Istorijski razvoj Darsi-Vaisbahove jednačine za otpor strujanju fluida kroz cevovode

Srbislav Genić, Branislav Jaćimović, Zoran Trifković, Igor Martić

U članku je prikazan istorijski razvoj Darsi-Vaisbahove jednačine za otpor strujanju fluida kroz cevovode. Dat je kratki pregled evolucije izračunavanja koeficijenta trenja kroz doprinose niza istraživača i inženjera.

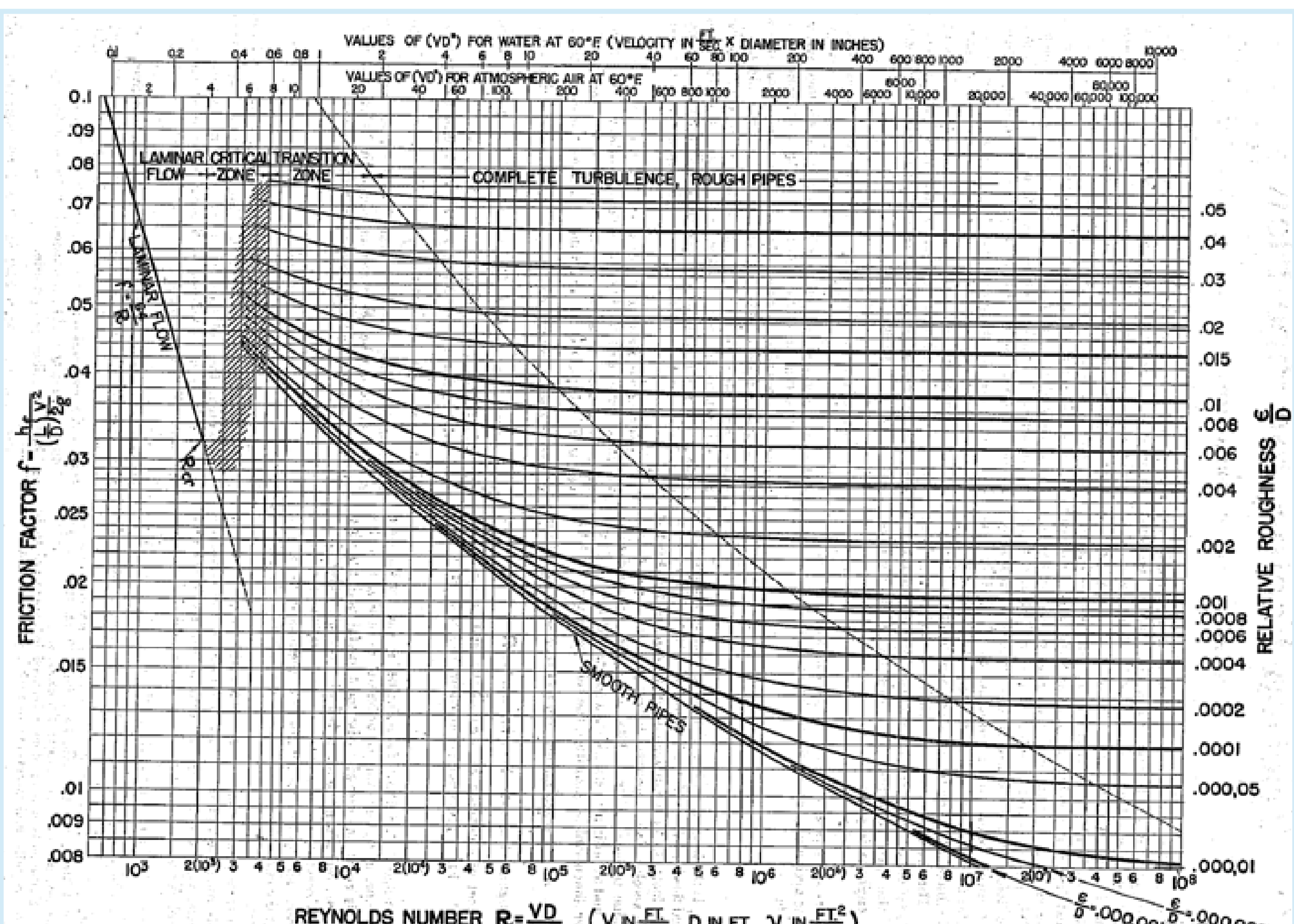
1 UVOD

Za potrebe inženjerskih proračuna hidraulike cevovoda i kanala neophodno je poznavanje veze između protoka, pritiska, temperature i vrste fluida (čime su definisana i njegova svojstva) i dimenzija strujnog kanala (prečnik cevovoda, itd.) i drugih karakteristika cevovoda (materijal, stanje površine, itd.).

Ono što se u današnje vreme naziva Darsi-Vaisbahova jednačina u kombinaciji sa Mudijevim dijagramom (slika 1) je opšte prihvaćen metod za izračunavanje gubitaka energije usled strujanja fluida kroz cevovode. U kombinaciji sa jednačinom kontinuiteta, energijskom jednačinom i jednačinama ili podacima u vezi lokalnih otpora, dobija se zatvoreni sistem jednačina pomoću koga se mogu sprovoditi konkretni hidraulički proračuni cevovoda, kanala, itd.

Ovaj sistem jednačina daje odgovore na pitanja kao što su: koliki je transportni kapacitet naftovoda ili gasovoda, koliki treba da je prečnik cevovoda za odgovarajući protok vode kroz toplovod, ili koliki je pad pritiska u ventilacionom kanalu. Jednom rečju, kombinacija Darsi-Vaisbahove jednačine i Mudijevog dijagrama je neophodna za odgovore koje inženjeri treba da pruže kod sistema za transport fluida.

Darsi-Vaisbahova jednačina je imala dug razvoj, započet u 18. veku, a koji se nastavlja do današnjih dana. Iako je



Slika 1. Mudijev dijagram [1]

jednačina nazvana po prezimenima dva velika inženjera 19. veka, mnogi drugi su takođe imali značajan doprinos u njenom razvoju i u ovom tekstu ćemo pokušati da prikažemo razvoj jednačine, kao i da ukratko predstavimo pojedinačne doprinose važnijih inženjera i naučnika koji su ostavili značajan rad u ovoj oblasti. Kao i u bilo kom drugom istorijskom pregledu neke teme, mnogi istraživači od manjeg značaja neće biti pomenuti. Takođe, u tekstu se koristi sistem oznaka koji je u današnje vreme opšte prihvaćen, a koji se razlikuje od označavanja u originalnim radovima istraživača koji će biti citirani.

2 PREGLED ZNANjA U OBLASTI OTPORA STRUJANjU FLUIDA DO SREDINE 19. VEKA - VAISBAHOVOG RADA

Korišćenje vode za domaćinstva u ljudskim naseljima, za potrebe navodnjavanja poljoprivrednih površina i pokretanje mehaničkih naprava je razvijeno od strane drevnih naroda. Praktična znanja iz hidraulike su imali Egipćani, i narodi koji su živeli u Persiji, Indiji i Kini, zatim Krićani, itd. Grci i Rimljani su pored monumentalnih praktičnih primera korišćenja vode imali i određena teorijska saznanja (npr. Αρχιμήδης - Arhimed, Κτησίβιος - Tesibije, Ηρων - Heron, itd.). Nakon propasti Zapadnog dela Romejskog carstva, u Evropi je veći deo ovih znanja i umeća praktično zaboravljen, dok su znanja iz oblasti hidraulike sačuvana u Istočnom delu Romejskog carstva, kao i kod drugih naroda na bliskom i dalekom istoku. O ovim saznanjima mi danas imamo samo posredne podatke, kroz inženjerska dostignuća koja su odolela vremenima.

