IV KONFERENCIJA SAUM: Sistemi, Automatsko Upravljanje i Merenja

Mašinski Fakultet Kragujevac, 17. i 18. juni 1992.

OPTIMALNO UPRAVLJANJE I REAKCIJE VEZA NESLOBODNOG MEHANIČKOG SISTEMA

Josif Vuković
Mašinski fakultet Beograd

Aleksandar Obradović
Mašinski fakultet Beograd

IZVOD

Rešava se problem optimalnog upravljanja uz određivanje reakcija veza neslobodnog mehaničkog sistema. Metod je zasnovan na činjenici da postoji suštinska razlika između reakcije materijalnih veza i drugih vrsta ograničenja kretanja upravljanog sistema. U okviru matematičkog modela problema formiraju se jednačine stanja upravljanog sistema koje u sebi eksplicitno sadrže reakcije veza. Problem je doveden na oblik koji omogućava neposrednu primenu rezultata teorije optimalnog upravljanja za rešavanje praktičnih zadataka.

I UVOD

U okviru teorije optimalnog upravljanja posebno se razmatra optimizacija kretanja sistema ograničenog faznog stanja, pri čemu matematički modeli tih ograničenja ne otkrivaju njihovu fizičku suštinu. Rešava se osnovni problem određivanja optimalnih upravljanja koja obezbeđuju da se fazna tačka kreće po optimalnoj trajektoriji saglasno nametnutim ograničenjima (teoreme 22.-25. **Pontrjagin** 1983.[1]). Neposredna primena ovakvog postupka za rešavanje problema upravljanja mehaničkim sistemima ima smisla samo ako su fazna ograničenja neki subjektivni zahtevi (npr. obezbeđenje od neželjenog ponašanja sistema i sl.). Međutim, ukoliko je kretanje materijalnog sistema ograničeno materijalnim vezama, tada se, nezavisno od upravljanja, javljaju sile-reakcije veza koje bi, pomenutim postupkom, ostale "sakrivene" u rešenjima za optimalna upravljanja. Druga važna činjenica (koju matematička teorija optimalnog upravljanja ne razmatra jeste suštinska razlika između holonomnih i neholonomnih veza iako neki autori (**Aleksejev** 1979.[2] str. 81.) sva fazna ograničenja nazivaju holonomnim vezama.

Reakcije veza u praktičnim problemima predstavljaju opterećenja sistema sa korisnim ili štetnim posledicama pa je potrebno imati mogućnost da se utiče na njihovo ponašanje u toku procesa upravljanja kretanjem. Zbog takve potrebe, u ovom radu, matematički model mehaničkog sistema biće formiran u obliku koji obezbeđuje eksplicitno prisustvo reakcija veza. Pri tome, ukoliko nije neophodno razmatranje svih reakcija veza, dimenzije i struktura faznog prostora zavisiće od toga koje i koliko njih jesu predmet našeg interesovanja.

II POSTAVKA PROBLEMA

Ne umanjujući opštost metoda, koji će u ovom radu biti izložen, ograničićemo se na razmatranje skleronomnog mehaničkog sistema čije je stanje, u $2n$-dimenzionom faznom prostoru određeno generalisanim koordinatama q^α i generalisanim impulsima p_α $(\alpha = 1, 2, ..., n)$. Hamiltonova funkcija takvog sistema predstavlja ukupnu mehaničku energiju i ima oblik:

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta}(q) p_\alpha p_\beta + \Pi(q) \tag{2.1}$$

gde su: T kinetička energija, Π potencijalna energija a $a^{\alpha\beta}$ kontravarijantni metrički tenzor konfiguracionog prostora. Neka na sistem pored potencijalnih deluju i nepotencijalne sile:

$$Q_\alpha = Q_\alpha (q, p, u) \tag{2.2}$$

gde je u vektor upravljanja sa koordinatama u_i $(i = 1, 2, ..., r)$ iz vektorskog prostora U_r. Pored toga, neka je kretanje sistema ograničeno mehaničkim holonomnim vezama:

$$\varphi^\nu (q) = 0 \quad (\nu = 1, 2, ..., l_1) \tag{2.3}$$

i mehaničkim neholonomnim vezama:

$$b^\rho_\alpha (q) \dot{q}^\alpha = 0 \quad \left(\frac{\partial b^\rho_\alpha}{\partial q^\beta} \neq \frac{\partial b^\rho_\beta}{\partial q^\alpha} \right) \quad (\rho = 1, 2, ..., l_2) \tag{2.4}$$

Neka su veze glatke i neprekidne pri čemu funkcije $\varphi^\nu(q)$ imaju neprekidne i druge izvode. U tom slučaju sistem je pored potencijalnih sila i nepotencijalnih sila (2.2) izložen dejstvu sila-reakcija veza (2.3) i (2.4):

$$R_\alpha = \lambda_\nu \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial q^\alpha} + \mu_\rho b^\rho_\alpha \tag{2.5}$$

tako da, za opisivanje kretanja ovakvog sistema u faznom prostoru, raspolažemo jednačinama (Lurje 1961.[3]):

