

NELINEARNA EKSITACIJA LONGITUDINALNIH ELEKTRONSKIH
OSCILACIJA U NAGLO STVORENOJ MAGNETIZOVANOJ PLAZMI

Zoran Trifković, Mašinski fakultet, Božidar Stanić, Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Sadržaj: Analizirana je transformacija harmonijskog, ravnanskog elektromagnetnog talasa, desne cirkularne polarizacije pri naglom stvaranju, beskolizone, hladne, magnetizovane plazme pomoću perturbacione teorije II reda. Pravac spoljašnjeg statičkog magnetnog polja je paralelan pravcu prostiranja izvornog talasa. Pokazano je da se, sem linearne transformacije, izvorni elektromagnetni talas transformiše, usled nelinearnih efekata, na četiri longitudinalna oscilatorna moda različitih kružnih frekvencija. Raspodela amplituda longitudinalnih električnih polja novo stvorenih modova u zavisnosti od frekvencije izvornog talasa prikazana je na odgovarajućim dijagramima.

1. UVOD

Naglo stvorena plazma se u praksi pojavljuje pri impulsnim gasnim pražnjenjima, u slučaju kada je plazma stvorena pomoću impulsa laserskog zračenja, u munjama i pri nuklearnim eksplozijama. U specijalanom slučaju kada je vreme uspostavljanja plazme daleko manje od vremena njenog raspada, vremenske promene parametara plazme mogu se prikazati Hevisajdovom step funkcijom, ako je vreme uspostavljanja plazme mnogo manje od perioda izvornog talasa.

Ranije je pokazano [1] da kada se transformacija izvornog elektromagnetnog talasa u plazmi analizira perturbacionom teorijom I reda, odnosno kada se ne uzima u obzir interakcija novoostvarenih modova, u plazmi se stvaraju 3 talasna moda kružnih frekvencija

$$\omega_i = \left(-\frac{1}{3}p\right)^{1/3} \cos\left(\frac{\phi}{3} + 2(i-1)\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\omega_B}{3}, \quad i=1,2,3.$$

gde su:

$$p = \left(\frac{\omega_B^2}{3} + \omega_0^2 + \omega_p^2\right), \quad \phi = \arccos\left(-\frac{q}{2\rho}\right),$$

$$q = \frac{\omega_B}{27}(-2\omega_B^2 + 18\omega_0^2 - 9\omega_p^2), \quad \rho = \left(-\frac{1}{3}p\right)^{3/2}.$$

U prethodnim relacijama $\omega_0, \omega_p = \sqrt{\frac{q^2 N_0}{\epsilon_0 m}}, \omega_B = \frac{q B_0}{m}$ su

kružna frekvencija izvornog talasa, elektronska plazmena kružna frekvencija i elektronska ciklotronska kružna frekvencija respektivno, a m, q, B_0 i N_0 su masa i naelektrisanje elektrona, magnetna indukcija spoljašnjeg statičkog magnetnog polja i gustina elektrona respektivno. Talasni modovi sa kružnim frekvencijama ω_1 i ω_3 su tzv. transmitovani talasi, tj. talasi koji se prostiru u istom smeru

kao i izvorni talas, a talasni mod sa kružnom frekvencijom ω_2 je tzv. reflektovan talas i on se prostire u suprotnom smeru od izvornog talasa.

Slučaj kada je spoljašnje magnetno polje normalno i kada je proizvoljne orijentacije u odnosu na pravac prostiranja izvornog talasa, u radio aproksimaciji (kada se zanemaruje uticaj jona u plazmi), analizirani su u [2] i [3] respektivno, a slučaj proizvoljne orijentacije kada se uzima u obzir i uticaj jona u [4].

U ovom radu pretpostavlja se da se izvorni ravnanski elektromagnetni talas, desne cirkularne polarizacije, kružne frekvencije ω_0 i vektora talasnog broja \vec{k}_0 kreće u slobodnom prostoru u kome je uspostavljeno spoljašnje statičko magnetno polje indukcije \vec{B}_0 , za $t < 0$. U trenutku $t=0$ u celom prostoru se naglo stvara plazma elektronske plazmene kružne frekvencije ω_p . Raspodela električnih polja novo stvorenih modova u plazmi biće analizirana perturbacionom teorijom II reda u radio aproksimaciji. Analiziraće se slučaj tzv. longitudinalnog prostiranja, odnosno kada su pravci vektora talasnog broja izvornog talasa \vec{k}_0 i spoljašnjeg statičkog magnetnog polja indukcije \vec{B}_0 paralelni.