Interesovanje za hidrauliku se ponovo javilo tokom Renesanse, kada i započinje razvoj moderne hidraulike. Leonardo da Vinči (Leonardo da Vinci 1452 - 1519) je primetio da voda u reci brže teče tamo gde je reka sužena. Pretpostavljajući da je protok vode konstantan da Vinči zaključuje da je proizvod brzine vode u reci i poprečnog preseka reke konstantna veličina. Ovo zapažanje se u današnje vreme naziva jednačina kontinuiteta. Konkretno, da Vinči pisao u 1502. da “reka u svakom delu njene dužine u jednakim vremenskim razmacima ima jedenak protok, bez obzira na širinu, dubinu, nagib, hrapavosti i zavojitost (krivina)” [2], mada ga nije matematički formalizovao. Jednačinu kontinuiteta je formulisao 1628. italijanski monah Benedeto Kasteli (Benedetto Castelli 1578–1643) [3]. Mnogi izvori ukazuju da je ovaj zakon prvi otkrio Heron (grčki inženjer i matematičar iz Aleksandrije, 10 pne. - 70), mnogo vekova pre da Vinčija i Kastelija [4].

Evangelista Toričeli (Evangelista Torricelli 1608 - 1647) je 1643. uočio da je brzina isticanje tečnosti kroz otvor na posudi jednaka brzini koju telo postigne u slobodnom padu. Prema Toričelijevom zakonu, uz zanemarivanje viskoznih efekata fluida, dolazi se do zaključka da je brzina isticanja proporcionalna kvadratnom korenu visine slobodne površine tečnosti u posudi iznad otvora [5]. Kasnije je pokazano da je Toričelijev zakon specijalni slučaj Bernulijevog principa.

Edme Mariot (Edme Mariotte, 1620 - 1684) je obradio svoja iskustva u građenju fontana u [6], opisujući niz izvršenih eksperimenata. On je izneo tvrđenja da se trenje odigrava između tekuće vode i zidova (srazmerno okvašenom perimetru), te da se povećava brže od brzine vode. Pod brzinom je smatrao srednju brzinu u strujnom kanalu i nije uočio da se brzina menja po preseku. Mariot je izgradio prvi vazdušni tunel i u njemu testirao različite modele opstrujavanja tela [7]. Mariotov spis je privukao veliku pažnju i bio je samo jedan od njegovih glavnih dela koja će biti prevedena na engleski i druge jezike. Iako ga je u teorijskim osnovama potisnula Bernulijeva Hidrodinamica iz 1738., Mariotova knjiga je ostala standardni praktični vodič za izgradnju fontana još za izvesno vreme.

Isak Njutn (Isac Newton, 1642 - 1727) je, prema direktnoj analogiji sa Hukovim zakonom, pretpostavio da je tangencijalni napon (σ_T, N/mm ²) u bilo kojoj tački fluida koji struji linearno proporcionalan gradijentu brzine upravnom na smer napona

$$\sigma_T = \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (1)$$

gde su:

- w, m/s, brzina strujanja;
- y, m, osa upravna na smer strujanja;
- μ, Pa·s, dinamička viskoznost.

U današnje vreme se fluidi za koje važi jednačina (1) nazivaju Njutnovski fluidi. Takođe, u drugoj knjizi Philosophiae naturalis principia mathematica [8] Njutn razmatra i kretanje predmeta pri slobodnom padu i ustanovljava da otpor vazduha usporava pad. Njutn je otkrio da se pri slobodnom padu u nekoj tački sila otpora vazduha izjednačava sa silom gravitacije i predmet koji pada prestaje da ubrzava.

Ovaj pregled osnovnih saznanja iz oblasti hidraulike ukazuje da su ona bila uglavnom empirijska. U prvoj polovini 18. veka Danijel Bernuli (Daniel Bernoulli, 1700 - 1782), je u svojoj knjizi [9] iz 1738. postavio jednačinu održanja energije za strujanje neviskoznih fluida: pri stacionarnom toku fluida suma svih oblika mehaničkih energija, u celom strujnom toku, mora biti jednaka u svima tačkama toga polja. Drugim rečima, suma kinetičke i potencijalne energije mora biti međusobno jednaka u svima tačkama strujnog polja, pa se tako čestice fluida kreću između tačaka sa različitim statičkim pritiskom, od višeg prema nižem. Najveća brzina je tamo gde je pritisak najniži, a najmanja je tamo gde je pritisak najviši.

Najjednostavniji oblik Bernulijeve jednačine se odnosi na slučaj kada se gustina fluida može smatrati konstantnom. Za praktične proračune to je slučaj izotermnog strujanja tečnosti. Što se tiče gasova i kod njih se stišljivost može zanemariti pri malim brzinama strujanja.

U slučaju većine tečnosti, kao i gasova koji struje pri malim Mahovim brojevima, gustina fluida se može smatrati konstantnom (odatle „nestišljivih“), bez obzira na varijacije u pritisku. U ovom slučaju Bernulijeva jednačina ima oblik

$$\frac{w^2}{2} + g \cdot z + \frac{p}{\rho} = const \qquad (2)$$

gde su:
- ρ, kg/m³, gustina fluida;
- p, Pa, apsolutni pritisak;
- g, m/s², ubrzanje sile teže;
- z, m, visinska kota.

Za stišljiva strujanja postoje različiti oblici Bernulijeve jednačine, a jedan od njih je

$$\frac{w^2}{2} + \int_{p_1}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} + g \cdot z = const \tag{3}$$

gde je p_1 (Pa) pritisak na početku strujnog kanala.

U drugoj polovini 18. veka, Žan le Rond Dalamber (Jean le Rond d'Alambert, 1717 - 1783), Leonard Ojler (Leonhard Paul Euler, 1707 - 1783) i Žoze Lagranž (Joseph Louis Lagrange, 1736 - 1813) su uspostavilo matematičke teorije strujanja tečnosti na opštim principima mehanike. U čuvenom radu [10] iz 1755. Ojler postavlja jednačinu strujanja koja u modernoj notaciji glasi

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + (w \cdot \nabla) \cdot w = g - \frac{\nabla p}{\rho} \tag{4}$$

gde τ predstavlja vreme.

Ova jednačina se kombinuje sa "jednačinom kontinuiteta", koji predstavlja Zakon o održanju mase

$$\frac{w^2}{2} + g \cdot z + \frac{p}{\rho} = const \tag{5}$$

Ovi izuzetni teorijski rezultati su imali veoma ograničenu praktičnu primenu, jer su zanemarivali viskoznost fluida, odnosno trenje (koncept savršenog fluida ili neviskozno strujanje). Inženjeri praktičari su tako u velikoj meri odbacivali ova dostignuća i počela je da se razvija eksperimentalno bazirana hidraulika, koja je obuhvatala probleme tokova u otvorenim i zatvorenim kanalima, otpor kretanja brodova, turbine, itd.

U istoj eri Klod Kuple (Claude Antoine Couplet, 1642 - 1722), inženjer koji je projektovao vodovodni sistem u dvorcu Versaj, izveo je upravo u Versaju prvih 7 savremenih merenja pada pritiska [11], [12]. Pedesetak godina kasnije Šarl Bosu (Charles Bossut, 1730 - 1799) je sproveo i objavio detaljnija i preciznija merenja (ukupno 26 rezultata) [11], [12], na osnovu kojih je zaključio da je otpor strujanju proporcionalan kvadratu brzine.

1800. Šarl Kulon (Charles Coulomb, 1736 - 1806) je konstatovao da je otpor tela potopljenog u struji fluida pri malim brzinama linearan i da ne zavisi od stanja površine tela, a da je pri velikim brzinama strujanja otpor kvadratni i da zavisi od toga da li je površina tela glatka ili hrapava.