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$$

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha (q, p, u) + \lambda_\nu \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial q^\alpha} + \mu_\rho b^\rho_\alpha \tag{2.6}$$

gde su λ_ν i μ_ρ neodređeni množioci iz prostora U_l $(l = l_1 + l_2)$. Neka su u opštem slučaju dopustiva upravljanja ograničena, tj.:

$$u_i \in G_u \subset U_r \tag{2.7}$$

i neka su reakcije (2.5) podvrgnute nekim ograničenjima, što može da se izrazi u obliku:

$$\lambda_\nu \in G_\lambda \subset U_l, \quad \mu_\rho \in G_\mu \subset U_l \tag{2.8}$$

Oblasti G_u, G_λ i G_ν mogu biti neki otvoreni ili zatvoreni skupovi, konstantni ili promenljivi a dopustiva upravljanja u_i i dopustivi množioci λ_ν i μ_ρ mogu biti neke deo po deo neprekidne funkcije sa konačnim brojem prekida u intervalu $[t_o, t_1]$.

S obzirom na (2.6) neholonomne veze (2.4) mogu da se napišu u obliku:

$$b^{\rho\alpha} p_\alpha = 0 \quad (b^{\rho\alpha} = a^{\alpha\beta} b^\rho_\beta) \tag{2.9}$$

Ukoliko su pored veza (2.3) i (2.9) na sistem nametnuta i neka ograničenja:

$$g^k (q, p) = 0 \quad (k = 1, 2, ..., m) \tag{2.10}$$

koja ne predstavljaju mehaničke veze, struktura jednačina (2.6) neće se promeniti.Ova činjenica ukazuje na bitnu razliku između veza (2.3) i (2.9) i ograničenja (2.10). Naime, relacije (2.3) i (2.9) ispunjene su uvek bez obzira na upravljanja u_i, a ograničenja (2.10) neophodno važe samo za optimalno rešenje.

Uslov optimalnosti može da se postavi u obliku:

$$\int_{t_0}^{t_1} F^0(q,p,u)\,dt \to \inf \tag{2.11}$$

pri čemu je stanje sistema na krajevima intervala $[t_0, t_1]$ predstavljeno mnogostrukostima:

$$\theta_\sigma[q(t_0), p(t_0), q(t_1), p(t_1)] = 0 \quad (\sigma = 1, 2, ..., s \leq 2n) \tag{2.12}$$

Treba napomenuti da, ukoliko su i reakcije (2.5) uključene u neke zahteve optimalnosti, podintegralna funkcija u (2.11) može zavisiti od množitelja λ_ν i μ_ρ.

Na osnovu izloženog, zadatak optimalnog upravljanja kretanjem vezanog mehaničkog sistema definisan je relacijama (2.3), (2.6)-(2.12).

III REŠAVANJE ZADATKA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Prethodno postavljeni zadatak treba dovesti na oblik pogodan za rešavanje primenom metoda teorije optimalnog upravljanja. U tom cilju uvedimo u razmatranje vektorski prostor U_z vektora v sa koordinatama v_γ $(\gamma = 1, 2, ..., z \leq n)$ i izvršimo sledeću transformaciju:

$$Q_\alpha(q,p,u) + \lambda_\nu \frac{\partial\varphi^\nu}{\partial q^\alpha} + \mu_\rho b^\rho_\alpha = d^\gamma_\alpha v_\gamma \tag{3.1}$$

gde su, u opštem slučaju, $d^\gamma_\alpha(q,p)$ neke poznate funkcije. Neka je:

$$\text{rang}\left\{\frac{\partial Q_\alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial\varphi^\nu}{\partial q^\alpha}, b^\rho_\alpha\right\} = \aleph = \inf(n, r+l) \tag{3.2}$$

U slučaju kada je $r+l \geq n$ $(\aleph = n)$ može da se uzme da je:

$$d^\gamma_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \gamma \ (\gamma = 1, 2, ..., n) \\ 0, & \alpha \neq \gamma \end{cases} \tag{3.3}$$

pri tome za $r + l = n$ transformacije (3.1) obostrano su jednoznačne i mogu da se izraze u obliku:

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(q,p,v) \quad (i = 1, 2, ..., r) \\ \lambda_\nu &= \lambda_\nu(q,p,v) \quad (\nu = 1, 2, ..., l_1) \\ \mu_\rho &= \mu_\rho(q,p,v) \quad (\rho = 1, 2, ..., l_2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Za $r + l > n$ transformacije (3.1) nisu obostrano jednoznačne pa $r + l - n$ veličina λ_ν, μ_ρ i u_i mogu da se proizvoljno biraju iz (2.7) i (2.8).

U slučaju kada je $r + l < n$ u relacijama (3.1) treba uzeti $\gamma = 1, 2, ..., z = r+l$. Pri tome koeficijente d^γ_α treba birati tako da je $n - (r + l)$ relacija (3.1) suvišno.

