид $\xi = \alpha\tau^n$. Применением этих замен, дифференцированием и подстановкой в дифференциальное уравнение (14) последнее приводится к виду:

$$\xi^2 F'' + \frac{2m+n+1}{n} \xi F' + \frac{1}{n^2} [m(m+1) + \frac{g}{V_{h(1)}^2 \alpha^{1/n}} \xi^{1/n}] F = 0. \quad (15)$$

Параметры m , n и α необходимо определить так, чтобы дифференциальное уравнение (15) было приведено к дифференциальному уравнению Бесселя, для чего предположим, что $n = 1/2$ (принято); $\frac{2m+n+1}{n} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2}; \frac{g}{V_{h(1)}^2 \alpha^{1/n}} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{2\sqrt{g}}{V_{h(1)}}.$$

Подстановкой принятых для параметров m , n и α значений в уравнение (15) последнее приводится к виду:

$$\xi^2 F'' + \xi F' + (\xi^2 - 1)F = 0. \quad (16)$$

Общее решение уравнения (16) после соответствующих замен приводится к виду:

$$\psi = [C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x)] / \sqrt{L_s \pm V_{h(1)}t} - c/g, \quad (17)$$

где C_1 , C_2 — постоянные, которые определены из начальных условий J_1 и Y_1 функции Бесселя первого порядка: $x = 2\sqrt{g} \sqrt{L_s \pm V_{h(1)}t} / V_{h(1)}$ — аргумент функции Бесселя.

Применяя формулы для дифференцирования функций Бесселя, получаем выражение для угловой скорости отклонения каната:

$$\dot{\psi} = \mp \sqrt{g} [C_1 J_2(x) + C_2 Y_2(x)] / (L_s \pm V_{h(1)}t), \quad (18)$$

где J_2 и Y_2 — функции Бесселя второго порядка.

Дискретное затухание колебаний при переменной длине математического маятника (каната) [17]. Анализ дискретного затухания колебаний будет выполнен, как уже говорилось, для случая уменьшения длины каната, т. е. подъема груза, и граничных условий, определенных выражениями (17), (18) (ускорение). Результаты, полученные в случае уменьшения длины каната, действительны и в случае увеличения длины каната (опускание груза). Изменение длины каната в течение периода ускорения будет иметь вид:

$$L = L_s - V_n t. \quad (19)$$

При дискретном затухании колебаний существуют, как уже говорилось, три этапа движения. Постоянные $C_i(\ddot{z}(t)_i = C_i, i = 1, 2, 3)$ по этапам имеют значения: $C_1 = V_i/(2t_i)$; $C_2 = 0$; $C_3 = V_i/(2t_{III})$, где t_i , t_{III} — продолжительность первого и третьего этапа в период ускорения. Начальные условия $\psi(0)$ и $\dot{\psi}(0)$, на основании которых вычисляются постоянные C_{1i} и C_{2i} ($i = 1, 2, 3$), для каждого этапа следующие: первый — $\psi_I(0) = 0$ и $\dot{\psi}_I(0) = 0$; второй — $\psi_{II}(0) = \psi_{Ik}$ и $\dot{\psi}_{II}(0) = \dot{\psi}_{Ik}$ (здесь ψ_{Ik} и $\dot{\psi}_{Ik}$ — угол и угловая скорость отклонения каната в конце первого этапа периода ускорения); третий — $\psi_{III}(0) = \psi_{IIIk}$ и $\dot{\psi}_{III}(0) = \dot{\psi}_{IIIk}$ (здесь ψ_{IIIk} и $\dot{\psi}_{IIIk}$ — угол и угловая скорость отклонения каната в конце второго этапа периода ускорения).

В общем случае выражения для определения постоянных C_{1i} и C_{2i} ($i = 1, 2, 3$) имеют вид:

$$C_{1i} = \frac{(\psi_i(0) + c_i/g)\sqrt{L_{si}}Y_2(x_i) - (\dot{\psi}_i(0)L_{si}/\sqrt{g})Y_1(x_i)}{J_1(x_i)Y_2(x_i) - J_2(x_i)Y_1(x_i)};$$

$$C_{2i} = \frac{-(\psi_i(0) + c_i/g)\sqrt{L_{si}}J_2(x_i) + (\dot{\psi}_i(0)L_{si}/\sqrt{g})J_1(x_i)}{J_1(x_i)Y_2(x_i) - J_2(x_i)Y_1(x_i)},$$

где L_{si} — начальная длина каната для данного этапа периода ускорения; x_i — аргументы функций Бесселя в зависимости от этапа периода ускорения ($i = 1, 2, 3$).