Njegov savremenik Pjer du Bua (Pierre Du Buat, 1734 - 1809), je u svojim uticajnim raspravama o hidraulici dao jasna mehanička tumačenja svojih 18 eksperimentalnih rezultata [13]. Za njegove prethodnike sila trenja se javljala samo između tečnosti i zidova cevi ili kanala. Nasuprot tome, du Bua je objavio da se u obzir mora uzeti i interakcija samih molekula fluida imajući u vidu Kulonovu teoriju i istraživanja. Uočio je da se brzina strujanja tečnosti povećava sa udaljenošću od zidova, te da je srednja brzina koja se koristi u formulama za pad pritiska samo imaginarna. Pri analizi merenih rezultata uzeo je u obzir gubitak pritiska na ulazu u cevi (zbog naglog povećanja brzine), čije zanemarivanje je davalo pogrešne analize prethodnih istraživača. Takođe, dokazao je da trenje u tečnostima, za razliku od trenja kod čvrstih tela, ne zavisi od pritiska. O stanju u oblasti hidraulike du Bua je napisao "Naše razumevanje hidraulike je izuzetno ograničeno; koliko god da je velikih genija radilo u ovoj oblasti tokom dugog vremena, mi smo još uvek nakon mnogo vekova, u nemogućnosti da razumemo stvarne zakonitosti strujanja vode; posle 150 godina jedva da je ustanovljeno, uz pomoć eksperimenata, trajanje, količina i brzina isticanja vode iz datog otvora."

Do sredine devetnaestog veka, praktične formule vezane za pad pritiska su bile bazirane na podatacima Kuplea, Bosua, i Du Bua.

Venturi (Giovanni Battista Venturi, 1746 - 1822) je objasnio stvaranje vrtloga u tečnostima pod uticajem unutrašnjeg trenja [14]. Venturijev rad je dobio povoljnu ocenu vodećih francuskih istraživača (Bosu, Kulon i Proni) i zajedno sa radom du Bua i Kulona u oblasti trenja fluida je pomogao da oživi staru Njutnovu teoriju trenja između dva sloja tečnosti.

Gaspar de Proni (Gaspard Clair François Marie Riche de Prony 1755 - 1839) je 1804. objavio jednačinu [15]

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \frac{L}{D} \cdot (a \cdot w + b \cdot w^2) \tag{6}$$

koja je među inženjerima za duže vreme u Francuskoj, a i šire u Evropi, bila u masovnoj upotrebi. Parametri a i b su bili striktno empirijski i smatra se da Proni nije uočio da su ovi parametri posledica hrapavosti cevi. Sa w je u daljem tekstu označena srednja brzina strujanja fluida u cevi.

Mnogi istraživači su, u prvoj polovini 19. veka, pokušavali da dodaju član u Ojlerovu jednačinu (4) koji bi obuhvatio viskoznost. 1822. Navie (Claude Louis Marie Henri Navier 1785 - 1836), 1828. Koši (Augustin - Louis Cauchy 1789 - 1857), 1929. Puason (Siméon Denis Poisson 1781 - 1840) i 1843. Sen - Venan (Adhémar Jean Claude Barré de Saint - Venant 1797 - 1886) su predlagali funkciju na osnovu molekularnog transporta. Stouks (George Gabriel Stokes 1819 – 1903) nije bio upoznat sa njihovim radom, kada je 1845. objavio svoje jednačine koristeći se drugačijim pristupom. Konkretno, Stouks je razvio niz jednačina, danas poznatih kao Navie - Stouksove jednačine, koje su fundamentalne parcijalne diferencijalne jednačine koje opisuju strujanje nestišljivog fluida. Jednačine povezuju pritisak i spoljne sila koje deluju na fluid sa brzinskim poljem.

3 DARSI - VAISBAHOVA JEDNAČINA

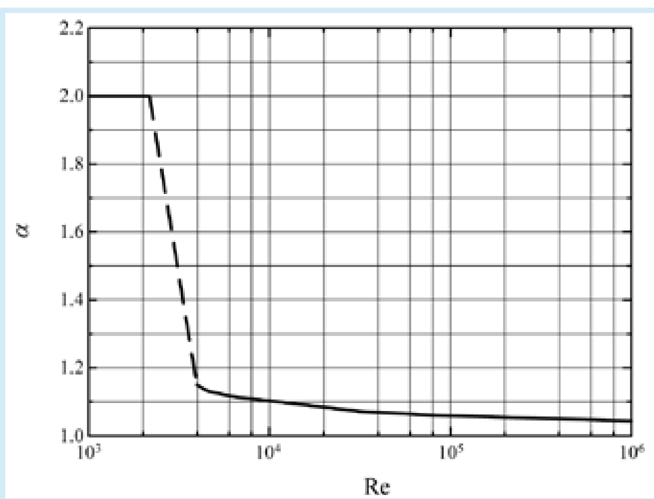
Gubitak energije fluida između dva preseka cevovoda (1 i 2) usled trenja se, na pravolinijskom cevovodu, pri izotermskom strujanju, može kvantifikovati na osnovu jednačine održanja energije

$$\Delta p = \left(\frac{\rho \cdot \alpha_1 \cdot w_1^2}{2} + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 \right) - \left(\frac{\rho \cdot \alpha_2 \cdot w_2^2}{2} + p_1 + \rho \cdot g \cdot z_2 \right) \quad (7)$$

gde je Δp (Pa) pad pritiska usled trenja, a ostale veličine su:

- w, m/s, srednja brzina fluida kroz cevovod;
- α, Koriolisov koeficijent.

Koriolisov koeficijent je korekcioni faktor za kinetičku energiju izračunatu na bazi srednje brzine strujanja. Za laminarno strujanje je $\alpha = 2$, dok se za turbulentno strujanje menja u funkciji Rejnoldsovog broja, kako je prikazano na dijagramu na slici 2 iz [16].



Slika 2. Korekcioni faktor za kinetičku energiju u funkciji Rejnoldsovog broja

Julius Vaisbah (Julius Ludwig Weisbach 1806 - 1871) je 1845. predložio jednačinu, za pravolinijske cevovode konstantnog preseka i bez lokalnih otpora, u obliku [17]

$$\Delta p = \xi \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2} \quad (8)$$

gde su:

- ξ, koeficijent trenja
- L, m, dužina cevovoda
- D, m, unutrašnji prečnik cevovoda.

Vaisbah je uz jednačinu (8) dao i izraz za izračunavanje koeficijenta trenja u obliku

$$\xi = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{w}} \quad (9)$$

gde su α i β parametri koji variraju u zavisnosti od prečnika i materijala cevovoda. Jednačina (9) je bazirana na relativno malom broju eksperimentalnih rezultata: 11 eksperimenata je obavio sam Vaisbah, a 51 merenje je preuzeto od drugih istraživača (Kuple, Bosu, de Bua, de Proni).

Vaisbahova istraživanja su ostavila dubok trag, tako da je njegova knjiga [17] već 1848. prevedena i objavljena u SAD. Međutim, uticaj Vajsbahovog rada u Francuskoj nije bio tako očigledan, iako je ona slovila kao tadašnji centar za istraživanja u oblasti hidraulike. Ovo je utoliko čudnije, jer se veruje da se Vaisbah zainteresovao za hidrauliku nakon posete industrijskoj izložbi u Parizu 1839. Razlog za ovakav tretman Vaisbahove jednačine se možda nalazi u činjenici da je Vaisbah uglavnom koristio podatke francuskih istraživača, te se moglo pretpostaviti da njegova jednačina ne obezbeđuje kvalitetnije rezultate u odnosu Pronijevu jednačinu.

Za razliku od Pronijeve jednačine (6), Vaisbahova jednačina (8) je dimenziono homogena. Shodno tome ξ je bezdimenzioni parametar, što nije slučaj Pronijevim pristupom. Sa druge strane, Pronijeva jednačina je omogućavala jednostavnije računanje, jer je zahtevala šest matematičkih operacija u odnosu na Vaisbahovu jednačinu koja je zahtevala osam (treba imati u vidu da su se u to vreme proračuni vršili bey pomoći računskih mašina). Dobison (Jean - François d' Aubuisson des Voisins 1762 - 1841) [18] je primetio, što je ubrzo i postala praksa, da se linearni član $a \cdot w$ može zanemariti, a da se ne gubi mnogo na preciznosti računanja. Na ovaj način je dobijen izraz koji zahteva samo 4 matematičke operacije i koji podseća na Vaisbahovu jednačinu.