2. FORMULACIJA PROBLEMA I REŠENJE U ZATVORENOJ FORMI

Električno i magnetno polje izvornog elektromagnetnog talasa, koji se za $t < 0$ prostire kroz slobodan prostor u pravcu spoljašnjeg statičkog magnetnog polja, su

$$\vec{e}_0(z, t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) \vec{x} + E_0 \sin(\omega_0 t - k_0 z) \vec{y}, \quad (1)$$

$$\vec{h}_0(z, t) = H_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) \vec{x} + H_0 \sin(\omega_0 t - k_0 z) \vec{y}, \quad (2)$$

gde su \vec{x} i \vec{y} jedinični vektori u pravca x i y ose, respektivno.

Amplitude vektora električnog i magnetnog polja izvornog talasa povezane su relacijom

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_0. \quad (3)$$

Za $t > 0$ nakon naglog uspostavljanja plazme, vektori električnog i magnetnog polja i polje vektora brzina elektrona $\vec{e}(z, t), \vec{h}(z, t)$ i $\vec{v}(z, t)$ se određuje pomoću Maksvelovih jednačina, jednačine kontinuiteta i jednačine kretanja za elektrone

$$\text{rot } \vec{e}(z, t) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{h}(z, t)}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\text{rot } \vec{h}(z, t) = -q N_0 \vec{v}(z, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{e}(z, t)}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\frac{d \vec{v}(z, t)}{dt} = -\frac{q}{m} \vec{e}(z, t) - \frac{q \mu_0}{m} \vec{v}(z, t) \times \vec{h}(z, t). \quad (6)$$

Sistem jednačina (4)-(6) je nelinearan sistem. Rešenja se traže u obliku

$$\vec{e}(z, t) = \vec{e}_1(z, t) + \vec{e}_2(z, t) + \dots \quad (4a)$$

$$\vec{h}(z, t) = \vec{h}_1(z, t) + \vec{h}_2(z, t) + \dots \quad (5a)$$

$$\vec{v}(z, t) = \vec{v}_1(z, t) + \vec{v}_2(z, t) + \dots \quad (6a)$$

Radi lakšeg rešavanja sistema jednačina (4)-(6) uzećemo kompleksne predstavnike gore navedenih vektora (u daljem tekstu veličine označene velikim slovima).

Ograničavajući se na perturbacionu teoriju II reda, zamenom sistema (4a)-(6a) u sistem jednačina (4)-(6) dobija se sledeći sistem jednačina

$$\text{rot } \vec{E}_1 + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

$$\text{rot } \vec{H}_1 + q N_0 \vec{V}_1 - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \frac{q}{m} \vec{V}_1 \times \vec{B}_0 + \frac{q}{m} \vec{E}_1 = 0, \quad (9)$$

$$\text{rot } \vec{E}_2 + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}_2}{\partial t} = 0, \quad (7a)$$

$$\text{rot } \vec{H}_2 + q N_0 \vec{V}_2 - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} = 0, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \vec{V}_2}{\partial t} + \frac{q}{m} \vec{E}_2 + \frac{q}{m} \vec{V}_2 \times \vec{B}_0 = -\left(\vec{V}_1 \cdot \nabla\right) \vec{V}_1 - \frac{q \mu_0}{m} \vec{V}_1 \times \vec{H}_1. \quad (9a)$$

Vektori električnog polja, polja brzina elektrona i magnetnog polja \vec{E}_1 , \vec{V}_1 i \vec{H}_1 su određeni u radu [1].

U sistemu jednačina (7a)-(9a) navedeni kompleksni vektori zavise od prostorne i vremenske koordinate z i t respektivno.