Подставив значения постоянной C_i , соответствующие начальные условия и выражения (17) и (18), упорядочив полученные выражения и приравняв их нулю (отклонение и угловая скорость в конце периода ускорения должны быть равны нулю), получим систему из двух трансцендентных уравнений, из которых необходимо определить продолжительности отдельных этапов. Полученная система имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{V_i/(2g)}{\sqrt{L_s - V_h(t_I + t_{II} + t_{III})}} \left\{ \left[\frac{(1/t_I)\sqrt{L_s}Y_2(x_0)}{J_1(x_0)Y_2(x_0) - J_2(x_0)Y_1(x_0)} + \right. \right. \\ & + \frac{-(1/t_I)\sqrt{L_s - V_h t_I}Y_2(x_1)}{J_1(x_1)Y_2(x_1) - J_2(x_1)Y_1(x_1)} + \\ & + \left. \frac{(1/t_{III})\sqrt{L_s - V_h(t_I + t_{II})}Y_2(x_2)}{J_1(x_2)Y_2(x_2) - J_2(x_2)Y_1(x_2)} \right] J_1(x_3) + \\ & + \left[\frac{-(1/t_I)\sqrt{L_s}J_2(x_0)}{J_1(x_0)Y_2(x_0) - J_2(x_0)Y_1(x_0)} - \right. \\ & - \frac{-(1/t_I)\sqrt{L_s - V_h t_I}J_2(x_1)}{J_1(x_1)Y_2(x_1) - J_2(x_1)Y_1(x_1)} - \\ & \left. - \frac{(1/t_{III})\sqrt{L_s - V_h(t_I + t_{II})}J_2(x_2)}{J_1(x_2)Y_2(x_2) - J_2(x_2)Y_1(x_2)} \right] Y_1(x_3) \left. \right\} - \\ & - \frac{1}{t_{III}} \frac{V_i}{2g} = 0; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{g}V_i/(2g)}{L_s - V_h(t_I + t_{II} + t_{III})} \left\{ \left[\frac{(1/t_I)\sqrt{L_s}Y_2(x_0)}{J_1(x_0)Y_2(x_0) - J_2(x_0)Y_1(x_0)} + \right. \right. \\ & + \frac{-(1/t_I)\sqrt{L_s - V_h t_I}Y_2(x_1)}{J_1(x_1)Y_2(x_1) - J_2(x_1)Y_1(x_1)} + \\ & + \left. \frac{(1/t_{III})\sqrt{L_s - V_h(t_I + t_{II})}Y_2(x_2)}{J_1(x_2)Y_2(x_2) - J_2(x_2)Y_1(x_2)} \right] J_2(x_3) + \\ & + \left[\frac{-(1/t_I)\sqrt{L_s}J_2(x_0)}{J_1(x_0)Y_2(x_0) - J_2(x_0)Y_1(x_0)} - \right. \\ & - \frac{-(1/t_I)\sqrt{L_s - V_h t_I}J_2(x_1)}{J_1(x_1)Y_2(x_1) - J_2(x_1)Y_1(x_1)} - \\ & \left. - \frac{(1/t_{III})\sqrt{L_s - V_h(t_I + t_{II})}J_2(x_2)}{J_1(x_2)Y_2(x_2) - J_2(x_2)Y_1(x_2)} \right] Y_2(x_3) \left. \right\} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $x_0 = 2\sqrt{g}\sqrt{L_s}/V_h$; $x_1 = 2\sqrt{g}\sqrt{L_s - V_h t_I}/V_h$;

$$x_2 = 2\sqrt{g}\sqrt{L_s - V_h(t_I + t_{II})}/V_h;$$

$$x_3 = 2\sqrt{g}\sqrt{L_s - V_h(t_I + t_{II} + t_{III})}/V_h.$$

Так как имеем систему из двух уравнений с тремя неизвестными (t_I, t_{II}, t_{III}) и потому, что решения системы уравнений (20) и (21) невозможно найти в аналитическом виде, а также исследовать их, вводится третье уравнение, которым задается продолжительность периода ускорения. Принято, что период ускорения по аналогии с дискретным затуханием колебаний математического маятника постоянной длины продолжается 3/4 периода свободных колебаний математического маятника [15, 17]. За компетентную длину математического маятника для определения периода ускорения/торможения принимается при увеличении длины конечная длина математического маятника, а при уменьшении — его начальная длина. Третье уравнение имеет вид:

$$t_I + t_{II} + t_{III} = (3/4)2\pi\sqrt{L_s/g}. \quad (22)$$

Решения системы уравнений (20)–(22) получены числовым путем с точностью более 10^{-4} . Необходимо подчеркнуть, что, как видно и из системы уравнений (20)–(22), требуемая скорость (V_i) движения точки подвеса математического маятника в конце периода ускорения не влияет на продолжительность отдельных этапов в течение периода ускорения. Диаграммы на рис. 3 представляют решение системы трансцендентных уравнений в виде процентного участия времени отдельных этапов в общем периоде ускорения при различных скоростях изменения длины математического маятника. На рис. 3, а представлены решения для $V_{h(I)} = 1,3333$ м/с, на рис. 3, б — для $V_{h(I)} = 0,8333$ м/с, а на рис. 3, в — для $V_{h(I)} = 0,6667$ м/с.

Как видно на рис. 3, продолжительности отдельных этапов периода ускорений неодинаковы. При снижении скорости $V_{h(I)}$ подъема/опускания и увеличении существующей длины L_s математического маятника (каната) эти периоды имеют тенденцию к выравниванию, т. е. составляют примерно по 1/4 периода свободных колебаний математического маятника длиной L_s .

Оптимальное затухание колебаний при переменной длине математического маятника (каната). Систему (13) дифференциальных уравнений при изменении длины математического маятника (каната), определяемом по выражению (19), невозможно решить аналитически. Решение, полученное числовым образом (shooting method)

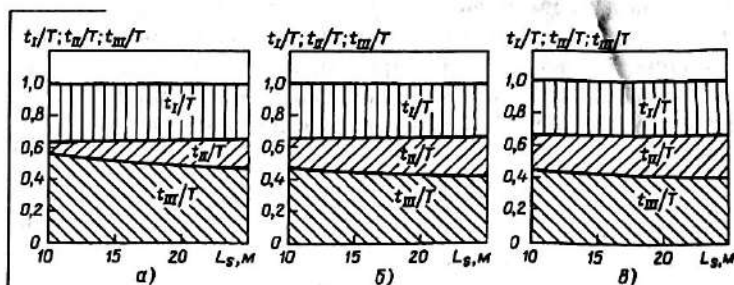


Рис. 3. Графическое представление решения системы уравнений (20)–(22)

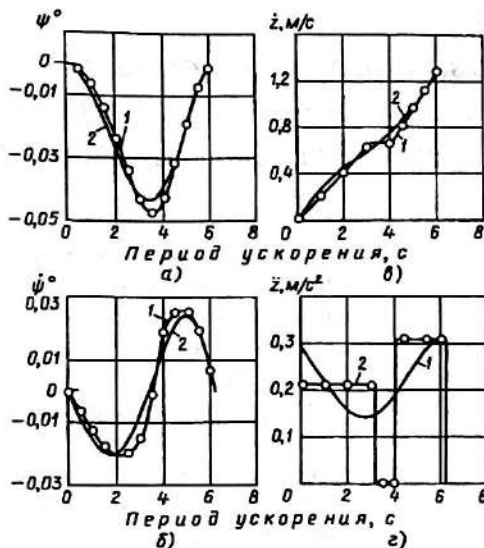


Рис. 4. Изменение относительных параметров при дискретном (1) и оптимальном (2) затухании колебаний математического маятника переменной длины

методом Runge — Kutta, — уравнение четвертой степени с приспособляемым шагом интегрирования и возможностью задания определенной точности [19]. Точность и в этом случае составляла 10^{-4} .

Результаты, полученные при дискретном (I) и оптимальном затухании колебаний каната переменной длины с начальной длиной $L_s = 17$ м, время ускорения, определенное выражением (22), и остальные параметры, приведенные выше при описании математической модели, представлены на рис. 4, а именно: угол ψ отклонения каната (рис. 4, а); угловая скорость $\dot{\psi}$ отклонения каната (рис. 4, б); скорость \dot{z} точки подвеса математического маятника (крановой тележки) (рис. 4, в) и ускорение \ddot{z} точки подвеса математического маятника (рис. 4, г).

