JDM 19. JUGOSLOVENSKI KONGRES
TEORIJSKE I PRIMENJENE MEHANIKE
OHRID, 28. maj — 1. juni 1990.

A-20

ANALIZA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA KRETANJEM SISTEMA KRUTIH TELA U SMISLU MINIMIZACIJE VREMENA

ALEKSANDAR OBRADOVIĆ[1]

1. UVOD

Rezultati matematičke teorije optimalnih procesa ([1], [2], [3]) našli su primenu i u određivanju programskog optimalnog upravljanja kretanjem mehaničkih sistema. Mnogi inženjerski objekti se sa dovoljno velikom tačnošću mogu modelirati kao sistemi krutih tela (manipulatori, transportne mašine, letelice i sl.). Određivanju njihovog programskog optimalnog upravljanja je u savremenoj stručnoj i naučnoj literaturi posvećen izvestan broj radova i monografija. Pri tome se kao limitirajući faktor javlja računski aspekt primene navedenih metoda. Metod dinamičkog programiranja je sa tog stanovišta našao, uz izvesna ograničenja, veliku primenu (npr. [8]), dok metodi bazirani na Pontrjaginovoj teoremi (principu maksimuma) predstavljaju moćnu analitičku metodu i takođe se koriste (npr. [4]-[7]).

Ovaj rad razmatra određivanje programskog optimalnog upravljanja kretanjem sistema krutih tela čije je kretanje ograničeno stacionarnim holonomnim vezama, pri čemu je za upravljanje uzeta nepotencijalna generalisana sila ograničenih koordinata. Minimizira se vreme za koje sistem pređe iz zadatog početnog u krajnje zadato stanje.

U prvom delu rada izvršena je postavka problema minimizacije vremena sa posebnim osvrtom na postojanje singularnih upravljanja. Zatim je analiziran deo rada [7], gde su nedosledno primenjeni rezultati matematičke teorije optimalnih procesa (nisu razmatrana singularna upravljanja). Ovaj rad je, inače, dosta citiran u savremenoj literaturi. Mogućnost egzistencije singularnih upravljanja pokazana je na primerima 1 i 2. Tu je pokazano da ona imaju i odgovarajuće fizičko tumačenje.

2. POSTAVKA PROBLEMA

$$\dot{q}^i=a^{ij}p_j\ ,\quad \dot{p}_k=-\frac{1}{2}\frac{\partial a^{ij}}{\partial q^k}p_ip_j-\frac{\partial \Pi}{\partial q^k}+Q^N_k\ ,\quad i,j,k=\overline{1,n} \tag{1}$$

$$|u_k|\le C_k \qquad k=\overline{1,n} \tag{2}$$

$$q^i(0)=q^i_0,\quad q^i(T)=q^i_T,\quad p_i(0)=p_{io},\quad p_i(T)=p_{iT},\quad i=\overline{1,n} \tag{3}$$

---

[1] Aleksandar Obradović, Mašinski fakultet u Beogradu

II4

Posmatrajmo mehanički sistem čije je kretanje opisano kanonskim [11] jednačinama (1), gde su q^i generalisane koordinate, p_i generalisani impulsi, Π potencijlna energija, a^{ij} kontravarijantne koordinate metričkog tenzora konfiguracionog prostora R^n, a n broj stepena slobode. Veličinu Q_k^N smatraćemo upravljanjem u_k, na koja su naložena ograničenja (2), gde su C_k zadate pozitivne konstante. Zadatak je da odredimo kako da se menjaju veličine $u_k=u_k(t)$ koje zadovoljavaju (2) tako da se sistem za minimalno vreme T prevede iz početnog u krajnje stanje. Ova stanja zadata su prema jednačinama (3).

