OPTIMISATION OF THE MOTION OF A SYSTEM WITH INTERMITTENT PHASE COORDINATES

Summary

The optimum control of the motion of a system has been considered in a phase space having a part of coordinates of definite and indefinite jump values at the interruption points . The problem has been solved for a general case . The systems in which a part of intermittent coordinates is represented by some indefinite constant system parameters have been considered separately .

Josif Vuković
Faculty of Mechanical Engineering,
University of Belgrade,
27.marta 80 , Belgrade
Yugoslavia

СОЈУЗ НА ЗДРУЖЕНИЈАТА ЗА МЕХАНИКА НА СРМ
III СИМПОЗИУМ
Скопје, Јуни 1989 год.

OPTIMALNO UPRAVLJANJE KRETANJEM HOLONOMNOG, SKLERONOMNOG MEHANIČKOG SISTEMA SA PREKIDNIM KONSTANTNIM PARAMETRIMA

Josif Vuković, Aleksandar Obradović

U problemima optimalnog upravljanja kretanjem mehaničkih sistema mogu, izmedu ostalog, da se postave zahtevi za odredivanje i nekih parametara koji karakterišu bilo fizičke bilo druge osobine upravljanog sistema. U ovom radu razmatraće se optimizacija kretanja mehaničkog sistema sa neodređenim , konstantnim i deo po deo neprekidnim parametrima sa prekidima neprekidnosti prve vrste u nekim tačkama τ_k intervala $[t_o, t]$. Rešavanje problema biće zasnovano na rezultatima dobijenim u radu [3].

Ne umanjujući opštost metoda, ograničimo se na razmatranje upravljanja kretanjem holonomnog skleronomnog mehaničkog sistema, čije je stanje, u faznom V^{2n} prostoru, odredeno Lagranžovim koordinatama q^{α} ($\alpha = \overline{1,n}$) i generalisanim impulsima p_{α}. Hamiltonova funkcija takvog sistema ima oblik:

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} p_{\alpha} p_{\beta} + \Pi(q, c) \tag{1}$$

i predstavlja mehaničku energiju, gde su: $a^{\alpha\beta}(q,c)$ kontravarijantne koordinate metričkog tenzora konfiguracionog prostora R^n, a $c = \{c^{\nu}\}$ $(\nu = \overline{1,l})$ l-dimenzioni vektor, vektorskog prostora W^l, konstantan i deo po deo neprekidan sa prekidima:

$$c^{\nu}(\tau_k^-) - c^{\nu}(\tau_k^+) = K_k^{\nu} \tag{2}$$

gde su K_k^{ν} poznate vrednosti. Neka na sistem deluju nepotencijalne sile $Q_{\alpha}^N = Q_{\alpha}^N(q,p,c,u)$, gde je r-dimenzioni vektor upravljanja u iz neke oblasti G_u prostora U^r.

Kretanje sistema, s obzirom na neodredenost parametara c^{ν}, možemo posmatrati u proširenom faznom prostoru $V^{2n+1} = V^{2n} \times W^l$. U tom slučaju diferencijalne jednačine upravljanog kretanja holonomnog skleronomnog mehaničkog sistema sa prekidnim konstantnim parametrima opisuju kretanje nekog sistema u prostoru V^{2n+1} sa prekidnim koordinatama i imaju oblik:

$$\dot q^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad (\alpha=\overline{1,n}),\ (\nu=\overline{1,l}),$$
$$\dot p_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q^N_\alpha(q,p,c,u), \qquad (3)$$
$$\dot c^\nu = 0 \qquad t\in[t_0,\tau_1^-],[\tau_1^+,\tau_2^-],\dots,[\tau_k^+,\tau_{k+1}^-],\dots,[\tau_h^+,t_1].$$

Napomenimo da, zbog prekida u tačkama τ_k, ovaj sistem moramo posebno razmatrati u svakom podintervalu intervala $[t_0,t_1]$, pa ukupan broj jednačina (3) iznosi (2n+1)(h+1).

Svakoj vrednosti $u(t)\in G_u$ odgovaraju neka rešenja $q(t),p(t),c(t)$ među kojima ćemo tražiti ona koja koja u krajnjim tačkama svih podintervala ispunjavaju uslove:

$$\varphi_\varrho[q(t_0),p(t_0),c(t_0),q(t_1),p(t_1),c(t_1)]=0, \quad (\varrho=\overline{1,r}) \qquad (4)$$

$$\Phi_\sigma[q(\tau_k^-),p(\tau_k^-),c(\tau_k^-),q(\tau_k^+),p(\tau_k^+),c(\tau_k^+)]=0, \quad (\sigma=\overline{1,q}) \qquad (5)$$