Vaisbah je očigledno uneo novi pristup, ali treba pomenuti i Antoana Šezija (Antoine Chézy 1718 - 1798) koji je oko 1770. objavio proporciju vezanu za tok tečnosti kroz otvorene kanale u obliku

$$w^2 \cdot O \propto A \cdot S \quad (10)$$

gde je O (m) okvašeni perimetar kanala, A (m²) strujni presek i S (m/m) nagib kanala. Ako se u Šezijevu jednačinu (10) uvede koeficijent proporcionalnosti C dobija se

$$w = C \cdot \sqrt{\frac{A}{O} \cdot S} \quad (11)$$

a nakon uvođenja geometrijskih parametara cevovoda dobija se

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \frac{4}{C^2} \cdot \frac{L}{D} \cdot w^2 \quad (12)$$

Jednačina (12) se svodi na jednačinu (8) smenom

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = \frac{C}{\sqrt{8 \cdot g}} \quad (13)$$

Na žalost Šezijev rad je bio zagubljen do početka 19. veka, kada ga je njegov student Proni objavio i detaljnije opisao. Začudo, Francuski istraživači nisu nastavili razvoj Šezijeve jednačine i veruje se da je Vaisbah upoznao Šezijev rad preko Pronijeve publikacije [15].

4 LAMINARNO STRUJANjE

Oko 1830. razlika između strujanja pri malim i velikim brzinama je postala očigledna. Nezavisno i gotovo istovremeno, Hagen (Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen 1797 - 1884) i Pouazei (Jean Louis Marie Poiseuille, 1799 - 1869) su došli do jednačine strujanja pri malim brzinama u cevima malog prečnika. U savremenoj notaciji njihova jednačina glasi

$$\Delta p = 64 \cdot \mu \cdot \frac{L}{D^2} \cdot \frac{w}{2} \qquad (14)$$

pri čemu dinamička viskoznost fluida sami autori nisu uveli u jednačinu, već je to učinjeno kasnije. Poredeći rad autora jednačine (14), jednostavno rečeno, Hagenov rad [19] je bio teorijski sadržajniji, dok je Pouazei [20] imao obimnije eksperimentalne rezultate (vršio je merenja i sa drugim tečnostima osim sa vodom). Hagen je uočio je da postoji brzina strujanja pri kojoj „mlaz vode koji ističe iz cevi ima stalni oblik i izgledala kao stakleni štap, ali čim se brzina poveća preko neke granice mlaz dobija nestabilan oblik."

Franc Nojman (Franz Ernst Neumann 1798 - 1895) je teorijski uobličio izvođenje Hagen - Pouazejeve jednačine: usvojio je nultu brzinu na zidu cevi, unutrašnje trenje proporcionalno poprečnom gradijentu brzine, izveo kvadratni brzinski profil, i integraljenjem došao do konačnog oblika. Njegov učenik Hajnrih Jakobson (Heinrich Jacobson, 1826 - 1890) objavio je ovaj dokaz 1860. [21], Eduard Hagenbah (Eduard Hagenbach, 1833 - 1910) je objavio slično izvođenje iste godine [22], a Emil Matje (Emile Mathieu, 1835 - 1890) je 1863. objavio treći sličan dokaz u [23].

Najvažniji aspekt Hagen - Pouazeieve jednačine, gledano iz današnje perspektive, je njena preciznost, koja je uvek bila zadovoljena u slučaju malih brzina strujanja u cevovodima malog prečnika. Darsi je primetio sličnost svojih eksperimenata pri malim brzinama sa Pouazeievim radom i u [24] mu je odao počast.

Ozborn Rejnolds (Osborne Reynolds, 1842 - 1912) je svojim eksperimentalnim radom dao poseban doprinos istraživanju fenomena nagle promene otpora pri određenoj brzini strujanja [25]. Ogled je realizovao koristeći posudu sa vodom koja je isticala kroz horizontalnu, providnu cev konstantnog prečnika, pri čemu je brzinu isticanja vode precizno regulisao. Radi vizualizacije strujanja vode iz posebnog suda je ivodio obojeni rastvor u vodeni tok u cevi. Pri malim brzinama strujanja vode, obojene čestice su se kretale aksijalno, a sa povećanjem brzine strujanja dolazilo je do narušavanja isključivo aksijalnog toka što se manifestovalo kao rasipanje obojenih čestica po kompletnom poprečnom preseku cevi. Brzinu pri kojoj je dolazilo do ovog preobražaja iz laminarnog u turbulentno strujanje Rejnolds je nazvao kritična brzina.

Varirajući prečnik cevi Rejnolds je uočio da se preobražaj laminarnog u turbulentno strujanje, pri konstantnoj temperaturi vode, događa uvek pri istoj vrednosti proizvoda prečnika cevi i brzine strujanja. Pri promeni temperature vode, istoj se menja gustina i viskoznost, pa se preobražaj forme strujanja karakteriše odnosom parametara, koji se danas naziva Rejnoldsov broj

$$\mathrm{Re} = \frac{w \cdot D \cdot \rho}{\mu} \qquad (15)$$

Nominalni opseg za laminarno strujanje u cevima je Re < 2000, dok se turbulentno strujanje odvija pri Re > 4000. Oblast strujanja u oblasti Re = 2000 ÷ 4000 se naziva kritična zona (oblast), koju karakterišu tzv. turbulentne mrlje koje se naizmenično pojavljuju i nestaju u strujnom polju i čiji intezitet i broj raste sa porastom Re broja i u kojoj se ne može sa sigurnošću odrediti karakter strujanja, kao ni pad pritiska. Po uvođenju Rejnoldsovog broja iz jednačine (14) se dobija koeficijent trenja u obliku

$$\xi = \frac{64}{\mathrm{Re}} \qquad (16)$$

Nije poznato ko je došao prvi do jednačine (16), ali se smatra da je poznata od početka 20. veka.

Treba napomenuti da je prvi bezdimenzioni parametar $w{\cdot}D/\nu$ uveo 1851. Stouks [26] proučavajući padanje kuglice u viskoznom fluidu i to upravo u formi Rejnoldsovog broja. Takođe, Frud (William Froude 1810 - 1879) je 1861., proučavajući stabilnost morskih brodova i najefikasniji oblik trupa, uspostavio odnos $w/\sqrt{g \cdot L}$. Ovaj odnos (danas poznat kao Frudov broj) je omogućio da se, na osnovu eksperimenata vršenih na modelima, predvidi ponašanje objekata (brodova) [27]. Na ovaj način je praktično uvedena teorija sličnosti za rešavanje praktičnih problema hidraulike.

5 TURBULENTNO STRUJANjE

Anri Darsi (Henry Philibert Gaspard Darcy 1803 - 1858) je 1857. objavio u [24] novi oblik Pronijeve jednačine na osnovu sopstvenih eksperimenata: 21 cev od livenog gvožđa, stakla, olova, vučenog gvožđa, livenog gvožđa sa asfaltnim premazom, prečnika od 12 mm do 500 mm. Za veoma veliki opseg brzina strujanja njegova jednačina za nove cevi je oblika

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \frac{L}{D} \cdot \left[\left(\alpha + \frac{\beta}{D^2}\right) \cdot w + \left(\alpha' + \frac{\beta'}{D}\right) \cdot w^2\right] \qquad (17)$$

za čiju su primenu parametri α, β, α\` i $\beta$\` morali da budu eksperimentalno određeni.

