

VOJNOTEHNIČKI INSTITUT VOJSKE SRBIJE I CRNE GORE

Mr Predrag Elek, dipl. maš. inž.
Dr Slobodan Jaramaz, dipl. maš. inž.

**MODELI PROBIJANJA METALNIH PREPREKA
KINETIČKIM PENETRATOROM**

– kumulativna naučnotehnička informacija –

BEOGRAD, 2004

MODELI PROBIJANJA METALNIH PREPREKA KINETIČKIM PENETRATOROM

Izvod

U radu je razmatran idealan slučaj probijanja metalnih ploča kinetičkim penetratorom. Značaj proučavanja procesa probijanja je u njegovoj neposrednoj praktičnoj primeni koja se odnosi kako na optimalnu konstrukciju projektila, tako i na projektovanje pancirne zaštite.

U uvodnom poglavlju je definisan problem penetracije, značaj njegovog rešavanja, kao i moguće primene. Razmatrane su vrste prepreka i penetratora i tipovi penetracionih procesa, čime je ukazano na raznovrsnost i složenost fenomena koji prate proces probijanja. Navedeni su različiti pristupi rešavanju problema i date su definicije osnovnih pojmova mehanike penetracije.

U drugom poglavlju dat je pregled najznačajnijih empirijskih relacija koje definišu parametre procesa probijanja.

Najznačajnija celina rada posvećena je razmatranju probijanja tankih prepreka uz formiranje odsečka. Veoma detaljno su analizirana četiri relevantna analitička pristupa probijanju tankih metalnih ploča – deformaciono-energetski model, strukturni model, trofazni model i model deformacionih talasa. Predstavljena je i modifikacija modela deformacionih talasa sa deformabilnim penetratorom koja u kvalitativnom i kvantitativnom smislu predstavlja poboljšanje izvornog modela. Na kraju je analiziran model probijanja sa rascvetavanjem prepreke kao dominantnom pojavom.

Četvrto poglavlje posvećeno je analizi probijanja prepreka značajne debljine. Razmatran je dvodimenzionalni model penetracije koji predstavlja značajno poboljšanje trofaznog modela. Suština modifikacije je u kompleksnijem pristupu prvoj fazi penetracije, za koju je formiran složen matematički model koji ne zahteva poznavanje parametara procesa koje bi bilo neophodno eksperimentalno utvrđivati.

Rad predstavlja pregled najznačajnijih empirijskih i analitičkih modela probijanja metalnih prepreka. Analizirani modeli, odnosno odgovarajući programi za analitičko modeliranje penetracije, predstavljaju korisno metodološko sredstvo pri projektovanju projektila, odnosno balističke zaštite.

Ključne reči: Probijanje, Penetrator, Prepreka, Formiranje odsečka, Rascvetavanje prepreke, Empirijske relacije, Analitičko modeliranje

MODELS FOR METALLIC PLATES PENETRATION BY KINETIC PENETRATOR

Abstract

The paper considers penetration of metallic targets by kinetic penetrators under the ideal conditions. The importance of penetration process studies is in their direct practical application, which can be related to the optimal projectile design as well as to the design of ballistic protection.

In the introductory chapter, the problem of penetration is defined and a significance of its solving and possible applications is emphasized. The classes of penetrators and targets are considered, as well as the types of penetration processes, which indicates variety and complexity of the phenomena related to the penetration process. Also, the different approaches to solving of the penetration problem are discussed and the basic penetration parameters are defined.

The second chapter covers a review of the most important empirical models that defines the penetration process parameters.

The most significant part of the paper is related to the consideration of penetration of thin plates in the plugging regime. Four relevant analytical approaches to the penetration of the thin metallic plates are analyzed in detail – the deformation-energy model, the structural model, the three-stage model and the model of deformation waves. The modification of the model of deformation waves with a deformable penetrator is also presented. This model in both qualitative and quantitative sense produces significantly better results and represents an improvement of the original model.

The fourth chapter deals with the penetration of the targets of significant thickness. The two-dimensional model, which is substantial improvement of the three-stage model, is considered. The essence of the modification is in the more complex approach to the first phase of penetration, for which the closed mathematical model is formed.

The paper is the review of the most important empirical and analytical models for penetration of the metallic plates. The analyzed models and related computer programs for penetration modeling are useful methodological instruments for the analysis and design of projectiles and ballistic protection.

Keywords: Penetration, Penetrator, Target, Plugging, Petaling, Empirical relations, Analytical modeling

SADRŽAJ

SPISAK KORIŠĆENIH OZNAKA.....	6
1. UVODNA RAZMATRANJA I OSNOVNE PRETPOSTAVKE.....	8
1.1. DEFINICIJA PROBLEMA I ZNAČAJ PROUČAVANJA PROBIJANJA	8
1.2. VRSTE PREPREKA I PENETRATORA	8
1.3. TIPOVI PENETRACIONIH PROCESA	9
1.4. PRISTUPI PROBLEMU PENETRACIJE	10
1.5. OSNOVNI POJMOVI MEHANIKE PENETRACIJE.....	11
1.6. PONAŠANJE MATERIJALA PREPREKE I PENETRATORA.....	13
2. EMPIRIJSKE RELACIJE.....	16
2.1. FORMULA JACOB DE MARRE-A.....	16
2.2. SRI FORMULA.....	17
2.3. BRL FORMULA	17
2.4. OSTALE EMPIRIJSKE FORMULE KOJE DEFINIŠU POTREBNU KINETIČKU ENERGIJU PENETRATORA	17
2.5. THOR FORMULE	18
2.6. POLUEMPIRIJSKI MODELI	19
3. PROBIJANJE TANKIH PLOČA.....	22
3.1. DEFORMACIONO-ENERGETSKI MODEL	22
3.1.1. <i>Kretanje odsečka</i>	22
3.1.2. <i>Kretanje penetratora</i>	24
3.1.3. <i>Faze penetracije</i>	25
3.2. STRUKTURNI MODEL.....	27
3.2.1. <i>Uvod. Osnovne pretpostavke</i>	27
3.2.2. <i>Analiza prve faze</i>	28
3.2.3. <i>Analiza druge faze</i>	31
3.2.4. <i>Kriterijum loma materijala prepreke</i>	33
3.3. TROFAZNI MODEL	36
3.3.1. <i>Uvod. Osnovne karakteristike procesa</i>	36
3.3.2. <i>Prva faza penetracije</i>	37
3.3.3. <i>Druga faza penetracije</i>	38
3.4. MODEL DEFORMACIONIH TALASA	41
3.4.1. <i>Karakteristike materijala prepreke pri impulsnom opterećenju</i>	41
3.4.2. <i>Mehanizmi penetracije</i>	43
3.4.3. <i>Faze penetracionog procesa</i>	46
3.5. <i>Probijanje deformabilnim penetratorom</i>	52
3.5. MODIFIKOVANI MODEL PENETRACIJE	56
3.6. RASCVETAVANJE PREPREKE	58
3.6.1. <i>Širenje radijalnih naprslina</i>	58
3.6.2. <i>Faze procesa probijanja</i>	59

4. PROBIJANJE PLOČA ZNAČAJNE DEBLJINE	63
4.1. DVODIMENZIONALNI MODEL PENETRACIJE	63
4.2. PRVA FAZA PENETRACIJE	65
4.2.1. <i>Određivanje parametara deformacionog polja</i>	65
4.2.2. <i>Formulisanje zakona kretanja</i>	67
4.2.3. <i>Određivanje snage gubitaka</i>	69
4.2.4. <i>Određivanje parametara kretanja penetratora</i>	75
4.3. DRUGA I TREĆA FAZA PENETRACIJE	76
5. ZAKLJUČAK.....	79
6. LITERATURA	80

SPISAK KORIŠĆENIH OZNAKA

- A – površina poprečnog preseka penetratora (m^2); rad sila otpora penetraciji (J)
 a – ubrzanje (m/s^2), dužina latica (m)
 A_d – površina poprečnog preseka deformisanog penetratora (m^2)
 b – dužina odsečka (m)
 B – parametar u zakonu ojačavanja materijala (Pa); dužina korena laticice (m)
 c – brzina poremećaja, brzina talasa deformacije (m/s)
 C – parametar u zakonu ojačavanja materijala
 d – prečnik penetratora (m)
 D – prečnik prepreke (m)
 E – modul elastičnosti (Pa)
 e – širina zone smicanja (m)
 E_k – kinetička energija penetratora (J)
 F – sila otpora probijanju (N)
 G – modul smicanja (Pa); energija po jedinici površine (J/m^2)
 H – debljina prepreke (m)
 h – kontaktna dužina između odsečka i ostatka prepreke (m)
 HB – tvrdoća prema *Brinell*-u (Pa)
 k – faktor oblika prednjeg dela penetratora; parametar koji zavisi od karakteristika penetratora i prepreke u modelu rascvetavanja
 K – faktor povećavanja napona tečenja usled ograničenog širenja materijala prepreke; količina kretanja (kgm/s)
 K_I – faktor intenziteta napona ($Pa\sqrt{m}$)
 L – dužina penetratora (m); moment količine kretanja (Nms)
 l – rastojenje između slojeva višeslojne prepreke (m)
 m – masa penetratora (kg)
 \dot{m} – maseni protok (kg/s)
 M – moment savijanja (Nm)
 m_n – masa n -te zone sistema penetrator-prepreka (kg)
 n – broj zona sistema penetrator-prepreka
 p – verovatnoća proboja prepreke
 q – karakteristika sistema penetrator-prepreka (jednačina 2.4.40)
 Q_p – sila smicanja (N)
 r – radijalna koordinata (m)
 R – radijus penetratora (m)
 s – raspon prepreke (m)
 S – funkcija koja definiše zakon ojačavanja materijala
 t – vreme (s)
 t_f – ukupno vreme probijanja (s)
 v – brzina (m/s)
 V_n – zapremina n -te zone prepreke (m^3)
 w – ugib prepreke (m)
 W – rad (J)

\dot{W} - utrošena snaga penetratora (W)
 x – pređeni put penetratora (m)
 y – pređeni put penetratora u drugoj fazi probijanja (m)
 z – širina deformisanog dela prepreke, pređeni put penetratora u trećoj fazi penetracije (m)
 $\bar{\varepsilon}$ - prirodna deformacija
 $\bar{\sigma}$ - stvarni normalni napon (Pa)
 ρ - gustina materijala (kg/m^3)
 ν – Poisson-ov koeficijent
 τ - smicajni napon (Pa)
 γ - ugao klizanja (rad)
 θ - ugao savijanja prepreke (rad); ugao udara penetratora (rad)
 μ - koeficijent trenja
 σ - normalni napon (Pa)
 ε - relativna deformacija
 α, β - parametri u zakonu ojačavanja materijala

Indeksi

0 – početni trenutak
 B - zadnji
 c – uslovi ograničenog širenja
 d – deformisan
 f – konačni
 F - prednji
 L – balistički limit
 n – broj penetracione zone
 p – penetrator
 pl - odsečak
 r – izlazni
 s – udarni
 t – prepreka
 y – granica tečenja

1. UVODNA RAZMATRANJA I OSNOVNE PRETPOSTAVKE

1.1. Definicija problema i značaj proučavanja probijanja

Pod *probijanjem* (*penetracijom*) se podrazumeva proces koji započinje udarom *penetratora* u *prepreku* i nastavlja se njegovim kretanjem kroz strukturu prepreke. Pri tome se pod *penetratorom* podrazumeva svako telo namenjeno za probojno dejstvo, dok se *preprekom* smatra sredina izložena istom dejstvu.

Proučavanje ove pojave započeto je sredinom XIX veka uočavanjem osnovnih zakonomernosti između karakteristika penetratora i prepreke i parametara procesa penetracije. Činjenica da ni do danas nije nađeno opšte rešenje problema penetracije ilustruje složenost i raznovrsnost fenomena koji su povezani sa procesom probijanja.

Značaj proučavanja penetracije ogleda se u njenoj primeni koja ima dva vida. Osnovno polje primene je vojna tehnika, s obzirom da je probijanje jedan od važnijih mehanizama kojim se bave konstrukcija projektila, odnosno balistika na cilju. Razmatranje procesa probijanja ima fundamentalni značaj za optimizaciju projektila probojnog i razornog dejstva, kao i za projektovanje pancirne zaštite. Sa druge strane, postoje i brojne civilne primene procesa probijanja kao što su zaštita objekata (npr. nuklearnih elektrana), te primene u rudarstvu i građevinarstvu. Vojne aplikacije su svakako najbitniji cilj i najznačajniji pokretač istraživanja u oblasti penetracije.

Razmatranje procesa probijanja nezamislivo je bez svestranih eksperimentalnih ispitivanja, dok su teorijska istraživanja multidisciplinarna, budući da obuhvataju veliki deo mehanike krutog i deformabilnog tela (otpornost materijala, teoriju elastičnosti i plastičnosti, prostiranje talasa deformacije itd.).

1.2. Vrste prepreka i penetratora

Na proces penetracije utiče veliki broj parametara koji se odnose na karakteristike penetratora, odnosno prepreke i na uslove udara. Stoga postoji veliki broj kriterijuma za kategorizaciju penetracionih procesa. Sa stanovišta pojava koje karakterišu probijanje, a koje su relevantne za modeliranje procesa, osnovna klasifikacija vezana je za *vrstu materijala prepreke*. S obzirom na ovaj kriterijum, razlikuju se sledeće vrste materijala prepreke:

- tkanine i vlaknasti materijali (tekstil, staklena vlakna, kevlar i sl.) ,
- prozirni materijali (staklo, poliuretani i sl. ,
- keramički kompozitni materijali (aluminijum oksid, silicijum karbid itd.),
- drvo,
- tlo,
- beton,
- metali.

Važnu karakteristiku prepreke predstavlja i njena *debljina*, budući da značajno utiče na prirodu procesa probijanja. Sa stanovišta debljine razlikujemo četiri vrste prepreka:

- *polubeskonačne prepreke*; teorijski radi se apstraktnoj prepri koja u stvari čini poluprostor; pod polubeskonačnom preprekom podrazumeva se takođe i prepreka dovoljno velike debljine kod koje se uticaj zadnje površine prepreke kao i same debljine prepreke na proces probijanja može zanemariti,
- *debele prepreke i prepreke srednje (umerene) debljine* karakteriše više ili manje značajan uticaj zadnje, slobodne površine prepreke na proces penetracije,
- *tanke prepreke* su definisane nepromenljivošću napona smicanja duž cele debljine prepreke.

Za analizu su takođe značajne i *poprečne dimenzije prepreke*. Konačno, s obzirom na broj slojeva razlikuju se: *monolitne (jednoslojne) i višeslojne prepreke*. U radu će biti razmatrane isključivo ravne, homogene i nepokretne, monolitne metalne prepreke različitih debljina.

Vrsta penetratora takođe bitno utiče na karakter procesa probijanja. Sa aspekta primene u vojnoj tehnici, značajne su sledeće vrste penetratora:

- pancirni projektili,
- fragmenti košuljice razornih projektila,
- penetratori potkalibarnih projektila,
- kumulativni mlaz metalnih čestica,
- preoblikovani disk na principu *Misznay-Shardinovog* efekta (poslednje dve vrste penetratora formiraju se eksplozijom i izlaze iz okvira razmatranja ovog rada).

Penetratori (izuzev fragmenata) imaju cilindričan oblik sa ravnim, sfernim, konusnim, oživalnim ili složenim oblikom prednjeg dela. Ukoliko se drugačije ne naglasi, u radu se razmatra nedeformabilan cilindrični penetrator sa ravnim vrhom.

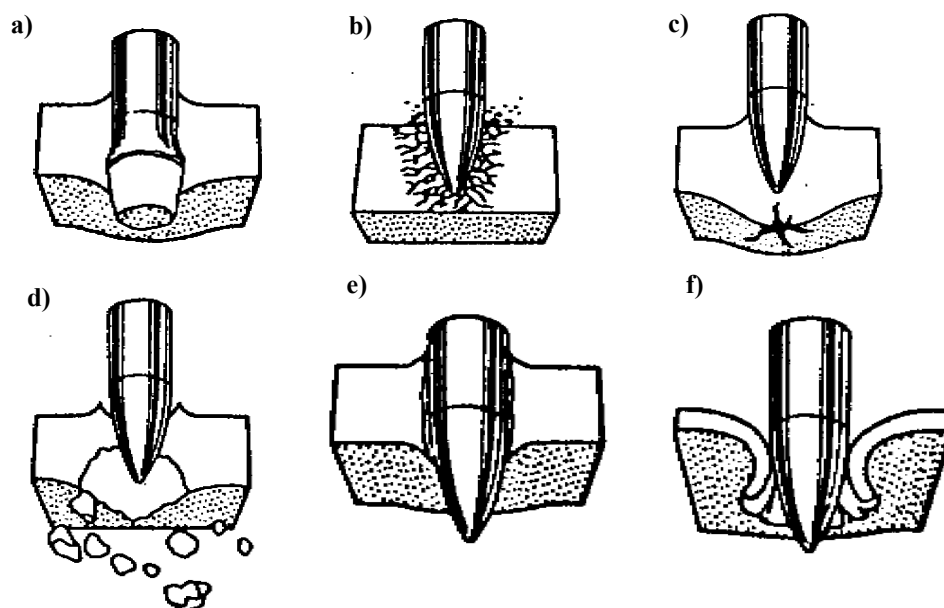
Osim karakteristika prepreke i penetratora, za penetracioni proces su važni i *početni uslovi* pri inicijalnom kontaktu penetratora i prepreke – reč je o *udarnoj brzini* i *udarnom uglu* penetratora. Podrazumevaće se *normalan udar* penetratora pri vrednostima udarnih brzina manjim od 1200 m/s.

1.3. Tipovi penetracionih procesa

U zavisnosti od osnovnih "ulaznih" parametara penetracije razmatranih u prethodnom odeljku (karakteristike penetratora, prepreke i uslovi udara) sam proces može imati sasvim različitu prirodu. Naime, pri različitim uslovima menjaju se dominantni fenomeni koji karakterišu interakciju penetrator/prepreka i koji definišu tip penetracionog procesa. Na slici 1.1 skicirani su osnovni tipovi (režimi) penetracije za slučaj metalnih prepreka u oblasti udarnih brzina koja je od interesa:

- *probijanje putem formiranja odsečka (plugging, slika 1.1a)* karakteristično je za penetratore sa ravnim vrhom i prepreke značajne čvrstoće i razvlačljivosti; osnovna karakteristika ovog režima je formiranje cilindričnog *odsečka* materijala prepreke (*plug*) čiji je prečnik približno jednak prečniku penetratora; dominantna naprežanja prepreke u toku procesa su sabijanje i smicanje odsečka koje u određenom trenutku može da dovede opterećenu zonu u nestabilno stanje, što izaziva lom materijala usled smicanja i odvajanje odsečka.
- probijanje prepreka izrađenih od krutih materijala predstavljeno je na slikama 1.1b, 1.1c i 1.1d (*drobljenje, stvaranje radijalnih prskotina i fragmentacija*),
- formiranje otvora u prepri radijalnim potiskivanjem materijala (*ductile hole enlargement, slika 1.1e*) i "rascvetavanje" prepreke (*petaling, slika 1.1f*) predstavljaju tipove penetracije karakteristične za vrlo razvlačljive materijale prepreke.

Rad je koncentrisan na razmatranje formiranja odsečka i rascvetavanje prepreke kao dominantne režime procesa probijanja.



Slika 1.1. Osnovni tipovi penetracionih procesa [1]: a) formiranje odsečka (*plugging*), b) drobljenje, c) stvaranje radialnih naprslina, d) fragmentacija, e) formiranje otvora u prepenci (*ductile hole enlargement*), f) "rascvetavanje" prepreke (*petalling*)

U realnim uslovima režim probijanja najčešće predstavlja kombinaciju nekoliko tipova penetracije od kojih je jedan dominantan.

Svi navedeni režimi probijanja vezani su za pojave u zoni prepreke koja se nalazi neposredno ispred penetratora i oko njega. Međutim, pri određenim uslovima, znatno šira struktura prepreke može biti izložena naprezanju i deformisanju. Ove globalne deformacije prepreke takođe su predmet razmatranja ovog rada.

1.4. Pristupi problemu penetracije

Postoje tri osnovna pristupa rešavanju problema penetracije: empirijski, numerički i analitički.

Kreiranje *empirijskih relacija* između osnovnih parametara procesa probijanja je najstariji i najjednostavniji pristup. On svakako podrazumeva postojanje obimne baze podataka koja predstavlja rezultat obavljenih eksperimentalnih istraživanja. Visoki troškovi ovih ispitivanja i značajno vreme koje zahtevaju sami opiti, kao i obrada podataka, te odgovarajuća numerička i statistička analiza, prvi su nedostatak ovog pristupa. Osim toga, izvedene empirijske jednačine pouzdano važe samo pod uslovima i ograničenjima izvedenih eksperimenata, pa je mogućnost njihovog uopštavanja vrlo ograničena. Sa druge strane, ako se primenjuju u granicama izvršenih opita, empirijske relacije verovatno daju najbolje moguće predviđanje realnih vrednosti parametara penetracije. Empirijski izrazi ne moraju uvek da definišu neke od izlaznih parametara procesa (npr. izlaznu brzinu, dubinu prodiranja i sl.), već mogu da se odnose na neke značajne fizičke veličine u toku procesa (sila otpora kretanju penetratora, promena nekog od napona, ...) i da se koriste u drugačijim pristupima rešavanju problema. Postoje brojni empirijski izrazi za dubinu prodiranja, izlaznu brzinu penetratora, brzinu balističkog limita, vrednost ukupne aksijalne sile otpora i oni su razmatrani u sledećem poglavlju.

Numeričke metode podrazumevaju primenu osnovnih zakona mehanike na diskretizovan sistem penetrator-prepreka. Jednačine kretanja, kontinuiteta i energije, te konstitutivne jednačine i uslovi kompatibilnosti, zajedno sa početnim i graničnim uslovima, primenjuju se na svaki od konačnih elemenata strukture. Razvoj numeričkih metoda za rešavanje sistema algebarskih i diferencijalnih jednačina i primena računara, omogućili su rešavanje problema penetracije, kao i

drugih problema dinamičke strukturne analize. Numerički pristup danas uglavnom podrazumeva korišćenje gotovih softverskih paketa. Pored izvesnih nedostataka (visoka cena softvera, značajno vreme potrebno za modeliranje problema i rad programa) numerički pristup postaje sve dominantniji, a primena softvera uz eksperimentalnu verifikaciju rezultata dobija praktično ključnu ulogu u projektovanju. Značajno je napomenuti da ova metoda ne omogućava jednostavnu parametarsku analizu problema, kao i to da pretpostavljeni simplifikovani modeli ponašanja materijala prepreke i penetratora često ne omogućavaju dobijanje sasvim pouzdanih rezultata.

Formiranje *analitičkih modela* predstavlja "kompromisni" prilaz rešavanju problema penetracije. Opservacije nastale na osnovu eksperimentalnih ispitivanja relativno malog obima mogu da dovedu do zaključaka o dominantnim mehanizmima probijanja, o karakteru naprezanja i deformacija, o globalnim deformacijama prepreke, penetratora i odsečka i sl. U sledećem koraku, ovi dominantni fenomeni se kvantifikuju korišćenjem zakona mehanike. Na taj način formira se matematički model koji se rešava analitički ili numerički – korišćenjem programa za računar. Osnovne karakteristike ovako formiranih analitičkih modela su jednostavnost i jasna fizička zasnovanost koja ukazuje na suštinske procese koji se odigravaju u toku penetracije. Jasno je da se za svaku klasu penetracionih problema moraju formirati posebni analitički modeli, te da svaki model ima relativno ograničenu primenu (ali svakako širu od empirijskih relacija). Činjenice da su analitički modeli efikasni, da mogu da daju zadovoljavajući nivo tačnosti rezultata, kao i njihova adaptabilnost i pogodnost za parametarske studije čine ih veoma korisnim prediktivnim alatom koji se primenjuje u analizi penetracije, a samim tim i u projektovanju projektila, odnosno pancirne zaštite.

Rad je najvećim delom (treće i četvrto poglavlje) posvećen razmatranju različitih analitičkih modela, kao i njihovim modifikacijama i primenama.

1.5. Osnovni pojmovi mehanike penetracije

U ovom odeljku biće definisano nekoliko važnih pojmova iz teorije penetracije koji će kasnije biti korišćeni.

Razlikuju se četiri osnovna ishoda procesa penetracije:

- *proboj* podrazumeva prolazak celog penetratora kroz prepreku, pri čemu se formira pravilan, približno cilindričan otvor u prepri,
- *prodor* predstavlja granični slučaj probijanja jer je otvor u prepri nepravilnog oblika i manje površine od površine poprečnog preseka penetratora; za razliku od proboja, kroz otvor prolaze samo delovi razbijenog penetratora,
- *zador* karakteriše zaustavljanje (zaglavljivanje) penetratora u prepri ili njegovo razbijanje tokom probijanja,
- *rikošet* predstavlja odbijanje penetratora usled klizanja po površini prepreke ukoliko je ona nagnuta.

S obzirom da se u radu razmatra isključivo normalan udar penetratora u prepreku (dakle, ne dolazi do rikošeta), kao i da se u teorijskom pristupu prva dva efekta mogu objediniti, smatraće se da proces može imati dva ishoda, proboj – ako ceo penetrator prođe kroz prepreku, ili u suprotnom – zador¹.

Pod *probojnošću* penetratora podrazumeva se njegova probojna moć – sposobnost probijanja prepreke. Može se pokazati da povećanje gustine i dužine penetratora i smanjenje njegovog prečnika, uz pretpostavke o strukturnom integritetu u toku lansiranja i probijanja i ostale

¹ Napominje se da se u literaturi na engleskom jeziku proces koji se završava probojem naziva perforacijom (odnosno probijanjem, *perforation*), dok se proces koji se završava zaustavljanjem penetratora označava kao prodiranje (*penetration*). U radu se koriste samo termini probijanje i penetracija kao sinonimi i ne prejudiciraju ishod procesa.

nepromenjene uslove, dovodi do povećanja probojnosti penetratora. *Otpornost* prepreke podrazumeva nivo sposobnosti odupiranja probijanju. Jasno je da povećanje debljine i gustine, kao i poboljšanje mehaničkih karakteristika materijala prepreke doprinose povećanju njene otpornosti. U slučaju konkretne interakcije penetratora i prepreke, pojmovi probojnosti i otpornosti odnose se na ista svojstva sistema, s tim što imaju recipročna značenja – visoka probojnost podrazumeva malu otpornost i obratno.

Pri razmatranju probojnosti/otpornosti veliki značaj imaju tri brzine: udarna, izlazna i brzina balističkog limita.

Udarne brzina v_s (ili v_0) je trenutna vrednost linijske brzine penetratora u momentu inicijalnog kontakta sa preprekom. U radu se podrazumeva da je vektor udarne brzine kolinearan sa osom penetratora, tj. uvek se pretpostavlja let penetratora sa nultim napadnim uglom. Efekti ugaone brzine penetratora oko sopstavene ose, za slučaj žirostabilisanih penetratora, ne uzimaju se u razmatranje.

Izlazna (rezidualna) brzina v_r je brzina penetratora (i odsečka) u trenutku prolaska dna penetratora kroz ravan određenu zadnjom površinom prepreke.

Brzina balističkog limita v_L je jedna od osnovnih karakteristika sistema penetrator-prepreka i može se definisati na više načina.

Teorijski, reč je o minimalnoj vrednosti udarne brzine pri kojoj dolazi do proboja, odnosno maksimalnoj vrednosti udarne brzine pri kojoj ne dolazi do proboja prepreke. Dakle, važi

$$v_L = \inf \{v_s : v_r > 0\} = \sup \{v_s : v_r = 0\} \quad (1.1).$$

Brzina balističkog limita uvek se određuje eksperimentalnim putem – izvođenjem izvesnog broja gađanja različitim udarnim brzinama. Pri manjem broju eksperimenata, brzinom balističkog limita može se smatrati srednja vrednost najmanje udarne brzine v_{smin} pri kojoj je ostvaren proboj i najveće brzine v_{smax} pri kojoj je došlo do zadora

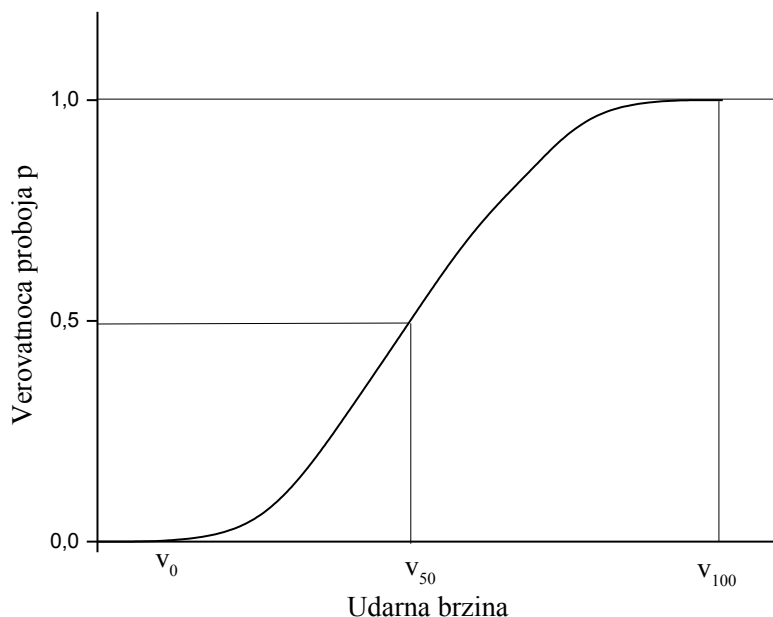
$$v_L = \frac{1}{2}(v_{smin} + v_{smax}) \quad (1.2).$$

Suštinski, međutim, samo probijanje je pojava koja u izvesnoj meri ima i stohastički karakter. Pri izvođenju eksperimenata pod "istim" uslovima, realno se pojavljuju izvesne razlike u početnim parametrima procesa (udarna brzina, udarni ugao, napadni ugao, nehomogenost materijala prepreke,...) koje je teško izbeći, usled čega dolazi do različitih ishoda procesa. Zato se uvodi pojam verovatnoće probijanja prepreke p . Naime, postoji minimalna vrednost udarne brzine v_{min} ispod koje praktično nikada ne dolazi do proboja ($p=0$) i maksimalna udarna brzina v_{max} iznad koje se proboj uvek dešava, $p=1$ (slika 1.2). Brzina balističkog limita se statistički definiše kao vrednost udarne brzine penetratora (između v_{min} i v_{max}) za koju je verovatnoća probijanja prepreke jednaka jednoj polovini

$$v_L = v_{50} = v_s \Big|_{p=\frac{1}{2}} \quad (1.3).$$

Ova definicija koristi se za određivanje brzine balističkog limita pomoću eksperimenta sa velikim brojem gađanja i predstavlja najpouzdaniju procenu ovog parametra.

Konačno, brzina balističkog limita može se određivati (odnosno predviđati) primenom određenog matematičkog modela – empirijskog, analitičkog ili numeričkog. Operacionalno, u ovom slučaju se najčešće pretpostavlja da je brzina balističkog limita najmanja (u pravilu celobrojna) vrednost udarne brzine koja obezbeđuje proboj.