Za traženje rešenja primeniće se princip maksimuma Pontrjagina [1]. U tom cilju formirajmo Pontrjaginovu funkciju (4) i na osnovu nje spregnuti sistem (5).

$$H=-1+\lambda_i a^{ij}p_j+\nu^k\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial a^{ij}}{\partial q^k}p_i p_j-\frac{\partial \Pi}{\partial q^k}+u_k\right), \qquad i,j,k=\overline{1,n} \qquad (4)$$

$$\dot{\lambda}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}=-\left(\lambda_k\frac{\partial a^{kj}}{\partial q^i}p_j+\nu^k\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 a^{jl}}{\partial q^k\partial q^i}p_j p_l-\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^k\partial q^i}\right)\right)$$

$$\dot{\nu}^k=-\frac{\partial H}{\partial p_k}=-\left(\lambda_i a^{ik}-\nu^j\frac{\partial a^{ik}}{\partial q^j}p_i\right) \qquad i,j,k,l=\overline{1,n} \qquad (5)$$

$$\nu^i\equiv 0 \qquad i=\overline{1,n} \qquad (6)$$

$$u_M=C_M\,\mathrm{sgn}\,\nu^M \qquad M=\overline{1,l}$$

$$\nu^k\equiv 0 \qquad k=\overline{l+1,n} \qquad (7)$$

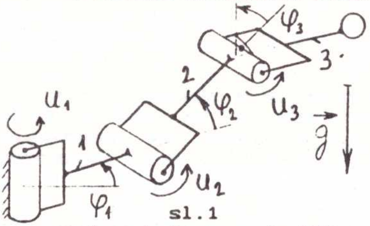
Pre nego što pređemo na određivanje optimalnih upravljanja iz uslova supremuma H po u_k potrebno je razmotriti slučaj da li je na nekom podintervalu intervala [0,T] za neko k $\nu^k\equiv 0$. U tom slučaju princip maksimuma je neefektivan za određivanje koordinate sile u_k, a takva upravljanja nazivaju se singularna. Ovo se obavezno razmatra u svim primerima ovakve vrste [2], [3].

Pokazaćemo da singularna upravljanja po svim silama (6) ne zadovoljavaju potrebne uslove ekstremalnosti. Neka je ispunjeno (6). Tada na osnovu (5) i $|a^{ik}|\neq 0$ sledi $\lambda_i\equiv 0$, $i=\overline{1,n}$, a u tom slučaju je H=-1, što se protivi principu maksimuma. To znači da je u proizvoljnom trenutku vremena $t\in[0,T]$ bar jedna sila u_k na granici.

Neka je $\nu^k\equiv 0$, $k=\overline{l+1,n}$. Tada iz Pontrjaginove teoreme slede jednačine (7), odakle se vidi da je l upravljanja u_m relejno ("bang-bang"), a ostala su singularna. Broj mogućih varijanti iznosi 2^n-1, i između njih treba tražiti ekstremalne. Jedna od njih je i ona da su sve u_m na granici.

Zbog toga što čak i rešenja konkretnih zadataka mogu imati ili ne singularna upravljanja zavisno od parametara zadataka (početnih i krajnjih uslova, veličina C_i, masa i sl.), dalje će na primerima biti pokazana mogućnost postojanja singularnih rešenja.

3. PRIKAZ REZULTATA DELA RADA [7]



sl.1
sistem tela u radu [7]

U prvom delu ovog rada razmatran je problem minimizacije vremena upravljanog kretanja materijalnog sistema sa tri stepena slobode (sl. 1). Zadati su početni i krajnji uslovi po generalisanim koordinatama i brzinama, kao i ograničenja (8) na momente u cilindričnim zglobovima.

Na osnovu jednačina kretanja eksplicitno rešenih po $\ddot{q}^i$ (to su, ustvari, Lagranževe jednačine druge vrste u kontravarijantnom obliku), formirane su jednačine kretanja koje se skraćeno mogu zapisati kao sistem jednačina (9).

$$|u_i| \le u_i^{max}, \qquad i=\overline{1,3} \tag{8}$$

$$\dot{\varphi}^i = \varphi^{i+3} \qquad i,j=\overline{1,3}$$
$$\dot{\varphi}^{i+3} = -\Gamma^i_{jk}\varphi^{j+3}\varphi^{k+3} - \frac{\partial \Pi}{\partial q^j}a^{ij} + u_j a^{ij} \tag{9}$$

$$H=\lambda_i u_j a^{ij} + (\text{članovi nezavisni od } u_j) \tag{10}$$

$$u_J = u_J^{max}\ \mathrm{sgn}\ (\lambda_i a^{iJ}) \qquad J=\overline{1,3} \tag{11}$$

Pozivajući se na oblik funkcije H (10), kao i na princip maksimuma autori ovoga rada zaključuju da su sva tri upravljanja na granici (11), bez razmatranja mogućnosti postojanja singularnih upravljanja. Ovaj deo od [7] je nekritički preuzet u izvesnom broju radova i monografija.