Za stare i zarđale cevi Darsi je utvrdio da jednačina (17) dobija oblik

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \frac{L}{D} \cdot \left(\alpha'' + \frac{\beta''}{D}\right) \cdot w^2 \qquad (18)$$

pri čemu koeficiejnti α'' i β'' imaju različite vrednosti od onih za nove cevovode. Darsi je definitivno dokazao da koeficijent trenja zavisi, pored drugih parametara, od odnosa hrapavosti površine cevi i njenog prečnika. Zbog ovog zaključka, koeficijent trenja se vezuje za Darsija, iako ga on nije nikada definisao u eksplicitnom obliku. Darsi je, takođe, mereći i analizirajući brzinski profil u cevima, kao prvi, ukazao na postojanje graničnog sloja u fluida.

Anri - Emil Bazin (Henri - Émile Bazin 1829 – 1917) [28] je kao Darsijev sledbenik, nastavio rad i na bazi originalnih, ali i Darsijevih podataka, postavio jednačinu koja je imala sličan oblik kao (17) i koja se koristila sve do prvog svetskog rata.

Džon Faning (John Thomas Fanning 1837 - 1911) je u [29] prvi kombinovao Vaisbahovu jednačinu (8) sa Darsijevim procenama koeficijenta trenja. Umesto pokušaja da uvede novi algebarski izraz za ξ, Faning je jednostavno objavio tabele koeficijenata trenja na osnovu francuskih, američkih, engleskih i nemačkih publikacija, pri čemu je iz Darsijevog rada [24] koristio najviše podataka. Ideja je bila da inženjer jednostavno pronađe vrednost za ξ iz tabele u zavisnosti od materijala cevi, prečnika i brzine. Treba napomenuti da je Faning koristio poluprečnik cevi umesto njenog prečnika, pa „Faningov koeficijent trenja“ f iznosi jednu četvrtinu „Darsijevog koeficijenta trenja“

$$\xi = 4 \cdot f \tag{19}$$

Tomas Stenton (Thomas Edward Stanton 1865 – 1931) je 1911. eksperimentalno pokazao u [30], merenjima brzinskih profila unutar 2 glatke i 2 hrapave cevi, da je brzinski profil unutar turbulentnog jezgra praktično jednak u oba slučaja. U blizini zida cevi hrapavost cevi je imala uticaja na brzinski profil, što je Stenton konstatovao, ali nije dublje analizirao. Šiler (L. Schiller) je u [31] objavio 1923. da prema njegovim eksperimentima kritični Rejnoldsov broj ne zavisi od tipa površine, kao i da je kod veoma hrapavih cevi pad pritiska proporcionalan kvadratu brzine, što znači da Re nema uticaja na koeficijent trenja (eksperimentalna aparatura je omogućavala samo ispitivanja u oblasti $Re<50\cdot10^3$).

Fon Mises (Ludwig von Mises) je, imajući u vidu sve do 1914. poznate podatke, sproveo analizu na osnovu koje je došao do jednačine [32]

$$\xi = 0,0024 + \sqrt{2 \cdot \frac{\varepsilon}{D}} + \frac{0,3}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \tag{20}$$

koja je važila za velike Rejnoldsove brojeve, odnosno do oblika

$$\xi = \left(0,0024 + \sqrt{2 \cdot \frac{\varepsilon}{D}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1000}{\mathrm{Re}}\right) + \frac{0,3}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1000}{\mathrm{Re}}} + \frac{8}{\mathrm{Re}} \tag{21}$$

za male Rejnoldsove brojeve. Upravo je fon Mises uveo termin relativna hrapavost koja se definiše odnosom

$$R_r = \frac{\varepsilon}{D} \tag{22}$$

gde je ε (m) apsolutna hrapavost cevi.

Početkom 20-og veka Ludvig Prantl (Ludwig Prandtl 1875 - 1953) i njegovi saradnici Teodor fon Karman (Theodor von Kármán 1881 - 1963), Pol Rihard Hajnrih Blazijus (Paul Richard Heinrich Blasius 1883 - 1970) i Johan Nikuradse (Johann Nikuradse 1894 - 1979) su pokušali da iznađu adekvatne oblike jednačine za izračunavanje koeficijenta trenja, koristeći i tada novu Prantlovu teoriju graničnog sloja. Zaključak ove grupe istraživanja je bio da se moraju nezavisno posmatrati granični slučajevi turbulentnog strujanja u glatkim i hrapavim cevima. Glatka cevi su definisane kao one kod kojih je amplituda površinskih nepravilnosti (hrapavost) mala ili zanemarljiva u odnosu na debljinu graničnog sloja. Hrapave cevi se odlikuju amplitudama površinskih nepravilnosti dovoljna visokim da razbijaju granični sloj fluida.

Blazijus je primenom teorije sličnosti utvrdio da je ξ funkcija Rejnoldsovog broja [33], te je, na osnovu eksperimentalnih podataka za glatke cevi u opsegu $Re=4\cdot10^3 \div 80\cdot10^3$, dobio jednačinu

$$\xi = \frac{0,3164}{\mathrm{Re}^{1/4}} \tag{23}$$

koja se naziva Blaziusova formula.

Koristeći se eksperimentalnim podacima iz [34] u opsegu $Re=3,1\cdot10^3\div3,2\cdot10^6$, Prantl je ustanovio „univerzalni zakon trenja“ za glatke cevi u obliku

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 2 \cdot \log(\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\xi}) - 0,8 = -2 \cdot \log\left(\frac{2,51}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\xi}}\right) \tag{24}$$

1933. Nikuradse je objavio rezultate eksperimenata na veštački ohrapavljenim cevima u [34]. U oblasti $Re=3,1\cdot10^3\div10^6$ i $Rr=0,0394\div0,033$ Nikuradse je postavio jednačinu

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = -2 \cdot \log(R_r) + 1,74 = -2 \cdot \log\left(\frac{R_r}{3,7}\right) \tag{25}$$

a njegovi eksperimentalni rezultati su prikazani na slici 3.

Nikuradse je hrapavost cevi postizao lepljenjem granulisanog peska (prečnik zrna oko 0,8 mm) na cevi premazane lakom. Njegovi eksperimenti su pokazali da koeficijent trenja kod hrapavih cevi do određenog Re prati liniju za glatke cevi, a zatim se postepeno povećava. Nakon dostizanja maksimalne vrednosti koeficijent trenja postaje praktično nezavisan od Re. Veliki deo kasnijih istraživanja je potvrdio ovakvo ponašanje, koje se u današnje vreme naziva „inflekciono ponašanje“, pa je postalo uobičajeno da se na osnovu Nikuradseove jednačine (25) određuje ekvivalentna hrapavost površine cevi.

Jednačine (24) i (25) se obično nazivaju Prantl - Karman - Nikuradse jednačine (odnosno skraćeno PKN jednačine) i na bazi rada ove trojice istraživača u današnje vreme je oblast turbulentnog strujanja podeljena u tri podoblasti [7], [35]:

- strujanje u hidraulički glatkim cevima (smooth turbulent flow) pri $\mathrm{Re} \cdot R_r \cdot \sqrt{\xi/8} < 5$;
- strujanje u hidraulički hrapavim cevima (complete turbulence, rough turbulent flow) pri $\mathrm{Re} \cdot R_r \cdot \sqrt{\xi/8} > 70$;
- prelazno turbulentno strujanje (transitional turbulent flow) za opseg $\mathrm{Re} \cdot R_r \cdot \sqrt{\xi/8} = 5 \div 70$.

Implicitna forma jednačine (24) za hidraulički glatke cevi nije u vreme njenog objavljivanja bila pogodna za inženjerske proračune.