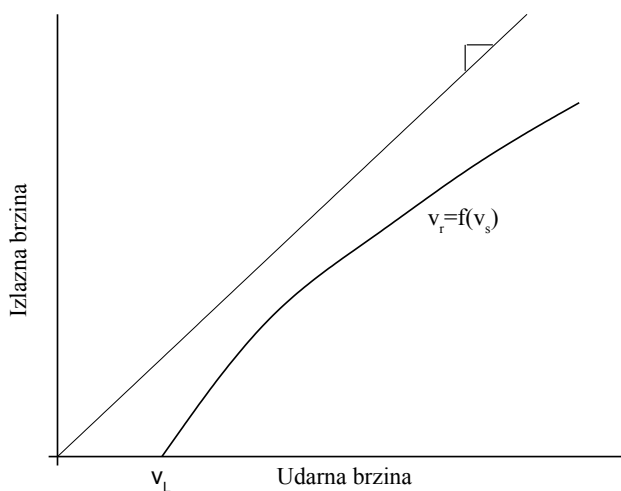


Slika 1.2. Verovatnoća probijanja prepreke u zavisnosti od udarne brzine penetratora

Važno je napomenuti da brzina balističkog limita predstavlja najvažniju, ali ne i jedinu meru probojnosti. Naime, vrlo često je zbog efekta koji se izaziva iza prepreke, od jednake važnosti i izlazna brzina penetratora. Zbog toga zavisnost izlazne brzine penetratora od njegove udarne brzine

$$v_r = f(v_s) \tag{1.4}$$

predstavlja najvažniju karakteristiku sistema penetrator-prepreka. Na slici 1.3 predstavljen je dijagram sa tipičnom zavisnošću ove dve brzine.



Slika 1.3. Izlazna brzine penetratora u funkciji njegove udarne brzine

1.6. Ponašanje materijala prepreke i penetratora

Karakterizacija ponašanja materijala prepreke i penetratora u toku procesa probijanja jedan je od osnovnih problema pri modeliranju penetracije. Osnovna karakteristika opterećenja kojima su izloženi penetrator i prepreka je njihovo veoma kratko trajanje – ceo proces probijanja najčešće traje od nekoliko mikrosekundi do jedne milisekunde – pa je u stvari reč o *impulsnom opterećenju* materijala. Generalno, razmatranja ponašanja materijala pod dejstvom impulsnog

opterećenja bitno se razlikuju od uobičajenih analiza vezanih za kvazistatičko opterećenje. Kvalitativno, materijal izložen impulsnom dejstvu može da trpi nominalno veća opterećenja nego u kvazistatičkim uslovima.

Pri manjim vrednostima deformacija na početku procesa penetracije materijal se nalazi u zoni *elastičnosti* gde se primenjuje *Hooke-ov zakon*. Međutim, vrlo često je moguće zanemariti elastične deformacije materijala s obzirom da se na njih troši neuporedivo manja energija penetratora nego na *plastično deformisanje*.

Osnovni problem, dakle, predstavlja modeliranje ponašanja materijala (penetratora i prepreke) u zoni *plastičnosti*. Pri tome je prvi zadatak određivanje *uslova tečenja* materijala, odnosno definisanje prelaska iz elastične u plastičnu zonu deformisanja. Eksperimentalnim istraživanjima ustanovljeno je da uslov tečenja *von Mises-a* najbolje odgovara ponašanju metala. Na osnovu razmatranja energije deformacije i na osnovu pretpostavke da do plastičnog tečenja materijala dolazi kada energija promene oblika dostigne kritičnu vrednost, dobija se da *von Mises-ov uslov tečenja* nastupa kada je

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2 \quad (1.5).$$

U gornjem izrazu σ_i su vrednosti glavnih napona, dok je σ_y – granica tečenja koja se za svaki materijal utvrđuje eksperimentalnim putem. Iz jednačine (1.5) lako se dobija da je uslov tečenja pri jednodimenzionalnom naprežanju ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\sigma_1 = \sigma_y \quad (1.6),$$

dok pri čistom smicanju ($\sigma_1 = -\sigma_2$, $\sigma_3 = 0$) važi

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (1.7).$$

Kako se u analitičkim modelima penetracije uglavnom podrazumeva jednodimenzionalno naprežanje, jednačine (1.6) i (1.7) će se vrlo često koristiti.

Drugi važan problem je definisanje *konstitutivne jednačine* (zakona ojačanja) materijala. Moguće je, naime, materijal smatati idealno plastičnim, odnosno takvim da za sve vreme plastičnog deformisanja važe jednačine (1.5) ÷ (1.7). Međutim, realno se dešava ojačavanje materijala (naročito pod dejstvom impulsnog opterećenja) koje se manifestuje povećanjem napona tečenja sa rastom deformacija. U slučaju jednodimenzionalnog stanja napona ($\sigma_1 = \sigma$) zakon ojačavanja ima oblik

$$\sigma = F(K_i, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) \quad (1.8),$$

pri čemu su ε i $\dot{\varepsilon}$ relativna deformacija i brzina relativne deformacije, dok su K_i – eksperimentalno utvrđeni parametri koji zavise od vrste materijala. U radu će biti korišćeno više različitih oblika jednačine (1.8).

Zbog prirode opterećenja, u pojedinim analitičkim modelima koji će se razmatrati, smatra se da prostiranje deformacija u materijalu ima talasnu prirodu. Na slici 1.4 predstavljeno je prostiranje deformacije (poremećaja) u čvrstom telu.

Ako se pretpostavi da je cilindar površine poprečnog preseka A izložen dejstvu impulsnog opterećenja može se napisati jednačina kretanja deformacijom zahvaćenog dela materijala cilindra posle vremena dt :

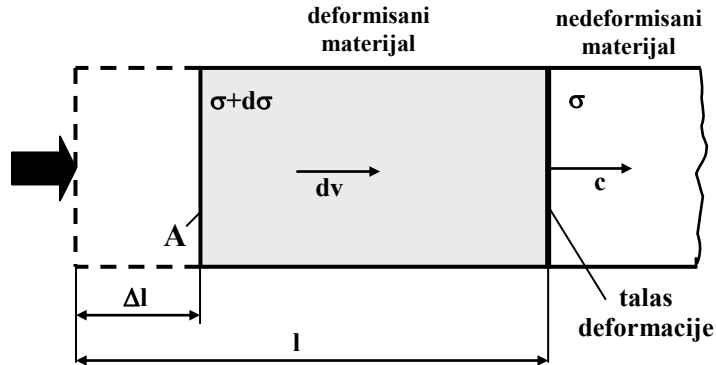
$$m(dv - 0) = Fdt \quad (1.9).$$

Infinitesimalna masa m deformisanog materijala i rezultujuća sila F koja na njega deluje imaju oblik

$$m = \rho A c dt, \quad F = [(\sigma + d\sigma) - \sigma]A \quad (1.10)$$

pri čemu je sa ρ označena gustina, a sa c brzina prostiranja poremećaja. Uvođenjem jednačina (1.10) u izraz (1.9) dobija se zavisnost između promene napona i promene brzine u obliku

$$d\sigma = \rho c dv \quad (1.11).$$



Slika 1.4. Prostiranje poremećaja u čvrstom telu

S druge strane, elementarna relativna deformacija koja predstavlja odnos skraćenja cilindra Δl i ukupne dužine l zahvaćene deformacionim talasom, može se pisati u obliku

$$d\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{dv dt}{c dt} = \frac{dv}{c} \quad (1.12).$$

Iz jednačina (1.11) i (1.12) dobija se vrednost brzine prostiranja poremećaja u čvrstom telu

$$c^2 = \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (1.13)$$

koja će u radu često biti korišćena.

2. EMPIRIJSKE RELACIJE

Kao što je napomenuto u uvodnom delu, empirijske (kvazianalitičke) relacije predstavljaju najjednostavnije modele probijanja koji se mogu veoma uspešno primenjivati u odgovarajućim, najčešće strogo definisanim i uskim domenima. U nastavku će biti predstavljene najpoznatije i najčešće korišćene empirijske relacije koje omogućavaju određivanje relevantnih parametara penetracije.

2.1. Formula Jacob de Marre-a

Rad *J. de Marre*-a (1886) predstavlja prvi značajan doprinos kvantitavnom opisivanju pojava vezanih za probijanje. Polazeći od analogije penetracionog procesa sa kvazistatičkim probijanjem, može se doći do izraza za minimalnu kinetičku energiju nedeformabilnog penetratora prečnika d potrebnu za probijanje prepreke debljine H [2]:

$$\frac{mv_0^2}{2} = kH^{1.4}d^{1.5} \quad (2.1)$$

gde je k empirijska konstanta koja zavisi od vrste materijala prepreke, karakteristika projektila i uslova udara.

Iz prethodne jednačine može se odrediti i brzina balističkog limita ukoliko su poznate karakteristike penetratora i prepreke:

$$v_L = K \frac{H^{0.7}d^{0.75}}{m^{0.5}} \quad (2.2)$$

gde je K opitni koeficijent koji se u zavisnosti od materijala prepreke i oblika penetratora određuje eksperimentalnim putem.

U zavisnosti od dominantnog režima probijanja izraz (2.2) se može modifikovati tako da njegova generalizovana varijanta ima oblik:

$$v_L = K \frac{H^a d^b}{m^{0.5}} \quad (2.3)$$

pri čemu je vrednost parametara a i b , u zavisnosti od različitih koncepata, prikazana u tabeli 2.1.

Parametri a i b u generalizovanoj formuli *J. de Marre*-a

Tabela 2.1

Autor	a	b
<i>J. de Marre</i>	0.7	0.75
<i>Euler</i>	1.0	0.5
<i>Nobble</i>	0.5	1.0
<i>Crupp</i>	5/6	2/3

Izrazi (2.2) i (2.3) važe za slučaj normalnog udara penetratora u preperku ($\theta=90^\circ$); u slučaju kosog udara ($\theta<90^\circ$), desne strane ovih jednačina potrebno je pomnožiti faktorom

$$b = \frac{1}{\sin^c \theta} \quad (2.4)$$

gde je c parametar koji zavisi od oblika penetratora i pripada intervalu [1, 2].

Jednačina *J. de Marre*-a predstavlja pionirski pristup modeliranju procesa penetracije i danas prvenstveno ima istorijski značaj. Savremene analitičke i numeričke metode, međutim, nisu u potpunosti istisnule ovaj pristup, pogotovo kada su u pitanju preliminarne analize i orijentacione evaluacije parametara penetracije u veoma širokom domenu primene.

2.2. SRI formula

Veoma obimna eksperimentalna istraživanja sprovedena u *Stanford Research Institute*-u [3] (1963) bila su prvenstveno koncentrisana na probijanje ploča od mekog čelika krutim projektilima sa ravnim vrhom, pri relativno malim udarnim brzinama. Minimalna potrebna kinetička energija penetratora određena je SRI formulom:

$$\frac{E}{d} = \frac{\sigma_0 H^2}{10.3} \left(42.7 + \frac{s}{H} \right) \quad (2.5),$$

gde je σ_0 – granica kidanja (najveći napon pri ispitivanju na istezanje) materijala prepreke, dok je s – raspon prepreke (najmanja udaljenost između oslonaca na koje je prepreka učvršćena). Oblast primene SRI formula ograničena je sledećim uslovima:

- relativna debljina prepreke u odnosu na prečnik $H/d=0.1\div 0.6$,
- relativna debljina prepreke u odnosu na njen raspon $H/s=0.002\div 0.05$,
- vitkost penetratora $L/d=10\div 50$,
- odnos raspona prepreke i prečnika penetratora $s/d=5.0\div 8.0$,
- udarna brzina penetratora $v_0=21\div 122$ m/s.

2.3. BRL formula

Eksperimentalna istraživanja američkog *Ballistic Research Institute* [3] (1968) dovela su do jednačine za potrebnu kinetičku energiju penetratora u obliku

$$E = 1.4 \cdot 10^9 (Hd)^{1.5} \quad (2.6).$$

Formula je sasvim bliska rezultatu *J. de Marre*-a (2.1) i predstavlja specijalan slučaj njene generalizacije, s tim što je opitni koeficijent eksplicitno naveden. Veličine u jednačinama (2.5) i (2.6) su u SI jedinicama.

Podaci o domenu primenljivosti BRL formule nisu dostupni. Izvesne komparativne analize eksperimentalnih rezultata i empirijskih modela [2] i [3] rangiraju navedene formule tako što se prednost daje generalizovanoj formuli *J. de Marre*-a sa adaptibilnim parametrima, zatim SRI formuli, dok na kraju dolazi BRL formula.

2.4. Ostale empirijske formule koje definišu potrebnu kinetičku energiju penetratora

Na bazi velikog broja eksperimentalnih podataka i uz korišćenje ideje o minimalnoj potrebnoj kinetičkoj energiji projektila kao ključnom parametru koji definiše probojnost, razvijen je veći broj empirijskih modela.

Neilson [3] je analizom bezdimenzionih parametara došao do izraza

$$\frac{E}{\sigma_0 d^3} = A \left(\frac{H}{d} \right)^{1.7} \left(\frac{s}{d} \right)^{0.6} \quad (2.7)$$

pri čemu je $A=1.4$ ako se određuje srednja energija koja obezbeđuje 50% proboja, odnosno $A=1.0$ za slučaj minimalne energije pri kojoj je proboj moguć.

Relacija (2.7) važi u domenu $s/d=4.0 \div 22.0$, $L/d > 13$, $H/d=0.14 \div 0.64$.

Jowett [2] je predložio modifikaciju Neilson-ove jednačine bifunkcionalnom zavisnošću

$$\begin{aligned} \frac{E}{\sigma_0 d^3} &= 1.32 \left(\frac{H}{d} \right)^{1.74} \left(\frac{s}{d} \right)^{0.61} && \text{za } 0.1 < \frac{H}{d} < 0.25 \\ \frac{E}{\sigma_0 d^3} &= 0.38 \left(\frac{H}{d} \right)^{0.84} \left(\frac{s}{d} \right)^{0.61} && \text{za } 0.1 < \frac{H}{d} < 0.25 \end{aligned} \quad (2.8).$$

Pri tome je opseg u kome se jednačine (2.8) mogu primenjivati definisan uslovima: $L/d=2 \div 8$, $\sigma_0=315 \div 483$ MPa, $v_0=40 \div 200$ m/s, $s/d < 12$. U slučaju kada je $s/d > 12$, faktor $(s/d)^{0.61}$ u jednačini (2.8) treba zameniti jedinicom.

Važno je primetiti da su do sada analizirane empirijske relacije ograničene na određivanje kritičnih uslova probojnosti – minimalne kinetičke energije, odnosno najmanje udarne brzine penetratora koja obezbeđuje proboj. One daju odgovor na pitanje da li će doći do proboja prepreke, ali ne omogućavaju određivanje izlazne brzine penetratora v_r koja je često ključna karakteristika procesa penetracije.

2.5. THOR formule

Prve značajne empirijske relacije koje definišu izlaznu brzinu penetratora predstavljaju rezultat projekta na *John's Hopkins University* [4] (1963) i poznate su kao THOR formule. Izlazna brzina penetratora definisana je formulom

$$v_r = v_0 - 10^c (HA)^\alpha m^\beta (\sec\theta)^\gamma v_0^\lambda \quad (2.9),$$

gde je A – napadna površina penetratora. Brzina balističkog limita određena je izrazom

$$v_L = 10^{c_1} (HA)^{\alpha_1} m^{\beta_1} (\sec\theta)^{\gamma_1} \quad (2.10),$$

pri čemu parametri c , α , β , γ , λ , c_1 , α_1 , β_1 i γ_1 zavise od karakteristika penetratora i prepreke. Za slučaj čeličnog penetratora vrednosti pomenutih parametara date su u tabeli 2.2.

Parametri u THOR formulama za čelični penetrator i različite materijale prepreke
Tabela 2.2

Materijal prepreke	c	α	β	γ	λ	c_1	α_1	β_1	γ_1
Magnezijum	6.9	1.1	-1.2	1.1	0.09	6.4	1.0	-1.1	1.0
Aluminijumske legure	7.0	1.0	-1.1	1.2	0.14	6.2	0.9	-0.9	1.1
Titanijske legure	6.3	1.1	-1.1	1.4	0.7	7.6	1.3	-1.3	1.6
Liveno gvožđe	4.8	1.0	-1.1	1.0	0.52	10.2	2.2	-2.2	2.2
Površinski ojačan čelik	4.4	0.7	-0.8	1.0	0.43	7.7	1.2	-1.4	1.7
Meki čelik	6.4	0.9	-0.9	1.3	0.02	6.5	0.9	-1.0	1.3
Tvrđi čelik	6.5	0.9	-0.9	1.3	0.02	6.6	0.9	-1.0	1.3
Bakar	2.8	0.7	-0.7	0.8	0.80	14.1	3.5	-3.7	4.3
Olovo	2.0	0.5	-0.5	0.7	0.82	10	2.7	-2.7	3.6

Jednačine (2.9) i (2.10), kao i vrednosti empirijski utvrđenih parametara date su u izvornom obliku, što podrazumeva da se veličine izražavaju u anglosaksonskom sistemu jedinica – brzine u ft/s, debljina prepreke H u in, površina A u in² i masa penetratora m u grain-ima. Primenljivost THOR formula nije eksplicitno deklarirana, ali je ograničena na tanke prepreke pri relativno malim udarnim brzinama.

2.6. Poluempirijski modeli

Proučavanje procesa probijanja na elementarnom nivou je zasnovano na primeni osnovnih zakona mehanike krutog tela – zakona o održanju energije i zakona o promeni količine kretanja. Zakon održanja energije za proces probijanja može se napisati u obliku [5]

$$\frac{mv_0^2}{2} = W + A + \frac{(m + m_{pl})v_r^2}{2} \quad (2.11).$$

Celokupna kinetička energija penetratora u trenutku udara transformiše se u:

- rad W , koji se utroši na deformisanje i zagrevanje odsečka i penetratora, pri njihovom potpuno neelastičnom sudaru (uz pretpostavku da odsečak nije vezan za ostatak materijala prepreke), tj. reč je gubitku kinetičke energije penetratora usled apsolutno neelastičnog sudara sa “slobodnim” odsečkom,
- rad A , koji se utroši na odvajanje odsečka od sekundarne zone prepreke i odgovarajuće deformacije prepreke (prvenstveno smicanje i sabijanje),
- kinetičku energiju penetratora i odsečka posle proboja, pri čemu se pretpostavlja da imaju istu izlaznu brzinu v_r ; m_{pl} je pri tome masa odsečka (odnosno ukupna masa generisane parčadi, ukoliko je fragmentacija prepreke dominantan režim probijanja).

Rad W se jednostavno određuje tako što se najpre izračuna hipotetička zajednička brzina penetratora i odsečka posle neelastičnog sudara, primenom zakona o održanju količine kretanja:

$$v_{r1} = \frac{m}{m + m_{pl}} v_0 \quad (2.12).$$

Traženi rad W predstavlja razliku kinetičke energije sistema penetrator/prepreka pre i posle sudara:

$$W = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(m + m_{pl})v_{r1}^2}{2} = \frac{m_{pl}}{m + m_{pl}} \frac{mv_0^2}{2} \quad (2.13).$$

Uvođenjem izraza (2.13) u polaznu jednačinu (2.11) dobija se

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m_{pl}}{m + m_{pl}} \frac{mv_0^2}{2} + A + \frac{(m + m_{pl})v_r^2}{2} \quad (2.14).$$

Jednačina (2.14) važi i u graničnom slučaju, pri brzini balističkog limita $v_0=v_L$, kada je izlazna brzina penetratora $v_r=0$. Odgovarajuća vrednost rada A_L je

$$A_L = \frac{m}{m + m_{pl}} \frac{mv_0^2}{2} \quad (2.15).$$

Ako pretpostavimo da vrednost ovog rada predstavlja karakteristiku procesa koja ne zavisi udarne brzine $A=\text{const.}=A_L$, iz jednačine (2.14) se dobija konačan izraz za izlaznu brzinu penetratora

$$v_r = \frac{\sqrt{v_0^2 - v_L^2}}{1 + \frac{m_{pl}}{m}} \quad (2.16).$$

Masa odsečka se najčešće određuje kao $m_{pl} = \rho AH$, dok se brzina balističkog limita može odrediti na osnovu neke od ranije prezentovanih empirijskih relacija.

Tako, npr. jedna varijanta THOR formula [6] podrazumeva korišćenje jednačine za izlaznu brzinu penetratora (2.16), uz određivanje brzine balističkog limita v_L preko izraza (2.10).

Empirijske relacije JTCG/ME (*Joint Technical Coordination Group for Munitions Effectiveness*) [6] takođe uključuju izraz (2.16), dok je brzina balističkog limita definisana sa

$$v_L = C_{bf} \left(\frac{\rho_p HA}{m_{pl}} \right)^{b_f} \sec^h \theta \left(\frac{\rho_p HA}{m_0} \right)^f \quad (2.17),$$

gde je ρ_p gustina materijala penetratora, C_{bf} , b_f , h i f su empirijske konstante, dok je referentna masa $m_0 = 6.48g$. Ova jednačina uglavnom se primenjuje za probijanje tankih prepreka.

Empirijska formula FAA (*Federal Aviation Administration*) [6] koja se uglavnom primenjuje pri probijanju vazduhoplovnih konstrukcija, uz osnovu formulu (2.16), podrazumeva jednačinu za određivanje brzine balističkog limita u obliku

$$v_L = \sqrt{\frac{2dG_d H^2}{m \sin^2 \theta}} \quad (2.18)$$

gde je d prečnik penetratora, dok je G_d dinamički modul smicanja materijala prepreke (za čelik je ovaj parametar 1.3 GPa, dok je za aluminijum 210 MPa).

Konačno, potrebno je navesti *Lambert-Ringers*-ovu generalizaciju jednačine (2.16) u obliku [7]

$$v_r = \begin{cases} 0, & v_0 \leq v_L \\ \alpha (v_0^p - v_L^p)^{\frac{1}{p}}, & v_0 > v_L \end{cases} \quad (2.19)$$

gde su $0 < \alpha \leq 1$ i $p > 1$ empirijski parametri. Ovi parametri mogu se za svaki skup eksperimentalnih podataka odrediti optimizacionim metodama, ali autori daju i empirijske formule za njihovo određivanje. Model je verifikovan na veoma obimnom eksperimentalnom uzorku koji uz to, u pogledu debljine prepreke, udarnih brzina, materijala prepeke i penetratora itd, pokriva veoma širok spektar problema penetracije. Ako se uvedu pomoćne promenljive z i H_v :

$$z = \frac{H}{d} \operatorname{cosec}^{0.75} \theta, \quad H_v = H \operatorname{cosec}^{0.75} \theta \quad (2.20)$$

i pomoćna funkcija $f(z) = z + e^{-z} - 1$, parametar p je definisan izrazom

$$p = 2 + \frac{z}{3} \quad (2.21).$$

Brzina balističkog limita određena je formulom

$$v_L = u \left(\frac{L}{d} \right)^{0.15} \left(f(z) \frac{d^3}{m} \right)^{0.5} \quad (2.22),$$

gde je u karakteristika materijala prepreke.

Masa odsečka data je relacijom

$$m_{pl} = \frac{\pi}{4} \rho d^2 H_v \quad (2.23),$$

i konačno, parametar α može se izračunati na osnovu izraza

$$\alpha = \left(\frac{m}{m + \frac{m_{pl}}{3}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.24).$$

Na kraju, treba napomenuti da postoji veliki broj empirijskih relacija koje se odnose na razne specijalne slučajeve probijanja (npr. za probijanje korišćenjem penetratora posebnog oblika, za problem probijanja cevi i sl.). Još jednom valja napomenuti da je empirijske jednačine potrebno primenjivati krajnje oprezno, jer izvan domena u kojem su verifikovani dobijeni rezultati mogu biti neupotrebljivi. U tom smislu, analitički modeli penetracije, koji su tema narednog poglavlja, imaju potpuno zasnovanu fizikalnost i širi dijapazon primene.

3. PROBIJANJE TANKIH PLOČA

Pod tankim pločama podrazumevaju se ploče dovoljno male debljine da se promene napona (prvenstveno smicajnog) duž debljine prepreke mogu zanemariti. U praksi se najčešće smatra da ako je debljina prepreke manja od radijusa penetratora, da se radi o tankoj prepreci. Drugi kriterijum povezan je sa odnosom vremena koja su potrebna da se prilikom udara generisani talasi deformacije reflektuju od zadnje strane prepreke, odnosno penetratora, $n=(L/c_p)/(H/c_t)$, gde je L – dužina penetratora, H – debljina prepreke, a c_p i c_t – brzine deformacionih talasa u materijalu penetratora i prepreke. Prepreka se smatra tankom ako je $n>5$.

Analitički modeli penetracije tankih ploča koriste se pri razmatranju probijanja lako zaštićenih ciljeva. S obzirom da se u ovom slučaju analiziraju različiti materijali prepreke (aluminijum, titan, čelik), kao i različite vrste penetratora (razni oblici, udarne brzine i sl.), za slučaj tankih ploča razvijen je najveći broj analitičkih modela penetracije.

3.1. Deformaciono-energetski model

Razmatranje analitičkih modela penetracije biće započeto predstavljanjem relativno jednostavnog jednodimenzionalnog modela [8] koji se temelji na primeni dva fundamentalna principa: (a) na zakonu o održanju mehaničke energije sistema penetrator-prepreka, i (b) zakonu o prostiranju elastičnih i plastičnih deformacija u materijalu prepreke. U modelu se razmatra samo deformisanje i pomeranje cilindrične zone prepreke, koja se nalazi neposredno ispred penetratora (primarna zona), dok se preostali deo prepreke (sekundarna zona) smatra nepokretnim. Kretanju penetratora suprotstavljaju se sile otpora sabijanju i smicanju odsečka, kao i inercijalne i sile trenja.

3.1.1. Kretanje odsečka

Odmah po ostvarivanju kontakta između penetratora i prepreke počinje sabijanje materijala prepreke ispred penetratora, odnosno faza formiranja odsečka. Sabijanje se vrši mehanizmom prostiranja kompresionog talasa brzine c u materijalu prepreke. Ako se pretpostavi da deformisani deo materijala prepreke (zahvaćen deformacionim talasom) ima brzinu v , njegov zakon kretanja u diferencijalnom obliku glasi

$$mdv = Fdt \quad (3.1.1)$$

gde je

$$m = \rho Acdt \quad (3.1.2)$$

masa deformisanog dela prepreke, dok je

$$F = [(\sigma + d\sigma) - \sigma]A \quad (3.1.3)$$

rezultujuća sila koja deluje na masu m , pri čemu je σ normalni napon. Uvođenjem jednačina (3.1.2) i (3.1.3) u (3.1.1) dobija se

$$d\sigma = \rho cdv \quad (3.1.4)$$

odnosno zakon promene brzine deformisanog dela odsečka u obliku

$$v = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{c} \quad (3.1.5).$$

Da bi se odredila brzina odsečka potrebno je, dakle, poznavati zakon promene napona σ , odnosno konstitutivnu jednačinu materijala prepreke.

U domenu elastičnosti ($\sigma \in [0, \sigma_y]$, σ_y - granica tečenja) važi *Hooke-ov* zakon

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.1.6),$$

dok se u zoni plastičnih deformacija pretpostavlja konstitutivna jednačina u obliku

$$\sigma = \sigma_0 \varepsilon^n \quad (3.1.7),$$

gde su σ_0 i n odgovarajući parametri koji se utvrđuju eksperimentalno za svaki materijal. Dakle, tri parametra E , σ_0 i n u potpunosti određuju ponašanje materijala pri dejstvu impulsnog opterećenja, kako u zoni elastičnosti, tako i u domenu plastičnih deformacija. Jednačine (3.1.6) i (3.1.7) omogućavaju određivanje napona na granici tečenja $\sigma = \sigma_y$, budući da su u tom slučaju obe jednačine zadovoljene; eliminacijom relativne deformacije ε dobija se

$$\sigma_y = \sigma_0 \left(\frac{E}{\sigma_0} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (3.1.8).$$

Zbog specifičnosti naprezanja materijala pri penetraciji, odnosno zbog otežanog širenja sabijenog materijala usled prisustva okolnog nedeformisanog materijala, potrebni napon za ostvarivanje iste deformacije prepreke uvećava se za faktor $K \in [1.7, 2.7]$, tako da jednačina (3.1.7) dobija oblik

$$\sigma = K\sigma_0 \varepsilon^n \quad (3.1.9)$$

Napon tečenja σ_y takođe se povećava i dobija vrednost $K\sigma_y$.

Poznat je izraz za brzinu prostiranja poremećaja (deformacija) u čvrstim telima

$$c_p^2 = \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (3.1.10)$$

koji, specijalno za elastične deformacije zbog (3.1.6), ima oblik

$$c_e^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3.1.11)$$

Konstitutivne jednačine (3.1.6) i (3.1.9), kao i izrazi za brzinu deformacionog talasa (3.1.10) i (3.1.11), najzad omogućavaju nalaženje integrala (3.1.5) u obliku

$$v = \frac{1}{\rho} \left[\int_0^{K\sigma_y} \frac{d\sigma}{c_e} + \int_{K\sigma_y}^{\sigma} \frac{d\sigma}{c_p} \right] = \frac{K\sigma_y}{\rho c_e} + \frac{1}{\rho} \int_{K\sigma_y}^{\sigma} \frac{d\sigma}{c_p} \quad (3.1.12)$$

Kako je na osnovu (3.1.9) i (3.1.10)

$$\begin{aligned} d\sigma &= K\sigma_0 n \varepsilon^{n-1} d\varepsilon \\ c_p &= \sqrt{\frac{K\sigma_0 n \varepsilon^{n-1}}{\rho}} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

dobija se konačan izraz za brzinu odsečka u funkciji njegove relativne deformacije

$$v = \begin{cases} \frac{KE\varepsilon}{\rho c_e}, & \varepsilon \leq \frac{K\sigma_y}{E} \\ \frac{K\sigma_y}{\rho c_e} + \frac{2}{n+1} \sqrt{\frac{K\sigma_0 n}{\rho}} \left[\varepsilon^{\frac{n+1}{2}} - \left(\frac{K\sigma_y}{E} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right], & \varepsilon > \frac{K\sigma_y}{E}. \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Očigledno je da brzina odsečka sve vreme raste sa porastom vrednosti njegove relativne deformacije.

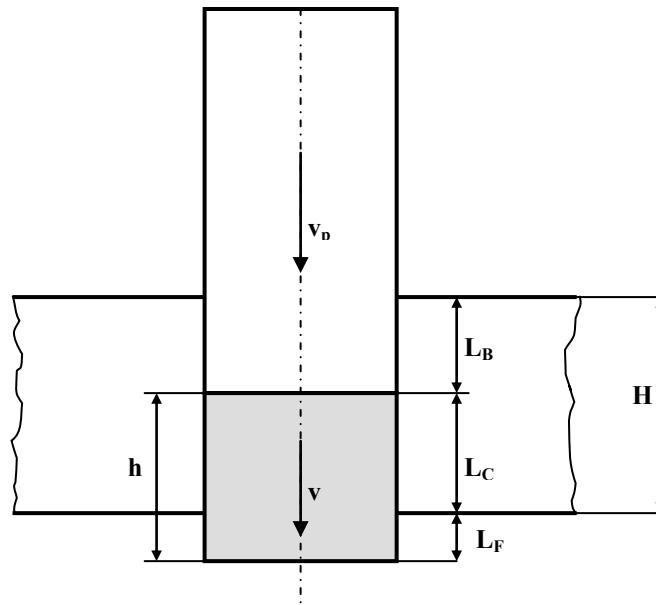
3.1.2. Kretanje penetratora

Na sl. 3.1.1 predstavljeni su parametri kretanja penetratora i odsečka. Usvajaju se pretpostavke o jednakoubrzanom kretanju prednjeg dela odsečka, sa ravnomernom promenom brzine od nule do trenutne vrednosti brzine odsečka v , tako da važi

$$L_F = \frac{1}{2} vt \quad (3.1.15),$$

kao i o jednakousporenom kretanju zadnjeg dela odsečka (tj. prednjeg dela penetratora) sa smanjenjem brzine od početne vrednosti v_0 do konačne vrednosti v , pa je

$$L_B = \frac{1}{2} (v_0 + v)t \quad (3.1.16).$$



Slika 3.1.1. Osnovni parametri kretanja sistema penetrator-prepreka

Kako je uvek zadovoljen uslov

$$H + L_F = L_B + h \quad (3.1.17)$$

gde je

$$h = H \exp(-\varepsilon)$$

trenutna vrednost dužine odsečka pri ukupnoj deformaciji ε , dobija se

$$H - h = L_B - L_F = \frac{1}{2} v_0 t \quad (3.1.18)$$

odakle sledi vreme trajanja penetracije t i, na osnovu (3.1.15) i (3.1.16), pomeranja prednjeg i zadnjeg dela odsečka L_F i L_B .