Međutim, ovde treba primetiti da prekidi (2) veličina c^ν uslovljavaju prekide koordinata metričkog tenzora $a^{\alpha\beta}(q,c)$ što, neminovno, dovodi do prekida impulsa p_α u tačkama τ_k, jer je:

$$p_\alpha = a_{\alpha\beta}(q,c)\dot q^\beta$$

Ograničimo se na slučajeve u kojima nema prekida generalisanih brzina u tačkama τ_k, tj:

$$\dot q^\alpha(\tau_k^-) - \dot q^\alpha(\tau_k^+) = 0 \qquad (6)$$

odakle sledi:

$$(a^{\alpha\beta})_{\tau_k^-}\, p_\beta(\tau_k^-) - (a^{\alpha\beta})_{\tau_k^+}\, p_\beta(\tau_k^+) = 0 \qquad (7)$$

Ove relacije treba, u daljem postupku, razmatrati zajedno sa uslovima (5). Imajmo u vidu da su skokovi funkcija $p_\alpha(t)$ u tačkama τ_k neodređene veličine.

Neka se problem optimalnog upravljanja kretanjem sistema sastoji u određivanju $u^*(t)\in G_u$ i odgovarajućih rešenja $q^*(t),p^*(t),c^*(t)$, takvih da funkcional:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f^0(q,p,c,u)\,dt \qquad (8)$$

ima najmanju vrednost.

Pontrjaginova funkcija [1], s obzirom na (3) i (8) ima oblik:

$$\mathcal{H} = \lambda_0 f^0(q,p,c,u) + \lambda_\alpha\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}+Q^N_\alpha\right)+\mu_\nu 0 \qquad (9)$$

Prema principu maksimuma [1], za optimalna tešenja $u^*,q^*,p^*,c^*,\lambda^*,\nu^*,\mu^*$, funkcija (9) ispunjava uslov:

$$\mathcal{H}(q^*,p^*,c^*,\lambda^*,\nu^*,\mu^*,u^*) = \sup_{u\in G_u}\mathcal{H}(q^*,p^*,c^*,\lambda^*,\nu^*,\mu^*,u), \qquad (10)$$

pri čemu je, za autonomne sisteme,

$$\mathcal{H}(q^*,p^*,c^*,\lambda^*,\nu^*,\mu^*,u^*) = const. \qquad (11)$$

Veličine λ, ν, μ zadovoljavaju diferencijalne jednačine :

$$\dot\lambda_\alpha = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q^\alpha}$$
$$\dot\nu^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} \qquad (12)$$
$$\dot\mu_\nu = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c^\nu},$$

gde je:

$$\lambda_0 = const. \le 0 \qquad (13)$$

Iz istih razloga kao i za sistem (3), broj diferencijalnih jednačina (12) iznosi (2n+1)(h+1).

U krajnjim tačkama intervala $[t_0,t_1]$ uslovi transverzalnosti [2] imaju oblik:

$$\lambda_\alpha(t_0)\delta q^\alpha(t_0)+\nu^\alpha(t_0)\delta p_\alpha(t_0)+\mu_\nu(t_0)\delta c^\nu(t_0)=0 \qquad (14)$$

$$\lambda_\alpha(t_1)\delta q^\alpha(t_1)+\nu^\alpha(t_1)\delta p_\alpha(t_1)+\mu_\nu(t_1)\delta c_\nu(t_1)=0 \qquad (15)$$

gde je broj nezavisnih veličina δq^α, δp_α, δc^ν, u tačkama t_0 i t_1 uslovljen relacijama:

$$\left(\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial c^\nu}\delta c^\nu\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial\varphi_\varrho}{\partial c^\nu}\delta c^\nu\right)_{t_1}=0 \qquad (16)$$

i iznosi 4n+2l-p, ukoliko je:

$$\operatorname{rang}\left\{\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial q^\alpha}, \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial p_\alpha}, \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial c^\nu}\right\}_{t_0, t_1} = p. \tag{17}$$

U okolinama tačaka prekida takođe su ispunjeni uslovi:

$$\lambda_\alpha(\tau_k^-)\delta q^\alpha(\tau_k^-) + \nu^\alpha(\tau_k^-)\delta p_\alpha(\tau_k^-) + \mu_\nu(\tau_k^-)\delta c^\nu(\tau_k^-) = 0, \tag{18}$$

$$\lambda_\alpha(\tau_k^+)\delta q^\alpha(\tau_k^+) + \nu^\alpha(\tau_k^+)\delta p_\alpha(\tau_k^+) + \mu_\nu(\tau_k^+)\delta c^\nu(\tau_k^+) = 0, \tag{19}$$

pri čemu, s obzirom na (5) i (7), imamo:

$$\left(\frac{\partial \phi_\sigma}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial c^\nu}\delta c^\nu\right)_{\tau_k^-} + \left(\frac{\partial \phi_\sigma}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial c^\nu}\delta c^\nu\right)_{\tau_k^+} = 0 \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}p_\beta\delta q^\gamma + a^{\alpha\beta}\delta p_\beta + \frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial c^\nu}p_\beta\delta c^\nu\right)_{\tau_k^-} - \left(\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}p_\beta\delta q^\gamma + a^{\alpha\beta}\delta p_\beta + \frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial c^\nu}\delta c^\nu\right)_{\tau_k^+} = 0. \tag{21}$$