Napišimo kanonski oblik jednačina kretanja ovog sistema (12), vodeći računa da je koordinata $q^1=\varphi^1$ ciklična i da je $a^{1j}=0$, $j=2,3$, usled toga što je prva osa stalno upravna na ostale dve i specijalnog rasporeda masa (ose rotacije su jedne od glavnih osa inercije).

$$\dot{q}^1=a^{11}p_1$$
$$\dot{p}_1=u_1 \tag{12}$$

$$\dot{q}^i=a^{ij}p_j \qquad i,j,k=2,3$$
$$\dot{p}_k=-\frac{1}{2}\frac{\partial a^{ij}}{\partial q^k}p_i p_j - \frac{1}{2}\frac{\partial a^{11}}{\partial q^k}p_1 p_1 - \frac{\partial \Pi}{\partial q^k} + u_k \tag{13}$$

$$H=-1+\lambda_i a^{ij}p_j+\nu^k\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial a^{ij}}{\partial q^k}p_i p_j - \frac{1}{2}\frac{\partial a^{11}}{\partial q^k}p_1 p_1 - \frac{\partial \Pi}{\partial q^k}+u_k\right)+$$
$$+\lambda_1 a^{11}p_1+\nu^1 u_1 \qquad i,j,k=2,3 \tag{14}$$

$$\dot{\lambda}_1=0$$
$$\dot{\nu}^1=-\left(\lambda_1 a^{11}-\nu^k\frac{\partial a^{11}}{\partial q^k}p_1\right) \qquad k=2,3 \tag{15}$$

$$\dot{\lambda}_i=-\left(\lambda_k\frac{\partial a^{kj}}{\partial q^i}p_j+\nu^k\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 a^{jl}}{\partial q^k\partial q^i}p_j p_l - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a^{11}}{\partial q^k \partial q^i}p_1 p_1 - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^k \partial q^i}\right)+\right.$$

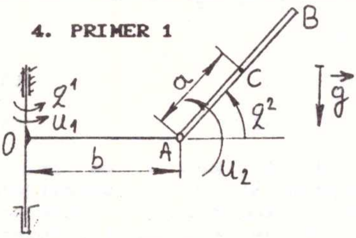
$$+ \lambda_1 \frac{\partial a^{11}}{\partial q^i} p_1)$$

$$\dot{\nu}^k = -(\lambda_i a^{ik} - \nu^j \frac{\partial a^{ik}}{\partial q^j} p_i) \qquad i,j,k,l=2,3 \qquad (16)$$

Posmatrajmo deo trajektorije na kome je q^1=const. Tada je $p_1 \equiv 0$, $u_1 \equiv 0$, upravljanje je singularno ($\nu^1 \equiv 0$), a na osnovu (15) je i $\lambda_1 \equiv 0$, tako da se problem optimizacije svodi na preostala dva stepena slobode. Deo trajektorije na kome je ovo ispunjeno može se javiti u slučajevima kada je q_0^1 blisko q_T^1, ili za izvestan odnos u_1^{max} prema ostalima u_i^{max}, i=2,3.

Posmatrajmo deo trajektorije na kome je q^i=const, i=2,3. Na osnovu (13) i $|a^{ij}| \neq 0$, dobija se $p_i=0$ i $u_k = \partial\Pi/\partial q^k + 1/2 \cdot \partial a^{11}/\partial q^k \cdot p_1 p_1$, i,k=2,3 (pretpostavka da zadovoljavaju (8)). Tada je i $\nu^k \equiv 0$, pa je na osnovu (16) $\lambda_k \equiv 0$ i, za $\lambda_1 \neq 0$ $\partial a^{11}/\partial q^k=0$, k=2,3. Ovaj poslednji rezultat ima i svoje fizičko tumačenje: iz njega se mogu odrediti vrednosti za q^i, i=2,3, koje obezbeđuju ekstremnu vrednost inercionom koeficijentu a^{11} pri optimizaciji upravljanja kretanjem sistema sa jednim stepenom slobode q^1. To će se detaljnije pokazati na sledećem, nešto uprošćenom primeru.