Kako se u procesu naglog stvaranja plazme talasni broj elektromagnetnog talasa u plazmi ne menja, to se prostorna zavisnost vektora polja može zapisati u obliku

$$f(z, t) = f(t) \exp(-j k_0 z). \quad (10)$$

Iz tog razloga na sistem jednačina (7a)-(9a) primenjujemo Laplasovu transformaciju

$$L\{f\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (11)$$

Uz odgovarajuće početne uslove

$$\vec{E}_2(z, t=0^+) = \vec{E}_2(z, t=0^-) = 0, \quad (12)$$

$$\vec{H}_2(z, t=0^+) = \vec{H}_2(z, t=0^-) = 0, \quad (13)$$

$$\vec{V}_2(z, t=0^+) = \vec{V}_2(z, t=0^-) = 0. \quad (14)$$

Rešavanjem dobijenog sistema linearnih algeberskih jednačina u prostoru kompleksne učestanosti $s=j\omega$ dobija se

$$e_{2x}(z, s) = e_{2y}(z, s) = 0, e_{2z}(z, s) = -\frac{\mu_0 \omega_p^2}{s^2 + \omega_p^2} I(z, s), \quad (15)$$

$$V_{2x}(z, s) = V_{2y}(z, s) = 0, V_{2z}(z, s) = \frac{\varepsilon_0}{q N_0} s E_{2z}(z, s), \quad (16)$$

$$H_{2x}(z, s) = H_{2y}(z, s) = H_{2z}(z, s) = 0, \quad (17)$$

gde je

$$I(z, s) = V_{1x}(z, s) \otimes H_{1y}(z, s) - V_{1y}(z, s) \otimes H_{1x}(z, s). \quad (18)$$

Sa \otimes je obeležena operacija konvolucije u s domenu.

Vraćanjem u realni domen komponente vektora električnog polja postaju:

$$e_{2x}(z, t) = 0, \quad (19)$$

$$e_{2y}(z, t) = 0, \quad (20)$$

$$e_{2z}(z, t) = \sum_{i=1}^3 e_{2z}^i \sin(\omega_p t) - \sum_{i=1}^3 e_{2z}^i \sin(\varphi_i t), \quad (21)$$

gde su

$$e_{2z}^0 = E_{2z} \frac{P_i \hat{\varphi}_i}{\hat{\varphi}_i^2 - 1}; \quad e_{2z}^i = E_{2z} \frac{P_i}{\hat{\varphi}_i^2 - 1} \quad (22)$$

$$E_{2z} = \frac{q E_0^z}{4mc \omega_p}, \quad (23)$$

c brzina prostiranja elektromagnetnog talasa u slobodnom prostoru. $\hat{\varphi}_i = \frac{\varphi_i}{\omega_p}$ kružne frekvencije novo stvorenih modova φ_i normalizovane na ω_p .

$$P_1 = V_2 H_1 - V_1 H_2; \quad \varphi_1 = \omega_2 - \omega_1, \quad (24)$$

$$P_2 = V_3 H_1 - V_1 H_3; \quad \varphi_2 = \omega_3 - \omega_1, \quad (25)$$

$$P_3 = V_3 H_2 - V_2 H_3; \quad \varphi_3 = \omega_3 - \omega_2. \quad (26)$$

Amplitude vektora polja brzina elektrona i magnetnog polja koje su dobijene u teoriji perturbacija I reda su

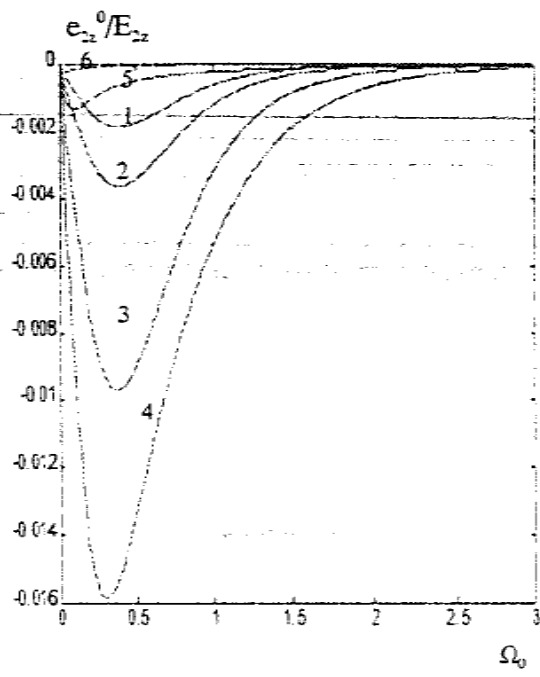
$$V_i = \frac{q E_0}{2m} \frac{\Omega_i + \Omega_0}{3\Omega_i^2 - 2\Omega_B \Omega_i - \Omega_0^2 - 1}, \quad (27)$$

$$H_i = \frac{H_0}{2} \frac{(\Omega_i + \Omega_0)(\Omega_i - \Omega_B) - 1}{3\Omega_i^2 - 2\Omega_B \Omega_i - \Omega_0^2 - 1}. \quad (28)$$