Budući da su svi parametri kretanja odsečka poznati (v , L_F , L_B), brzina penetratora v_p može se odrediti na osnovu zakona o održanju energije u obliku

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_p^2 = \sum_i W_i = W_C + W_K + W_S + W_F \quad (3.1.19).$$

U gornjoj jednačini vrednosti W_i predstavljaju radove koje je izvršio penetrator, i to:

- W_C - rad usled savladavanja sile otpora sabijanja odsečka; kako ova sila ima vrednost $F = K \sigma_0 \varepsilon^n A$, to je njen elementarni rad određen izrazom $\Delta W_{Ci} = F \Delta L_B$, dok je ukupna vrednost definisana sumom

$$W_C = \sum_i \Delta W_{Ci} \quad (3.1.20).$$

- W_K predstavlja rad utrošen na savladavanje inercije odsečka, tj. njegovog ubrzavanja do trenutne vrednosti brzine v ; ovaj rad jednak je kinetičkoj energiji odsečka, dakle,

$$W_K = \frac{1}{2} \rho A h v^2 \quad (3.1.21).$$

- W_S predstavlja rad utrošen na savladavanje sile smicanja odsečka; smatra se da je tangencijalni napon tečenja pri smicanju nepromenljiv i da je za njegovo određivanje merodavna vrednost relativne deformacije $\varepsilon=1$; zbog toga je $\tau = \sigma_0 / \sqrt{3}$, pa je ukupan rad određen sa

$$W_S = 2\pi R \tau \int_0^{L_B} (h - L_B) dL_B = \frac{\pi R \sigma_0}{\sqrt{3}} (2HL_B - L_B^2) \quad (3.1.22).$$

- W_F je rad usled savladavanja bočne sile trenja između penetratora i prepreke i određuje se slično prethodnom radu

$$W_F = 2\pi R \tau \int_0^{L_B} L_B dL_B = \frac{\pi R \sigma_0}{\sqrt{3}} L_B^2 \quad (3.1.23).$$

Korišćenjem izaraza (3.1.20) - (3.1.23) lako se rešava jednačina (3.1.19) i dobija trenutna brzina penetratora v_p .

3.1.3. Faze penetracije

Prethodno analizirano kretanje odsečka i penetratora karakteristično je za prvu, osnovnu fazu penetracionog procesa. Naime, uz iterativno povećavanje relativne deformacije ε , određuje se najpre na osnovu (3.1.14) brzina odsečka v , a zatim korišćenjem jednačina (3.1.19) - (3.1.23) i brzina penetratora v_p . U svakom koraku lako se određuje kontaktna dužina između odsečka i ostatka prepreke

$$L_C = H - L_B \quad (3.1.24).$$

Prva faza može biti završena na dva načina:

- a) probojem - čime se okončava i penetracija - ako se ispuni uslov $L_C=0$, ili
- b) realizacijom uslova

$$v_p = v \quad (3.1.25)$$

pre uslova a) čime proces prelazi u drugu fazu.

Prvi uslov se ispunjava pri većim, dok je realizacija drugog karakteristična za manje udarne brzine penetratora.

Analiza druge faze penetracije sasvim je jednostavna. Budući da imaju istu brzinu v , penetrator i odsečak se ponašaju kao jedno telo ukupne mase

$$M = m + \rho Ah \quad (3.1.26)$$

čije se kretanje lako određuje na osnovu zakona o održanju energije

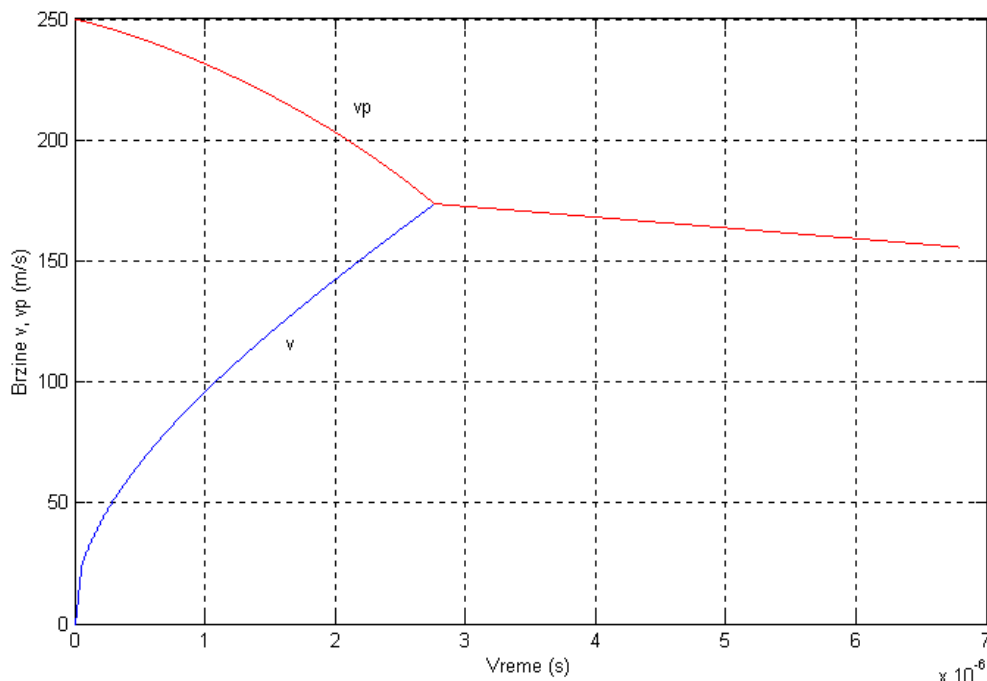
$$\frac{1}{2} M(v_1^2 - v^2) = W_S + W_F \quad (3.1.27)$$

gde je $v_1 = v_{p1}$ - brzina penetratora, odnosno odsečka na kraju prve faze, dok je na desnoj strani jednačine izostavljen rad sabijanja odsečka, jer je izjednačavanjem brzina penetratora i odsečka završeno deformisanje, odnosno sabijanje odsečka, $W_C=0$.

Druga faza, odnosno ceo proces penetracije, završava se:

- probojem, kada se ispuni uslov $L_C=0$, ili
- zaustavljanjem penetratora u prepri, ako se pre gornjeg uslova, realizuje jednakost $v=0$.

Na sl. 3.1.2 prikazana je tipična vremenska zavisnost brzine odsečka v i penetratora v_p prema deformaciono-energetskom modelu, a na osnovu algoritma za proračun parametara penetracije prema ovom modelu.



Slika 3.1.2. Brzine odsečka i penertatora u funkciji vremena – deformaciono-energetski model (probijanje čelične ploče debljine 1.25 mm čeličnim penetratorom prečnika 4.71 mm pri udarnoj brzini 250 m/s)

Analizirani deformaciono-energetski model omogućava izračunavanje svih relevantnih parametara penetracionog procesa. Model, međutim, ima i ozbiljne nedostatke od kojih su najznačajniji:

- zanemarivanje globalnih deformacija prepreke,
- činjenica da osnovna jednačina modela (3.1.14), koja predstavlja vezu između deformacije odsečka i njegove brzine, nije adekvatna, s obzirom da model daje isuviše velike vrednosti deformacije, odnosno veoma male konačne dužine odsečka,
- dobijene izlazne brzine, zbog napred navedenog razloga, imaju vrednosti manje od realnih, naročito pri velikim udarnim brzinama.

Navedeni nedostaci sužavaju oblast primene modela na slučajeve vrlo tankih prepreka pri umerenim vrednostima udarnih brzina.

3.2. Strukturni model

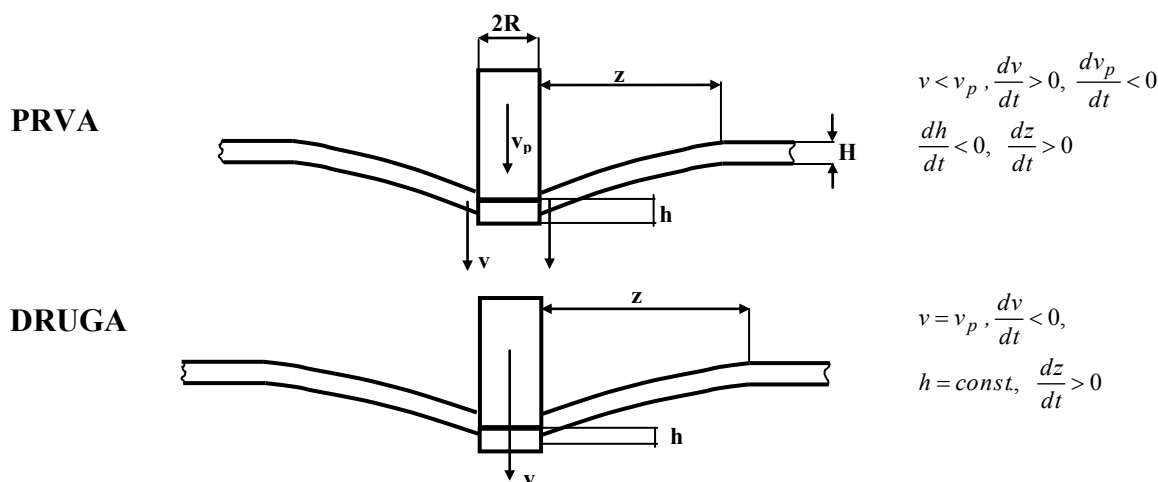
3.2.1. Uvod. Osnovne pretpostavke

Strukturni model [9] uzima u obzir kako naprezanja i deformacije koje dovode do formiranja odsečka (tzv. lokalna naprezanja u primarnoj deformacionoj zoni), tako i deformisanje, odnosno otpor šire strukture prepreke (globalna naprezanja sekundarne zone), što je posebno značajno za razmatranje penetracije pri udarnim brzinama penetratora bliskim limitnoj brzini.

Sam proces može se posmatrati kroz dve faze (sl. 3.2.1); u prvoj, penetrator i deo materijala prepreke koji formira odsečak kreću se jednakom brzinom v_p , pri čemu dolazi do smicanja odsečka duž odgovarajuće cilindrične površine, uz smanjivanje kontaktne dužine h , $h < H$. Usled dejstva lokalne smičuće sile, dolazi do savijanja dela materijala prepreke oblika kružnog prstena čiji se spoljni prečnik sve vreme povećava. Kada brzina ovog dela prepreke v , koja kontinualno raste, dostigne vrednost brzine penetratora v_p , prestaje smicanje i započinje druga faza procesa. U drugoj fazi, osim i dalje prisutnog savijanja, dominira istežanje sekundarne zone prepreke.

Ceo proces okončava se na jedan od tri načina:

- probijanjem prepreke u toku prve faze, usled plastičnog smicanja odsečka duž cele debljine prepreke,
- probijanjem prepreke u drugoj fazi, kidanjem odsečka usled istežanja,
- zaustavljanjem penetratora usled nedovoljne početne brzine, bilo u prvoj, bilo u drugoj fazi.



Slika 3.2.1. Šematski prikaz dvofaznog modela penetracije

3.2.2. Analiza prve faze

U prvoj fazi penetracije potrebno je u svakom trenutku, na osnovu zakona o promeni količine kretanja i momenta količine kretanja, odrediti brzinu penetratora (odnosno odsečka) v_p , brzinu v deformisanog dela prepreke, kao i njegovu dimenziju z (sl. 3.2.2). Pretpostavlja se da plastično deformisani deo prepreke pri savijanju rotira oko kružne ivične linije ove zone kao oko cilindričnog zgloba koji se uz to i pomera (*plastic hinge*).

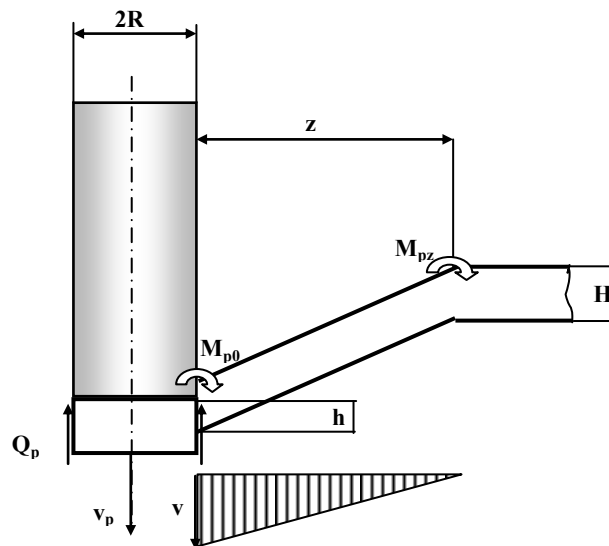
Primenom zakona o promeni količine kretanja na sistem koji čine penetrator i odsečak, dobija se jednačina

$$mv_0 - (m + \frac{1}{2}m_0R^2)v_p = \int_0^t Q_p dt \quad (3.2.1)$$

gde je v_0 – udarna brzina penetratora,

$m_0 = 2\pi\rho H$ – karakteristika prepreke,

Q_p – ukupna sila otpora smicanju koja deluje na odsečak.



Slika 3.2.2. Analiza prve faze penetracionog procesa

U skladu sa prethodnom jednačinom, u početnom trenutku $t=0$, brzina penetratora se odmah izjednačava sa brzinom odsečka i smanjuje se na vrednost

$$v_{p0} = \frac{m}{m + \frac{1}{2}m_0R^2} v_0 \quad (3.2.2).$$

Da bi se zakon o promeni količine kretanja primenio na deformisani deo prepreke, neophodno je odrediti njegovu količinu kretanja imajući u vidu linearnu raspodelu brzine (slika 3.2.3). Elementarna vrednost količine kretanja u zavisnosti od položaja definisanog koordinatom r je

$$dK(r) = dm(r)v(r).$$

Kako je

$$v(r) = \frac{r}{z} v \quad (3.2.3)$$

$$dm(r) = 2\pi\rho(R + z - r)H dr$$

sledi

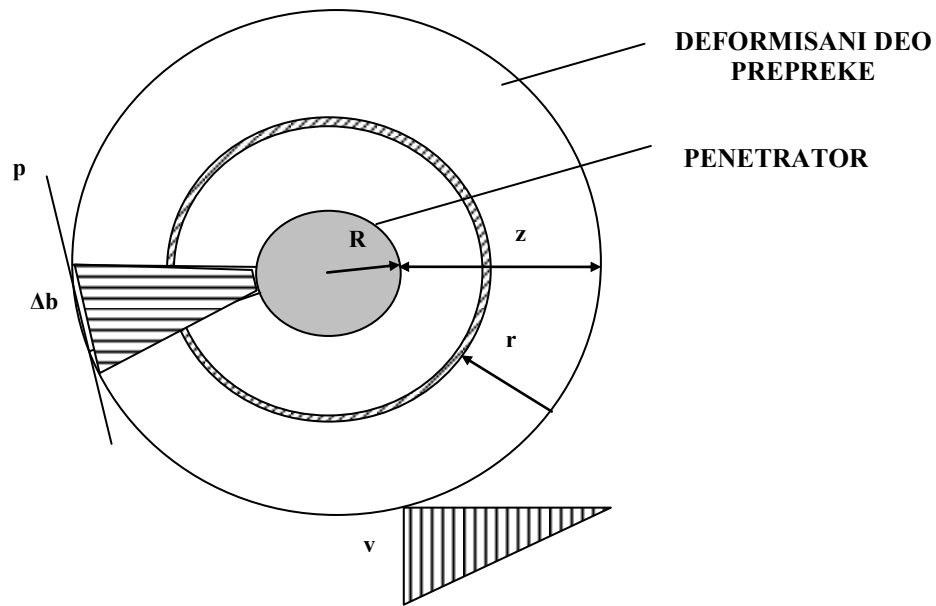
$$dK(r) = \frac{m_0 r v}{z} (R + z - r) dr .$$

Integracijom elementarne količine kretanja po celoj deformisanoj masi prepreke, $r \in [0, z]$, dobija se izraz za količinu kretanja

$$K = \int_0^z dK(z) = \frac{1}{2} m_0 v z (R + \frac{1}{3} z) \quad (3.2.4).$$

S obzirom da je u početnom trenutku brzina prepreke $v=0$, zakon o promeni količine kretanja za deformisani deo prepreke može se pisati u obliku

$$\frac{1}{2} m_0 v z (R + \frac{1}{3} z) = \int_0^t Q_p dt \quad (3.2.5).$$



Slika 3.2.3. Određivanje količine kretanja i momenta količine kretanja deformisanog dela prepreke

Primena zakona o promeni momenta količine kretanja za bilo koju fiksnu osu (npr. osu penetratora) dovela bi, zbog simetrije, do tautološke jednakosti. Zbog toga se deformisani deo prepreke posmatra kao struktura konstituisana od beskonačno velikog broja greda infinitezimalne širine Δb . Ako se pretpostavi da na svaku od tih greda deluju samo savojni momenti M_{p0} i M_{pz} koji se suprotstavljaju njihovom obrtanju oko trenutne ose rotacije p, kao i komponenta otpora smicanju Q_p , onda se za celu deformisanu zonu može pisati

$$\Delta L = - \int_0^t (M_{p0} + M_{pz}) dt + \int_0^t Q_p z dt \quad (3.2.6).$$

Moment količine kretanja određuje se slično količini kretanja; integracijom izraza

$$dL(r) = dm(r)v(r)r$$

koristeći pri tome zavisnosti (3.2.3), dobija se

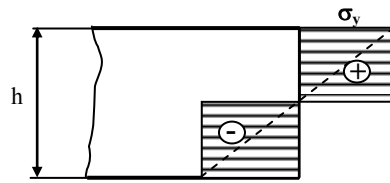
$$\Delta L = L = \int_0^z dL(r) = \frac{1}{3} m_0 v z^2 (R + \frac{1}{4} z) \quad (3.2.7).$$

S obzirom na jednačinu (3.2.6) dobija se konačan oblik zakona o promeni momenta količine kretanja

$$\frac{1}{3} m_0 v z^2 (R + \frac{1}{4} z) = - \int_0^t (M_{p0} + M_{pz}) dt + \int_0^t Q_p z dt \quad (3.2.8).$$

Vrednosti opterećenja Q_p , M_{p0} i M_{pz} nije teško odrediti. Ako se pretpostavi da je granica tečenja materijala prepreke σ_y nepromenljiva u toku procesa, tada je napon tečenja pri smicanju $\sigma_y / \sqrt{3}$, što znači da je ukupan otpor smicanju

$$Q_p = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sigma_y R h \quad (3.2.9).$$



Slika 3.2.4. Raspodela normalnog napona pri čistom savijanju u zoni plastičnosti

Pri određivanju momenta savijanja treba imati u vidu raspodelu napona duž poprečnog preseka elementarne širine Δb (slika 3.2.4), s obzirom na pretpostavku da se deformisanje odvija u zoni plastičnosti. Elementarna vrednost momenta određena je izrazom

$$d(\Delta M) = \sigma_y x dx \Delta b,$$

odakle se integracijom u granicama $x \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ dobija

$$\Delta M = \frac{1}{4} \sigma_y h^2 \Delta b.$$

S obzirom da je

$$\int \Delta b = 2\pi R, \quad \text{sledi}$$

$$M_{p0} = \frac{\pi}{2} \sigma_y R h^2 \quad (3.2.10)$$

i potpuno analogno,

$$M_{pz} = \frac{\pi}{2} \sigma_y (R + z) H^2 \quad (3.2.11).$$

Izrazi (3.2.1), (3.2.5) i (3.2.8) definišu sistem od tri jednačine sa tri nepoznate (v_p , v , z) koji se korišćenjem izraza za opterećenja (3.2.9) - (3.2.11) jednostavno numerički rešava.

U početnom trenutku $t=0$, brzina penetratora određuje se na osnovu jednačine (3.2.2), brzina prepreke je $v=0$, dok se na osnovu eksperimentalnih opservacija uzima da je početna vrednost parametra z , $z_0=R/3$. U svakom vremenskom koraku, na osnovu jednačine (3.2.1) odmah se određuje brzina penetratora v_p (koja se s vremenom smanjuje), dok se rešavanjem sistema jednačina (3.2.5) i (3.2.8) određuju nove vrednosti brzine v i dužine z (koje s vremenom rastu).

Kontaktna dužina h odsečka i preostalog dela prepreke neprekidno se smanjuje i može se odrediti na osnovu izraza

$$h = H - \int_0^t (v_p - v) dt \quad (3.2.12).$$

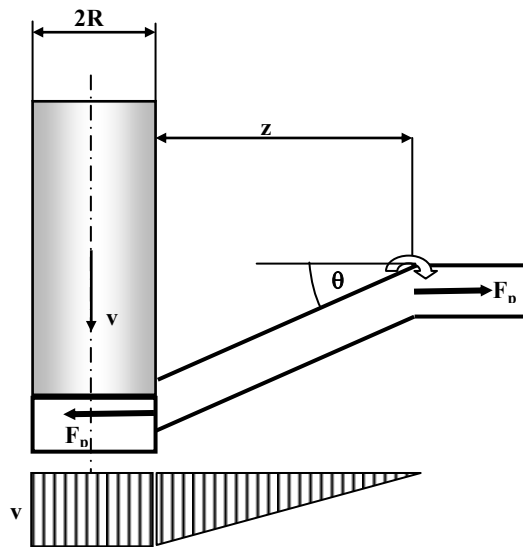
Prva faza procesa probijanja okončava se na jedan od sledeća tri načina:

- zaustavljanjem penetratora u prepri, ukoliko se ostvari uslov $v_p=0$,
- probijanjem prepreke, s ispunjavanjem uslova $h=0$,
- prelaskom u drugu fazu, pri čemu je neophodna realizacija uslova $v=v_p$.

3.2.3. Analiza druge faze

Na početku druge faze dolazi, dakle, do izjednačavanja brzine penetratora (sa odsečkom) i prepreke, što znači da prestaje smicanje odsečka, $Q_p=0$. Dominantno naprezanje postaje istežanje (razvlačenje) deformacijom zahvaćenog dela prepreke (slika 3.2.5). Određivanje zatezne sile F_p je vrlo složeno¹, pa se u proračunu uzima njena približna vrednost

$$F_p = 2\pi RH\sigma_y \quad (3.2.13).$$



Slika 3.2.5. Analiza druge faze procesa penetracije

Promena dominantnog naprezanja uslovljava promenu naponskog stanja u preseku koji odgovara radijusu R – na tom preseku više ne dolazi do savijanja, dakle, $M_{p0}=0$. Istovremeno, usled delovanja sile F_p , smanjuje se i moment na radijusu $R+z$ na vrednost

$$M'_{pz} = M_{pz} \left[1 - \left(\frac{Rh}{(R+z)H} \right)^2 \right]. \quad (3.2.14).$$

Izrazima (3.2.13) i (3.2.14) definisana su opterećenja koja deluju na ploču, što omogućava postavljanje jednačina kretanja. Zakon o promeni količine kretanja, primenjen na ceo pokretni sistem i projektovan na pravac kretanja penetratora, s obzirom na odsustvo spoljnih sila u tom pravcu, ima oblik

$$K = const., \text{ odnosno } \Delta K = 0. \quad (3.2.15).$$

¹ Vrednost sile F_p u stvari nije konstantna; njena vrednost na radijusu R je $F_p=2\pi Rh\sigma$, gde je $\sigma>\sigma_y$, usled deformacije koja dovodi do ojačavanja materijala, dok je na radijusu $R+z$, $F_p=2\pi H(R+z)\sigma_y$.

Kako je na osnovu jednačina (3.2.1) i (3.2.5) ukupna količina kretanja sistema

$$K = \left(m + \frac{1}{2} m_0 R^2\right)v + \frac{1}{2} m_0 v z \left(R + \frac{1}{3} z\right) \quad (3.2.16)$$

a s obzirom na

$$\Delta K \approx \frac{\partial K}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial K}{\partial z} \Delta z,$$

jednačina (3.2.15) može se pisati u obliku

$$\left(m + \frac{1}{2} m_0 R^2 + \frac{1}{2} m_0 z \left(R + \frac{1}{3} z\right)\right) \Delta v + \frac{1}{2} m_0 v \left(R + \frac{2}{3} z\right) \Delta z = 0. \quad (3.2.17)$$

Moment količine kretanja u odnosu na "osu" (koju u stvari predstavlja granična kružna linija deformisanog dela prepreke poluprečnika $R+z$) koja se za trenutak smatra nepokretnom ($z=\text{const.}$), određen je izrazom

$$L = \left(m + \frac{1}{2} m_0 R^2\right)vz + \frac{1}{3} m_0 z^2 v \left(R + \frac{1}{4} z\right). \quad (3.2.18)$$

Zakon o promeni momenta količine kretanja ima oblik

$$\Delta L |_{z=\text{const.}} = \frac{\partial L}{\partial v} \Delta v = M \Delta t \quad (3.2.19)$$

odnosno

$$\left[\left(m + \frac{1}{2} m_0 R^2\right)z + \frac{1}{3} m_0 z^2 \left(R + \frac{1}{4} z\right)\right] \Delta v = -(M'_{pz} + F_p z \text{tg} \theta) \Delta t \quad (3.2.20)$$

gde θ predstavlja trenutni ugao zaokretanja deformisanog dela prepreke usled savijanja. Kako su u početnom trenutku druge faze vrednosti svih parametara procesa (v, z, θ, h) poznate, na osnovu izvedenih jednačina kretanja moguće je za svaki novi trenutak vremena dobiti promene vrednosti brzine Δv (jednačina (3.2.20)) i graničnog položaja deformisane zone Δz (jednačina (3.2.17)), kao i novu vrednost ugla zaokretanja θ

$$\text{tg} \theta = \frac{x}{z}. \quad (3.2.21).$$

Potrebno je imati u vidu da je u realnim uslovima maksimalna vrednost parametra z ograničena poprečnim dimenzijama prepreke. Ako se, naime, pretpostavi da se meta kružnog oblika sa prečnikom D probija u centru, bez obzira na način njenog oslanjanja, očigledno je

$$z_{\max} = \frac{D}{2} - R.$$

Prema tome, ukoliko bilo u prvoj, bilo u drugoj fazi penetracije dužina z dostigne vrednost z_{\max} , u daljem proračunu je neophodno ograničiti parametar z njegovom maksimalnom vrednošću, a brzinu određivati samo na osnovu zakona o promeni momenta količine kretanja.

Druga faza procesa probijanja završava se:

- zaustavljanjem penetratora u prepri, tj. realizacijom uslova $v=0$, ili
- probijanjem prepreke, što se ostvaruje ako stvarna relativna podužna deformacija dostigne vrednost kritične relativne deformacije materijala prepreke.

Do plastičnog loma, odnosno do kidanja materijala prepreke i formiranja odsečka u drugoj fazi, očigledno dolazi duž cilindrične površi radijusa R i dužine h , budući da je ovaj presek oslabljen već u prvoj fazi. Zbog toga je neophodno utvrditi merodavnu kritičnu vrednost relativne deformacije, kao i način određivanja stvarne deformacije.

3.2.4. Kriterijum loma materijala prepreke

Za većinu metala izloženih dejstvu impulsnog opterećenja može se pretpostaviti zakon ojačavanja materijala (tzv. konstitutivna jednačina) u linearnom obliku

$$\sigma = \alpha + \beta \varepsilon. \quad (3.2.22),$$

gde je $\sigma > \sigma_y$ – vrednost napona ojačavanja,

ε - relativna deformacija,

$\alpha = \sigma_y$ – napon tečenja materijala u kvazistatičkim uslovima,

β - mehanička karakteristika materijala prepreke.

Ako se pretpostavi recipročna zavisnost relativne deformacije dela prepreke od njegovog radijalnog položaja r , pri čemu $r \in [R_0, R_1]$, gde je

$$R_0 = R, \quad R_1 = R + z, \quad (3.2.23)$$

uz poštovanje graničnih uslova

$$\varepsilon(R_0) = \varepsilon_0, \quad \varepsilon(R_1) = 0, \quad (3.2.24)$$

dobija se

$$\varepsilon(r) = \frac{R_0}{R_1 - R_0} \left(\frac{R_1}{r} - 1 \right) \varepsilon_0. \quad (3.2.25)$$

U gornjem izrazu ε_0 predstavlja relativnu deformaciju dela prepreke na unutrašnjem radijusu $r=R_0=R$. Da bi se relativna deformacija određena jednačinom (3.2.25) mogla upoređivati sa stvarnom, geometrijskom deformacijom na osnovu modela kretanja u prvoj i drugoj fazi penetracije, uvodi se srednja relativna deformacija ε_m , koja se određuje na osnovu izraza

$$\varepsilon_m = \frac{1}{R_1 - R_0} \int_{R_0}^{R_1} \varepsilon(r) dr, \quad (3.2.26)$$

što daje

$$\varepsilon_m = \left[\frac{R_0 R_1}{(R_1 - R_0)^2} \ln \frac{R_1}{R_0} - \frac{R_0}{R_1 - R_0} \right] \varepsilon_0 \quad (3.2.27)$$

S obzirom na uslovnu jednakost sile zatezanja na unutrašnjem i spoljašnjem obodu deformisane zone

$$F_p = 2\pi R_0 H (\alpha + \beta \varepsilon_0) = 2\pi R_1 H \alpha,$$

dobija se

$$\frac{R_1}{R_0} = 1 + \frac{\beta}{\alpha} \varepsilon_0 \quad (3.2.28)$$

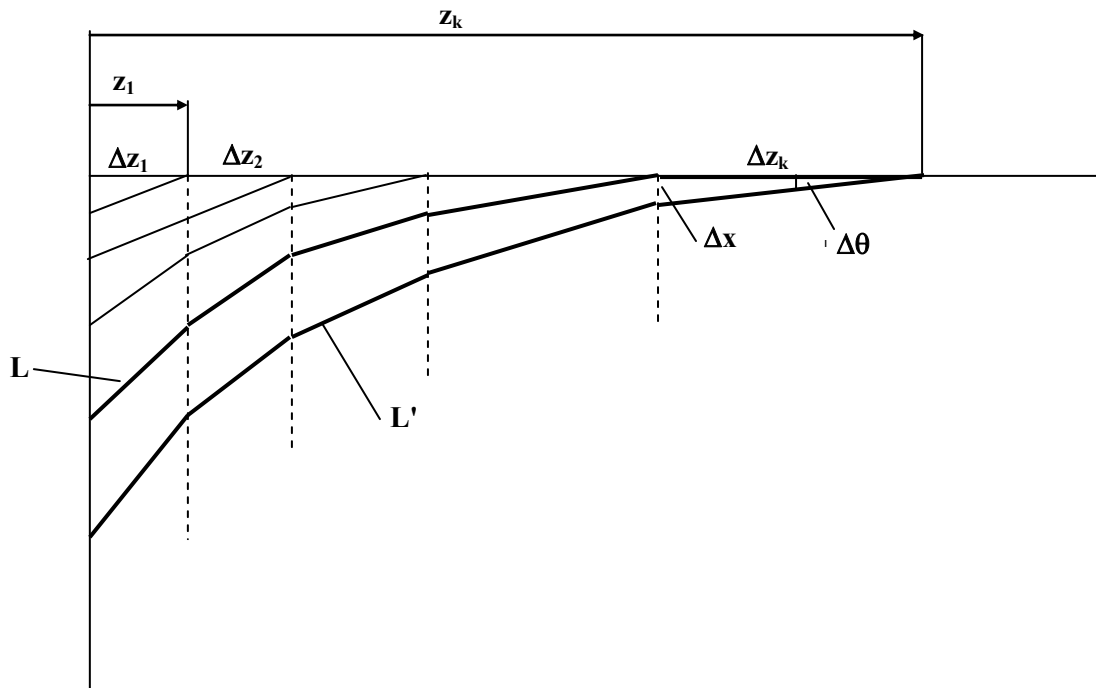
Uvrštavanjem poslednje jednačine u izraz (3.2.27) dobija se srednja relativna deformacija u funkciji relativne deformacije na unutrašnjem radijusu. Ako se u navedenim izrazima ε_0 zameni

kritičnom relativnom deformacijom materijala prepreke ε_f , dobija se kritična vrednost srednje relativne deformacije u obliku

$$\varepsilon_{mf} = \frac{\alpha(\alpha + \beta\varepsilon_f)}{\beta^2\varepsilon_f} \ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\varepsilon_f\right) - \frac{\alpha}{\beta}. \quad (3.2.29).$$

Ova vrednost merodavne kritične deformacije predstavlja, dakle, karakteristiku materijala prepreke i definisana je eksperimentalno utvrđenim parametrima α , β i ε_f .