U drugačijem obliku u [36] je svoje eksperimentalne podatke prikazao Ku (E. C. Koo) za opseg $\mathrm{Re}=3\cdot10^3\div3\cdot10^6$

$$\xi = 0.00140 + \frac{0,125}{\mathrm{Re}^{0,32}} \tag{26}$$

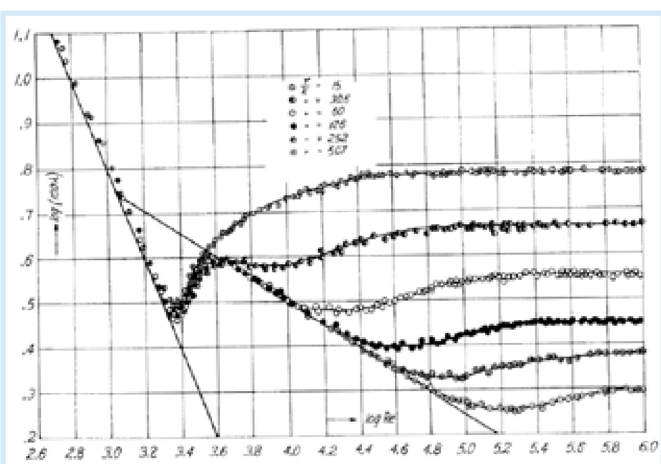
MekAdams (William Henry McAdams 1892 - 1975) je Kuove podatke u opsegu $\mathrm{Re}=5\cdot10^3\div200\cdot10^3$ uprostio na Blazijusovu formu [37]

$$\xi = \frac{0,184}{\mathrm{Re}^{0,2}} \tag{27}$$

koja je autoru pogodovala za uspostavljanje sličnosti konvektivnog prelaza toplote i količine kretanja. Koristeći se jednačinom (24) Ženero [38] je za opseg $\mathrm{Re}=4\cdot10^3\div20\cdot10^6$ preporučio oblik

$$\xi = \frac{0,16}{\mathrm{Re}^{0,16}} \tag{28}$$

ostajući „sa sigurne strane“ jednačine (24).



Slika 3. Nikuradseov dijagram

Nakon objavljivanja PKN jednačina (24) i (25), jedino nerazjašnjeno pitanje (sa gledišta praktičnih inženjerskih proračuna) je ostalo u vezi prelazne zone između glatkih i hrapavih cevi pri turbulentnom strujanju. Za razliku od Nikuradsea koji je eksperimente vršio sa tzv. veštačkom ohrapavljenom površinom cevi, brojni istraživači su pokušali da utvrde koeficijent trenja za tzv. komercijalne cevi, odnosno cevi pravljene za široku upotrebu. Kolbruk i Uajt [39] su objasnili zbog čega se komercijalne cevi ne ponašaju na isti način kao kod Nikuradsea. Naime, kod Nikuradsea je hrapavost bila uniformna, pa je sa smanjenjem debljine graničnog sloja pri povećanju Re celokupna hrapavost površine stupala u dejstvo u istom trenutku. Kod komercijalnih cevi hrapavost je neuniformna, pa u istom trenutku postoje zone u kojima se cev ponaša kao hidraulički glatka i zone u kojima se ponaša kao hidraulički hrapava. Zaključak Kolbruka i Uajta je da će se kod komercijalnih cevi javiti gladak prelaz funkcije $\xi = f(\varepsilon/D;\mathrm{Re})$ između hidraulički glatkih i hidraulički hrapavih cevi, za razliku od prelaza kod Nikuradsea koji je pokazivao drugačiji karakter.

Koristeći PKN jednačine, sopstvene podatke [39] i podatke drugih istraživača za komercijalne cevi, Kolbruk (C. F. Colebrook) [40] je formirao sledeću jednačinu za kompletnu oblast turbulentnog strujanja

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 1,14 - 2\cdot\log\left(R_r + \frac{9,35}{\mathrm{Re}\cdot\sqrt{\xi}}\right) = -\,2\cdot\log\left(\frac{2,51}{\mathrm{Re}\cdot\sqrt{\xi}} + \frac{R_r}{3,7}\right) \tag{29}$$

Jednačina (29) je sa vremenom postala opšte prihvaćena za opseg $\mathrm{Re}=4000\div10^8$ i $R_r=0\div0,05$, iako je opseg eksperimentalnih podataka u vreme objavljivanja jednačine bio $\mathrm{Re}<3,2\cdot10^6$ i $R_r<0,033$.

Hanter Rouz (Hunter Rouse 1906 - 1960) je među prvima potvrdio Kolbrukovu jednačinu sopstvenim merenjima [41]. Kasnije su se i drugi istraživači saglasili sa Kolbrukovim jednačinom, ali je bilo i onih koji su je osporili. Preciznost Kolbrukove jednačine je npr. u [42] komentarisana na sledeći način: “moguća varijacija ξ je za komercijalne cevi oko ±10%, ali je ova nepreciznost maskirana nepouzdanošću kvantifikovanja površinske hrapavosti”. U [7] su kaže: ”jednačina ima tačnost do ±15% za proračune u oblasti kompletnog opsega Re i R_r. Može se koristiti za kružne cevi, kao i za druge oblike cevi i kanala, uključujući i otvorene kanale”. Prvi pregled rezultata koji ostavlja dosta nedoumica u vezi preciznosti Kolbrukove jednačine je objavljen u [43].

6 POVEZIVANjE U DIJAGRAM

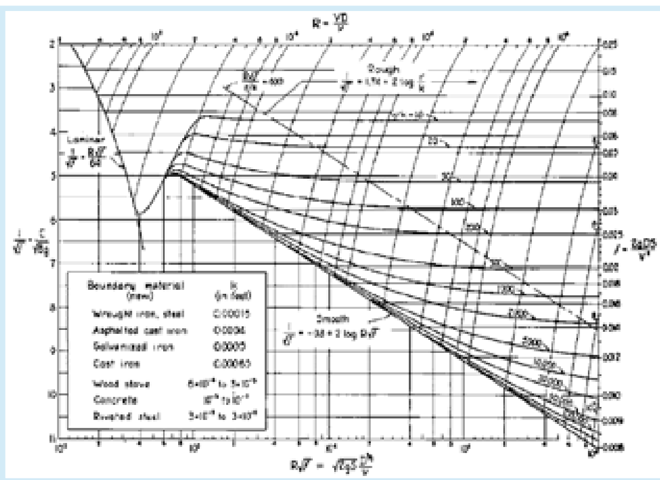
1942. Rouz je u [41] dao sledeći komentar na Kolbrukovu jednadinu “Ove jednačine su previše složene da bi bile od praktične koristi. S druge strane, ako za komercijalne cevi ove jednačine važe, onda one sadrže veoma važne informacije koje se mogu predstaviti u obliku dijagrama ili tabela.” Uz sopstvene ekperimentalno dobijene podatake Rouz je pokazao da se jednačina (29) može primeniti za komercijalne cevi. U istom radu Rouz je dao i dijagram (slika 4) koji je predstavio jednačine (16) i (29), tako što je na apcisu naneo vrednost $1/\sqrt{\xi}$, a na ordinatu $\mathrm{Re}\cdot\sqrt{\xi}$ (tzv. fon Karmanov broj). Rouz je odredio i granicu između prelazne oblasti i zone hidraulički hrapavih cevi u obliku

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = \frac{\varepsilon}{D}\cdot\frac{\mathrm{Re}}{200} \tag{31}$$

koja je takođe prikazana na slici 4.

Luis Mudi (Lewis Moody 1880 - 1953) je smatrao da je Rouzov dijagram “nezgodan” i izradio je novi dijagram prikazan na slici 1 i objavljen u [1]. Iako, prema sopstvenim rečima, “autor ne tvrdi da nudi ništa posebno novo, ili originalno, njegov cilj je da otelotvori do sada prihvaćene zaključke u formi pogodnoj za inženjerske potrebe.” Mudi je uz put odao priznanje prethodnim istraživačima.

Treba napomenuti da je Mudijev dijagram lakši za korišćenje prilikom određivanja Δp za poznate protoke i prečnike. Sa druge strane Rouzov dijagram omogućava direktno (neiterativno) određivanje protoka za poznate Δp i D, s obzirom da je proizvod $\mathrm{Re}\cdot\sqrt{\xi}$ nezavisan od brzine strujanja. U današnje vreme, uz razvoj personalnih kompjutera, ova razlika nije od velike važnosti s obzirom da se za proračune koriste softverski paketi, u vreme kada su dijagrami objavljeni razlika u pristupu je bila znatna.