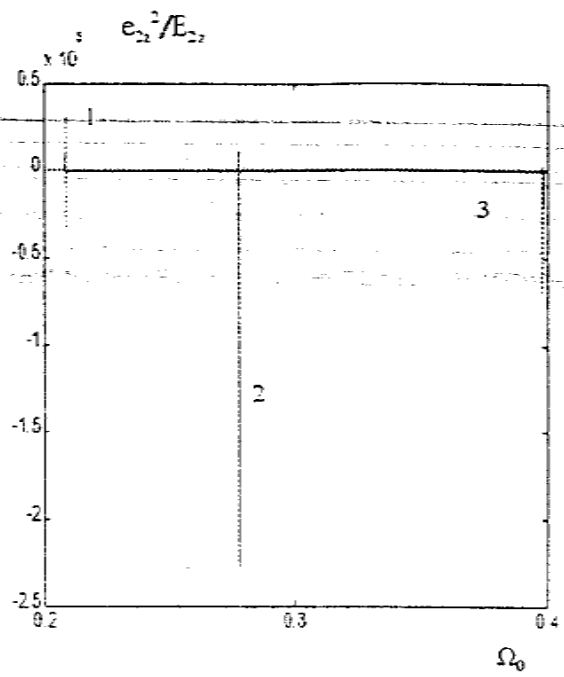
$\Omega_i, \Omega_0, \Omega_B$ su normalizovane kružne frekvencije $\frac{\omega_i}{\omega_p}, \frac{\omega_0}{\omega_p}$,

respektivno.

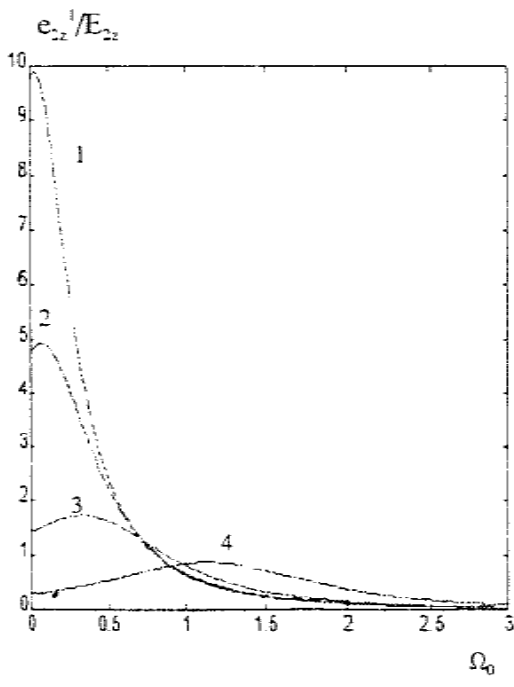
Zavisnost normalizovanih na E_{2z} amplituda novo stvorenih modova od normalizovane kružne frekvencije izvornog talasa Ω_0 prikazana je na slikama 1-4.



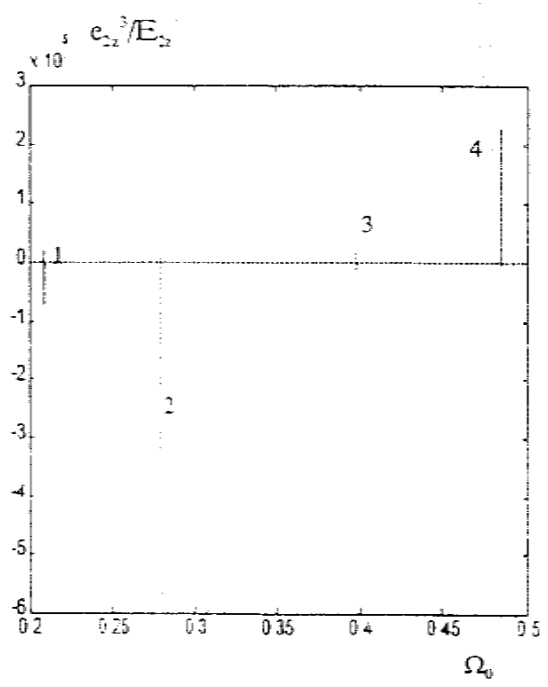
SI.1 Zavisnost normalizovane amplitude polja oscilacija kružne frekvencije $\omega_2 - \omega_1$. Grafici označeni sa $n=1,2,3,4,5,6$ se odnose na vrednosti parametra $\Omega_B = 0.05; 0.1; 0.3; 1; 5; 10$ respektivno.