Stvarna deformacija prepreke može se odrediti iterativnim postupkom na sledeći način. Pri proračunu parametara penetracije, počev od prve faze, za svaki trenutak dobija se trenutna brzina prepreke v (koja se linearno duž radiusa smanjuje do nule) i dužina z deformisanog dela prepreke. Oblik deformisanog dela prepreke i osnovni parametri neophodni za proračun deformacije prikazani su na slici 3.2.6.



Slika 3.2.6. Određivanje relativne deformacije prepreke

Elementarno pomeranje obodnog dela prepreke Δx određeno je sa

$$\Delta x = v \frac{\Delta z_k}{z_k} \Delta t \quad (3.2.30)$$

gde je Δz_k priraštaj pomeranja z u k -tom koraku proračuna. Trenutni obodni ugao savijanja prepreke θ_k određuje se iz jednačine

$$\operatorname{tg} \theta_k = \frac{\Delta x}{\Delta z_k} = \frac{v \Delta t}{z_k}. \quad (3.2.31).$$

Može se pokazati da je uvećana vrednost nagibnih uglova θ_i , $i=1,2,\dots,k-1$, određena zavisnošću

$$\operatorname{tg} \theta'_i = \operatorname{tg} \theta_i + \operatorname{tg} \theta_k. \quad (3.2.32)$$

Uvećana dužina deformisanog dela prepreke posle vremenskog koraka Δt , definisana je sumom

$$L' = \sum_{i=1}^k \frac{\Delta z_i}{\cos \theta'_i} \quad (3.2.33)$$

Priraštaj relativne deformacije je konačno

$$\Delta \varepsilon = \frac{L' - L}{L} \quad (3.2.34),$$

gde je L – prvobitna dužina dela dela materijala prepreke zahvaćenog deformacijom. Za sve vreme procesa probijanja vrši se sumiranje

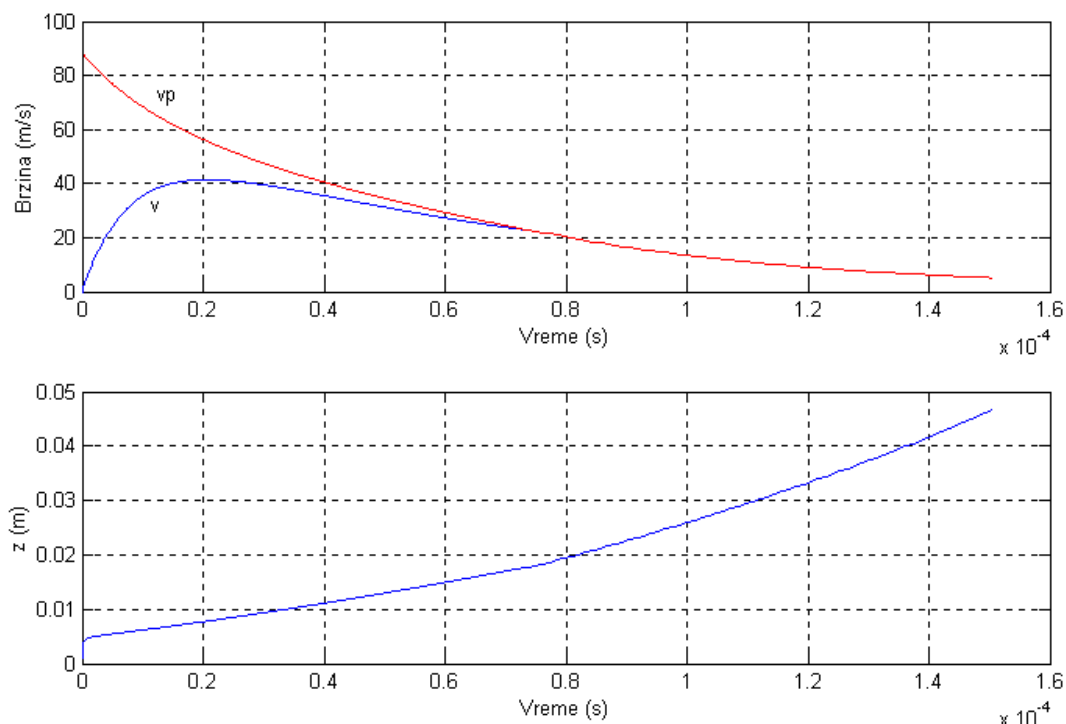
$$\varepsilon = \sum_i \Delta \varepsilon_i \quad (3.2.35),$$

kojim se određuje trenutna vrednost ukupne deformacije. U trenutku dostizanja uslova

$$\varepsilon = \varepsilon_{mf} \quad (3.2.36)$$

dolazi do kidanja materijala prepreke, odnosno njenog proboja i izbacivanja odsečka.

Na slici 3.2.7 predstavljena je karakteristična promena parametara penetracije, određena na osnovu programa realizovanog za strukturni model.



Slika 3.2.7. Promene brzina penetratora i odsečka (a) i širine deformisane zone prepreke (b) prema strukturnom modelu (probijanje čelične prepreke debljine 1.25 mm čeličnim penetratorom prečnika 4.71 mm pri udarnoj brzini 105 m/s)

Osnovni doprinos strukturnog modela sadržan je u uvođenju analize deformisanja i kretanja sekundarne zone prepreke, tj. u razmatranju globalnog otpora prepreke. Pri tome su dominantnim naprezanjima smatrani savijanje i istežanje, ali je zanemaren uticaj smicanja koje je od posebnog značaja u delu sekundarne zone koji neposredno okružuje penetrator.

Osim toga, u modelu se koristi i pretpostavka o trenutnom izjednačavanju brzina penetratora i celog odsečka u trenutku udara, odnosno zanemaruje se sabijanje tj. skraćivanje odsečka.

Posledice ovih hipoteza su znatno manje vrednosti globalnih deformacija (ugiba) prepreke i veće vrednosti izlaznih brzina od realnih.

Zbog ovih svojstava model najbolje rezultate daje za slučajeve probijanja veoma tankih prepreka krutim penetratorom, pri udarnim brzinama bliskim brzini balističkog limita.

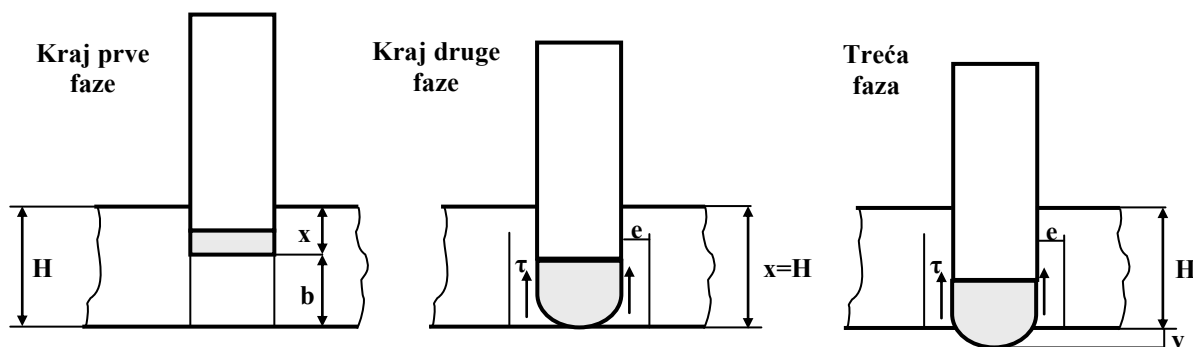
3.3. Trofazni model

3.3.1. Uvod. Osnovne karakteristike procesa

Analitički penetracioni model [10], [11] i [12] čija je karakteristika da, u slučaju proboja, proces uvek prolazi kroz tri različite faze, zasnovan je na primeni zakona kretanja tela promenljive mase. Na pogodan način modeliraju se sile otpora sabijanju i smicanju, kao i inercijalna sila odsečka. Bitna karakteristika modela je da on zahteva poznavanje tri veoma važna parametra samog procesa, koji se određuju eksperimentalno, odnosno a posteriori; to su:

- ulazni i izlazni (ili, ukoliko njihova razlika nije velika, srednji) prečnik otvora D u prepreci koji definiše merodavnu površinu prepreke A izloženu sabijanju; ova površina se najčešće smatra konstantnom ili se uzima da je promenljiva u skladu sa linearnom promenom, odnosno rastom prečnika otvora,
- dužina odsečka b koja predstavlja ključni parametar penetracije; eksperimenti ukazuju na činjenicu da, za nepromenjene materijale penetratora i prepreke, veličina b/H ima relativno stabilnu vrednost,
- širina zone smicanja e predstavlja radijalnu dimenziju deformacijom zahvaćene sekundarne zone prepreke i utiče na veličinu napona smicanja; eksperimentalno je utvrđeno da je vrednost e reda veličine poluprečnika penetratora.

Na slici 3.3.1 predstavljene su faze procesa penetracije.



Slika 3.3.1. Šematski prikaz faza penetracionog procesa

Prva faza (utiskivanje penetratora) okončava se dostizanjem dubine penetracije definisane dužinom odsečka i otpočinjanjem smicanja. U drugoj fazi (formiranje odsečka) dominira smicanje odsečka i ona se završava potpunim formiranjem odsečka i njegovim pridodavanjem penetratoru. Treća faza penetracije (istiskivanje odsečka) traje sve dok se ne ostvari kritična vrednost deformacije materijala prepreke, odnosno potpuno odvajanje odsečka od prepreke.

Osnovni mehanizam penetracije je postepeno prisajedinjavanje materijala prepreke (odsečka) penetratoru čija je početna masa m_0 . U tom smislu, koordinata x koja definiše dubinu prodiranja ne predstavlja položaj vrha penetratora, već prednjeg dela novopridodatog materijala odsečka. U celom toku procesa posmatra se, dakle, kretanje tzv. efektivne mase – mase penetratora i dela odsečka koji ima istu brzinu kao penetrator.

Uočava se da zakon o održanju mase materijala prepreke ukazuje na činjenicu da je opisani model moguć samo ako je materijal prepreke u značajnoj meri stišljiv ili ako postoji radijalni prenos mase iz primarne u sekundarnu zonu prepreke. Ovi efekti u modelu nisu razmatrani, te

njihovo apstrahovanje onemogućava tačno određivanje položaja vrha penetratora koji, sa stanovišta probojnosti, i nije značajan u meri u kojoj je to položaj prednjeg dela efektivne mase penetratora.

3.3.2. Prva faza penetracije

U fazi utiskivanja penetratora njegovom kretanju suprotstavljaju se dve sile: sila inercije materijala odsečka F_i i sila otora sabijanju F_C . Jednačina kretanja penetratora ima oblik

$$\frac{d}{dt}(mv) = -(F_i + F_C) \quad (3.3.1).$$

S obzirom na pretpostavku o ubrzavanju sloja materijala prepreke neposredno uz penetrator od nule do trenutne vrednosti brzine penetratora v , jasno je da penetrator mora savladati izvesnu inercijalnu silu F_i koja predstavlja otpor ovom ubrzavanju. Vrednost inercijalne sile određuje se na osnovu zakona o održanju energije, pri čemu je njen rad na elementarnom pomeranju dx jednak promeni kinetičke energije sloja materijala prepreke elementarne debljine. Prema tome, važi

$$dF_i dx = \frac{1}{2} dm v_n^2 \quad (3.3.2)$$

gde je v_n - komponenta brzine penetratora u pravcu normalnom na njegovu površinu. Ovde se, dakle, može razmatrati opšti slučaj oblika prednjeg dela penetratora koji ne mora biti ravan. Pri tome je

$$dm = \rho dA_n dx \quad (3.3.3)$$

gde je A_n - elementarna površina prednjeg dela penetratora projektovana na ravan normalnu na pravac kretanja. Pretpostavlja se da, u opštem slučaju, pridodati materijal prepreke ima brzinu čiji je pravac normalan na površinu penetratora. Iz jednačina (3.3.2) i (3.3.3) dobija se

$$dF_i = \frac{1}{2} \rho dA_n v_n^2 \quad (3.3.4).$$

Za svaki konkretan oblik prednjeg dela penetratora može se integracijom jednačine (3.3.4) dobiti vrednost ukupne inercijalne sile. U slučaju penetratora sa ravnim prednjim delom, jasno je da važi $v_n = v$, $\int_s dA_n = A$, tako da se dobija

$$F_i = \frac{1}{2} \rho A v^2 \quad (3.3.5).$$

U opštem slučaju može se pisati

$$F_i = \frac{1}{2} K \rho A v^2 \quad (3.3.6)$$

gde je K - koeficijent koji zavisi od oblika prednjeg dela penetratora. Lako se može pokazati da se u slučaju sfernog penetratora (ili penetratora sa prednjim delom u obliku polusfere) integracijom izraza (3.3.4) dobija $K=1/2$, dok se u slučaju koničnog prednjeg dela dobija $K = \sin^2 \alpha$, gde je α - poluugao konusa.

Sila otpora sabijanju F_C određuje se jednostavno izarazom

$$F_C = \sigma_C A \quad (3.3.7)$$

gde je σ_C - najveći normalni napon pri sabijanju (napon kidanja). Izrazima (3.3.6) i (3.3.7) definisana je desna strana jednačine (3.3.1). S obzirom da efektivna masa penetratora raste, leva strana ima oblik

$$\frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt} \quad (3.3.8).$$

Kako je

$$m = m_0 + \rho Ax \quad (3.3.9)$$

sledi

$$\frac{dm}{dt} = \rho Av \quad (3.3.10)$$

što uz transformaciju

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (3.3.11)$$

početnu jednačinu (3.3.1) prevodi u oblik

$$(m_0 + \rho Ax)v \frac{dv}{dx} = -\left(1 + \frac{K}{2}\right)\rho Av^2 - \sigma_C A \quad (3.3.12).$$

Imajući u vidu početni uslov $x=0$, $v=v_0$, integracijom poslednje jednačine dobija se zakon promene brzine penetratora u funkciji dubine penetracije x , u obliku

$$v = \left[\left(\frac{m_0}{m_0 + \rho Ax} \right)^{2+K} \left(v_0^2 + \frac{\sigma_C}{\rho \left(1 + \frac{K}{2} \right)} \right) - \frac{\sigma_C}{\rho \left(1 + \frac{K}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.13).$$

Kako je, dakle, utvrđena analitička zavisnost $v=v(x)$, numerički se određuje vreme trajanja penetracije, rešavanjem integrala

$$t(x) = \int_0^x \frac{dx}{v(x)} \quad (3.3.14).$$

Numerički je moguće odrediti usporenje penetratora, kao i ukupnu silu otpora F .

Prva faza se završava kada se ispuni uslov

$$x = H - b \quad (3.3.15),$$

što uslovljava započinjanje smicanja i promenu zakona kretanja.

3.3.3. Druga faza penetracije

U fazi formiranja odsečka zakon kretanja efektivne mase penetratora dobija modifikovan oblik

$$\frac{d}{dt}(mv) = -(F_i + F_C + F_S) \quad (3.3.16)$$

gde F_S predstavlja silu otpora smicanja. Pojavljuje se, dakle, nova sila, ali i sile inercije F_i i kompresije F_C menjaju oblik. Naime, uočava se da, bez obzira na inicijalni oblik prednjeg dela

penetratora, vrh efektivne mase penetratora zbog težnje ka minimizaciji otpora, poprma u drugoj fazi sferni oblik ($K=1/2$), tako da važi

$$F_i = \frac{1}{4} \rho A v^2 \quad (3.3.17)$$

Sila sabijanja se modifikuje imajući u vidu činjenicu da na kraju faze formiranja odsečka ova sila ima vrednost nula. Zbog toga se ona modelira paraboličnim zakonom promene, oblika

$$F_c = \sigma_c A \left[1 - \left(\frac{x-a}{b} \right)^2 \right], \quad a = H - b \quad (3.3.18)$$

Konačno, sila smicanja definisana je jednačinom

$$F_s = \pi D \tau (x - a) \quad (3.3.19)$$

pri čemu se smicajni napon povećava sa porastom deformacije prema *Bingham*-ovoj formuli

$$\tau = \tau_0 + \mu \dot{\gamma} \quad (3.3.20).$$

U gornjoj jednačini τ_0 je vrednost kvazistacionarnog napona smicanja, μ je koeficijent viskoznosti materijala prepreke, dok je γ vrednost ugla klizanja, pri čemu je

$$\dot{\gamma} = \frac{v}{e} \quad (3.3.21).$$

Uvođenjem izraza (3.3.17) - (3.3.21) u početnu jednačinu (3.3.16) i njenim transformisanjem, dobija se diferencijalna jednačina

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-1}{(m_0 + \rho A x)v} \left[\frac{5}{4} \rho A v^2 + \sigma_c A \left[1 - \left(\frac{x-a}{b} \right)^2 \right] + \pi D \left(\tau_0 + \mu \frac{v}{e} \right) (x-a) \right] \quad (3.3.22)$$

koja se rešava numerički, čime se ponovo dobija zavisnost $v=v(x)$, što omogućava određivanje vremena t i sile otpora F . Druga faza se završava kada efektivna masa penetratora dosegne suprotnu površinu prepreke

$$x = H \quad (3.3.23)$$

čime je odsečak potpuno formiran, te započinje njegovo istiskivanje.

3.3.4. Treća faza penetracije

U poslednjoj fazi penetracije posmatra se telo nepromenljive mase

$$m = m_0 + \rho A H \quad (3.3.24)$$

čijem se kretanju suprotstavlja samo sila smicanja. Ako se uvede nova koordinata položaja vrha efektivne mase y (na početku treće faze njena vrednost je nula), jednačina kretanja efektivne mase glasi

$$m \ddot{y} = - \left(\tau_0 + \mu \frac{\dot{y}}{e} \right) A_b \quad (3.3.25)$$

gde je $A_b = \pi D b$ - cilindrična površina duž koje se odvija smicanje. Ako se imaju u vidu početni uslovi $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = v_2$ (v_2 - brzina na kraju druge faze), integracijom linearne diferencijalne jednačine (3.3.25) najpre se dobija brzina penetratora u trećoj fazi

$$v = \dot{y} = \left(v_2 + \frac{\tau_0 e}{\mu} \right) \exp\left(-\frac{\mu A_b}{me} t \right) - \frac{\tau_0 e}{\mu} \quad (3.3.26).$$

Integracijom brzine može se odrediti i pomeranje penetratora

$$y = \int_0^t \dot{y} dt = \frac{me}{\mu A_b} \left(v_2 + \frac{\tau_0 e}{\mu} \right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\mu A_b}{me} t \right) \right] - \frac{\tau_0 e}{\mu} t \quad (3.3.27),$$

pri čemu je ukupno pomeranje

$$x = H + y \quad (3.3.28).$$

Diferenciranjem jednačine (3.3.26) može se odrediti i sila otpora u trećoj fazi

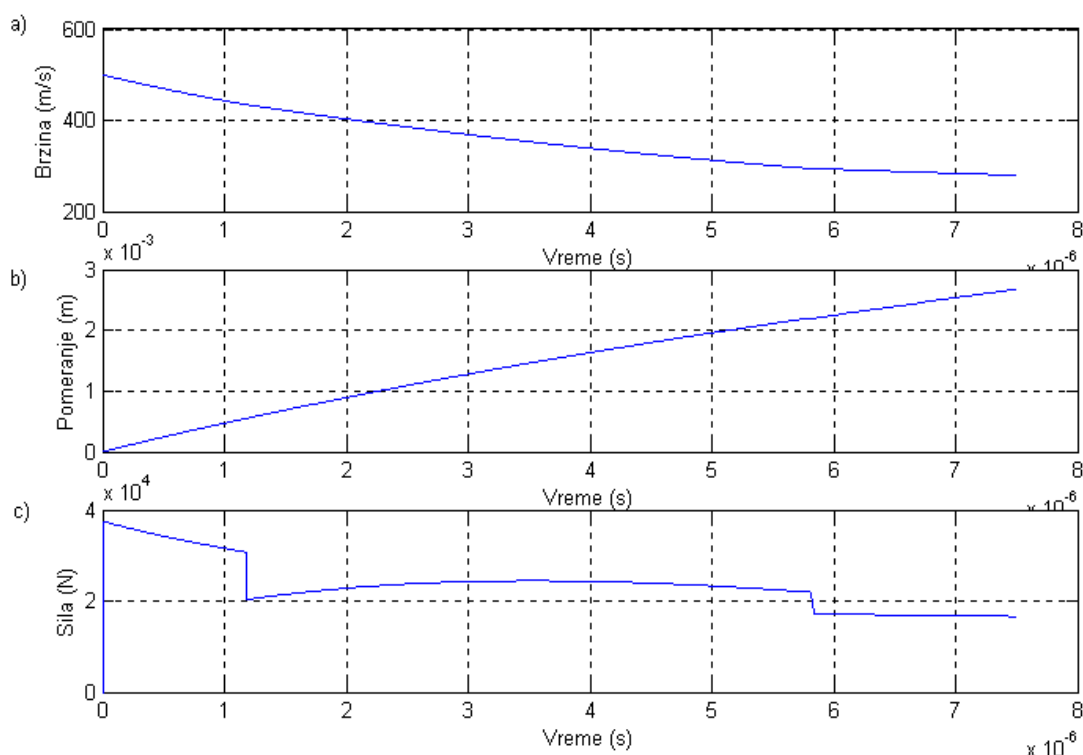
$$F = A_b \left(\tau_0 + \frac{v_2 \mu}{e} \right) \exp\left(-\frac{\mu A_b}{me} t \right) \quad (3.3.29).$$

Treća faza, odnosno ceo proces penetracije, završava se kada ugao klizanja γ dostigne kritičnu vrednost γ_f , odnosno kada pomeranje y dostigne vrednost pri kojoj dolazi do odvajanja odsečka

$$y = y_f = \gamma_f e \quad (3.3.30).$$

Proces, naravno, može biti okončan i na drugi način – ako se u bilo kojoj fazi realizuje uslov zaustavljanja penetratora u prepreci $v=0$.

Na slici 3.3.2 predstavljeni su karakteristični dijagrami promene brzine i pomeranja penetratora, kao i sile otpora, dobijeni korišćenjem realizovanog programa za računar.



Slika 3.3.2. Tipične vremenske zavisnosti brzine, pomeranja i sile otpora koje se dobijaju primenom trofaznog penetracionog modela (probijanje čelične prepreke debljine 2.20 mm čeličnim penetratorom prečnika 4.71 mm sa udarnom brzinom od 500 m/s)

Trofazni model predstavlja jedno od najpoznatijih i najpouzdanijih analitičkih rešenja problema penetracije. Neoborivo logičan pristup problemu, jasno definisanje svih relevantnih parametara i

jednostavan način rešavanja jednačina kretanja osnovne su karakteristike i prednosti trofaznog modela. Značajno je da ne postoje razlozi koji bi ograničavali primenu modela samo na tanke prepreke.

Osnovni nedostaci modela uslovljeni su njegovim polaznim ograničenjima – posmatra se isključivo nedeformabilan penetrator i ne razmatraju se globalne deformacije prepeke.

Zbog toga se trofazni model primenjuje pri razmatranju probijanja prepreka penetratorom izuzetno dobrih mehaničkih karakteristika (koji se, dakle, ne deformiše) i pri brzinama znatno većim od brzine balističkog limita (kada globalne deformacije prepreke mogu da se zanemare).

Osim toga, važan nedostatak modela je i to što se podrazumeva poznavanje određenih parametara procesa koji se utvrđuju eksperimentalno.

U poglavlju 4 detaljno je analizirana modifikacija trofaznog modela za prepreke većih debljina, koja uz to ne zahteva upotrebu eksperimentalno utvrđenih parametara.

3.4. Model deformacionih talasa

Teorijski pristup problemu probijanja tankih metalnih ploča, predstavljen analitičkim modelom *J. Lissa* i *W. Goldsmitha* [13] i [14] razmatra znatno složenije mehanizme penetracije u odnosu na prethodno analizirane modele. Reč je, u osnovi, o višefaznom procesu u kom sabijanje i smicanje materijala prepreke imaju ključnu ulogu. Pri tom, međutim, sam proces, odnosno njegove etape, nisu jedinstvene, već u zavisnosti od početnih uslova može doći do realizacije različitih "scenarija" penetracije. Budući da je u ovom modelu ponašanje materijala prepreke pod dejstvom impulsnog opterećenja od velikog značaja, najpre će biti definisane konstitutivne jednačine.

3.4.1. Karakteristike materijala prepreke pri impulsnom opterećenju

Pretpostaviće se da, usled značajnih deformacija materijala prepreke pri probijanju, elastična komponenta deformacije može biti zanemarena, tako da se u stvari prepreka ponaša kao kruto-plastično telo. Ako se, uz to, usvoji pretpostavka da je za većinu metala i legura pri velikim brzinama deformacije ($>100 \text{ s}^{-1}$), sama vrednost deformacije (ali ne i njene brzine) osnovni faktor koji utiče na ojačavanje materijala, može se na osnovu eksperimentalnih nalaza prihvatiti konstitutivna jednačina u obliku

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_y} = 1 - \frac{B}{\sigma_y} \bar{\varepsilon} \quad (3.4.1)$$

gde je

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma(1 - \varepsilon) \\ \bar{\varepsilon} &= \ln(1 - \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.4.2).$$

Pri tome je:

- $\bar{\sigma}$ - stvarna vrednost normalnog napona,
- $\bar{\varepsilon}$ - tzv. prirodna deformacija,
- σ_y - kvazistatički napon tečenja materijala prepreke,
- B – koeficijent ojačavanja materijala prepreke.

Veličine σ , odnosno ε su uobičajene (inženjerske) vrednosti napona i normalne deformacije, dok se karakteristike materijala σ_y i B mogu odrediti na osnovu linearne veze sa tvrdoćom definisanom po *Brinel*-ovoj metodi (HB)

$$\sigma_y = 3.92 HB, \quad B = 4.55 HB \quad (3.4.3).$$

Iz jednačina (3.4.1) i (3.4.2) dobija se zavisnost između napona i deformacija pri plastičnom impulsnom sabijanju

$$\sigma = \frac{1}{1-\varepsilon} [\sigma_y - B \ln(1-\varepsilon)] \quad (3.4.4)$$

pri čemu se implicitno pretpostavlja $\varepsilon \in [0, 1]$.

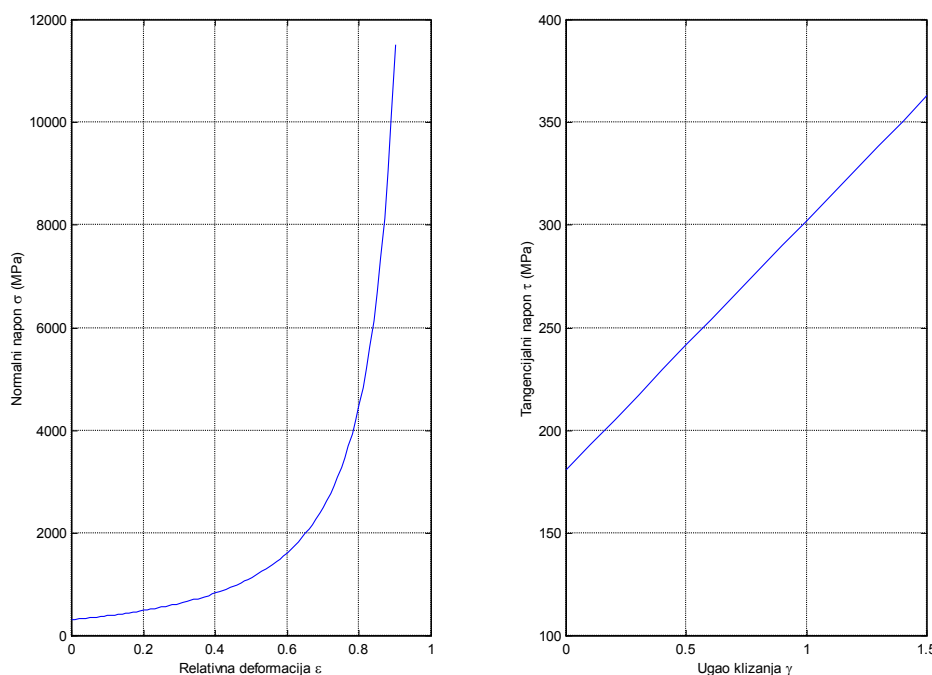
Imajući u vidu da za napon smicanja τ i odgovarajuću deformaciju (ugao klizanja γ) važi

$$\tau = \bar{\tau} = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}}, \quad \gamma = \bar{\gamma} = -\sqrt{3}\bar{\varepsilon}, \quad \tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad (3.4.5)$$

na osnovu (3.4.1) i (3.4.2) se dobija promena napona smicanja u funkciji ugla klizanja

$$\tau = \tau_y + \frac{1}{3} B \gamma \quad (3.4.6).$$

Promene normalnog i smicajnog napona u funkciji odgovarajuće deformacije date jednačinama (3.4.4) i (3.4.6) predstavljene su grafički na sl. 3.4.1.



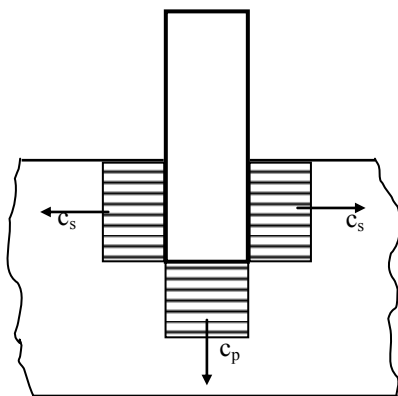
Slika 3.4.1. Zakon ojačavanja materijala prepreke
a) promena normalnog napona, b) promena tangencijalnog napona

S obzirom na impulsni karakter opterećenja, prostiranje deformacije u materijalu prepreke ima talasni karakter (sl. 3.4.2).

Brzina talasa smicanja c_s ima konstantnu vrednost

$$c_s^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} \quad (3.4.7)$$

dok se prostiranje kompresionog talasa odvija promenljivom brzinom c_p . Naime, usled diskontinuiteta vrednosti brzine i deformacije u zoni sabijanja i nedeformisanoj zoni (sl. 2.4.2), prostiranje talasa sabijanja modelira se konceptom udarnog talasa.



Slika 3.4.2. Talasna priroda prostiranja plastičnih poremećaja u materijalu prepreke

Važno je primetiti da se konstitutivne jednačine (3.4.4) i (3.4.6) odnose na opšti slučaj impulsnog sabijanja, pri čemu se pretpostavlja da se deformisani materijal, usled sabijanja, odnosno skraćivanja, slobodno širi. To, međutim, pri penetraciji nije slučaj, jer širenje deformisane zone nije slobodno, budući da mu se suprotstavlja okolni materijal prepreke. Ova pojava ograničenog, odnosno otežanog širenja sabijenog materijala (*constrained deformation*) dovodi očigledno do povećanja otpora sabijanju, tj. faktički do uvećavanja napona tečenja, odnosno do povećanja vrednosti napona pri plastičnom deformisanju. Izvršeni eksperimenti ukazuju da se stvarna vrednost normalnog napona usled ograničenog širenja može dobiti na osnovu zavisnosti

$$\sigma_c = K\sigma \quad (3.4.8)$$

gde je K faktor povećanja vrednosti napona koji zavisi od veličine deformacije ε , pri čemu njegove vrednosti pripadaju intervalu [1.7, 2].

U analitičkom penetracionom modelu figurišu, prema tome, četiri suštinski različite vrednosti napona u materijalu prepreke:

- σ_y – napon tečenja materijala u kvazistatičkim uslovima, pri slobodnom širenju deformisanog materijala,
- σ_{yc} – kvazistatički napon tečenja materijala u uslovima ograničenog širenja pri sabijanju,
- σ - normalni napon pri plastičnom sabijanju, nenuljoj deformaciji i slobodnom širenju materijala,
- σ_c – napon plastičnog sabijanja ($\varepsilon > 0$) u uslovima ograničenog širenja sabijenog materijala.