Imajući u vidu neprekidnost funkcija $q^\alpha(t)$ i relacije (2), uslovima (18),(19),(20) i (21) treba dodati uslove:

$$\delta q^\alpha(\tau_k^-) = \delta q^\alpha(\tau_k^+), \quad \delta c^\nu(\tau_k^-) = \delta c^\nu(\tau_k^+). \tag{22}$$

Ukupan broj nezavisnih veličina δq^α, δp_α, δc^ν u tačkama prekida iznosi (2n+l-q)h, ukoliko rang odgovarajuće matrice iz (20) i (21) ima maksimalnu vrednost.

Pontrjaginova funkcija (9) ne zavisi od veličina μ_ν a, samim tim, ni optimalno upravljanje dobijeno iz uslova (10) u obliku:

$$u = u(q, p, c, \lambda, \nu) \tag{23}$$

Imajući u vidu ovu činjenicu, bilo bi poželjno isključiti iz daljeg razmatranja veličine μ_ν.

Primenjujući postupak izložen u radu [3], uslove u tačkama t_0, t_1 i τ_k možemo zameniti ekvivalentnim uslovima:

$$\lambda_\alpha(t_0) = a^\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial q^\alpha(t_0)}, \quad \nu^\alpha(t_0) = a^\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial p_\alpha(t_0)}, \tag{24}$$

$$\lambda_\alpha(t_1) = -a^\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial q^\alpha(t_1)}, \quad \nu^\alpha(t_1) = -a^\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial p_\alpha(t_1)} \tag{25}$$

$$\lambda_\alpha(\tau_k^-) - \lambda_\alpha(\tau_k^+) = -\left[\frac{\partial}{\partial q^\alpha}(b^\sigma\phi_\sigma + \overset{k}{d}_\beta a^{\beta\gamma}p_\gamma)\right]_{\tau_k^-} - \left[\frac{\partial}{\partial q^\alpha}(b^\sigma\phi_\sigma - \overset{k}{d}_\beta a^{\beta\gamma}p_\gamma)\right]_{\tau_k^+} \tag{26}$$

$$\nu^\alpha(\tau_k^-) = -b^\sigma \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial p_\alpha(\tau_k^-)} - \overset{k}{d}_\beta (a^{\alpha\beta})_{\tau_k^-} \tag{27}$$

$$\nu^\alpha(\tau_k^+) = b^\sigma \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial p_\alpha(\tau_k^+)} - \overset{k}{d}_\beta (a^{\alpha\beta})_{\tau_k^-} \tag{28}$$

$$a^\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial c^\nu(t_0)} + a^\varrho \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial c^\nu(t_1)} + \sum_{k=1}^{h}\left[\frac{\partial}{\partial c^\nu(\tau_k^-)}(b^\sigma\phi_\sigma + a^{\alpha\beta}p_\beta) + \frac{\partial}{\partial c^\nu(\tau_k^+)}(b^\sigma\phi_\sigma - a^{\alpha\beta}p_\beta)\right] = \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c^\nu}dt, \tag{29}$$

gde su veličine a^ϱ, b^σ, $\overset{k}{d}_\alpha$ konstantni neodređeni množioci.

Za konačno rešenje problema neophodno je odrediti (4n+1)(h+1) integracionih konstanti sistema (3) i prvih 2n(h+1) jednačina sistema (12), p+q+nh množioca a^ϱ, b^σ, $\overset{k}{d}_\alpha$ i h trenutaka τ_k, što zahteva ukupno (4n+1)(h+1)+nh+p+q+h uslova. Za tu svrhu raspolažemo sa (2n+1)h +p+q uslova (2),(4),(5),(7) i uslova neprekidnosti koordinata q^α, kao i 4n+3nh+1 uslova (25),(26),(27),(28) i (29), što, zajedno sa h uslova neprekidnosti Pontrjaginove funkcije u tačkama τ_k, daje zahtevani broj uslova. Ukoliko interval $[t_0, t_1]$ nije određen, za autonomne sisteme trenutak t_0 možemo birati proizvoljno, a trenutak t_1 određujemo iz uslova $(\mathcal{H})_{t_1} = 0$.