SI.3 Zavisnost normalizovane amplitude polja oscilacija kružne frekvencije $\omega_3 - \omega_2$. Grafici označeni sa $n=1,2,3$ se odnose na vrednosti parametra $\Omega_B = 0.05; 0.1; 0.3; 1; 5; 10$ respektivno.



SI.2 Zavisnost normalizovane amplitude polja oscilacija kružne frekvencije $\omega_3 - \omega_1$. Grafici označeni sa $n=1,2,3,4$ se odnose na vrednosti parametra $\Omega_B = 0.05; 0.1; 0.3; 1; 5; 10$ respektivno.



SI.4 Zavisnost normalizovane amplitude polja oscilacija kružne frekvencije ω_p . Grafici označeni sa $n=1,2,3,4$ se odnose na vrednosti parametra $\Omega_B = 0.05; 0.1; 0.3; 1$ respektivno.

3. ZAKLJUČAK

U radu je rešen, u zatvorenoj formi problem interakcije elektromagnetnog talasa sa naglo uspostavljenom plazmom u slučaju kada se upadni talas prostire po pravcu koji je paralelan pravcu spoljašnjeg statičkog magnetnog polja. Novina u opisu ovih pojava je razmatranje nelinearnosti koje potiču od interakcija među modovima polja brzina i promenljivog magnetnog polja, odnosno zbog sile $-\mu_0 q \vec{v} \times \vec{h}$ u jednačini kretanja elektrona. Pokazano je da se rešenja za novo stvorene modove mogu dobiti u zatvorenom obliku, odnosno da se rezultujuća polja mogu predstaviti u vidu konačnog zbira novo stvorenih modova. Kružne frekvencije eksitovanih oscilatomih longitudinalnih modova dobijenih perturbacijama II reda su ω_p , $\omega_2 = \omega_1$, $\omega_3 = \omega_1$, $\omega_3 = \omega_2$, gde su

$$\omega_i = \left(-\frac{1}{3}p\right)^{1/3} \cos\left(\frac{\phi}{3} + 2(i-1)\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\omega_B}{3}, \quad i=1,2,3.$$

$$p = \left(\frac{\omega_B^2}{3} + \omega_0^2 + \omega_p^2\right), \quad \phi = \arccos\left(-\frac{q}{2p}\right),$$

$$q = \frac{\omega_B}{27} \left(-2\omega_B^2 + 18\omega_0^2 - 9\omega_p^2\right), \quad \rho = \left(-\frac{1}{3}p\right)^{3/2},$$

a ω_i ($i=1,2,3$) su kružne frekvencije transvezalnih talasnih modova dobijene pomoću teorije perturbacija I reda.

Efikasnost eksitacije novo stvorenih oscilatomih modova može se kontrolisati kako promenom frekvencije upadnog (izvornog) talasa tako i promenom inteziteta spoljašnjeg statičkog magnetnog polja indukcije B_0 .

Mogući razlozi za pojave oštih (rezonantnih) eksitacija specijalnih modova mogu biti zanemarivanje gubitaka usled sudarnih procesa kao i usled zračenja plazme.

LITERATURA

- [1]. D.K. Kalluri, "Effect of Switching a Magnetoplasma Medium on a Traveling Wave: Longitudinal Propagation", *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, Vol. 37 No. 12, Dec. 1989.
- [2]. V.R. Goteti and D.K. Kalluri, "Wave Propagation in a Switched Magnetoplasma Medium: Transverse Propagation", *Radio Science*, Vol. 25, Jan.-Feb. 1990.
- [3]. M.M. Dimitrijević, "Transformacija elektromagnetnih talasa u naglo stvorenoj, beskolizionoj, hladnoj, magnetizovanoj plazmi", *magistarski rad, ETF Beograd, 1992.*
- [4]. M.M. Dimitrijević i B.V. Stanić "EM Transformation in Suddenly Created Two-Component Magnetized Plasma", *IEEE Trans. on Plasma Science*, Vol. 23, No. 3, June 1995.