U istom smislu, vrednosti napona smicanja τ određene su posredno (preko parametra τ_y u jednačini (3.4.6)) uslovima (ne)postojanja ograničenog širenja opterećenog materijala prepreke.

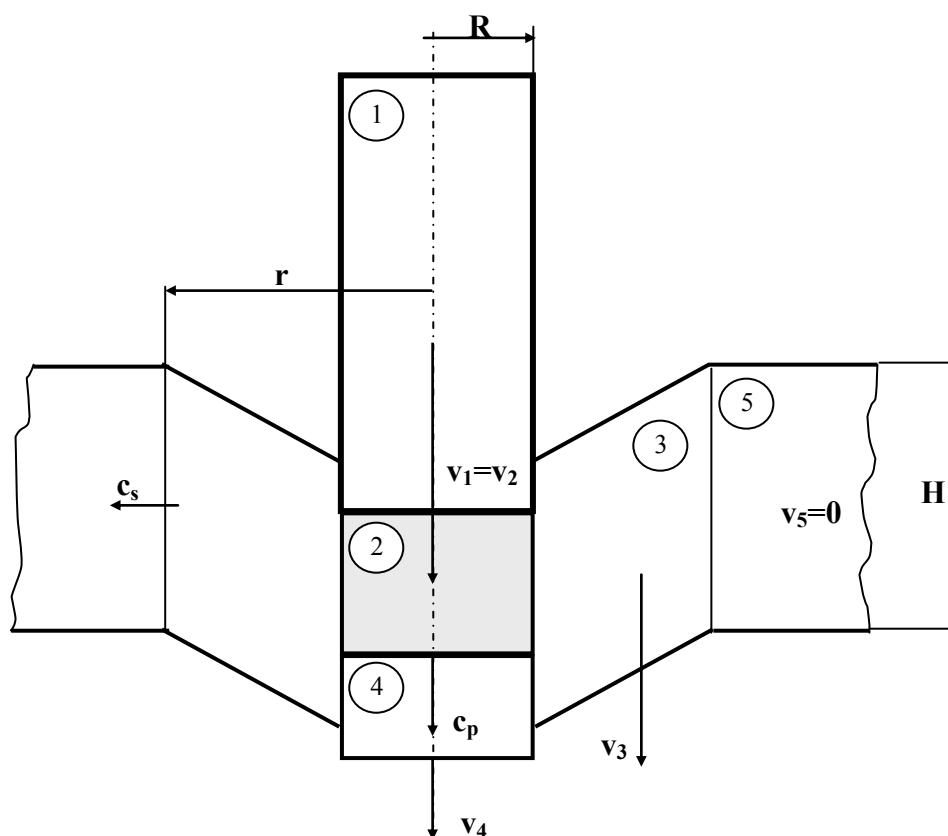
3.4.2. Mehanizmi penetracije

Prepreka se u procesu penetracije sastoji od dve oblasti: primarne cilindrične zone koja se nalazi ispred penetratora i sekundarne zone oblika šupljeg cilindra koja okružuje penetrator. U primarnoj zoni dolazi do prostiranja kompresionog udarnog talasa koji ovu zonu deli na deformisani i nedeformisani deo, dok je sekundarna zona ograničena položajem radijalnog talasa smicanja. Tipičan izgled deformacionih zona, kao i geometrija sistema penetrator-prepreka predstavljeni su na sl. 3.4.3.

- Zonu 1 predstavlja kruti penetrator poluprečnika R , mase m i površine poprečnog preseka A .
- Zonu 2 čini deformisani deo primarne oblasti prepreke. Plastični udarni talas prošao je kroz ovu zonu i njena brzina je u toku celog procesa jednaka brzini penetratora. Ova zona ne postoji ukoliko je brzina penetratora veća od brzine prostiranja deformacionog talasa. U

suprotnom, zona 2 se tokom probijanja povećava, sve do izjednačavanja njene brzine sa brzinom zone 4.

- Zona 4 predstavlja nedeformisani deo primarne oblasti prepreke. Njena dužina se smanjuje, a brzina povećava sve do izjednačavanja sa brzinom u zoni 2, odnosno do finalizacije formiranja odsečka.
- Zonu 3 čini sekundarni deo prepreke i njeno kretanje je posledica dejstva smičućih napona. Masa ove zone se povećava za sve vreme trajanja penetracije, usled širenja talasa smicanja, dok njena brzina najpre raste, da bi kasnije opadala do konačnog zaustavljanja.
- Zonu 5 čini deo prepreke koji miruje i ne sudeluje u procesu penetracije. Ova zona se u toku penetracije smanjuje, ali se pretpostavlja da su transferzalne dimenzije prepreke dovoljno velike da obezbeđuju postojanje ove zone.



Slika 3.4.3. Definisiranje deформacionih zona, geometrije i kinematike sistema

Pretpostavlja se da se sve zone ponašaju kao kruta tela u smislu da sve tačke iste zone (u istom trenutku) imaju jednake brzine. Postoji diskontinuitet brzina u zonama 2 i 3, i u opštem slučaju, između zona 3 i 4, koji je uzrok smicanju duž cilindrične površi radijusa R , kao i diskontinuitet brzina u zonama 2 i 4 koji se objašnjava mehanizmom prostiranja kompresionog udarnog talasa. Ako se razmatra relativno kretanje, dakle ako se pretpostavi da zona 4 miruje, tada penetrator (sa deformisanim delom prepreke) ima relativnu brzinu $v_1 - v_4$, dok je relativna brzina udarnog talasa $c_p - v_4$ (sl. 3.4.4).

Trenutna vrednost relativne deformacije materijala prepreke ε predstavljena je odnosom

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.4.9)$$

gde je

$$\Delta l = (v_1 - v_4) \Delta t \quad (3.4.10)$$

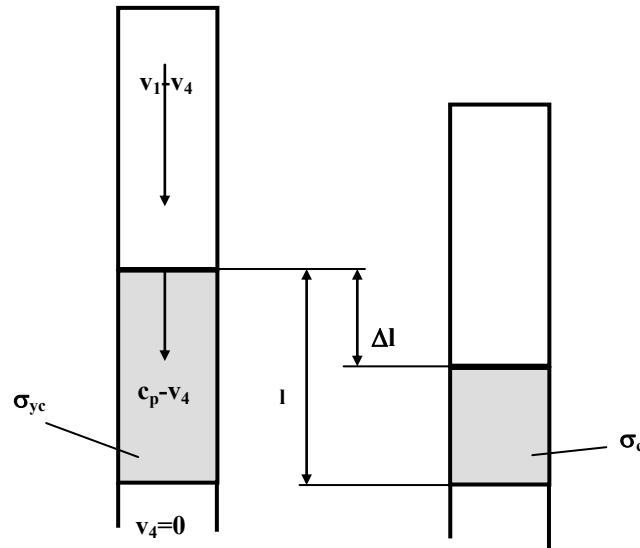
skraćenje oblasti zahvaćene deformacionim talasom za vreme Δt , dok je

$$l = (c_p - v_4)\Delta t \quad (3.4.11)$$

dužina oblasti obuhvaćene talasom deformacije.

Dobija se, dakle,

$$\varepsilon = \frac{v_1 - v_4}{c_p - v_4} \quad (3.4.12).$$



Slika 3.4.4. Kretanje deformacionog udarnog talasa i deformisanje prepreke

Iz poslednje jednačine može se odrediti vrednost brzine udarnog talasa

$$c_p = \frac{v_1 - v_4}{\varepsilon} + v_4 \quad (3.4.13).$$

Ovde valja primetiti da odsustvo udarnog talasa (odnosno zone 2), koje je vezano za uslov $v_1 > c_p$, implicira na osnovu (3.4.12) $\varepsilon > 1$, što je u suprotnosti sa zahtevom konstitutivne jednačine $\varepsilon \in [0, 1]$. Dakle, za materijale čije se ponašanje podvrgava modelu opisanom u prethodnom odeljku važi $v_1 < c_p$, što znači da se sabijanje uvek odvija putem kompresionog udarnog talasa.

Kako se ispred udarnog talasa nalazi nedeformisani materijal napona tečenja (u uslovima ograničenog širenja) σ_{yc} , dok je iza talasa deformisani materijal napona σ_c , zakon o promeni količine kretanja deformisanog dela materijala prepreke (sasvim analogno razmatranju kretanja udarnog talasa u gasu) daje

$$(\sigma_c - \sigma_{yc})A\Delta t = \rho A(v_1 - v_4)(c_p - v_4)\Delta t \quad (3.4.14)$$

što se, imajući u vidu (3.4.12), može transformisati u oblik

$$\varepsilon(\sigma_c - \sigma_{yc}) = \rho(v_1 - v_4)^2 \quad (3.4.15).$$

Jednačina (3.4.15) predstavlja, u stvari, jednačinu po nepoznatoj deformaciji ε (s obzirom na $\sigma_c = f(\varepsilon)$), ukoliko su poznate brzine v_1 i v_4 . Rešavanje ove jednačine omogućava određivanje brzine udarnog talasa c_p , kao i napona σ , odnosno σ_c . Poznavanje ovih veličina neophodno je za rešavanje jednačina kretanja pojedinih zona sistema u svim fazama penetracije.

3.4.3. Faze penetracionog procesa

Probijanje metalne ploče odvija se po fazama koje se smenjuju kada se ispune određeni uslovi vezani za geometrijske, kinematske ili naponske karakteristike sistema. Same faze procesa, kao ni njihov redosled, nisu invarijantni u odnosu na početne uslove – udarnu brzinu penetratora v_0 , debljinu prepreke H , kao i mehaničke karakteristike materijala prepreke. Drugim rečima, zavisno od početnih uslova, penetracija može imati različit tok i samo dva ishoda – proboj, ukoliko prednji deo penetratora dostigne zadnju površinu prepreke, ili zaustavljanje penetratora u prepreci (zador). Na sl. 3.4.5 predstavljene su sve faze procesa, dok je na sl. 3.4.6 dat dijagramski prikaz mogućih tokova penetracije.

Veličine x_i , v_i i \dot{v}_i predstavljaju pomeranje, brzinu i ubrzanje i -te zone ($i = \overline{1, 4}$) i mere se u odnosu na nepokretni koordinatni sistem čiji se početak podudara sa položajem vrha penetratora u trenutku udara. Početni uslovi kretanja, dakle, glase,

$$\begin{aligned} x_i = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad x_4 = H, \\ v_1 = v_0, \quad v_i = 0, \quad i = \overline{2, 4}, \end{aligned} \quad (3.4.16).$$

Neophodno je u svakoj fazi procesa postaviti jednačine kretanja za svaku od zona, kao i definisati uslove završetka tekuće, odnosno početka naredne faze.

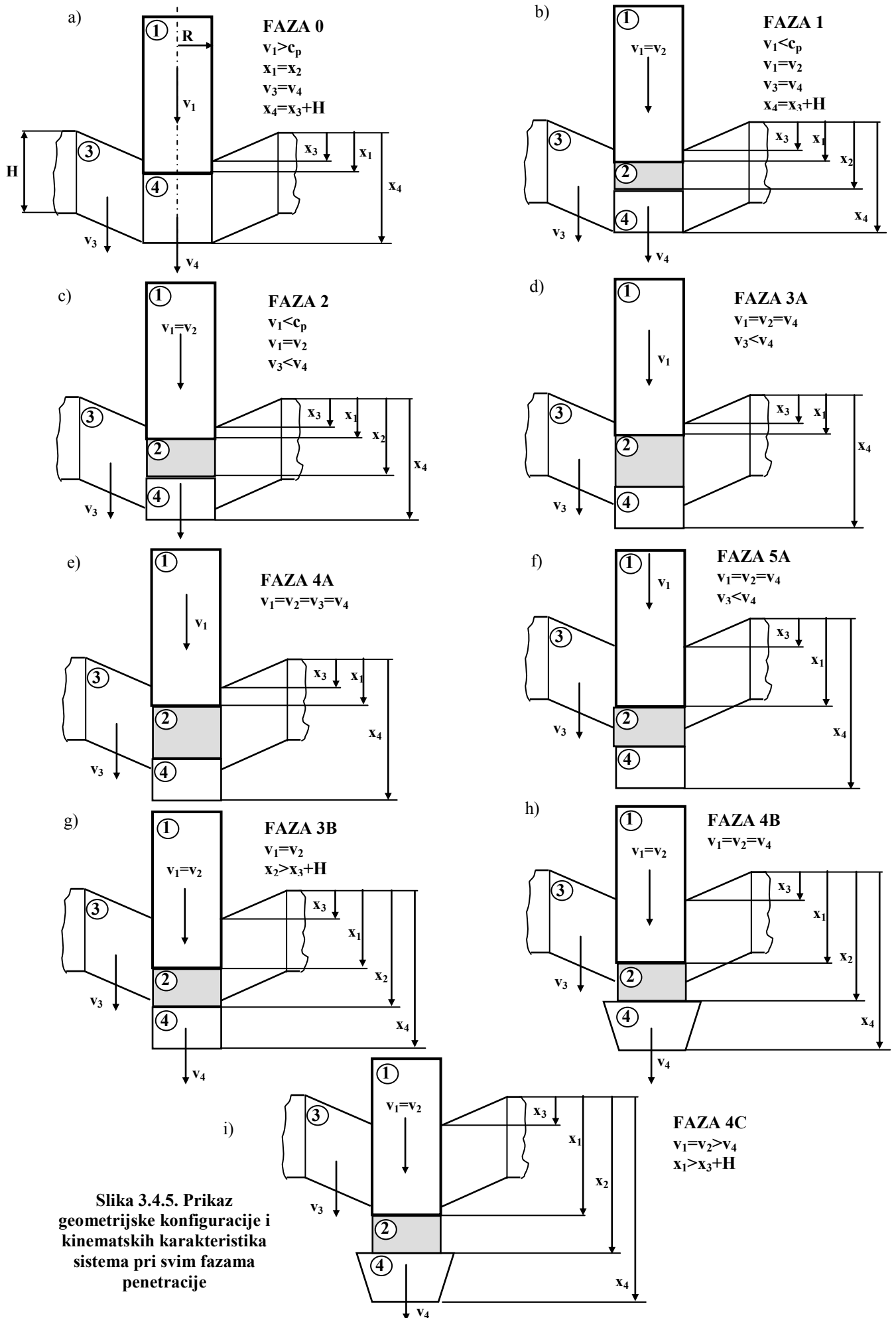
3.4.3.1. Utiskivanje penetratora

Inicijalna faza penetracije – faza 0 (erozija, ablacija, sl. 3.4.5a) postoji samo u slučaju da je brzina penetratora veća od brzine prostiranja kompresionog udarnog talasa $v_l > c_p$. Ovaj uslov, međutim, znači da mora biti (jednačina (3.4.12)) $\varepsilon > 1$, što je s obzirom na usvojenu konstitutivnu jednačinu (3.4.4), nemoguće. Dakle, u simulacijama probijanja korišćenjem uvedenog modela ojačavanja materijala, "nulta" faza se neće ni odigrati, već proces započinje prvom fazom. Ipak, faza utiskivanja biće razmotrena, kako zbog činjenice da se ona realno može pojaviti (ako važi neka druga jednačina ponašanja materijala), tako i zbog značaja analize fizikalnosti procesa koji se dešavaju i u narednim fazama.

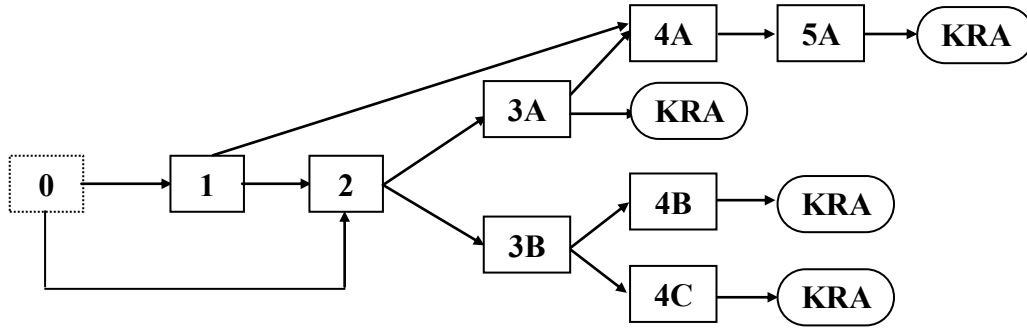
U inicijalnoj fazi udarni talas je vezan za vrh penetratora, dok zona 2 ne postoji ($x_1 = x_2$). Nedeformisani materijal u zoni 4 biva postupno deformisan, praktično trenutno ubrzan od brzine v_4 do brzine penetratora v_1 i radijalno transportovan u zonu 3. Kontinuitet između zona 3 i 4 zahteva da njihove brzine budu jednake, $v_3 = v_4$. Radijalno kretanje deformisanog materijala iz zone udarnog talasa u zonu 3 (pri čemu se vrednosti radijalne komponente brzine zanemaruju u odnosu na aksijalnu) karakteriše se masenim protokom $\dot{m}_r = \rho A(v_1 - v_4)$, što je očigledno iz zakona o odžanju mase. Razmotrimo sada silu koja se suprotstavlja utiskivanju penetratora i koja ima dve komponente. Prva komponenta je sila otpora sabijanju materijala prepreke čija je vrednost $\sigma_{yc}A$. Druga komponenta je rezultat radijalnog kretanja materijala; naime, usled ovog kretanja dolazi do promene, tj. povećanja mase u zoni 3, što indukuje "reaktivnu" silu (u smislu jednačine Meščerskog) $\dot{m}_r(v_1 - v_3)$ koja ubrzava materijal u zoni 3, odnosno usporava kretanje penetratora. Važi, dakle, jednačina kretanja penetratora

$$\dot{v}_1 = - \frac{\sigma_{yc}A + \rho A(v_1 - v_4)^2}{m} \quad (3.4.17).$$

S obzirom da zone 3 i 4 imaju istu brzinu, njihovo kretanje se razmatra tako što se podrazumeva da one čine jednu celinu ukupne mase



Slika 3.4.5. Prikaz geometrijske konfiguracije i kinematskih karakteristika sistema pri svim fazama penetracije



Slika 3.4.6. Prikaz mogućih tokova penetracije

$$\rho\pi(r^2 - R^2)H + \rho\pi R^2(x_4 - x_1) + \int_0^t \dot{m}_r dt = \rho\pi r^2 H \quad (3.4.18)$$

gde je

$$r = R + c_s t \quad (3.4.19)$$

poluprečnik zone 3, definisan radijalnom koordinatom položaja talasa smicanja.

Sile koje ubrzavaju kretanje ovih zona već su definisane brojiocem u jednačini (3.4.17), dok su sile otpora kretanju: sila smicanja duž cilindra radijusa r , $2\pi r H \tau_y$, i "reaktivna" sila usled povećanja mase u zoni 3 (zbog rasta r) pridodavanjem novog materijala relativnom brzinom $v_3=v_4$, $2\pi r H \rho c_s v_3$. Kretanje zona 3 i 4 definisano je, dakle, jednačinom

$$\dot{v}_3 = \dot{v}_4 = \frac{\sigma_{yc} A + \rho A (v_1 - v_4)^2 - 2\pi r H (\tau_y + \rho c_s v_3)}{\rho\pi r^2 H} \quad (3.4.20).$$

Jednačine (3.4.18) i (3.4.20) u potpunosti definišu kretanje sistema penetrator-prepreka u fazi utiskivanja. Ova faza završava se ispunjavanjem jednog od dva uslova: (a) ako brzina penetratora (koja sve vreme, naravno, opada) postane manja od brzine udarnog talasa, $v_1 < c_p$, proces prelazi u fazu 1, ili (b) ako pritisak na zonu 4 postane toliko veliki da dovede do smicanja između zona 3 i 4, što znači prelazak procesa u fazu 2.

3.4.3.2. Formiranje odsečka

Ako se ima u vidu usvojeni model ponašanja materijala prepreke pod dejstvom impulsnog opterećenja, formiranje odsečka (faza 1) predstavlja, u stvari, realno prvu fazu procesa penetracije (sl. 3.4.5b), s obzirom na automatsko zadovoljavanje uslova $\varepsilon < 1$, odnosno $v_1 < c_p$. Odmah dolazi do stvaranja zone 2 čija se masa u ovoj fazi povećava (dok je njena brzina sve vreme penetracije jednaka trenutnoj vrednosti brzine penetratora, $v_1=v_2$, te se njihovo kretanje posmatra kao kretanje jednog tela), dok se masa zone 4 smanjuje (pri čemu su brzine zona 3 i 4 jednake, $v_3=v_4$).

Na osnovu zakona o održanju mase može se odrediti protok radijalno pomerene mase \dot{m}_r (iz zone 2 u zonu 3). Naime, s obzirom da važi

$$\dot{m}_2 + \dot{m}_4 + \dot{m}_r = 0,$$

gde su

$$\dot{m}_2 = \rho A (c_p - v_1), \quad \dot{m}_4 = \rho A (v_4 - c_p)$$

maseni protoci u zonama 2 i 4, dobija se (kao i u fazi 0)

$$\dot{m}_r = \rho A(v_1 - v_4).$$

Diskontinuitet aksijalnih brzina u zonama 2 i 3 materijala prepreke uslovljava postojanje sile smicanja duž njihove granične površine

$$T_q = 2\pi R \tau_q (x_2 - x_1) \quad (3.4.21),$$

gde τ_q predstavlja dinamičku vrednost smičućeg napona koja se određuje na osnovu jednačine (3.4.6). Ova sila čini jedinu bitnu razliku u jednačinama kretanja u odnosu na fazu 0. Važe, dakle, jednačine kretanja

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\frac{\sigma_c A + \rho A(v_1 - v_4)^2 + 2\pi R \tau_q (x_2 - x_1)}{m + \rho A(x_2 - x_1)} \\ \dot{v}_4 &= \frac{\rho A(v_1 - v_4)^2 + 2\pi R \tau_q (x_2 - x_1) - 2\pi r H(\tau_y + \rho c_s v_3)}{\rho \pi r^2 H - \rho A(x_2 - x_1)} \end{aligned} \quad (3.4.22).$$

Ove jednačine važe sve dok sila sabijanja koja deluje na zonu 4 ne postane dovoljno velika da savlada silu smicanja između zona 3 i 4 i dovede do razdvajanja zona 3 i 4, odnosno odvajanja zone 4 od ostalog dela prepreke. Dakle, sistem jednačina (3.4.22) definiše kretanje penetratora i prepreke, sve dok važi

$$\dot{v}_3 = \dot{v}_4 > a_{kr} \quad (3.4.23)$$

gde je

$$a_{kr} = \frac{\sigma_{yc} A - 2\pi R \tau_q (x_4 - x_2)}{\rho A(x_4 - x_2)} \quad (3.4.24).$$

Kada se ostvari uslov $a_{kr} > \dot{v}_3$, odsečak (koga čine zone 2 i 4) je potpuno formiran i započinje njegovo odvajanje od prepreke (faza 2).

Drugi način okončavanja faze 1 je realizacija uslova

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 \quad (3.4.25)$$

što znači da se neko vreme sve pokretne zone kreću istom brzinom, čime započinje faza 4A.

3.4.3.3. Odvajanje odsečka od prepreke

U fazi 2 (sl. 3.4.5c) dolazi do odvajanja odsečka od zadnje površine prepreke, $x_4 > x_3 + H$, $v_4 > v_3$. Ovo je faza procesa u kojoj tri zone imaju međusobno različite brzine, međutim, principijelno se ne pojavljuju nove sile, odnosno fizički procesi koji bi bitno promenili jednačine kretanja, koje imaju oblik

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\frac{\sigma_c A + \rho A(v_1 - v_4)^2 + 2\pi R \tau_q (x_2 - x_1)}{m + \rho A(x_2 - x_1)}, \\ \dot{v}_3 &= \frac{2\pi R \tau_q (x_3 + H - x_1) - 2\pi r H(\tau_y + \rho c_s v_3)}{\rho \pi (r^2 - R^2) H + m_r}, \\ \dot{v}_4 &= \frac{\sigma_{yc} A - 2\pi R \tau_q (x_3 + H - x_2)}{\rho A(x_4 - x_2)}. \end{aligned} \quad (3.4.26),$$

gde je

$$m_r = \int_0^t \dot{m}_r dt \quad (3.4.27)$$

ukupna radijalno transportovana masa materijala prepreke do tekućeg trenutka t . Faza 2 se završava na jedan od sledeća dva načina: (a) zaustavljanjem kompresionog udarnog talasa, tj. izjednačavanjem brzina materijala ispred i iza njega, dakle realizacijom uslova

$$v_1 = v_4 \quad (3.4.28)$$

čime penetrator i odsečak počinju da se kreću kao jedno telo, što znači otpočinjanje etape istiskivanja odsečka (faza 3A); ili (b) ako front udarnog talasa dosegne zadnju površinu prepreke, tj. ako se ispuni uslov

$$x_2 = x_3 + H \quad (3.4.29)$$

faza 2 se u izvesnom smislu nastavlja, s tim što se menjaju veličine sila usled sabijanja, s obzirom na prestanak ograničenja širenja sabijenog materijala (proces prelazi u fazu 3B).

3.4.3.4. Finalno istiskivanje odsečka

Ispunjavanjem uslova (3.4.28) penetrator i odsečak predstavljaju sa dinamičkog aspekta jedno telo (sl. 3.4.5d) čijem se kretanju suprotstavlja jedino sila otpora smicanju. Jednačine kretanja sistema u fazi 3A glase

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{-2\pi R \tau_q (x_3 + H - x_1)}{m + m_{pl}}, \\ \dot{v}_3 &= \frac{2\pi R \tau_q (x_3 + H - x_1) - 2\pi r H (\tau_y + \rho c_s v_3)}{\rho \pi (r^2 - R^2) H + m_r} \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

gde je

$$m_{pl} = \rho A (x_4 - x_2)$$

masa odsečka u trenutku realizacije uslova (3.4.28). Jednačine kretanja sistema (3.4.30) važe do ispunjenja jednog od tri uslova:

- $v_1 = 0$, što predstavlja zaustavljanje penetratora u prepri i završetak procesa,
- $x_1 = x_3 + H$, što znači da je penetracija okončana probojem, ili
- $v_1 = v_3$, čime sve zone dobijaju istu brzinu i proces se nastavlja prelaskom u fazu 4A.

Važno je naglasiti da tok penetracije po fazama 1 – 2 – 3A predstavlja osnovni "scenario" penetracionog procesa, tj. posle faze 2 u najvećem broju slučajeva (odnosno u širokom rasponu udarnih brzina) proces prelazi u fazu 3A u kojoj se i završava. Preostaje još da se razmotre i "sporedne" grane procesa (sl. 3.4.6).

3.4.3.5. Sporedne grane procesa

Faza 4A (sl. 3.4.5e) predstavlja specifičnu i naročito pri malim udarnim brzinama, moguću etapu penetracije u kojoj se sve zone kreću istom brzinom $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$. Kako je već pomenuto, ova faza može uslediti posle faze 3A, ali i direktno nakon faze 1. Diferencijalna jednačina kretanja glasi

$$\dot{v}_1 = -\frac{2\pi R H (\tau_y + \rho c_s v_3)}{m + \rho \pi r^2 H} \quad (3.4.31)$$

Uslov započinjanja naredne faze (osim u slučaju da u fazi 4A dođe do zaustavljanja penetratora) je da usporenje zone 3 postane veće od usporenja definisanog jednačinom (3.4.31), tj.

$$\dot{v}_3 \leq \dot{v}_1, \text{ gde je } \dot{v}_3 = \frac{2\pi R \tau_q (x_3 + H - x_1) - 2\pi r H (\tau_y + \rho c_s v_3)}{\rho \pi (r^2 - R^2) + m_r} \quad (3.4.32).$$

Tada sistem prelazi u fazu 5A (slika 3.4.5f) u kojoj važe iste jednačine kretanja kao u fazi 3A. Ova faza i ceo proces penetracije završava se, naravno, u zavisnosti od početnih uslova, probojem ili zaustavljanjem penetratora.

3.4.3.6. Pojave posle proboja

Drugi alternativni tok procesa, karakterističan uglavnom za relativno velike udarne brzine, odnosi se na prelazak u fazu 3B (sl. 3.4.5g), tj. podrazumeva da je udarni talas dosegao zadnju površinu prepreke, pre nego što je došlo do njegovog zaustavljanja. Odsustvo ograničenja širenja materijala u zonama 2 i 4 upućuje na aktuelnost napona σ i σ_y , umesto većih vrednosti napona σ_c i σ_{yc} . Jednačine kretanja zona 1(i 2), 3 i 4 imaju oblik

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\frac{\sigma A + 2\pi R \tau_q (x_3 + H - x_1)}{m + \rho A (x_2 - x_1)}, \\ \dot{v}_3 &= \frac{2\pi R \tau_q (x_3 + H - x_1) - 2\pi r H (\tau_y + \rho c_s v_3)}{\rho \pi (r^2 - R^2) H + m_r}, \\ \dot{v}_4 &= \frac{\sigma_y A}{\rho A (x_4 - x_2)}. \end{aligned} \quad (3.4.33)$$

Gornje jednačine važe do ispunjenja jednog od uslova:

- $v_1 = v_4$, čime proces prelazi u fazu 4B (sl. 3.4.5h) u kojoj važe iste jednačine kao u fazi 3A, ili
- $x_1 = x_3 + H$, što znači da je penetracija završena probojem, ali preostaje faza post-perforacionih deformacija (faza 4C – sl. 3.4.5i) u kojoj važe jednačine kretanja

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\frac{\sigma A}{m + \rho A (x_2 - x_1)}, \\ \dot{v}_3 &= \frac{-2\pi r H (\tau_y + \rho c_s v_3)}{\rho \pi (r^2 - R^2) H + m_r}, \\ \dot{v}_4 &= \frac{\sigma_y A}{\rho A (x_4 - x_2)}. \end{aligned} \quad (3.4.34)$$

Deformisanje prestaje s ostvarivanjem uslova $v_1 = v_4$, čime je i proces penetracije okončan.

Ovim je, dakle, iscrpljena fazna analiza procesa probijanja. Rešavanje jednačina (3.4.13) i (3.4.15) u svakom koraku, omogućava sukcesivno numeričko rešavanje postavljenih diferencijalnih jednačina kretanja.

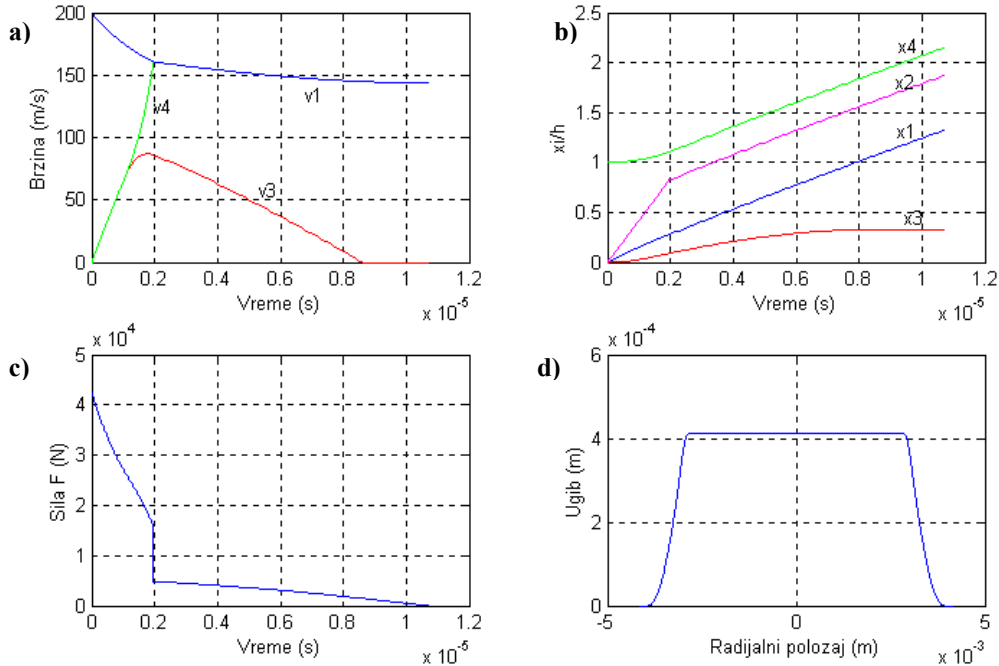
Napominje se da je uvođenjem ograničenja

$$x_3 = 0, \quad v_3 = 0$$

moguće analizirati penetraciju bez uzimanja u obzir kretanja sekundarne zone prepreke.