Slika 4. Rouzov dijagram

7 DANAŠNJA KONVENCIJA

Konvencija nazivanja jednačine (8) je veoma interesantna i može biti praćena istorijski kroz literaturu: Vaisbahova jednačina, Darsijeva jednačina, Šezijeva jednačina, Faningova jednačina (termin koji se još uvek koristi u hemijskom/procesnom inženjerstvu), “No Name” ili jednačina proticanja kroz cevovode. Generalno, francuski autori su identifikovali bilo kakav oblik jednačine (8) kao “La Formule de Darsi”. Koeficijent trenja se navodi kao ξ ili kao Darsijev bezdimenzioni broj (Da). Rani engleski tekst [44] je identifikovao jednačinu (8) kao “Vaisbahovu jednačinu”, ali su kasnije autori uglavnom usvojila francuski terminologiju. Iznenađujuće je da do 1960-ih nemački autori su ili koristili generičko ime kao što je “Rohrreibungsformel” (formule za trenje u cevima) ili francuski žargon. Naziv „Darsi - Vaisbah“ je popularizovao Rouz [45] i ovaj naziv je usvojen od strane ASCE [46].

Prilično ironično je da se dijagram ξ u odnosu na Re univerzalno priznaje kao Mudijev, čime su doprinosi radova na osnovu kojih je dijagram sastavljen potisnuti u drugi plan. Ovo je bila bolna tačka za Rouza [47], koji je dao zapisnik iz 1942. sa svojih sastanka (u trećem licu) “Nakon konferencije, Luis Mudi sa Prinstona je predlažio korišćenje drugih promenljivih (ξ i Re), kao osnovnih a ne dodatnih, ali Rouz je odoleo iskušenju, jer je osetio da da bi to bio korak unazad. Tako je Mudi sam objavio dijagram, i on je poznat je širom sveta kao Mudijev dijagram!”

8 ZAVRŠNI KOMENTARI

Nakon Mudijevog članka u kome je objavljen dijagram sa slike 1, inženjeri praktičari su prihvatili Darsi - Vaisbahovu jednačinu (8) koju koriste uz Kolbrukovu jednačinu (29) kada je u pitanju turbulentno strujanje i Hagen - Pouazei jednačinu (16) kada imaju slučaj laminarnog strujanja. U pitanju je, u današnje vreme, dominantni pristup u većem broju inženjerskih obasti, a rezultati dobijeni po ovom osnovu se primenjuju bez daljih pitanja.

Sa druge strane, iako najpoznatiji i najpopularniji priručnici u oblasti procesnog inženjerstva, grejanja, ventilacije, klimatizacije i rashladne tehnike, kao što su [7], [48], [49], [50], [51] ili [52], navode Kolbrukovu jednačinu kao referentnu, brojni istraživači nastavljaju rad u ovoj oblasti.

U poslednje dve decenije, istraživački rad je bio usmeren na:

- poboljšanja jednačina PKN i Kolbruka iz prve polovine 20. veka sa ciljem preciznijeg objašnjenja „infleksionog ponašanja“ kod hrapavih cevi;
- proširenje opsega jednačina za slučaj transporta (strujanja) prirodnog gasa u komercijalnim cevovodima – zahvaljujući visokom pritisku Re je veći od 10^7, a zahvaljujući velikom prečniku cevovoda i korišćenjem odgovarajućih premaza relativna hrapavost ima izuzetno male vrednosti;
- objašnjenje fenomena vezanih za strujanje u cevovodima vrlo malog prečnika (tzv. mikro cevi) koje karakterišu male vrednosti Re i velike vrednosti R_r.

U [53] je data obimna analiza novijih istraživanja.

Od objavljivanja Kolbrukove jednačine dosta pažnje je posvećeno eksplicitnim aproksimacijama jednačine zadar lakšeg (neiterativnog) izračunavanja koeficijenta trenja. Do sada je objavljeno preko 50 jednačina i u [54] je dat pregled njihovih odstupanja od Kolbrukove jednačine.

Na kraju treba pomenuti i Čerčilovu (Churchill) jednačinu [55]

$$\xi = 8\cdot\left\{\left(\frac{8}{\mathrm{Re}}\right)^{12} + \frac{1}{\left\{\left\{2,457\cdot\ln\left[\frac{1}{(7/\mathrm{Re})^{0,9}+0,27\cdot R_r}\right]\right\}^{16}+\left(\frac{37530}{\mathrm{Re}}\right)^{16}\right\}^{1,5}}\right\}^{1/12} \tag{30}$$

koja formalno (bez kvalitetnije teorijske podloge) objedinjuje sve oblasti strujanja (laminarno strujanje, prelazna oblast i turbulentno strujanje) i koja se uz zadovoljavajuću preciznost može primeniti za praktične proračune.

Ovaj članak predstavlja kratki pregled istorijskog razvoja usmerenog isključivo na praktične aspekte izračunavanja koeficijent trenja. Za detaljnije upoznavanje sa teorijskom pozadinom preporučujemo klasične knjige iz oblasti mehanike fluida, npr. [7], dok je izvanredan pregled koji uključuje i druge jednačine za koeficijent trenja dat u [56].