4. PRIMER 1



Sl. 2
Sistem tela u primeru 1

Odredimo neke od singularnih upravljanja sistema tela prikazanih na sl. 2, gde samo štap AB ima masu m i poluprečnik inercije ρ za ose upravne na štap. Tada će kinetička energija biti data izrazom (17) gde su koordinate metričkog tenzora date prema (18).

$$T = \frac{1}{2} a^{11} p_1 p_1 + \frac{1}{2} a^{22} p_2 p_2 \qquad (17)$$

$$a^{11} = \frac{1}{a_{11}}, \quad a_{11} = m((b + a\cos q^2)^2 + (\rho \cos q^2)^2)$$

$$a^{22} = \frac{1}{a_{22}}, \quad a_{22} = m(a^2 + \rho^2) \qquad (18)$$

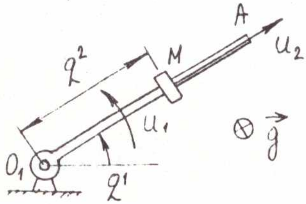
$$\sin q^2 (ab + (a^2 + \rho^2)\cos q^2) = 0 \qquad (19)$$

Jednačine kretanja, Pontrjaginova funkcija i spregnuti sistem (12)-(16) imaće isti oblik, gde i,j,k,l=2.

Za deo trajektorije gde je q^1=const važe ista razmatranja kao u napred analiziranom primeru. Zavisno od parametara zadatka upravljanja, u_1=0 na nekim delovima mogu da zadovolje uslove principa maksimuma.

Za slučaj q^2=const na delu trajektorije, sličnim razmatranjem može se doći do uslova $\partial a^{11}/\partial q^2=0$, koji dovodi do uslova (19). Pretpostavimo da je b>2a. Tada je $q^2=k\pi$ gde k uzima celobrojne vrednosti. Za neparno k a^{11} je minimalno, a za parno k je maksimalno. Fizičko tumačenje navedenog rezultata je sledeće: pri minimalnoj vrednosti za a^{11} sistem, koji sada ima jedan stepen slobode, ima minimalan moment inercije pri rotaciji oko ose 1 i može biti doveden iz početnog u krajnji položaj za kraće vreme pri istom upravljanju u_1 u odnosu na neku drugu konstantnu vrednost za q^2.

5. PRIMER 2



Sl. 3
Sistem tela u primeru 2

Sistem tela (sl. 3) čine telo sa momentom inercije J za osu 1 rotacije, po kome se kreće telo mase m i zanemarljivih dimenzija. Kinetička energija data je izrazom (20) gde su koordinate metričkog tenzora date izrazom (21). Jednačine kretanja, Potrjaginova funkcija i spregnuti sistem dati su izrazima (22)-(24).

$$T=\frac{1}{2}a^{11}p_1p_1+\frac{1}{2}a^{22}p_2p_2 \tag{20}$$

$$a^{11}=\frac{1}{J+m(q^2)^2}, \quad a^{22}=\frac{1}{m} \tag{21}$$

$$\dot q^1=a^{11}p_1, \quad \dot q^2=a^{22}p_2, \quad \dot p_1=u_1, \quad \dot p_2=-\frac{1}{2}\frac{\partial a^{11}}{\partial q^2}p_1p_1+u_2 \tag{22}$$

$$H=-1+\lambda_1a^{11}p_1+\nu^1u_1+\lambda_2a^{22}p_2+\nu^2\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial a^{11}}{\partial q^2}p_1p_1+u_2\right) \tag{23}$$

$$\dot\lambda_1=0, \quad \dot\lambda_2=-\lambda_1\frac{\partial a^{11}}{\partial q^2}p_1+\frac{1}{2}\nu^2\frac{\partial^2 a^{11}}{\partial q^2\partial q^2}p_1p_1$$

$$\dot\nu^1=-\lambda_1a^{11}+\nu^2\frac{\partial a^{11}}{\partial q^2}p_1, \quad \dot\nu^2=-\lambda_2a^{22} \tag{24}$$