L I T E R A T U R A :

1 Pontrjagin L.S. i dr. Matematičeskaja teorija optimaljnih procesov. Fizmatgiz. 1961.

2 Leitman G. An Introduction to Optimal Control. Mc G-H, 1966.

3 Vuković J. Optimizacija upravljanog kretanja sistema sa prekidnim faznim koordinatama. III simp. t.p. meh. Skopje, 1989.

Dr Josif Vuković, doc.
Mašinski fakultet,
11000 Beograd, 27.marta 80

Aleksandar Obradović, as.
Mašinski fakultet,
11000 Beograd, 27.marta 80

OPTIMUM CONTROL OF THE MOTION OF HOLONOMIC SCLERONOMIC MECHANICAL SYSTEM WITH INTERMITTENT CONSTANT PARAMETERS

Summary

The results of (3) have been utilized for the solution of the problem of the optimum control of motion of holonomic scleronomic mechanical system having indefinite intermittent parameters. It has been demonstrated that in certain cases the parameter interruptions induce the interruptions of generalized impulses . A sufficient number of relations and conditions for a definite solution of the problem has been obtained.

Josif Vuković & Aleksandar Obradović
Faculty of Mechanical Engineering,
University of Belgrade,
27.marta 80 , Belgrade
Yugoslavia

СОЈУЗ НА ЗДРУЖЕНИЈАТА ЗА МЕХАНИКА НА СРМ
III С И М П О З И У М
Скопје, јуни 1989 год.

SKALARNA OCENA VELIČINA STANJA KOD DISKRETNOG MODELA MOTORA JEDNOSMERNE STRUJE

Vlastimir Nikolić

U /1,2/ su dati matrični algoritmi za optimalnu ocenu vektora stanja, koji najčešće za polaznu osnovu imaju algoritam Kalmana. U ovom radu se daje odgovarajući algoritam za skalarnu optimalnu ocenu nekih komponenti vektora stanja (koje su nam potrebne) diskretnog modela objekta upravljanja. Matematički model objekta upravljanja i model opservacije su opisani respektivno jednačinama (1)i(2)

$$\underline{x}_k = \underline{\Phi}\,\underline{x}_{k-1} + \underline{B}\,\underline{u}_{k-1} + \underline{G}\,\underline{w}_{k-1} \tag{1}$$

$$\underline{z}_k = \underline{C}\,\underline{x}_k + \underline{v}_k \tag{2}$$

gde je: $\underline{x}_k$ - n - dimenzioni vektor stanja; $\underline{u}_k$ - r - dimenzioni vektor upravljanja; w_k - p - dimenzioni vektor slučajnih poremećaja tipa belog šuma; z_k - m-dimenzioni vektor opservacije; v_k - m - dimenzioni vektor šuma merenja, koji je tipa belog šuma; $\underline{\Phi}$, $\underline{B}$, $\underline{G}$ i $\underline{C}$ su odgovarajuće matrice. Slučajni poremećaji $\underline{v}_k$ i $\underline{w}_k$ su nekorelativni, što znači da je $M[\underline{v}_k \underline{w}_k]$=o.

U radu se razmatra slučaj kada je jednačina opservacije (2) skalarna $z_k = \underline{C}^T \underline{x}_k + v_k$. (3)

Iz jednačina (1) i (3) se dobija nova jednačina opservacije

$$\underline{z}_1^* = \underline{x}_1 + \underline{u}_1^* + \underline{v}_1^* \tag{4}$$

gde je

$$\underline{z}_1^* = \begin{bmatrix} \underline{C}^T \\ \underline{C}^T\underline{\Phi} \\ \underline{C}^T\underline{\Phi}^2 \\ \vdots \\ \underline{C}^T\underline{\Phi}^{n-2} \\ \underline{C}^T\underline{\Phi}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} ; \quad \underline{u}_1^* = \begin{bmatrix} \underline{C}^T \\ \underline{C}^T\underline{\Phi} \\ \underline{C}^T\underline{\Phi}^2 \\ \vdots \\ \underline{C}^T\underline{\Phi}^{n-2} \\ \underline{C}^T\underline{\Phi}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{C}^T\underline{B}\,\underline{u}_1 \\ \underline{C}^T\underline{\Phi}\,\underline{B}\,\underline{u}_1 + \underline{C}^T\underline{B}\,\underline{u}_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \underline{C}^T\underline{\Phi}^{n-3}\underline{B}\,\underline{u}_1 + \cdots + \underline{C}^T\underline{B}\,\underline{u}_{n-1} \\ \underline{C}^T\underline{\Phi}^{n-2}\underline{B}\,\underline{u}_1 + \cdots + \underline{C}^T\underline{B}\,\underline{u}_n \end{bmatrix}$$

Dr. doc., Mašinski fakultet u Nišu