LITERATURA

[1] **Moody L. F.**, *Friction factors for pipe flow Trans. ASME*, vol. 66, pp. 671 - 678, 1944.
[2] **Benedict R. P.**, *Fundamentals of Temperature, Pressure, and Flow Measurements*, Hoboken, N. J. Wiley, 1984.
[3] **Castelli B.**, *Della Misura dell'Acque Correnti*, Bologna, 1619.
[4] **Pickover C. A.**, *Archimedes to Hawking: Laws Of Science And The Great Minds Behind Them*, Oxford University Press, Oxford, 2008.
[5] **Torricelli E.**, *Opera geometrica: De motu gravium naturaliter descendentium et proiectorum*, Florence, 1644.
[6] **Mariotte E.**, *Traite du mouvement des eaux (1683)*, Chantilly 1678.
[7] **White F.**, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 2010.
[8] **Newton I.**, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London, 1687.
[9] **Bernoulli D.**, *Hydrodynamica, Sive de Viribus et Motibus Fluidorum Commentarii*, Strasbourg, 1738.
[10] **Euler**, *Principes généraux du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin, 1757.
[11] **Rouse H., Ince S.**, *History of Hydraulics*, Iowa Institute of Hydraulic Research, University of Iowa, Iowa City, 1957.
[12] **Brown G. O., Garbrecht J. D., Hager W. H., Henry P. G. Darcy and Other Pioneers in Hydraulics**: *Contributions in Celebration of the 200th Birthday of Henry Philibert Gaspard Darcy*, ASCE Publications, 2003.
[13] **Du Buat P.**, *Principes d'hydraulique et de pyrodynamique vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du gouvernement*, Paris, 1791.
[14] **Venturi G. B.**, *Recherches experimentales sur le principe de communication laterale dans les fluides*, Paris, 1797.
[15] **de Prony G. C. F. M. R.**, *Recherches Physico - Mathématiques sur la Théorie des Eaux Courantes, Imprimerie Impériale*, Paris, France, 1804.
[16] **Foust A. G., Wenzel L. A., Clump W. C., Maus L., Andersen L. B.**, *Principles of Unit Operations*, Wiley, New York, 1960.
[17] **Weisbach J.**, *Lehrbuch der Ingenieur - und Maschinen - Mechanik, Vol. 1. Theoretische Mechanik*, Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1845.
[18] **d'Aubuisson J. F.**, *Traité de l'hydraulique à l'usage des ingénieurs*, Pitois - Levrault, Paris, 1834.
[19] **Hagen G.**, *Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren*, Pogg. Ann., vol. 46, pp. 423 - 442, 1839.
[20] **Poiseuille J. L.**, *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquids dans les tubes de très-petits diamètres, Comptes Rendus*, Académie des Sciences, Paris 12, vol. 112, 1841.
[21] **Jacobson H.**, *Beitrage zur Hamodynamik, Archiv fur Anatomie, Physiologie und wissenschaftliche Medicin*, vol. 80, pp. 80–112, 1860.
[22] **Hagenbach E.**, *Uber die Bestimmung der Zahigkeit einer Flussigkeit durch den Ausfluss aus Rohren*, Annalen der Physik und Chemie, vol. 108, pp. 385–426, 1860.
[23] **Mathieu E.**, *Sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres petit diametre*, CR, C. R. A cad. Sci. Paris, vol. 57, pp. 320 – 324, 1863.
[24] **Darcy H.**, *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*, Mallet - Bachelier, Paris, 1857.
[25] **Reynolds O.**, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channel*, Phil. Trans. of the Royal Soc., vol. 174, pp. 935 - 982, 1883.
[26] **Stokes G. G.**, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, Trans. Cambridge Phil. Soc., vol. IX, pp. 8 - 106, 1851.
[27] **Froude W.**, *On the rolling of ships,* Trans. Inst. Naval Architects, vol. II, pp. 180 - 227, 1861.
[28] **Henry Darcy, Henri Bazin**, *Recherches hydrauliques entreprises par M. Henry Darcy continuées par M. Henri Bazin, Imprimerie impériale*, Paris, 1865.
[29] **Fanning, J. T.**, *A practical treatise on water - supply engineering*, Van Nostrand, New York, 1877.
[30] **Stanton T. E.**, *The Mechanical Viscosity of Fluids*. Proc. Roy. Soc. London (A), Bd. 85, pp. 366, 1911.
[31] **Schiller L.**, *uber den Stroomungswiederstand von Rohren verschiedenen Querschnitts und Rauhigkeitsgrades*, Z. Angew. Math. Mech., Vol. 3, p. 2, 1923.
[32] **von Mises R.**, *Elemente der technischen Hydrodynamik*, B. G. Teubner, Leipzig, 1914.
[33] **Blasius H.**, *Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten*, Forschungs - Arbeit des Ingenieur - Wesens 131, 1913.
[34] **Nikuradse J.**, *Stromungsgesetze in rauhen Rohren. Forschungsheft 361*, volume B, VDI Verlag Berlin, 1933.
[35] **Schlichting H.**, *Boundary - Layer Theory*, McGraw-Hill, 1987.
[36] **Koo E. C.**, *Mechanisms of isothermal and non-isothermal flow of fluids in pipes*, Sc.D Thesis, Chem. Eng., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge MA, 1932.
[37] **McAdams W. H.**, *Heat Transmission*, McGraw-Hill, New York, 1933.
[38] **Genereaux R. P.** *Fluid - Flow Design Methods*. Ind. Eng. Chem. 1937, 29, 385–388
[39] **Colebrook C. F., White C. M.**, *Experiments with Fluid Friction in Roughened Pipes*, Proc. R. Soc. Lond., vol 161, pp. 367 - 381, 1937.
[40] **Colebrook C. F.**, *Turbulent Flow In Pipes, With Particular Reference To The Transition Region Between Smooth And Rough Pipe Laws*, Journal Of The Institution Of Civil Engineers, No. 2, 1939.
[41] **Rouse H.**, *Evaluation Of Boundary Roughness, Proc. 2nd Hydraulic Conf.*, The University Of Iowa Studies In Engineering, Bulletin No. 27, Wiley, New York, 105–116.
[42] **Sanks R. L.**, *Tchobanoglous G., Bosserman B. E., Jones G. M., Pumping Station Design*, Butterworth - Heinemann, 1998.
[43] *Friction factors for large conduits flowing full*, United

States Bureau of Reclamation, 1965.
[44] **Neville J.**, *Hydraulic tables, coefficients and formulae*, John Wale, London, 1853.
[45] **Rouse H.**, *Evaluation of boundary roughness. Proceedings Second Hydraulics Conference*, Univ. of Iowa Studies in Engrg., Bulletin No. 27, 1943.
[46] *ASCE, Nomenclature for hydraulics*, ASCE, New York, 1962.
[47] **Rouse H.**, *Hydraulics in the United States*, 1776 - 1976, Iowa Institute of Hydraulic Research, Univ. of Iowa, Iowa City, 1976.
[48] **Green D. W., Perry R. H.**, *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, McGraw-Hill Professional, New York, 2007.
[49] **Recknagel H., Sprenger E., Schramek E. R.**, *Taschenbuch für Heizung und Klimatechnik einschliesslich Warmwasser - und Kältetechnik*, Oldenbourg Industrieverlag München, 2006.
[50] *ASHRAE Handbook Of Fundamentals, American Society Of Heating Refrigerating And Air - Conditioning Engineers*, Atlanta, 2001.
[51] *VDI Heat Atlas*, VDI Gesellschaft, 2010.
[52] **Coker A. K.**, *Ludwig's Applied Process Design for Chemical and Petrochemical Plants*, Elsevier Inc., 2007.
[53] **Marusic I., McKeon B. J., Monkewitz P. A., Nagib H. M., Smits A. J., Sreenivasan K. R.**, *Wall - bounded turbulent flows at high Reynolds numbers: Recent advances and key issues*, Physics of Fluids, Vol. 22, no. 6, 2010.
[54] **Genić S., Arandjelović I., Kolendić P., Jarić M., Budimir N., Genić V.**, A *Review of Explicit Approximations of Colebrook's Equation*, FME Transactions vol. 39, pp. 67 - 71, 2011.
[55] **Churchill S. W.**, *Friction factor equations spans all fluid-flow ranges*, Chem. Eng., vol. 91, 1977.
[56] **Idelchik I. E.**, *Handbook Of Hydraulic Resistance*, Begell House, 1996.

Autori

Srbislav B. Genić, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Kraljice Marije 16,
tel: 011330 23 60, faks: 011/337 03 64
e-mail: sgenic@mas.bg.ac.rs

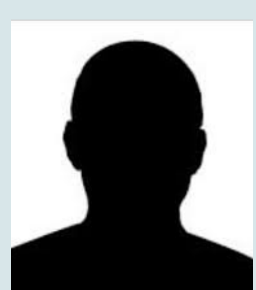
Zaposlen na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu od 1989., na Katedri za procesnu tehniku. Trenutno u zvanju vanrednog profesora predaje na svim nivoima studija. Pored nastave angažovan je na poslovima projektovanja procesnih i termotehničkih postrojenja, dimenzionisanju, konstruisanju i ispitivanju aparata i postrojenja, na izradi studija, ekspertiza, veštačenja, itd. Objavio je preko 120 naučnih i stručnih radova i bio učesnik u više desetina projekata i studija finansiranih od strane nadležnih Ministarstava.

Branislav M. Jaćimović, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Kraljice Marije 16,
tel: 011/330 23 60
e-mail: bjacimovic@mas.bg.ac.rs

Zaposlen na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu od 1979., na Katedri za procesnu tehniku u zvanju redovnog profesora. Predaje više predmeta na svim nivoima studija. Pored nastave angažovan je na poslovima projektovanja procesnih i termotehničkih postrojenja, dimenzionisanju, konstruisanju i ispitivanju aparata i postrojenja, na izradi studija, ekspertiza, veštačenja, itd. Objavio je preko 140 naučnih i stručnih radova i bio učesnik u više desetina projekata i studija finansiranih od strane nadležnih Ministarstava.

Igor Martić, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Kraljice Marije 16, 11000 Beograd
tel. 069/300-9909
e-mail: igormartic@yahoo.com

Diplomirao je na Mašinskom fakultetu u Beogradu jula 2010, na odseku za Procesnu tehniku i zaštitu životne sredine. Student doktorskih studija Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu od novembra 2010. Učestvovao na nekoliko projekata iz oblasti centralnog grejanja.



Zoran Trifković,
Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu,
Kraljice Marije 16,