Sličnim razmatranjem kao i ranije možemo pokazati da deo trajektorije na kome je q^1=const (u_1=0) pripada singularnom upravljanju. Ako je, npr, $q^2(0)>q^2(T)$ a $q^1(0)$ dovoljno blisko $q^1(T)$ početni deo kretanja sistema je upravo navedeni.

U slučaju q^2=const iz (24) sledi da je $\partial a^{11}/\partial q^2=0$, tj. $q^2=0$, a fizičko tumačenje isto kao u prethodnom primeru.

Jednačine kretanja oblika (22) dobijaju se kod kretanja kolica po toranjskom kranu [10] ili jedne vrste industrijskog manipulatora [6]. Puna analiza tipa optimalnog upravljanja u zavisnosti od parametara zadatka data je u radu [4], međutim, tamo je učinjeno značajno uprošćenje nerazmatranjem poslednje jednačine sistema (22).

6. ZAKLJUČAK

U radu je pokazano da doslednom primenom principa maksimuma treba razmatrati i mogućnost singularnih upravljanja na pojedinim delovima trajektorije, gde bar jedna koordinata uk mora biti na granici. Broj mogućih varijanti iznosi 2^n-1.

U navedenim primerima singularna rešenja sa q^i=const na poodintervalu intervala [0,T] mogu biti ekstremalna pod određenim uslovima i imaju odgovarajuće fizičko tumačenje. Takođe, ona se javljaju u dovoljno širokoj oblasti promenljivih parametara zadatka.

Pored njih mogu postojati i druga singularna rešenja. Tipičan primer su sistemi čije se jednačine kretanja mogu razdvojiti na više nezavisnih. Tada minimalno vreme ne može biti manje od najvećeg od minimalnih vremena pojedinih sistema, što redovno dovodi do nejednoznačnih singularnih rešenja (određenih samo iz uslova zadovoljenja početnih i krajnjih uslova).

Pokazano je da je pogrešno tvrditi da su sva upravljanja uk relejna u zadacima ove vrste, u opštem slučaju. Mi možemo zahtevati, iz nekih razloga, da budu. U radu [9] dat je postupak određivanja optimalnih relejnih upravljanja, ali ona više nisu optimalna u smislu postavljenog zadatka minimizacije vremena.

7. LITERATURA

[1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.: "Математическая теория оптимальных процесов", М., "Наука", 1983;

[2] Sage E.P., White: "Optimum Systems Control", Prentice Hall, Englewood 1977;

[3] Athans M., Falb P.L.: "Optimal Control: An Introduction to the Theory and its Application", McGraw-Hill, New York, 1966;

[4] Баничук Н.В., Мамалыга В.М.: "Оптимальное управление в нелинейной механической системе с переменной инерционной характеристикой", Изь. АНСССР МТТ, 1976. №2;

[5] Аветисяан В.В., Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л.: "Оптимальные программные движения двузвенного манипулятора", Изв. АНСССР ТК, 1985., №3;

[6] Болотник Н.Н., Акуленко Л.Д., Каплунов А.А.: "Некоторые режимы управления промышленными манипуляторами", Изв. АНСССР ТК, 1985., №6;

[7] Kahn M.E., Roth B.: "The Near-Minimum-Time Control of Open-Loop Articulated Kinematic Chains", ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control, Vol.93, September 1971.;

[8] Singh S., Leu M.C.: "Optimal Trajectory Generation for Robotic Manipulators Using Dynamic Programming", ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control, Vol. 109, June 1987.;

[9] Wen J., Desrochers: "An Algorithm for Obtaining Bang-Bang Control Laws", ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control, Vol. 109, June 1987.;

[10] Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.: "Yправление колебаниями", М.,"Наука", 1980.;

[11] Лурье А.И.:"Аналитическая механика", М.,Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1961.