Za obe varijante realizovan je računarski program koji omogućava određivanje svih parametara penetracije uključenih u analitički model.

Na dijagramima (sl. 3.4.7) su predstavljene tipične promene brzine pojedinih zona, njihova pomeranja, kao i sile koje u toku procesa deluju na penetrator, te profil ploče posle penetracije.



Slika 3.4.7. Promena osnovnih parametara penetracije u vremenu: a) brzine penetracionih zona, b) pomeranja zona, c) sila koja deluje na penetrator, d) profil ploče posle penetracije (proboj čelične ploče debljine 1.25 mm čeličnim penetratorom prečnika 4.71 mm pri udarnoj brzini 200 m/s)

3.5. Probijanje deformabilnim penetratorom

Prethodna analiza podrazumevala je nedeformabilan (krut) penetrator; međutim, model je moguće proširiti i na opšti slučaj deformabilnog penetratora, što je i korisno s obzirom da eksperimenti ukazuju na prisustvo deformacija penetratora čak i u slučajevima kada su njegove mehaničke karakteristike neuporedivo bolje od karakteristika prepreke.

Smatraće se da materijal penetratora podleže konstitutivnoj jednačini koja ima oblik (3.4.4), tako da se i za promenu napona u penetratoru može pisati

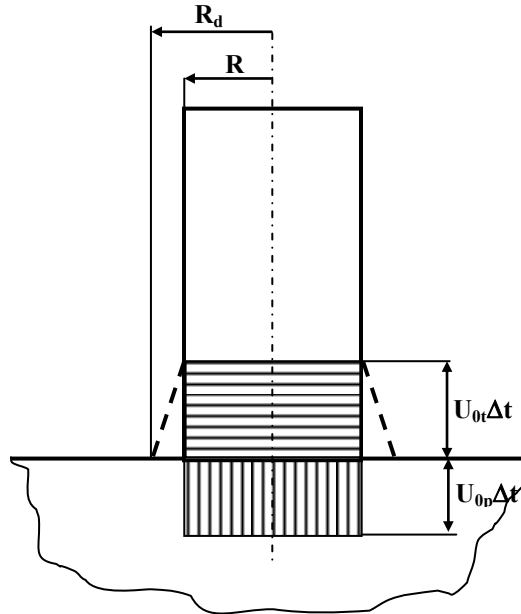
$$\sigma_p = \frac{1}{1 - \varepsilon_p} (\sigma_{yp} - B_p \ln(1 - \varepsilon_p)) \quad (3.4.35).$$

Ako se posmatra sam trenutak inicijalnog kontakta penetratora i prepreke (sl. 3.4.8), uočava se da je moguće primeniti zakon o održanju količine kretanja na sistem koji čine početnom deformacijom (pri $\varepsilon=0$) zahvaćeni delovi penetratora i prepreke. Ako je v' zajednička brzina inicijalno deformisanih delova penetratora i prepreke, tada važi

$$\rho_p A_p U_{0p} \Delta t v_0 = (\rho_p A_p U_{0p} \Delta t + \rho A U_0 \Delta t) v' \quad (3.4.36)$$

gde U_0 , odnosno U_{0p} , predstavljaju relativne brzine kompresionog udarnog talasa u materijalu prepreke, odnosno penetratora. Kako je u početnom trenutku $A_p = A$, jednačina (3.4.36) može se transformisati u

$$v' = \frac{v_0}{1 + \frac{\rho U_0}{\rho_p U_{0p}}} \quad (3.4.37).$$



Slika 3.4.8. Početni kontakt penetratora i prepreke

Budući da je

$$U_0^2 = \frac{1}{\rho} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\rho} (\sigma_y + B), \quad (3.4.38)$$

$$U_{0p}^2 = \frac{1}{\rho_p} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} = \frac{1}{\rho_p} (\sigma_{yp} + B_p)$$

uvođenjem jednačina (3.4.38) u izraz (3.4.37) dobija se veza između redukovane, stvarne početne brzine penetratora v' i udarne brzine v_0 u obliku

$$v' = \frac{v_0}{1 + \sqrt{q}} \quad (3.4.39)$$

gde

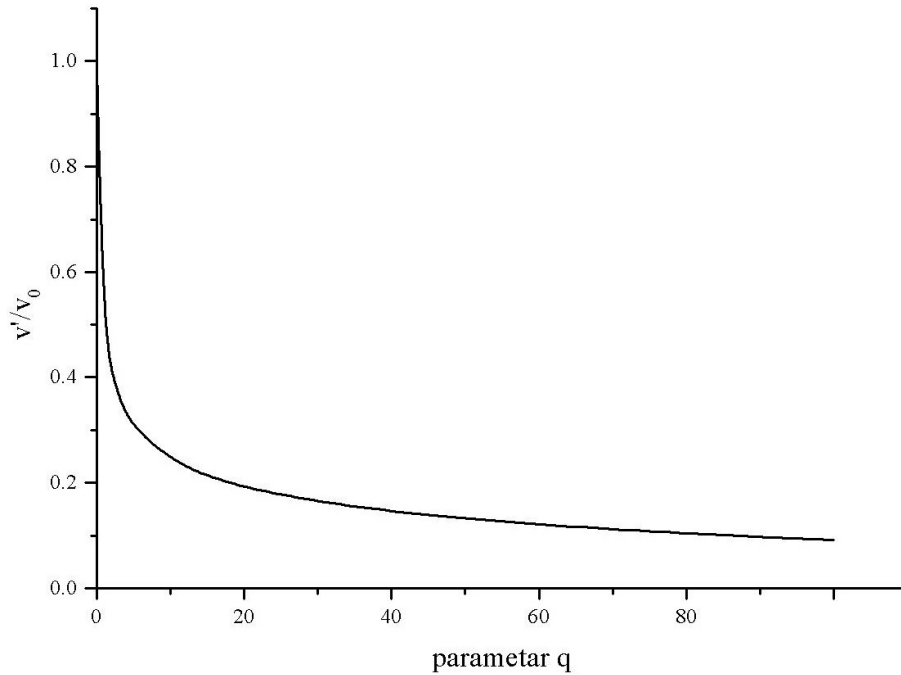
$$q = \frac{\rho(\sigma_y + B)}{\rho_p(\sigma_{yp} + B_p)} \quad (3.4.40)$$

predstavlja parametar zavisen od karakteristika materijala prepreke i penetratora.

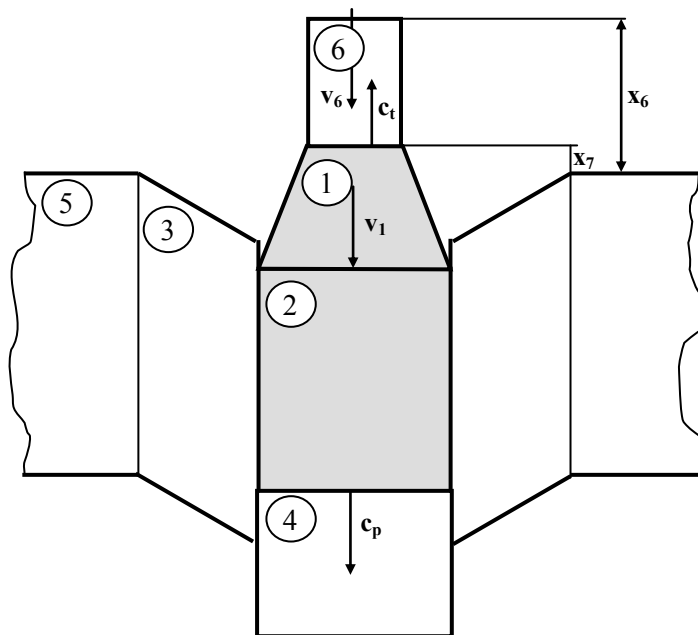
Zavisnost (3.4.39) predstavljena je grafički na sl. 3.4.9.

Analiza izraza (3.4.39) i (3.4.40) za specijalne vrednosti parametra q upućuje na očekivane zaključke:

- ako je q veoma malo ($q \ll 1$), tada je $v' \approx v_0$, što je u skladu i sa (3.4.40) – karakteristike materijala prepreke znatno su slabije od karakteristika penetratora,
- u slučaju penetratora i prepreke od istog materijala ($q=1$), sledi logična posledica $v' = \frac{v_0}{2}$.
- konačno, ako prepreka ima znatno bolje mehaničke karakteristike od penetratora ($q \gg 1$), sledi $v' \approx 0$.



Slika 3.4.9. Relativno smanjenje početne brzine penetratora u funkciji parametra q



Slika 3.4.10. Penetracione zone pri probijanju deformabilnim penetratorom

Tipična geometrijska konfiguracija zona pri probijanju deformabilnim penetratorom predstavljena je na slici 3.4.10. Naime, u modelu sada figuriše nova zona 6 (definisana koordinatama x_6 i x_7), kao i kompresioni talas u materijalu penetratora čija je brzina c_t . U početnom trenutku je $v_6 = v_0$, $v_1 = v'$, te s obzirom da i za penetrator važe jednačine vezane za prostirajne udarnog talasa (sasvim analogno jednačinama (3.4.13) i (3.4.15))

$$c_t = \frac{v_6 - v_1}{\varepsilon_p} - v_6 \quad (3.4.41)$$

$$\varepsilon_p(\sigma_p - \sigma_{yp}) = \rho_p(v_1 - v_6)^2 \quad (3.4.42)$$

moгуće je na osnovu (3.4.42) odrediti inicijalnu deformaciju penetratora ε_{p0} , odnosno uvećanu vrednost kontaktne površine između zona 1 i 2

$$A_d = \frac{A}{1 - \varepsilon_{p0}} \quad (3.4.43)$$

i njenog radijusa

$$R_d = \sqrt{\frac{A_d}{\pi}} \quad (3.4.44).$$

Jednačine kretanja zona 1 i 6 imaju oblik

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{\sigma_p A - \sigma_c A_d - 2\pi R_d \tau_q (x_2 - x_1)}{m - \rho_p A(x_6 - x_7) + \rho A(x_2 - x_1)}, \\ \dot{v}_6 &= -\frac{\sigma_{yp} A}{\rho A(x_6 - x_7)}. \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

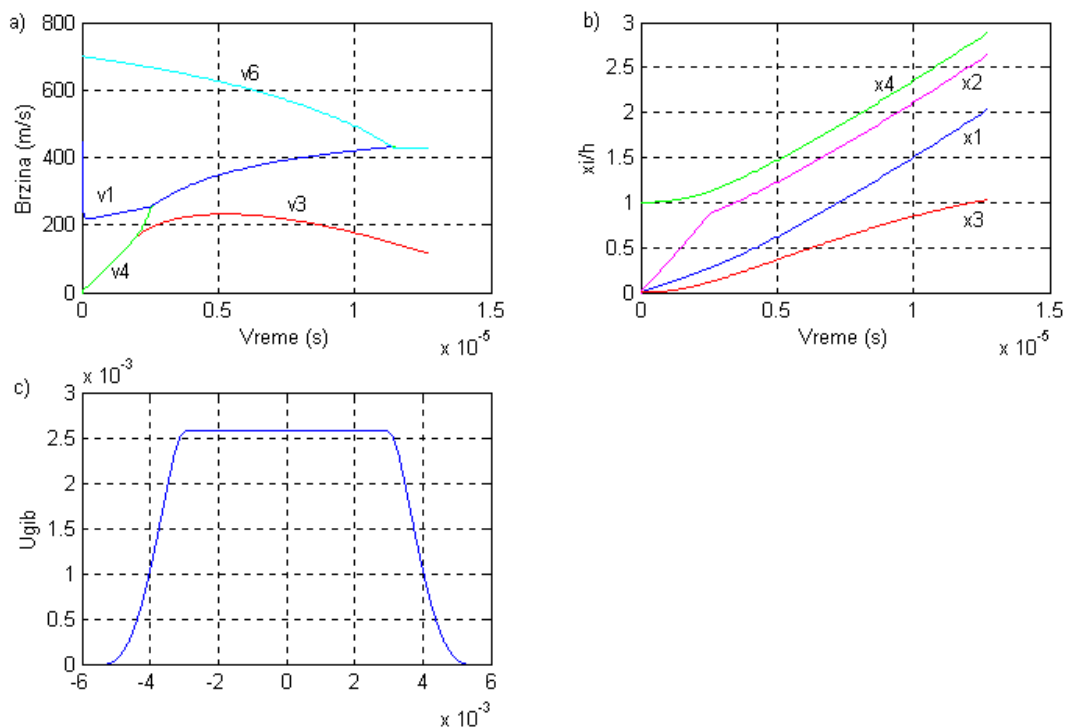
Sistem jednačina (3.4.45) (odnosno jednačina za \dot{v}_1 koja se u svakoj fazi modifikuje dodavanjem sile $\sigma_p A$ u brojiocu) važi sve do zaustavljanja udarnog talasa u materijalu penetratora, tj. do ostvarivanja uslova $v_1 = v_6$. Od tog trenutka penetrator se smatra krutim telom. Jednačine kretanja ostalih zona ostaju nepromenjene, osim što umesto R i A , merodavne vrednosti za radijus i površinu poprečnog preseka penetratora postaju R_d i A_d .

Fazni tok penetracionog procesa identičan je u odnosu na slučaj nedeformabilnog penetratora. Kao i u slučaju krutog penetratora, realizovan je računarski program za model deformacionih talasa sa deformabilnim penetratorom. Karakteristični dijagrami promene osnovnih parametara penetracije prikazani su na sl. 3.4.11.

Model deformacionih talasa predstavlja najkompleksniji pristup rešavanju problema penetracije. Primena koncepta deformacionih talasa je složeniji način tretiranja suštinski istih fenomena na koje je koncentrisan i trofazni model, ali ovakav prilaz obezbeđuje i dve važne prednosti – mogućnost razmatranja globalnih deformacija prepreke i analizu deformacija penetratora. Ove osobine omogućavaju primenu modela deformacionih talasa na vrlo širok dijapazon problema probijanja tankih prepreka (krut ili deformabilan penetrator, udarne brzine u rasponu od balističkog limita do veoma velikih brzina...).

Dalja unapređenja modela su svakako moguća i odnose se prvenstveno na sledeće:

- uzimanje u obzir savijanja i istezanja pri razmatranju deformisanja i kretanja sekundarne zone prepreke,
- redefinisane načina određivanja deformacija penetratora koje će podrazumevati kontinualnost procesa povećavanja prečnika penetratora,
- tretiranje određenih parametara procesa (prvenstveno faktora K povećavanja napona tečenja materijala prepreke usled njegovog ograničenog širenja) kao promenljivih, dinamikom procesa uslovljenih karakteristikama penetracije.



Slika 3.4.11. Vremenska zavisnost brzina (a) i pomeranja (b) pojedinih zona penetracije, kao i profil sekundarne zone prepreke (c) posle proboja (probijanje čelične ploče debljine 2.20 mm čeličnim penetratorom prečnika 4.71 mm pri udarnoj brzini 700 m/s)

3.5. Modifikovani model penetracije

Svaki od prezentovanih modela, kao što je napomenuto, predstavlja dobro analitičko rešenje određene klase problema probijanja tankih metalnih ploča. Računarski programi, koji su realizovani za svaki model, daju očekivano dobru reprodukciju literaturnih rezultata, ali imaju i značajna ograničenja [15], koja se prvenstveno odnose na primenu pri probijanju prepreka značajnije debljine (a koje se i dalje nalaze u zoni tankih prepreka).

U cilju dobijanja bolje saglasnosti između eksperimentalnih i proračunskih rezultata izvršena je modifikacija modela deformacionih talasa sa deformabilnim penetratorom. U osnovi, reč je o korekciji vrednosti faktora K kojim se uzima u obzir povećanje napona σ u materijalu prepreke usled prisustva okolnog materijala koji otežava širenje, a time i sabijanje odsečka. Na osnovu [13] u razmatranom modelu usvojeno je da ovaj parametar predstavlja karakteristiku materijala koja ima fiksnu vrednost, $K=[1.7 \div 2.0]$. Jasno je, međutim, da vrednost faktora K zavisi i od uslova sabijanja, odnosno prvenstveno od relativne deformacije ε . Eksperimentalni rezultati dati u [8] takođe ukazuju na povećanje vrednosti parametra K sa rastom relativne deformacije, pri čemu K pripada znatno širem intervalu. Variranjem parametra K u programu za probijanje prema modelu deformacionih talasa sa deformabilnim penetratorom, uočava se da je model vrlo osetljiv na njegovu promenu.

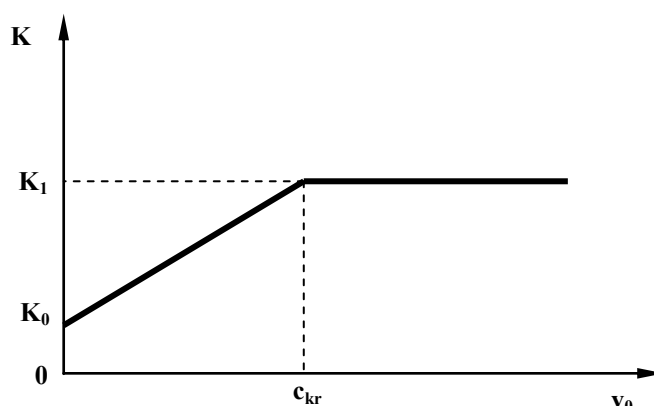
Sve, dakle, ukazuje na neophodnost eksperimentalnog određivanja zavisnosti $K=K(\varepsilon)$, i korišćenje promenljive vrednosti K tokom procesa probijanja. Kako ova zavisnost nije poznata, modifikacija podrazumeva primenu konstantne, osrednjene vrednosti K u toku celog procesa, odnosno u prve dve faze koje podrazumevaju sabijanje odsečka. Budući da je kod tankih prepreka srednja vrednost relativne deformacije materijala prepreke određena prvenstveno udarnom brzinom penetratora v_0 , usvojena je funkcionalna zavisnost parametra K od ove brzine u obliku (slika 3.5.1)

$$K = \begin{cases} K_0 + \frac{K_1 - K_0}{c_{kr}} v_0, & 0 < v_0 \leq c_{kr} \\ K_1, & c_{kr} \leq v_0. \end{cases} \quad (3.5.1).$$

Pri tome je c_{kr} maksimalna vrednost brzine kompresionog talasa u materijalu prepreke u trenutku udara

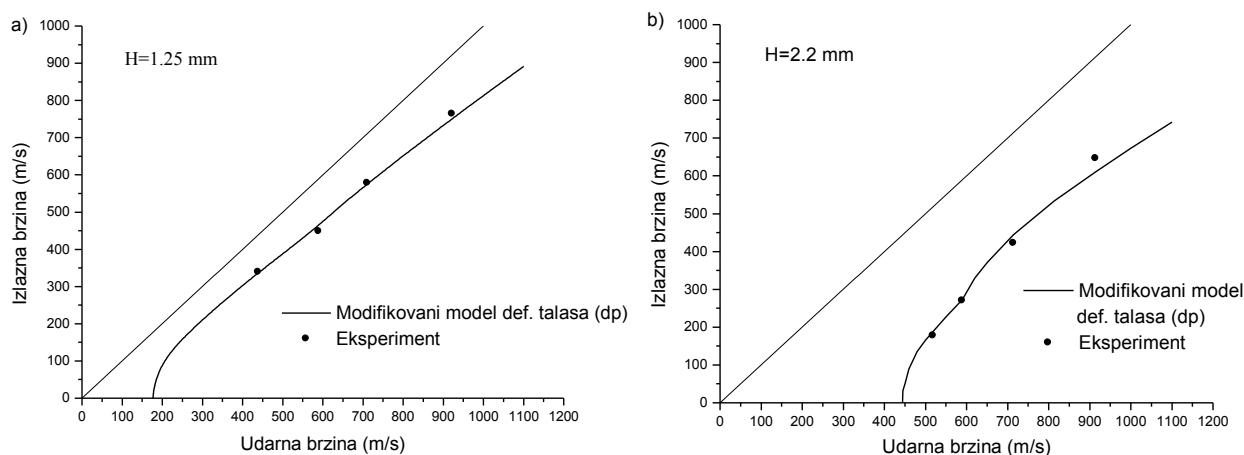
$$c_{kr}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_C}{\partial \varepsilon} = \frac{K_1}{\rho} (\sigma_y + B) \quad (3.5.2)$$

gde su K_0 i K_1 minimalna i maksimalna vrednost parametra K koje odgovaraju nultoj, odnosno udarnoj brzini penetratora jednakoj c_{kr} i predstavljaju karakteristiku materijala prepreke. Dakle, vrednost parametra K najpre linearno raste sa povećanjem udarne brzine od nula do c_{kr} , da bi za veće udarne brzine bila konstantna zbog erozivnog karaktera procesa.



Slika 3.5.1. Zavisnost parametra K od udarne brzine penetratora

Na sl. 3.5.2 prikazane su zavisnosti izlazne brzine od udarne brzine penetratora prema modifikovanom modelu koji podrazumeva primenu izraza (3.6.1) i (3.6.2) za određivanje vrednosti parametra K . Uočava se veoma dobro podudaranje eksperimentalnih [16] i proračunskih rezultata, kako za tanju, tako i za deblju prepreku.



Slika 3.5.2. Promena izlazne brzine penetratora u zavisnosti od udarne brzine za manju (a) i veću (b) debljinu prepreke prema modifikovanom modelu

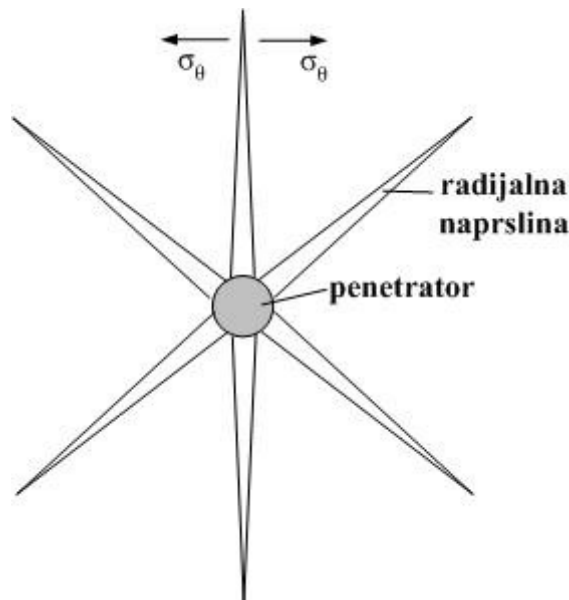
Korekcijom faktora kojim se uzima u obzir uticaj otežanog širenja, odnosno sabijanja odsečka, realizovana je modifikacija modela deformacionih talasa sa deformabilnim penetratorom koja u kvalitativnom i kvantitativnom smislu daje znatno bolje rezultate i predstavlja poboljšanje izvornog modela.

3.6. Rascvetavanje prepreke

Do sada analizirani modeli podrazumevali su formiranje odsečka kao dominantan režim probijanja. Za relativno tanke i razvlačljive metalne prepreke i penetratore sa oštrim (koničnim ili oživalnim) vrhom karakterističan je još jedan režim penetracije – rascvetavanje prepreke (sl. 1.1f). Osnovna karakteristika ovog režima je formiranje radijalnih naprslina u materijalnu prepreke neposredno posle udara penetratora. Ove naprsline dovode do stvaranja izvesnog broja trougaonih segmenata sekundarne zone prepreke – latica, čije je savijanje osnovni mehanizam probijanja. Ovde će biti razmotren model penetracije u režimu rascvetavanja autora *Landkofa* i *Goldsmitha* [17].

3.6.1. Širenje radijalnih naprslina

Eksperimentalno je utvrđeno da odmah posle inicijalnog kontakta penetratora i prepreke dolazi od formiranja zvezdaste naprslina u prepreci koja se zatim pod dejstvom pritiska projektila širi, sl. 3.6.1. Dalje prodiranje oštrog penetratora dovodi do povećavanja prečnika otvora u prepreci i radijalnog potiskivanja latica.



Sl. 3.6.1. Formiranje radijalnih naprslina u materijalu prepreke

Najpre će biti određen rad potreban za formiranje zvezdaste naprslina u prepreci. U skladu sa *Grifithovim* postulatom, energija po jedinici površine radijalne naprslina potrebna za njeno dalje proširivanje G , mora biti veća od površinske energije proširene naprslina G_C . Za prvi režim prostiranja naprslina parametar G je određen sa:

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (3.6.1)$$

gde je K_I faktor intenziteta napona za prvi režim širenja naprslina, dok je E statički modul elastičnosti. Faktor K_I može se aproksimirati *Westmannovim* rešenjem za slučaj linearnih zvezdastih naprslina za bilo koji broj latica n :

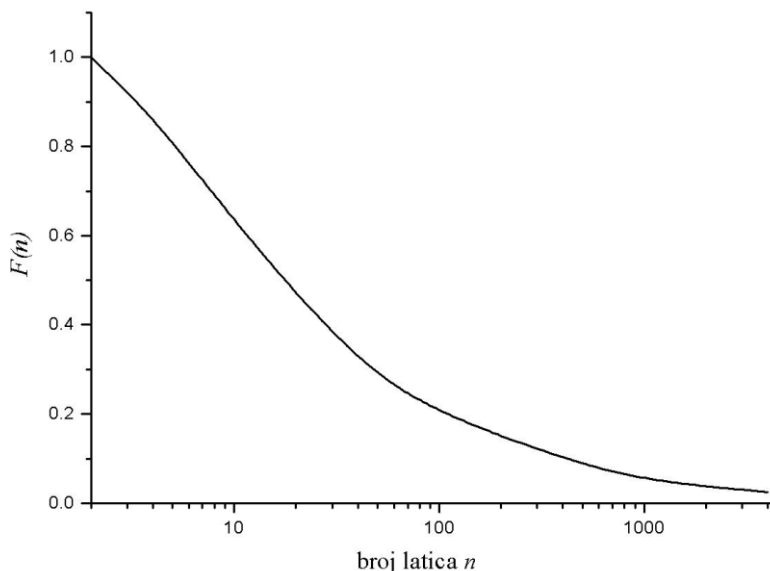
$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(n) \quad (3.6.2),$$

gde je σ napon, a dužina kraka, dok je $F(n)$ funkcija broja latica n , data na sl. 3.6.2. Da bi se odredila ukupna energija potrebna za formiranje naprslina W_C , jediničnu energiju datu sa (3.6.1)

treba pomnožiti sa odgovarajućom ukupnom površinom naprslina $A_f=2nHa$. Ako se uz to uvede pretpostavka da je $\sigma=\sigma_y$, konačno se dobija maksimalna vrednost tražene energije:

$$W_C = \frac{2\pi nH}{E} [a\sigma_y F(n)]^2 \quad (3.6.3).$$

Eksperimentalno i proračunski je pokazano da je ova energija znatno manja od energije koja se utroši na plastično savijanje latica i ploče.



Sl. 3.6.2. Funkcija broja latica $F(n)$ u izrazu za faktor intenziteta napona K_I

3.6.2. Faze procesa probijanja

Proces probijanja odvija se kroz dve faze (sl. 3.6.3). Prva faza podrazumeva savijanje latica, pri čemu se koristi model kružne ose oko koje se vrši rotacija latica i koja predstavlja granicu između deformisanog (plastičnog) i nedeformisanog dela prepreke (tzv. koncept “plastičnog zgloba“ - “plastic hinge” koji je analiziran i u modelu deformacionih talasa – odeljak 3.4). Ova faza se završava kada plastične deformacije u radijalnom pravcu dosegnu koren latica, pri čemu su latice zarotirane za ugao θ_1 . Tada dolazi do zaustavljanja kretanja “plastičnog zgloba“ i otpočinjanja druge faze procesa probijanja. Naime, latice poseduju značajnu kinetičku energiju i nastavljaju da se obrću oko fiksne ose koja se podudara sa krenom latica, sve dok se obrtanjem ne ostvari ugao θ_2 koji omogućava slobodan prolazak penetratora kroz otvor u prepri.

Proračun kretanja penetratora i latica i odgovarajućih opterećenja veoma je sličan analizi u slučaju strukturnog modela (odeljak 3.2). Brzina penetratora v_1 na kraju prve faze određuje se na osnovu zakona o održanju količine kretanja sistema penetrator/prepreke u vertikalnom pravcu:

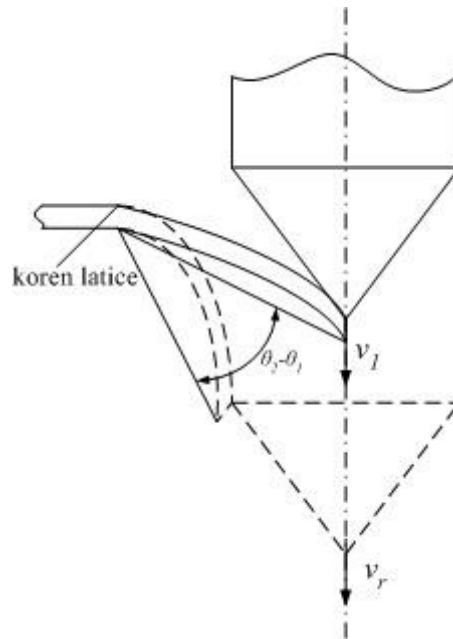
$$v_1 = \frac{v_0}{1 + \frac{n\mu}{3m}} \quad (3.6.4),$$

gde je μ – masa jedne latica trougaonog oblika

$$\mu = \frac{\rho H B a}{2} \quad (3.6.5).$$

U prethodnoj jednačini B je dužina korena latica i ako se kružni oblik plastičnog zgloba aproksimira pravilnim n -tougлом onda je

$$B = \frac{2\pi a}{n} \quad (3.6.6).$$



Sl. 3.6.3. Prva i druga faza procesa penetracije prema modelu rascvetavanja prepreke

Na osnovu (3.6.5) i (3.6.6) dobija se konačna vrednost mase latice:

$$\mu = \frac{\pi\rho H a^2}{n} \quad (3.6.7).$$

Imajući u vidu izraze (3.6.4) i (3.6.7), brzina v_1 na kraju prve faze može se napisati u obliku

$$v_1 = \frac{v_0}{1+k} \quad (3.6.8),$$

gde je k parametar koji zavisi od karakteristika penetratora, prepreke i dužine latica

$$k = \frac{\pi\rho H a^2}{3m} \quad (3.6.9).$$

U drugoj fazi penetracije u kojoj se posmatra obrtanje laticе oko nepomične ose, može se primeniti zakon o održanju energije u obliku

$$M_p \theta_s = \Delta W_R + \frac{m}{2n} (v_1^2 - v_r^2) \quad (3.6.10),$$

gde je $\theta_s = \theta_1 - \theta_2$, ugao rotacije latica u drugoj fazi, dok je $M_p = \sigma_y \frac{BH^2}{4}$ plastični moment u korenu laticе; $\Delta W_R = \Delta W_{R1} - \Delta W_{R2}$ je smanjenje kinetičke energije laticе u toku druge faze. Kinetička energija laticе na početku druge faze definisana je izrazom

$$W_{R1} = \frac{m}{2n} v_0^2 \frac{k}{2(1+k)^2} \quad (3.6.11),$$

dok se ova energija na kraju druge faze može odrediti na osnovu izraza

$$W_{R2} = \frac{1}{2} I \omega_r^2 \quad (3.6.12),$$

imajući u vidu da je

$$\omega_r = \frac{v_r \cos \theta_2}{a}, \quad I = \frac{1}{12} \rho B H a^3 = \frac{1}{6} \frac{\pi \rho a^4 H}{n} \quad (3.6.13).$$

Zamenom jednačina (3.6.11) – (3.6.13) u zakon o održanju energije (3.6.10) dobija se konačan izraz za izlaznu brzinu penetratora

$$v_r = \sqrt{\frac{\frac{2+k}{2(1+k)^2} v_0^2 - \frac{\pi \sigma_y a H^2 (\theta_2 - \theta_1)}{m}}{1 + \frac{\pi \rho a^2 H \cos^2 \theta_2}{6m}}} \quad (3.6.14).$$

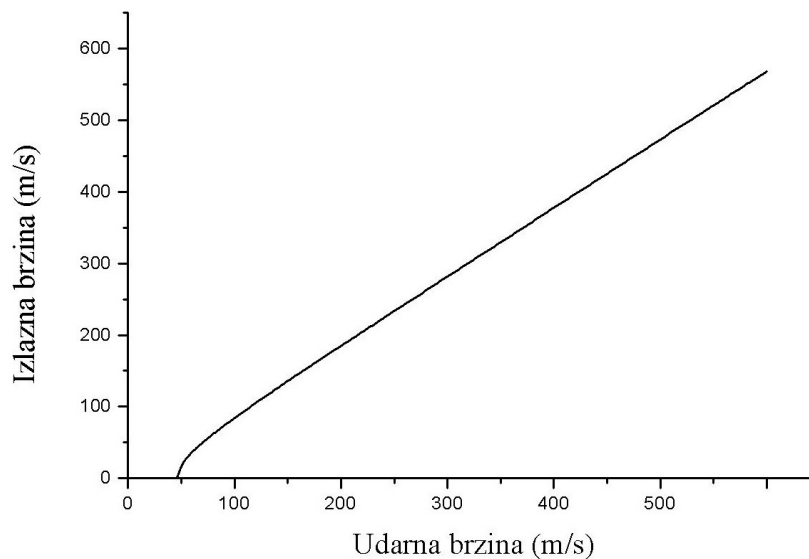
Brzina balističkog limita v_L dobija se iz prethodne jednačine za $v_r=0$:

$$v_L = (1+k)H \sqrt{\frac{2\pi \sigma_y a (\theta_2 - \theta_1)}{(2+k)m}} \quad (3.6.15).$$

Interesantno je primetiti da je dobijeni izraz za izlaznu brzinu penetratora (3.6.14) u skladu sa generalizovanom formom osnovne empirijske jednačine kojom se definiše ova brzina (2.19) u slučaju probijanja sa formiranjem odsečka kao dominantnim režimom.