Комментарий к полученным результатам

При постановке задачи о движении математического маятника как для оптимального, так и для дискретного затухания колебаний ограничение максимального абсолютного значения, управляющей величины (ускорение точки подвеса математического маятника, т. е. крановой тележки) не было задано. Полученные результаты показывают, что управляющая величина для соответствующих требуемых скоростей (V_T) крановой тележки в стационарных режимах находится в рекомендованных границах [20], а это значит, что заданное условие оптимальности (II) само обеспечивает минимальность управляющей величины, т. е. фазовые ограничения управляющей величины не нужны. На максимальное значение управления можно непосредственно влиять увеличением (снижением) скорости движения точки подвеса математического маятника (т. е. крановой тележки), которой хочется достичь при ускорении [граничные условия (7), (8)], т. е. от которой начинается движение при торможении [граничные условия (9),

(10)], для заданного интервала времени, определенного выражением (22).

Полученные результаты показывают (см. рис. 4), что разница между оптимальным методом затухания колебаний и дискретным методом, который применяют на практике, минимальна. Эти факты приводят к заключению, что при применении дискретного метода колебания груза при ускорении/торможении крановой тележки могут затухать способом, очень близким к оптимальному.

Заключение

Результаты, полученные с помощью данной модели, могут быть использованы для введения полуавтоматического цикла выгрузки сыпучего материала. В этом случае можно осуществить оптимальный цикл выгрузки, добиться минимального рассеяния при загрузке материала в бункер, уменьшить динамические нагрузки крана и устранить влияние людского фактора (квалификация оператора, климатические условия, ночная работа) на процесс выгрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казак С. А. Динамика мостовых кранов. М.: Машиностроение, 1968. 332 с.
2. Казак С. А. Маятниковые колебания груза и длительность разгона механизма передвижения крановой тележки // Вестник машиностроения. 1991. № 8. С. 30—32.
3. Комаров М. С. Динамика грузоподъемных машин. Киев, М.: Mashgiz, 1962. 268 с.
4. Лобов Н. А. Динамика грузоподъемных кранов. М.: Машиностроение, 1987.
5. Заремба А. Т. Оптимальное перемещение маятника при фазовом ограничении на скорость точки подвеса // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 28—34.
6. Чьонг Н. Оптимальное управление перемещением маятниковой системы при наличии трения // Изв. АН СССР. ТК. 1984. № 1. С. 66—72.
7. Болотник Н. Н., Чьонг Н. Об оптимальной длине подвеса при перемещении маятниковой системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 6. С. 28—34.
8. Соколов Б. Н. Синтез оптимального управления энергией маятника // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 54—61.
9. Karihaloo B. L., Parbery R. D. Optimal Control of a Dynamical System Representing a Gentry Crane // Journal of Optimisation Theory and Applications. 1982. Vol. 36. P. 409—417.
10. Zrnić Dj., Bugarić U., Vucović J. The optimization of moving cycle of grab by unloading bridges, Proceedings // 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Politecnico of Milano. Italy. Vol. 2. 1995. P. 1001—1005.
11. Auering J. W. Einfache steuerstrategien für laufkatzen zur vermeidung des lastpendelns im zeitpunkt // Förden und haben. 1986. N 6. S. 413—420.
12. Auering J. W. Wahl der arbeitsgeschwindigkeiten von greifer — schiffsentladern // Förden und haben. 1986. N 10. S. 713—719.
13. Schwardtmann K. Pendeldämpfung bei Entladeanlagen für Schüttgut // Förden und Haben. 1987. N 2. S. 120—122.
14. Unbehauen H., Metha A., Pura R. Zur online-ermittlung von pendelwinkel und winkelgeschwindigkeit eines greiferkrans // Förden und haben. 1987. N 6. S. 399—403.
15. Carbon L. Advanced Drive Technology for Cranes // Bulk solids handling. 1986. Vol. 6. P. 761—767.
16. Oyley F. J. Handling of Bulk Solids at Ocean Ports, Stacking Blending Reclaiming — Edited by R. H. Wohlbiel. Clausthal: Trans Tech Publications. 1977.
17. Bugarić U. Contribution to Optimisation of Bulk Cargo Unloading Processes at River Ports (in Serbian) // M. Sc. Thesis, Faculty of Mechanical Engineering. Belgrade: 1996.
18. Sage A. P., White C. C. Optimum System Control // Eaglewood: Prentice — Hall. 1977.
19. Scheid F. Theory and Problems of Numerical Analysis // McGraw Hill. New York: 1968.
20. Справочник по кранам. В 2 т. / М. М. Гохберг, В. И. Брауде, И. Е. Звягин и др. Л.: Машиностроение, 1988.