Za određivanje izlazne brzine, kao što se vidi iz jednačine (3.6.14), neophodno je pored karakteristika penetratora i prepreke, poznavati i geometriju perforacije (dužina latica a i uglovi θ_1 i θ_2).

Karakteristična promena izlazne brzine penetratora u zavisnosti od udarne brzine predstavljena je na sl. 3.6.4.



Sl. 3.6.4. Zavisnost izlazne brzine od udarne brzine penetratora. Dijagram se odnosi na rascvetavanje aluminijumske prepreke debljine 3.13 mm pri probijanju konično-cilindričnim penetratorom mase 29.5 g

Osim osnovnog gubitka energije penetratora koji je vezan za savijanje latica, eksperimentalno se pokazuje da je deformisanje šire zone prepreke (udubljivanje – *dishing*) takođe značajno, naročito pri manjim udarnim brzinama. Rad utrošen na udubljivanje šire strukture prepreke usled radialnog istezanja W_p može se izračunati na osnovu

$$W_p = \int_V (\int \sigma_r d\varepsilon_r) dV \quad (3.6.16)$$

gde je σ_r radialni normalni napon, dok se relativna deformacija ε_r približno može izračunati prema

$$\varepsilon_r = \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \quad (3.6.17),$$

pri čemu funkcija $w(r)$ predstavlja radijalnu raspodelu konačnog pomeranja materijala prepreke. Ova funkcija može se aproksimirati izrazom

$$w(r) = w_C \exp(-br) \quad (3.6.18).$$

Ako se, kao i u strukturnom modelu, prepostavi linearni zakon ojačavanja materijala prepreke

$$\sigma_r = \sigma_y + \beta \varepsilon_r \quad (3.6.19),$$

integracijom izraza (16) dobija se konačan oblik rada utrošenog na globalno deformisanje prepreke

$$W_p = \frac{2\pi H w_C^2}{(1-\nu+\nu^2)^{1/2}} \left[\frac{e^{-2ba}}{8} (1+2ab)\sigma_y + \frac{\beta}{128} w_C^2 e^{-4ab}(1+4ab) \right] \quad (3.6.20),$$

gde je ν – Poisson-ov koeficijent materijala prepreke.

Uzimajući u obzir ovaj rad, brzina balističkog limita ima oblik

$$v_L = \frac{2}{m} [W_C + W_p + M_p(\theta_2 - \theta_1)]^{1/2} \quad (3.6.21),$$

dok se korigovana vrednost izlazne brzine penetratora može odrediti na osnovu

$$v_r = \sqrt{\frac{\frac{2+k}{2(1+k)^2} v_0^2 - \frac{\pi \sigma_y a H^2 (\theta_2 - \theta_1)}{m} - \frac{2W_p}{m}}{1 + \frac{\pi \rho a^2 H \cos^2 \theta_2}{6m}}} \quad (3.6.22).$$

Interesantno je napomenuti da su izvornom radu [17] razmatra i penetracija prethodno perforisane prepreke u režimu rascvetavanja. Pod pretpostavkom centralnog udara penetratora, pokazano je da postoji optimalan prečnik perforacije koji obezbeđuje maksimalnu otpornost prepreke.

Predstavljeni model omogućava određivanje relevantnih parametara procesa penetracije pri režimu rascvetavanja u velikom rasponu udarnih brzina krutog penetratora. Razmatraju se savijanje latica i deformisanje šire strukture prepreke kao osnovni procesi na koje se troši kinetička energija penetratora. Glavni nedostatak modela je neophodnost poznavanja geometrijskih karakteristika perforiranog dela prepreke, koje je praktično jedino moguće odrediti eksperimentalnim putem.

4. PROBIJANJE PLOČA ZNAČAJNE DEBLJINE

U prethodnom poglavlju detaljno su razmotreni analitički modeli probijanja tankih metalnih ploča. Za sve preostale slučajeve (prepreke umerene debljine, debele i polubeskonačne prepreke) ovde će se koristiti termin *prepreke značajne debljine*. Biće analiziran samo jedan penetracioni model kojim se mogu tretirati svi navedeni slučajevi. Reč je u stvari o unapređenju *trofaznog* modela, koje je ostvareno znatno preciznijim i egzaktnijim pristupom razmatarnju prve faze procesa penetracije.

4.1. Dvodimenzionalni model penetracije

Za razliku od svih analitičkih modela probijanja tankih prepreka koji su podrazumevali analizu jednodimenzionalnog naponskog stanja i polja brzina u materijalu prepreke, razmatrani model podrazumeva dvodimenzionalno osnosimetrično naponsko i brzinsko polje u materijalu prepreke. Analizira se normalan udar krutog penetratora u prepreku i zanemaruju se toplotni gubici energije (zbog veoma kratkog trajanja procesa), kao i posledice pojave vibracija i udarnih talasa u materijalu prepreke.

Zadatak se, naravno, svodi na određivanje vremenske zavisnosti brzine i pređenog puta krutog penetratora u toku procesa probijanja, kao i rezultujuće sile otpora prepreke. Poznatim veličinama se smatraju prečnik, dužina, gustina i početna brzina penetratora, kao i debljina prepreke, te njena gustina i mehaničke karakteristike, uz označavanja kao u prethodnom poglavlju.

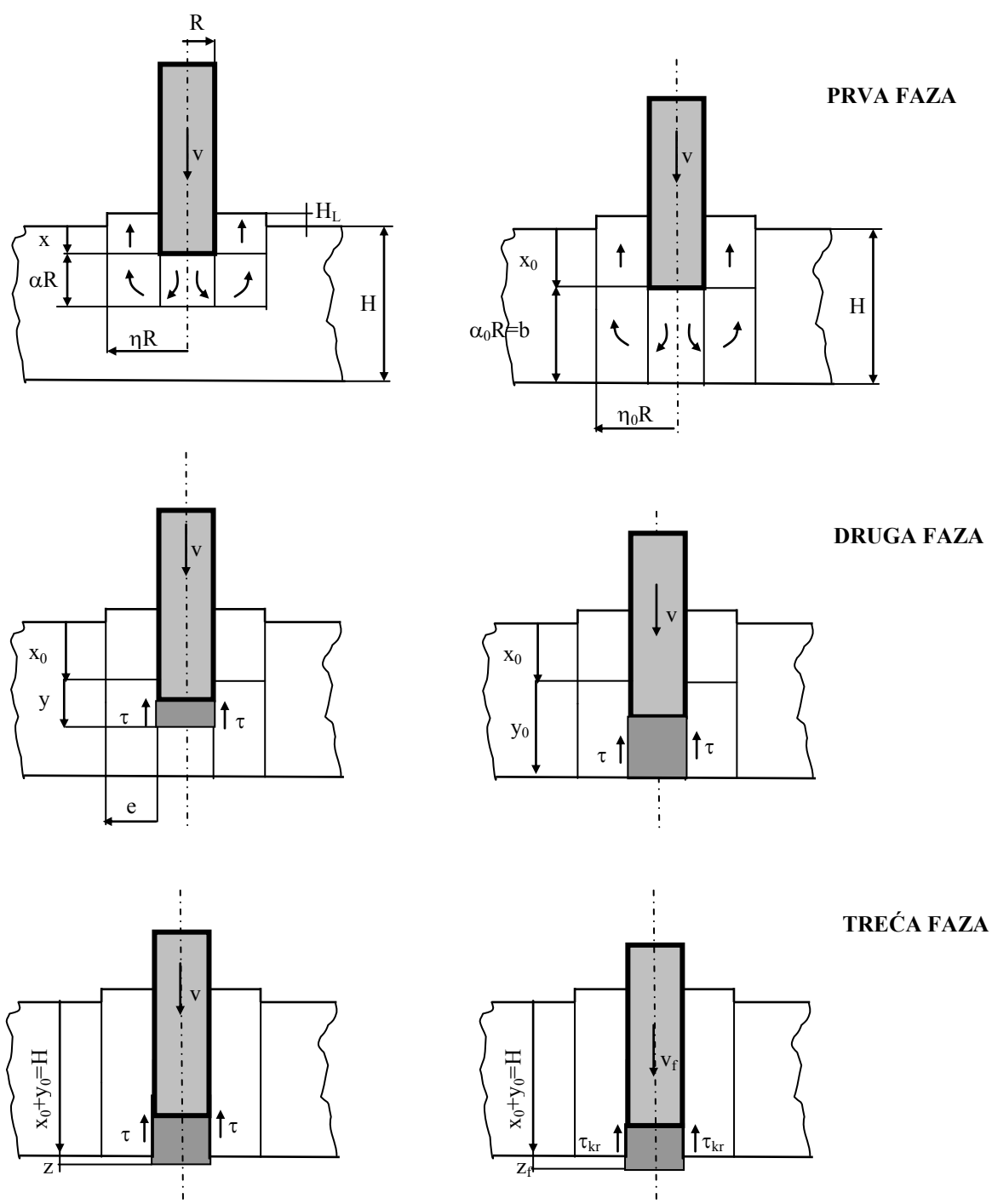
Probijanje prepreke razmatra se kroz tri suštinski različite faze koje sukcesivno slede jedna drugu (sl. 4.1).

Složene pojave koje prate inicijalni kontakt (udar) penetratora i prepreke su apstrahovane tako da se smatra da odmah po prodiranju penetratora dolazi do formiranja složenog polja plastičnih deformacija koje se sastoji od *tri zone*. Sa daljim prodiranjem penetratora dolazi do povećanja dimenzija ovih zona.

Prva faza penetracije se završava kada tako uvećavano deformaciono polje dosegne zadnju stranu ploče. U tom trenutku penetrator je prešao put x_0 , dok bezdimenzioni parametri koji definišu dimenzije polja imaju vrednosti α_0 i η_0 . Time su definisana dva važna parametra penetracionog procesa: dužina (nedeformisanog) odsečka b ($b=H-x_0$) i širina zone smicanja e ($e=R(\eta_0-1)$).

Drugu fazu karakteriše formiranje odsečka, odnosno postepeno prisajedinjavanje materijala prepreke penetratoru. U toku ove faze prodiranju se suprotstavljaju sila otpora sabijanja metala, sila otpora smicanja, kao i inercijalne sile koje deluju usled ubrzavanja materijala prepreke. Penetrator i deo materijala prepreke kreću se, dakle, istom brzinom, da bi na kraju druge faze cela cilindrična zona ispred penetratora bila "prirodna" njegovoj masi. Smatra se da u tom trenutku ceo odsečak ima istu brzinu kao penetrator, odnosno da se ponaša kao kruto telo.

U *trećoj fazi* daljoj penetraciji suprotstavlja se samo otpor smicanja odsečka. Kada deformacije dostignu kritičnu vrednost, treća faza se završava, dolazi do potpunog odvajanja odsečka od prepreke i do slobodnog kretanja penetratora i odsečka, čime se penetracioni proces okončava.



Sl. 4.1. Prikaz faza dvodimenzionalnog modela probijanja

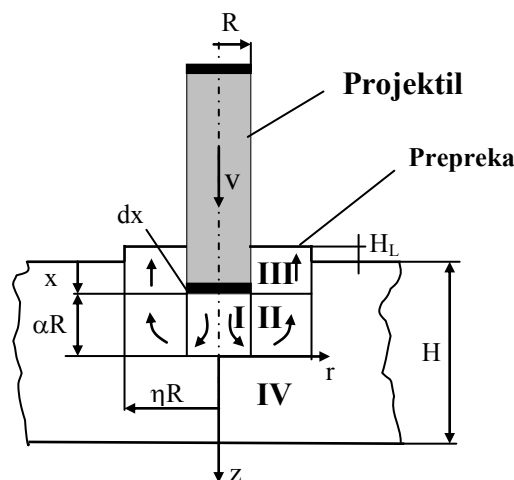
Prezentovani model probijanja prepreke predstavlja kombinaciju trofaznog modela [10] i *viskoplastičnog modela* razmatanog u [18]. Osnovni nedostatak trofaznog modela je korišćenje eksperimentalnih rezultata (odnosno empirijskih formula) za vrednosti uslovne dužine odsečka b i širine zone smicanja e . Zbog toga je iz [18] preuzet metod analitičkog određivanja ovih parametara na kraju prve faze i sintetizovan sa drugom i trećom fazom penetracije prema trofaznom modelu. Razmatrani pristup, dakle, predstavlja pokušaj formiranja zatvorenog analitičkog modela penetracije koji, što se tiče eksperimentalno dobijenih parametara, zahteva samo poznavanje mehaničkih karakteristika materijala prepreke.

4.2. Prva faza penetracije

Parametri kretanja penetratora u toku prve faze određuju se na osnovu *zakona o održanju energije*. Međutim, da bi se odredile vrednosti odgovarajućih radova pri plastičnom deformisanju, a time i relevantnih parametara penetracije, neophodno je najpre utvrditi karakteristike deformacionog polja u prvoj fazi.

4.2.1. Određivanje parametara deformacionog polja

Na osnovu eksperimentalnih opažanja, pretpostavlja se da odmah po otpočinjanju penetracije dolazi do tečenja materijala prepreke i stvaranja složenog polja plastičnih deformacija (sl. 4.2).



Sl. 4.2. Polje plastičnih deformacija u prvoj fazi sa karakterističnim zonama i dimenzijama

Uočavaju se četiri deformacione zone obeležene sa I, II, III i IV. Zona I nalazi se neposredno ispred projektila, cilindričnog je oblika sa poluprečnikom R (identičnom radijusu penetratora) i visinom αR . Zone II i III, oblika šupljeg cilindra, nalaze se radijalno od penetratora i zone I, pri čemu je njihov spoljni radijus ηR . Četvrta zona obuhvata sav preostali deo materijala prepreke i u njoj nema pomeranja, odnosno deformisanja materijala. Bezdimenzioni parametri α i η (koji su za sada nepoznate veličine) u potpunosti, dakle, određuju geometriju deformacionog polja.

Sledeći korak predstavlja utvrđivanje polja brzina u svakoj od zona, pri čemu se pretpostavlja *dvodimenzionalnost* ovog polja. Smatra se, naime, da je pomeranje i deformisanje materijala prepreke *osnosimetrično*, pa se uvođenjem polarno-cilindričnog koordinatnog sistema podrazumeva da je u bilo kojoj tački polja cirkularna komponenta brzine (normalna na ravan crteža) jednaka nuli. Vektor brzine pomeranja materijala prepreke \vec{v} ima dakle (najviše) dve komponente: radijalnu v_r i aksijalnu v_z . Za svaku od zona polje brzine (odnosno komponente v_r i v_z) određuje se induktivno, uz usvajanje određenih pretpostavki.

Ako se pretpostavi linearna promena aksijalne komponente brzine v_z u zoni I, kao i da ova komponenta zavisi samo od koordinate z (ne i od r), $v_z = v_z(z)$, uz poštovanje graničnih uslova¹

$$v_z(-\alpha R) = v, \quad v_z(0) = 0 \quad (4.1)$$

dobija se

¹ Pretpostavlja se da je aksijalna komponenta brzine materijala neposredno uz penetrator jednaka njegovoj brzini, dok je ova komponenta na samoj granici deformacione zone jednaka nuli.

$$v_z = -\frac{v}{\alpha R} z \quad (4.2).$$

Pretpostavka o nestišljivosti materijala prepreke ($\rho=const.$) svodi zakon o održanju mase (materijala prepreke) na oblik

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (4.3).$$

Kako je $v_\theta=0$, poslednja jednakost dobija oblik

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.4).$$

Rešavanjem linearne diferencijalne jednačine (4.4) za v_z određeno izrazom (4.2), i uz granični uslov $v_r(0)=0$, dobija se

$$v_r = \frac{v}{2\alpha R} r \quad (4.5).$$

Ovim je polje brzina u zoni I potpuno definisano.

U zoni III postoji samo aksijalna komponenta brzine koja nastaje usled istiskivanja materijala prepreke i ima smer suprotan smeru brzine penetratora v . Ako se sa H_L obeleži tekuća vrednost visine cilindričnog ispupčenja na prednjoj strani prepreke, onda na osnovu zakona o održanju mase sledi

$$\pi R^2 x = \pi H_L [(\eta R)^2 - R^2] \quad (4.6)$$

gde je x – trenutna vrednost dubine prodiranja. Iz (4.6) se dobija

$$H_L = \frac{x}{\eta^2 - 1} \quad (4.7)$$

odnosno,

$$v_z = -\frac{v}{\eta^2 - 1} \quad (4.8)$$

budući da je $\dot{x} = v$.

Konačno, u zoni II pretpostavlja se linearna promena aksijalne komponente brzine v_z , što uz zadovoljavanje graničnih uslova

$$v_z(0) = 0, \quad v_z(-\alpha R) = -\frac{v}{\eta^2 - 1} \quad (4.9)$$

dovodi do izraza

$$v_z = \frac{vz}{\alpha R(\eta^2 - 1)} \quad (4.10).$$

Uvođenjem izraza (4.10) u uslov (4.4) i rešavanjem dobijene diferencijalne jednačine, uz poštovanje graničnog uslova $v_r(\eta R) = 0$, dobija se

$$v_r = \frac{v(\eta^2 R^2 - r^2)}{2\alpha R r(\eta^2 - 1)} \quad (4.11)$$

čime je celokupno polje brzina u prvoj fazi penetracije u potpunosti određeno.

Uočava se da na graničnim površinama između zona postoji zahtevani kontinuitet brzina normalnih na ove površi, ali i diskontinuitet tangencijalnih komponenta brzine koji predstavlja uzrok smicanju duž ovih površi.

Na osnovu utvrđenog polja brzina lako se dobijaju brzine deformacija, s obzirom na izraze

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.12)$$

koji u usvojenom polarno-cilindričnom koordinatnom sistemu imaju oblik

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \dot{\epsilon}_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \\ \dot{\epsilon}_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (4.13')$$

Jednačine (4.13) predstavljaju brzine normalnih deformacija, dok jednačine (4.13') definišu brzine smicajnih deformacija (uglovi klizanja).

S obzirom na činjenicu da je u svim tačkama polja važi

$$v_\theta = 0, \quad v_r = v_r(r), \quad v_z = v_z(z)$$

jasno je na osnovu (4.13') da u samim zonama nema smicanja, odnosno da je u svim zonama

$$\dot{\epsilon}_{rz} = \dot{\epsilon}_{r\theta} = \dot{\epsilon}_{z\theta} = 0 \quad (4.14).$$

Izrazi za brzine normalnih deformacija za zone I, II, III i IV lako se dobijaju na osnovu jednačine (4.13), imajući u vidu ranije izvedene izraze za komponentne brzine u svim zonama. Vrednosti komponentnih brzina i odgovarajućih brzina deformacija u svim zonama pregledno su date u Tabeli 4.1.

4.2.2. Formulisanje zakona kretanja

Izloženi postupak omogućava indirektno određivanje napona tečenja materijala prepreke. Najpre se, na osnovu poznatih vrednosti komponenta tenzora brzine deformacija (Tabela 4.1), uvodi tzv. efektivna vrednost brzine deformacija

$$\dot{\epsilon}_n^{eff} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{V_n} \int \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV_n \quad (4.15)$$

odnosno, u konkretnom slučaju

$$\dot{\epsilon}_n^{eff} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{V_n} \int \sqrt{\dot{\epsilon}_{rr}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2} dV_n \quad (4.16)$$

gde je n – oznaka zone na koju se odnosi efektivna brzina deformacija, dok je V_n – zapremina odgovarajuće zone.

Izrazi za određivanje komponentnih brzina i nenulatih komponenata tenzora brzine deformacija u svim zonama za prvu fazu penetracije

Tabela 4.1.

Zona	POLJE BRZINA			BRZINE NORMALNIH DEFORMACIJA		
	v_r	v_θ	v_z	$\dot{\epsilon}_{rr}$	$\dot{\epsilon}_{\theta\theta}$	$\dot{\epsilon}_{zz}$
I	$\frac{vr}{2\alpha R}$	0	$-\frac{vz}{\alpha R}$	$\frac{v}{2\alpha R}$	$\frac{v}{2\alpha R}$	$-\frac{v}{\alpha R}$
II	$\frac{v(\eta^2 R^2 - r^2)}{2\alpha Rr(\eta^2 - 1)}$	0	$\frac{vz}{\alpha R(\eta^2 - 1)}$	$-\frac{v(\eta^2 R^2 + r^2)}{2\alpha Rr^2(\eta^2 - 1)}$	$\frac{v(\eta^2 R^2 - r^2)}{2\alpha Rr^2(\eta^2 - 1)}$	$\frac{v}{\alpha R(\eta^2 - 1)}$
III	0	0	$-\frac{v}{\eta^2 - 1}$	0	0	0
IV	0	0	0	0	0	0

Vrednost napona tečenja pri dinamičkim uslovima upravo je funkcija efektivne vrednosti brzine deformacija. U modelu je korišćen poznati izraz za vrednost efektivnog napona tečenja (tzv. napon ojačavanja) u obliku:

$$\sigma_y = \sigma_0(1 + C \log \dot{\epsilon}^{eff}) = \sigma_0 S(\dot{\epsilon}^{eff}) \quad (4.17)$$

gde je σ_0 – vrednost napona tečenja u kvazistacionarnim uslovima (što odgovara $\dot{\epsilon}^{eff} = 1$), dok je C – karakteristika materijala koja se utvrđuje eksperimentalnim putem (za $\dot{\epsilon}^{eff} \leq 1$, $C=0$). Napon tečenja σ_y definisan izrazom (4.17) je, dakle, funkcija efektivne vrednosti brzine deformacija i ima različite vrednosti u različitim zonama.

Ceo postupak vezan za određivanje brzinskog polja ima za cilj omogućavanje dobijanja vrednosti za $\dot{\epsilon}^{eff}$ i σ_y , definisanih jednačinama (4.16) i (4.17). Ove vrednosti su ključne za određivanje radova pri plastičnom deformisanju.

Vratimo se sada na osnovni problem određivanja parametara kretanja penetratora. Zakon o održanju energije u diferencijalnom obliku, primenjen na penetrator, glasi

$$dE_k = \sum_i \delta A_i \quad (4.18)$$

pri čemu je

$$E_k = \frac{1}{2} m_p v^2$$

kinetička energija penetratora, dok je $\sum_i \delta A_i$ - suma vrednosti radova svih sila koje se suprotstavljaju penetraciji. Veličine na obe strane jednačine (4.18) imaju negativne vrednosti. Ako se izvrši diferenciranje po vremenu jednačine (4.18), dobija se

$$-m_p v \dot{v} = -\sum_i \frac{\delta A_i}{dt} = \sum_i W_i \quad (4.19)$$

gde je $W_i = -\frac{\delta A_i}{dt}$ - disipacija snage penetratora na pojedinačne radove pri plastičnom deformisanju ($W_i > 0$).

Izraz (4.19) može se prevesti u bezdimenzioni oblik deljenjem sa referentnom vrednošću snage $W_{ref} = \sigma_0 \pi R^2 v$, dakle,

$$-\frac{\rho_p L \dot{v}}{\sigma_0} = \sum_i W'_i, \quad W'_i = \frac{W_i}{W_{ref}} \quad (4.20)$$

jer je $m_p = \rho_p \pi R^2 L$.

Jednačina (4.20) predstavlja zakon kretanja penetratora; da bi se ova jednačina rešila neophodno je odrediti sumu na njenoj desnoj strani.

4.2.3. Određivanje snage gubitaka

Izraz na desnoj strani jednačine (4.20) sastoji se od četiri sabirka, odnosno četiri disipacione snage pri plastičnom deformisanju:

- W_V – snaga utrošena na kompresiju (sabijanje) materijala prepreke određuje se na osnovu izraza

$$W_V^n = \int_{V_n} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = (\sigma_y)_n \dot{\epsilon}_n^{eff} V_n \quad (4.21)$$

za svaku od tri zone (n) posebno, pri čemu su efektivne vrednosti napona tečenja i brzine deformacija definisane izrazima (4.16) i (4.17).

- W_s je snaga utrošena na smicanje materijala na graničnim površinama između pojedinih zona. Ova snaga određena je izrazom

$$W_s^n = \frac{(\sigma_y)_m}{\sqrt{3}} \int_{A_m} |\Delta v_i| dA \quad (4.22)$$

gde A_m predstavlja površinu po kojoj se odvija smicanje, $|\Delta v_i|$ - apsolutnu vrednost razlike tangencijalnih komponentata brzine u susednim zonama, dok $(\sigma_y)_m$ odgovara manjoj od vrednosti $(\sigma_y)_n$ za susedne zone.

- W_f je snaga gubitaka usled trenja između penetratora i materijala prepreke u zonama I i III. Slično prethodnom izrazu za smicanje, ova snaga je određena formulom

$$W_f = \mu_l \frac{(\sigma_y)_3}{\sqrt{3}} \int_{A_3} |\Delta v_i| dA + \mu_f \frac{(\sigma_y)_1}{\sqrt{3}} \int_{A_1} |\Delta v_i| dA \quad (4.23)$$

gde je μ_l – koeficijent trenja između cilindrične (bočne) površine projektila i zone III, μ_f – koeficijent trenja između prednje ravne površine penetratora i zone I, A_3 i A_1 su cilindrična, odnosno kružna granična površina između penetratora i zone III, odnosno I.

- W_I – disipacija snage usled ubrzavanja materijala prepreke (savladavanja inercijalnih sila). Ova snaga (za zonu n) definisana je izrazom

$$W_I^n = \rho \int_{V_n} \left(\frac{D\vec{v}}{Dt}, \vec{v} \right) dV \quad (4.24)$$

Na osnovu izračunatih vrednosti za brzine i brzine deformacije (Tabela 3.1) moguće je rešiti integrale (4.21)...(4.24).

4.2.3.1. Snaga gubitaka usled sabijanja

Najpre će biti određena snaga W_V koja se rasipa u zonama I i II (za zone III i IV, $W_V=0$ zbog $\dot{\epsilon}^{eff} = 0$). Na osnovu izraza (4.16) lako se dobija efektivna vrednost brzine deformacija za zonu I:

$$\dot{\epsilon}_1^{eff} = \frac{v}{\alpha R} \quad (4.25)$$

Uvođenjem izraza (4.25) u izraz za snagu (4.21), dobija se

$$W_{V1} = \sigma_0 S_1 \pi R^2 v \quad (4.26)$$

Bezdimezionna vrednost ove snage je

$$W'_{V1} = S_1 \quad (4.27)$$

gde je $S_1 = S(\dot{\epsilon}_1^{eff})$.

Korišćenjem izvedenih vrednosti za brzinu deformacija u zoni II i rešavanjem integrala (4.16), dobija se vrednost efektivne brzine deformacija u ovoj zoni:

$$\dot{\epsilon}_2^{eff} = \frac{v}{\alpha R} \frac{f(\eta)}{\sqrt{3}(\eta^2 - 1)} \quad (4.28)$$

gde je

$$f(\eta) = 2\eta^2 - \sqrt{\eta^4 + 3} + \eta^2 \ln \frac{1}{3}(\sqrt{\eta^4 + 3} + \eta^2) \quad (4.29)$$

Na osnovu jednakosti (4.21) sledi vrednost W_{V2}

$$W_{V2} = \sigma_0 \pi R^2 v S_2 \frac{f(\eta)}{\sqrt{3}(\eta^2 - 1)} \quad (4.30)$$

ili, u bezdimezionnoj formi

$$W'_{V2} = S_2 \frac{f(\eta)}{\sqrt{3}(\eta^2 - 1)} \quad (4.31)$$

pri čemu je $S_2 = S(\dot{\epsilon}_2^{eff})$.

Sabiranjem dobijenih parcijalnih vrednosti (4.27) i (4.31) dobija se ukupna vrednost bezdimezione snage sabijanja

$$W'_V = S_1 + S_2 \frac{f(\eta)}{\sqrt{3}(\eta^2 - 1)} \quad (4.32).$$

4.2.3.2. Snaga gubitaka usled smicanja

Snaga utrošena na smicanje materijala prepreke po površinama koje predstavljaju granice između zona ima šest komponenata.

- Smicanje između zona II i III odvija se po ravnoj površini oblika kružnog prstena definisanog jednačinama $z = -\alpha R$, $r \in [R, \eta R]$. Apsolutna vrednost razlike brzina je

$|\Delta v| = \frac{v(\eta^2 R^2 - r^2)}{2\alpha R r(\eta^2 - 1)}$, dok je $(\sigma_y)_m = \sigma_0$ (za zonu III $\sigma_y = \sigma_0$). Uvođenjem ovih vrednosti u izraz (4.22) dobija se

$$W_{S2-3} = \pi R^2 \sigma_0 v \frac{2\eta^3 - 3\eta^2 + 1}{3\sqrt{3}(\eta^2 - 1)\alpha}$$

odnosno, u bezdimenzionom obliku

$$W'_{S2-3} = \frac{2\eta^3 - 3\eta^2 + 1}{3\sqrt{3}(\eta^2 - 1)\alpha} \quad (4.33)$$

- Za smicanje između zona II i IV po ravnoj prstenastoj površini $z=0$, $r \in [R, \eta R]$ važi identično rezonovanje kao u prethodnom slučaju, dakle,

$$W'_{S2-4} = \frac{2\eta^3 - 3\eta^2 + 1}{3\sqrt{3}(\eta^2 - 1)\alpha} \quad (4.34)$$

- Između zona III i IV smicanje se odvija po cilindričnoj površini $r=\eta R$, $z \in [-\alpha R - x, -\alpha R]$.

Važi $|\Delta v| = \frac{v}{\eta^2 - 1}$, odakle se integracijom izraza (4.22) dobija

$$W_{S3-4} = \frac{\pi R^2 \sigma_0 v}{\sqrt{3}(\eta^2 - 1)} 2\eta \frac{x}{R}, \text{ odnosno u bezdimenzionom obliku}$$

$$W'_{S3-4} = \frac{\eta}{\sqrt{3}(\eta^2 - 1)} \frac{2x}{R} \quad (4.35)$$

- Između zona II i IV postoji smicanje i po cilindričnoj površini $r=\eta R$, $z \in [-\alpha R, 0]$, pri

$|\Delta v| = \frac{vz}{\alpha R(\eta^2 - 1)}$. Dobija se

$$W_{S2-4C} = \pi R^2 \sigma_0 v \frac{\eta \alpha}{\sqrt{3}(\eta^2 - 1)}$$

odnosno

$$W_{S2-4C} = \frac{\eta \alpha}{\sqrt{3}(\eta^2 - 1)} \quad (4.36)$$

- Smicanje između zona I i IV odvija se po kružnoj površi $z=0$, $r \in [0, R]$. Apsolutna vrednost razlike brzina je $|\Delta v| = \frac{vr}{2\alpha R}$, odakle na osnovu (4.22) sledi

$$W_{S1-4} = \frac{\pi R^2 \sigma_0 v}{3\sqrt{3}\alpha}, \text{ tj.}$$

$$W'_{S1-4} = \frac{1}{3\sqrt{3}\alpha} \quad (4.37)$$

- Konačno, smicanje između zona I i II vrši se po cilindričnoj površini $r=R$, $z \in [-\alpha R, 0]$, pri čemu je $|\Delta v| = \frac{vz}{\alpha R} + \frac{vz}{\alpha R(\eta^2 - 1)}$, što daje

$$W_{S_{1-2}} = \frac{\pi R^2 \sigma_0 v S_{\min} \eta^2 \alpha}{\sqrt{3}(\eta^2 - 1)}, \text{ odnosno}$$

$$W'_{S_{1-2}} = \frac{S_{\min} \eta^2 \alpha}{\sqrt{3}(\eta^2 - 1)} \quad (4.38)$$

gde je $S_{\min} = \min(S_1, S_2)$.

Sabiranjem dobijenih vrednosti za parcijalne disipativne snage pri smicanju (4.33)-(4.38), dobija se ukupna snaga u bezdimenzionom obliku

$$W'_S = \frac{\eta}{\sqrt{3}(\eta^2 - 1)} \left[\frac{2x}{R} + \alpha(1 + \eta S_{\min}) + \frac{4\eta^3 - 5\eta^2 + 1}{3\alpha\eta} \right] \quad (4.39).$$

4.2.3.3. Snaga gubitaka usled trenja

Disipacija snage usled savladavanja sila trenja između penetratora i prepreke određuje se razmatranjem dve komponente koje je determinišu.

- Prva komponenta odnosi se na gubitke snage usled trenja između prednjeg dela penetratora i zone I i određena je izrazom

$$W_{f1} = \mu_f \frac{\sigma_0 S_1}{\sqrt{3}} \int_{A_1} |\Delta v| dA \quad (4.40)$$

pri čemu je $|\Delta v| = \frac{vr}{2\alpha R}$, dok je kružna površina A_1 određena jednačinama $z = -\alpha R$, $r \in [0, R]$. rešavanjem integrala (4.40) lako se dobija da je

$$W_{f1} = \mu_f \frac{\pi R^2 \sigma_0 v S_1}{3\sqrt{3}\alpha}, \text{ ili u bezdimenzionoj formi}$$

$$W'_{f1} = \frac{\mu_f S_1}{3\sqrt{3}\alpha} \quad (4.41)$$

- Druga komponenta definiše snagu gubitaka usled bočnog trenja duž cilindrične površi $r=R$, $z \in [-\alpha R - p, -\alpha R]$ i određena je integralom

$$W_{f2} = \mu_l \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_{A_2} |\Delta v| dA \quad (4.42)$$

pri čemu je $|\Delta v| = \frac{v}{\eta^2 - 1} + v$. Lako se dobija

$$W_{f2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \mu_l \pi R^2 \sigma_0 v \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \frac{p}{R}, \text{ odnosno}$$

$$W'_{f2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \mu_l \frac{p}{R} \quad (4.43)$$

gde je p dužina dela projektila koji se nalazi u kontaktu sa preprekom

$$p = \begin{cases} x + H_L, & x \leq L - H_L \\ L, & x > L - H_L \end{cases}$$

Sabiranjem izraza (4.41) i (4.43) dobija se konačna bezdimenziona snaga gubitaka usled trenja

$$W'_f = \frac{\mu_f S_1}{3\sqrt{3}\alpha} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \mu_l \frac{p}{R} \quad (4.44).$$

4.2.3.4. Snaga gubitaka usled savladavanja inercijalnih sila

Snaga gubitaka usled savladavanja inercijalnih sila materijala prepreke, tj. snaga utrošena na ubrzavanje dela materijala prepreke u datoj zoni (n), određena je sa

$$W_I^n = - \int_{V_n} (d\vec{F}_{in}, \vec{v}) = \int_{V_n} (dm \dot{\vec{v}}, \vec{v}) = \rho \int_{V_n} (\dot{\vec{v}}, \vec{v}) dV \quad (4.45)$$

Imajući u vidu da je brzina \vec{v} funkcija vremena, ali i prostornih koordinata $\vec{v} = \vec{v}(r, \theta, z, t)$, u izrazu (45) neophodno je pod izvodom brzine $\dot{\vec{v}}$ podrazumevati totalni izvod (koji se sastoji od lokalnog i konvektivnog dela)

$$\dot{\vec{v}} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \quad (4.46)$$

S obzirom da vektor brzine ima oblik

$$\vec{v} = v_r \vec{r}_0 + v_\theta \vec{\theta}_0 + v_z \vec{k} \quad (4.47)$$

izraz (46) u polarno-cilindričnim koordinatama postaje

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}}{Dt} = & \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \vec{r}_0 + \\ & + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \vec{\theta}_0 + \\ & + \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Budući da je u svim zonama važi

$$v_\theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad (4.49)$$

opšti izraz (4.48) se znatno pojednostavljuje i svodi na oblik

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \vec{r}_0 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \vec{k} \quad (4.50)$$

Množenjem izraza (47) i (50) dobija se

$$\left(\frac{D\vec{v}}{Dt}, \vec{v} \right) = \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left(v_r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (4.51)$$

Analiziranjem poslednjeg izraza uočava se da je snagu W_I moguće predstaviti kao zbir dva člana od kojih je prvi (u bezdimenzionoj formi) proporcionalan ubrzanju \dot{v} - dinamički član W'_d , a drugi kvadratu brzine v^2 - kinetički član W'_k . Dakle,

$$W'_I = W'_d + W'_k \quad (4.52)$$

odredimo najpre dinamičku komponentu za svaku od zona. Na osnovu izraza (4.45) dobija se

$$W_d^n = \rho \int_{V_n} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) dV \quad (4.53).$$

Za zonu I integracijom desne strane izraza (4.53) dobija se

$$W_{d1} = \pi \rho R^3 v \dot{\gamma} \left(\frac{1}{8\alpha} + \frac{\alpha}{3} \right) \quad (4.54).$$

U zoni II jednačina (4.53) dobija oblik

$$W_{d2} = \pi \rho R^3 v \dot{\gamma} \left[\frac{4\eta^4 \ln \eta - 3\eta^4 + 4\eta^2 - 1}{8\alpha(\eta^2 - 1)} + \frac{\alpha}{3(\eta^2 - 1)} \right] \quad (4.55)$$

dok je u zoni III

$$W_{d3} = \pi \rho R^3 v \dot{\gamma} \frac{\eta^2}{(\eta^2 - 1)^2} \frac{x}{R} \quad (4.56).$$

Sabiranjem vrednosti izraza (4.54)...(4.56) i deljenjem sa referentnom snagom dobija se bezdimenzioni oblik dinamičke komponente snage gubitaka usled savladavanja inercijalnih sila

$$W'_d = \frac{\rho v R}{\sigma_0} g_2(\alpha, \eta) \quad (4.57)$$

$$\text{gde je } g_2(\alpha, \eta) = \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \left[\frac{1}{\eta^2 - 1} \frac{x}{R} + \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{4\alpha} \left(\frac{2\eta^2 \ln \eta}{\eta^2 - 1} - 1 \right) \right] \quad (4.58).$$

Kinetička komponenta disipacije snage za svaku od zona određuje se prema izrazu

$$W_k^n = \rho \int_{V_n} \left(v_r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV \quad (4.59).$$

Za zonu I rešavanjem integrala (4.59) dobija se

$$W_{k1} = \pi R^2 \rho v^3 \left(\frac{1}{16\alpha^2} - \frac{1}{3} \right) \quad (4.60)$$

za zonu II važi

$$W_{k2} = \pi R^2 \rho v^3 \left[\frac{1}{3(\eta^2 - 1)^2} - \frac{1}{16\alpha^2(\eta^2 - 1)^3} (2\eta^6 - 3\eta^4 + 2\eta^2 - 1 - 4\eta^4 \ln \eta) \right] \quad (4.61)$$

dok je u zoni III, zbog $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$,

$$W_{k3} = 0 \quad (4.62)$$

Sabiranjem vrednosti parcijalnih disipacija snage (4.60)-(4.62) i svodenjem na bezdimenzionu formu, dobija se

$$W'_k = \frac{\rho v^2}{\sigma_0} g_1(\alpha, \eta) \quad (4.63)$$

$$\text{gde je } g_1(\alpha, \eta) = \frac{1}{16\alpha^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3(\eta^2 - 1)^2} - \frac{1}{16\alpha^2(\eta^2 - 1)^3} (2\eta^6 - 3\eta^4 + 2\eta^2 - 1 - 4\eta^4 \ln \eta) \quad (4.64)$$

Ovim su potpuno definisani svi gubici snage u jednačini (4.20), što omogućava njeno rešavanje.

4.2.4. Određivanje parametara kretanja penetratora

Osnovna jednačinu kretanja (4.20) sada se može pisati u obliku

$$-\left(\frac{\rho_p L}{\sigma_0} + \frac{\rho R}{\sigma_0} g_2(\alpha, \eta)\right) \dot{v} = W'_V + W'_S + W'_f + W'_k \quad (4.65)$$

odnosno,

$$-\frac{\rho_p L + \rho R g_2}{\sigma_0} \dot{v} = W'_T \quad (4.66)$$

gde je $W'_T = W'_V + W'_S + W'_f + W'_k$.

Jednačina (4.66) predstavlja u stvari zakon kretanja penetratora; pri tome se dinamička komponenta snage gubitaka W_d , odnosno član $\frac{\rho R g_2}{\sigma_0}$ na levoj strani jednačine, može smatrati

reprezentom uslovno pridodate mase materijala prepreke samom penetratoru. Nepoznate vrednosti koeficijenata α i η određuju se minimizacijom izraza za ukupnu snagu gubitaka W'_T na desnoj strani jednačine (4.66). Pretpostavlja se, dakle, da će se od svih mogućih deformacionih polja (čije su dimenzije određene upravo koeficijentima α i η) realizovati ono za čije je stvaranje gubitak energije minimalan. Drugim rečima, stvarne dimenzije deformacionih zona korespondiraju minimalnom otporu penetraciji. Dinamička komponenta snage gubitaka W'_d pri tome predstavlja neminovan gubitak usled ubrzavanja materijala prepreke, pa stoga ne podleže minimizaciji. Posle određivanja vrednosti koeficijenata α i η , svi gubici snage W'_i postaju funkcija pomeranja penetratora x i njegove brzine $v = \dot{x}$. Dakle, jednačina (4.66) je nelinearna diferencijalna jednačina drugog reda po promenljivoj x , koju međutim zbog složenosti izraza za W'_i nije moguće rešiti analitički. Stoga je neophodno primeniti numerički postupak rešavanja i to na sledeći način:

Za pretpostavljeno malo pomeranja penetratora Δx uz poznatu brzinu v , minimizuje se vrednost ukupne snage gubitaka W'_T i na taj način se dobijaju vrednosti koeficijenata α i η . Zatim se iz jednačine (4.66) određuje vrednost ubrzanja \dot{v} . Ako se pretpostavi da je na malom pomeranju Δx kretanje jednakoubrazano (tj. jednakousporeno, jer je $\dot{v} < 0$) tada važi

$$\Delta x = v(x) \Delta t + \frac{1}{2} \dot{v} (\Delta t)^2 \quad (4.67)$$

gde je $v(x)$ – brzina penetratora u prethodnom položaju x , odnosno trenutku t . Rešavanjem jednačine (4.67) dobija se vremenski interval trajanja pomeranja za Δx

$$\Delta t = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2\dot{v}\Delta x}}{\dot{v}} \quad (4.68)$$

Brzina u trenutku $t + \Delta t$ (položaj $x + \Delta x$) je

$$v(x + \Delta x) = v(x) + \dot{v} \Delta t \quad (4.69)$$

dok je ukupna sila otpora prepreke

$$F = -m_p \dot{v} \quad (4.70)$$

Ovakvim postupkom mogu se odrediti promene svih relevantnih veličina: vremena t , položaja penetratora x , brzine v , ubrzanja \dot{v} i sile otpora F . Pri tome su poznati početni uslovi

$$t = 0, \quad x = 0, \quad v = v_0.$$

Prva faza se završava kada zona I deformacionog polja dosegne zadnju stranu prepreke, tj. kada je

$$x + \alpha R = H, \quad x = x_0 \quad (4.71)$$

U tom trenutku koeficijenti α i η dostižu maksimalne vrednosti α_0 i η_0 , koje definišu širinu zone smicanja (koja se u daljem toku penetracije ne menja)

$$e = R(\eta_0 - 1) \quad (4.72)$$

i uslovnu dužinu odsečka

$$b = H - x_0 \quad (4.73).$$

Ove dve veličine, kako je već naglašeno, predstavljaju važne parametre za proračun penetracionog procesa u narednim fazama.

4.3. Druga i treća faza penetracije

U toku druge faze penetracije (slika 4.1) dolazi do formiranja vrlo složenog deformacionog polja, što uslovljava drugačiji, znatno pojednostavljen pristup određivanju parametara kretanja penetratora. Dalja analiza praktično se ne razlikuje od razmatranja druge i treće faze u *trofaznom* modelu [10]. Osnovna specifičnost ove faze je stvaranje cilindričnog odsečka postepenim dodavanjem materijala prepreke penetratoru. Na kraju druge faze cela masa cilindričnog dela materijala prepreke ispred penetratora ima brzinu identičnu brzini penetratora i ne trpi dalja naprezanja u smislu sabijanja. Nova promenljiva koja definiše pomeranje y (u početnom trenutku druge faze je $y=0$) predstavlja položaj fronta materijala prepreke koji se dodaje penetratoru i ima brzinu v (pretpostavlja se da preostali deo materijala mete, izuzev cilindrične zone smicanja, miruje)¹. Na osnovu analize trofaznog modela penetracija (odjeljak 3.3), ovde će biti data konačna jednačine kretanja efektivne mase penetratora u drugoj fazi procesa

$$\frac{dv}{dy} = \frac{-1}{\rho_p L v} \left[\sigma_c \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{5}{4} \rho v^2 + 2 \frac{y}{R} \left(\tau_0 + \mu \frac{v}{e} \right) \right] \quad (4.74).$$

Ova nelinearna diferencijalna rešava se numerički², čime se utvrđuje zavisnost

$$v = v(y) \quad (4.75)$$

Ubrzanje i sila otpora definisani su izrazima

$$\dot{v}(y) = \frac{dv}{dy} v(y) \quad (4.76)$$

$$i \quad F(y) = -m(y)\dot{v}(y) \quad (4.77)$$

gde je $m(y) = m_p + \rho \pi R^2 y$ - trenutna efektivna masa penetratora.

Vreme koje odgovara pomeranju y definisano je integralom

¹ U drugoj fazi se napušta pretpostavka o nestišljivosti materijala prepreke ($\rho \neq \text{const.}$). Zbog toga nije moguće utvrditi položaj vrha penetratora, već samo prednjeg dela efektivne mase, što međutim nije relevantno za proračun osnovnih parametara penetracije.

² Pri čemu se koristi početni uslov $y=0, v(y)=v_1, v_1$ - brzina penetratora na kraju prve faze.

$$t(y) = \int_0^y \frac{dy}{v(y)} \quad (4.78)$$

Na taj način određeni su svi relevantni parametri penetracije u drugoj fazi, koja se završava kada se ispuni uslov

$$x_0 + y = H, \text{ tj. } y = y_0 = b \quad (4.79).$$

Treća faza penetracije započinje u trenutku u kom je odsečak potpuno formiran i završava se njegovim potpunim odvajanjem od ostatka materijala prepreke. Analogno analizi u odeljku 3.3, dobijaju se zakon promene brzine, pomeranje, ubrzanje i sila otpora u funkciji vremena u trećoj fazi

$$v(t) = \left(v_2 + \frac{\tau_0 e}{\mu} \right) \exp\left(-\frac{2\mu\pi Rb}{me} t \right) - \frac{\tau_0 e}{\mu} \quad (4.80)$$

$$z(t) = \left(v_2 + \frac{\tau_0 e}{\mu} \right) \frac{me}{2\mu\pi Rb} \left[1 - \exp\left(-\frac{2\mu\pi Rb}{me} t \right) \right] - \frac{\tau_0 e}{\mu} t \quad (4.81)$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{2\mu\pi Rb}{me} \left(v_2 + \frac{\tau_0 e}{\mu} \right) \exp\left(-\frac{2\mu\pi Rb}{me} t \right) \quad (4.82)$$

$$F(t) = -m\dot{v}(t) = 2\pi Rb \left(\tau_0 + \frac{v_2 \mu}{e} \right) \exp\left(-\frac{2\mu\pi Rb}{me} t \right) \quad (4.83).$$

gde je v_2 – brzina na kraju druge faze, odnosno početna brzina za treću fazu, pri čemu je usvojeno $z(0)=0$.

Treća faza (odnosno ceo proces penetracije) završava se kada deformacija (ugao klizanja) dostigne kritičnu vrednost, tj. kada je ispunjen uslov

$$\gamma = \gamma_f \quad (4.84).$$

S obzirom da je $\gamma = \frac{z}{e}$, najveća vrednost pomeranja z je

$$z_f = e\gamma_f \quad (4.85).$$

U tom trenutku penetrator i odsečak imaju brzinu v_f , koja se s obzirom na odsustvo otpora pri daljem kretanju, može smatrati *izlaznom brzinom*. Ukupno vreme probijanja koje se računa od trenutka udara penetratora u prepreku do izlaska dna odsečka, određeno je izrazom

$$t_f = t_1 + t_2 + t_3 + \frac{b - z_f}{v_f} \quad (4.86)$$

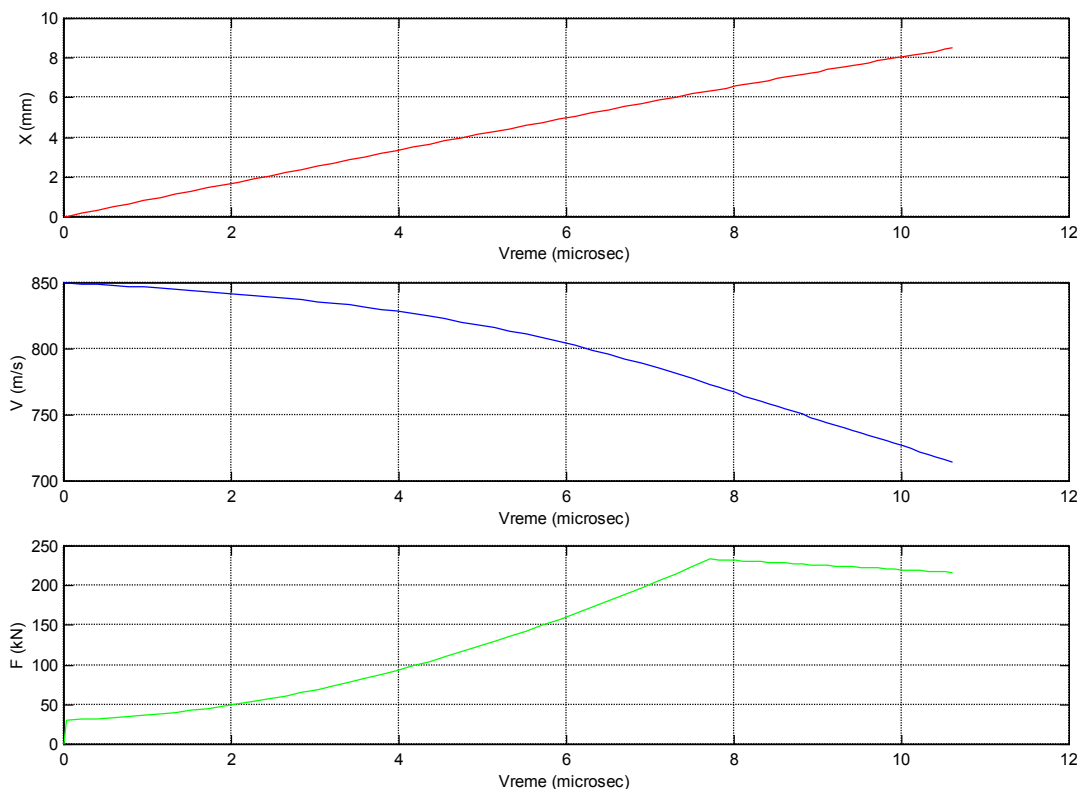
gde su t_i – trajanja pojedinih faza, $i=1, 2, 3$.

Vreme trajanja penetracije do trenutka izlaska dna penetratora iz prepreke dato je sa

$$T_f = t_f + \frac{L}{v_f} \quad (4.87).$$

Ovim je u potpunosti definisan metod određivanje svih parametara penetracije prema dvodimenzionalnom modelu.

Tipična promena parametara kretanja penetratora (efektivne mase) i sile otpora prepreke predstavljena je dijagramom na sl. 4.3.



Sl. 4.3. Zavisnost pomeranja i brzine penetratora (odnosno efektivne mase), kao i sile otpora prepreke od vremena (probijanje čelične prepreke debljine 6.35 mm penetratorom od volframa prečnika 6.1 mm pri udarnoj brzini 850 m/s)

Razmatrani dvodimenzionalni model probijanja viskoplastičnih prepreka krutim penetratorom baziran je primeni zakona o održanju energije penetratora i zakona o promeni količine kretanja efektivne mase i ima sledeće karakteristike:

- Osnovni rezultat analitičkog modela je koncept određivanja parametara kretanja penetratora u *prvoj fazi* penetracije, čime se obezbeđuje izračunavanje važnih parametara koji determinišu dalji tok procesa.
- Model obezbeđuje veoma dobro podudaranje prediktivnih i eksperimentalno dobijenih parametara penetracije.
- Model ne zahteva korišćenje specifičnih eksperimentalnih podataka vezanih za proces probijanja; koriste se, naime, samo osnovne mehaničke karakteristike materijala prepreke pod dejstvom dinamičkog opterećenja.

5. ZAKLJUČAK

U radu je razmatran problem probijanja metalnih ploča kinetičkim penetratorom. Značaj proučavanja procesa probijanja je u njegovoj neposrednoj praktičnoj primeni koja se odnosi kako na optimalnu konstrukciju projektila, tako i na projektovanje pancirne zaštite.

U uvodnom poglavlju najpre je definisan problem penetracije, kao i značaj njegovog rešavanja, te moguće primene. Razmatrane su vrste prepreka i penetratora, kao i tipovi penetracionih procesa i različiti pristupi rešavanju problema penetracije. Osim toga, u uvodnom delu su definisani i osnovni pojmovi vezani za analizu penetracionih procesa i ukazano je na značaj tretiranja osobina materijala pri razmatranju probijanja.

U drugom poglavlju predstavljene su najznačajnije empirijske relacije koja omogućavaju određivanje parametara penetracije u odgovarajućim domenima.

Treće poglavlje, koje čini najobimniju i najznačajniju celinu rada, posvećeno je razmatranju probijanja tankih prepreka. Veoma detaljno su analizirana četiri relevantna analitička pristupa probijanju tankih metalnih ploča – deformaciono-energetski model, strukturni model, trofazni model i model deformacionih talasa. Razmatrana su naponska i deformaciona stanja, ključni fizički mehanizmi procesa, uslovi smenjivanja faza, kriterijumi završetka probijanja i sl. Ukazano je na prednosti i nedostatke svakog modela i naznačeni su domeni njihove efikasne primene. Predstavljena je modifikacija modela deformacionih talasa sa deformabilnim penetratorom koja u kvalitativnom i kvantitativnom smislu daje znatno bolje rezultate i predstavlja poboljšanje izvornog modela.

Četvrto poglavlje je koncentrisano na analizu probijanja prepreka značajne debljine. Razmatran je dvodimenzionalni model penetracije koji predstavlja bitno poboljšanje trofaznog modela. Suština modifikacije je u kompleksnijem pristupu prvoj fazi penetracije, za koju je formiran složen matematički model koji ne zahteva poznavanje parametara procesa koje bi bilo neophodno eksperimentalno utvrđivati.

Rad, dakle, daje pregled relevantnih empirijskih i analitičkih modela za određene klase problema probijanja. Detaljna analiza razmotrenih modela omogućava realizaciju odgovarajućih kompjuterskih programa koji predstavljaju korisno metodološko sredstvo pri projektovanju projektila, odnosno balističke zaštite.

Razmatrani modeli mogu da posluže kao osnova za rešavanje problema probijanja i u znatno složenijim uslovima, kao što su: različiti oblici prednjeg dela penetratora, kos udar penetratora u prepreku, nenulti napadni ugao, zakrivljena i pokretna prepreka i sl. Analitička istraživanja takođe se u izvesnoj meri mogu proširiti i na probleme koje karakterišu drugačiji tipovi procesa, na probijanje nemetalnih i višeslojnih prepreka, na veće udarne brzine penetratora, probijanje potkalibarnim penetratorom velike vitkosti itd. Uključujući objedinjavanje eksperimentalnog, numeričkog i analitičkog pristupa, to su ujedno i osnovne smernice za dalja istraživanja problema penetracije.

6. LITERATURA

1. Zukas J.A.
IMPACT DYNAMICS
John Wiley and Sons, New York, 1982
2. Corbett G.G., Reid S.R., Johnson W.
IMPACT LOADING OF PLATES AND SHELLS BY FREE-FLYING PROJECTILES
Int. J. Impact Engng, 1996, Vol. 18, No. 2, 41-230
3. Neilson A.J.
EMPIRICAL EQUATIONS FOR THE PERFORATION OF MILD STEEL PLATES
Int. J. Impact Engng, 1985, Vol. 3, No. 2, p. 137-142
4. Lloyd R.M.
VULNERABILITY MODELING, in PHYSICS OF DIRECT HIT AND NEAR MISS
WARHEAD TECHNOLOGY
Progress in Astronautics and Aeronautics, 194, 2001
5. Merzhievsky L.A.
STATISTICAL CHARACTERISTICS OF A DEBRIS CLOUD BEHIND A SHIELD
Int. J. Impact Engng, 1997, Vol 20, 569-577
6. Lundin S.J.
ENGINE DEBRIS FUSELAGE PENETRATION TESTING, PHASE II
Office of Aviation Research, 2002
7. Nixdorff K.
DISCUSSION OF TWO THEORIES ON THE PENETRATION OF MULTILAYER
METALLIC TARGETS
Transactions of CSME, 1987, Vol. 11, No. 3, 161-178
8. Woodward R.L., de Morton M.E.
PENETRATION OF TARGETS BY FLAT-ENDED PROJECTILES
Int. J. Mech. Sci, 1976, Vol. 18, 119-127
9. Woodward R.L.
A STRUCTURAL MODEL FOR THIN PLATE PERFORATION BY NORMAL IMPACT
OF BLUNT PROJECTILES
Int. J. Impact Engng, 1987, Vol. 6, No. 2, 129-140
10. Awerbuch J., Bodner, S.R.
ANALYSIS OF THE MECHANICS OF PERFORATION OF PROJECTILES IN
METALLIC PLATES
Int. J. Solids Structures, 1974, Vol. 10, 671-684
11. Awerbuch J., Bodner S.R.
EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF NORMAL PERFORATION OF PROJECTILES
IN METALLIC PLATES
Int. J. Solids Structures, 1974, Vol. 10, 685-699

12. Nixdorff, K.
SOME REMARKS ON THE PENETRATION THEORY OF J. AWERBUCH AND S.R. BODNER
Transactions of CSME, 1984, Vol. 8, No. 1, 16-20
13. Liss J., Goldsmith W., Kelly J.M.
A PHENOMENOLOGICAL PENETRATION MODEL OF PLATES
Int. J. Impact Engng, 1983, Vol. 1, No. 4, 321-341
14. Liss J., Goldsmith W.
PLATE PERFORATION PHENOMENA DUE TO NORMAL IMPACT BY BLUNT CYLINDERS
Int. J. Impact Engng, 1984, Vol. 2, No. 1, 37-64
15. Elek P.
PRILOG PROUČAVANJU PROBIJANJA METALNIH PREPREKA KINETIČKIM PENETRATOROM, magistarski rad
Mašinski fakultet u Beogradu, 2002.
16. Jaramaz S., Micković D.
ISTRAŽIVANJE PROBOJNOSTI METALNIH PLOČA KORIŠĆENJEM SIMULATORA FRAGMENTA RAZORNIH BOJEVIH GLAVA
TR-171/2000, Institut za vojno mašinstvo, Beograd, 2000.
17. Landkof B., Goldsmith W.
PETALLING OF THIN METALLIC PLATES DURING PENETRATION BY CYLINDRO-CONICAL PROJECTILES
Int. J. Solids Structures, 1985, Vol 21, No. 3, 245-266,
18. Ravid M., Bodner S.R.
DYNAMIC PERFORATION OF VISCOPLASTIC PLATES BY RIGID PROJECTILES
Int. J. Engng. Sci, 1983, Vol. 21, No. 6, 577-591
19. Backman M.E., Goldsmith W.
THE MECHANICS OF PENETRATION OF PROJECTILES INTO TARGETS
Int. J. Engng. Sci, 1978, Vol. 10, , 1-99
20. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.
ON THE ORDER OF PLATES PROVIDING THE MAXIMUM BALLISTIC LIMIT VELOCITY OF A LAYERED ARMOR
Int. J. Impact Engng, 1999, Vol. 22, 741-755
21. Bodner S.R.
UNIFIED PLASTICITY – AN ENGINEERING APPROACH
Wright-Paterson Air Force Base, 2000.
22. Calder C.A., Goldsmith W.
PLASTIC DEFORMATION AND PERFORATION OF THIN PLATES RESULTING FROM PROJECTILE IMPACT
Int. J. Solids Structures, 1971, Vol. 7, 863-881
23. Dehn J.
THE PARTICLE DYNAMICS OF TARGET PENETRATION
BRL report, 1979
24. Goldsmith, W.
IMPACT: THE THEORY OF PHYSICAL BEHAVIOR OF COLLIDING SOLIDS
Dover publications, 2001

25. Goldsmith W., Finnegan S.A.
NORMAL AND OBLIQUE IMPACT OF CYLINDRO-CONICAL AND CYLINDRICAL
PROJECTILES ON METALLIC PLATES
Naval Weapons Center, 1985
26. Jenq S.T., Goldsmith W.
EFFECT OF TARGET BENDING IN NORMAL IMPACT OF A FLAT-ENDED
CYLINDRICAL PROJECTILE NEAR THE BALLISTIC LIMIT
Int. J. Solids Structures, 1988, Vol. 24, No. 12, 1243-1266
27. Jonas G.H., Zukas J.A.
MECHANICS OF PENETRATION: ANALYSIS AND EXPERIMENT
Int. J. Eng. Sci, 1978, Vol. 16, 879-903
28. Recht R.F.
TAYLOR BALLISTIC IMPACT MODELLING APPLIED TO DEFORMATION AND
MASS LOSS DETERMINATION
Int. J. Engng. Sci, 1978, Vol. 16, 809-827
29. Stamatović A.
KONSTRUISANJE PROJEKTILA
Ivexy, Beograd, 1995.