Posle transformacija (3.1) jednačine (2.6) dobijaju oblik:

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$$

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + d^\gamma_\alpha v_\gamma \tag{3.5}$$

gde su dopustiva upravljanja:

$$v_\gamma \in G_v \subset U_z \tag{3.6}$$

Oblast G_v iz prostora U_z određena je ograničenjima (2.7) i (2.8) kao i transformacijama (3.1).

Uslov optimalnosti (2.11) dobija oblik:

$$\int_{t_0}^{t_1} f^o(q,p,v)\,dt \to \inf \tag{3.7}$$

gde je $f^o(q,p,v) = F^o[q,p,u(q,p,v)]$.

Na taj način, prethodno definisani zadatak, transformacijama (3.1) doveli smo na oblik određen relacijama (2.3), (2.9), (2.10), (2.12), (3.5), (3.6) i (3.7). Za rešavanje problema može da se upotrebi i teorema 22. **Pontrjagin** 1983.[1],ukoliko neke od gore navedenih relacija transformišemo na pogodan oblik. U tom cilju uvedimo $l+m$ dimenzionu vektorsku funkciju:

$$\Phi^\xi(q,p,v) = \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}[\varphi^\nu(q)] \\ \dfrac{d}{dt}[b^{\rho\alpha}p_\alpha] \qquad (\xi = 1, 2, \ldots, l+m) \\ \dfrac{d}{dt}[g^k(q,p)] \end{cases} \tag{3.8}$$

pri čemu su diferenciranja vršena nad trajektorijom $q(t)$, $p(t)$ rešenjem jednačina (3.5) za odgovarajuće upravljanje $v(t)$. Uslovi:

$$\Phi^\xi(q,p,v) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \tag{3.9}$$

ekvivalentni su vezama (2.3) i (2.9) i ograničenjima (2.10) ukoliko je u početnom trenutku t_0 fazna tačka na mnogostrukostima:

$$[\varphi^\nu(q)]_{t_0} = 0 \quad \left[\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right]_{t_0} = 0, \quad [b^{\rho\alpha}p_\alpha]_{t_0} = 0, \quad [g^k(q,p)]_{t_0} = 0 \tag{3.10}$$

Drugim rečima, uslovi (3.9) i (3.10) obezbeđuju da se u celom intervalu $[t_0, t_1]$ fazna tačka kreće saglasno vezama (2.3) i (2.9) i ograničenjima (2.10).

Izdvajajući među mnogostrukostima (2.12) i (3.10) one sa nezavisnim gradijentima dobijamo na krajevima intervala $[t_0, t_1]$ uslove:

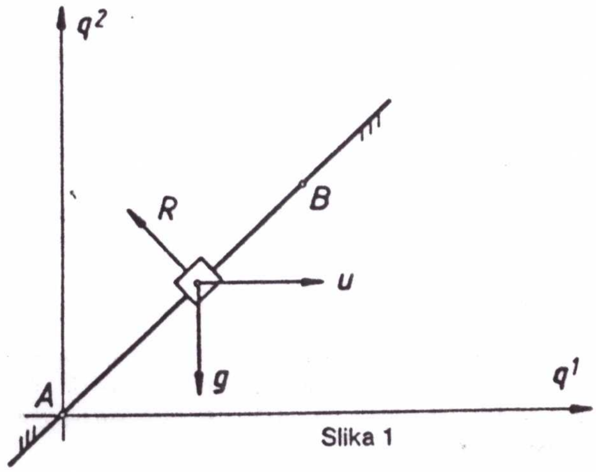
$$\omega_\lambda[q(t_0), p(t_0), q(t_1), p(t_1)] = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, p, \; s \le p \le 2n) \tag{3.11}$$

Na taj način zadatak optimalnog upravljanja, definisan relacijama (3.5),(3.6), (3.7),(3.9) i (3.11), doveden je na oblik pogodan za primenu teoreme 22. **Pontrjagin** 1983.[1] koja daje potrebne uslove za određivanje optimalnog upravljanja i njemu odgovarajuće trajektorije $v^* = v^*(t)$, $q^* = q^*(t)$, $p^* = p^*(t)$. Vrativši se na početni problem iz (3.4) slede tražena optimalna rešenja:

$$u^* = u^*(t) \quad \lambda^* = \lambda^*(t) \quad \mu^* = \mu^*(t) \tag{3.12}$$

IV PRIMER. HOLONOMNA VEZA OGRANIČENE REAKCIJE

Klizač mase $m=1$ (u ovom radu vrednosti svih fizičkih veličina biće date u svojim osnovnim jedinicama) kreće se po glatkoj krutoj vezi pod dejstvom upravljačke sile u horizontalnog pravca i iz položaja A(0,0) stigne u položaj B(1,1) za vreme t_1 (slika 1). Ako su u početnom i krajnjem položaju brzine klizača jednake nuli i ako je reakcija veze ograničena ($|R| \leq 4g\sqrt{2}$) odrediti upravljanje u iz uslova da je vreme kretanja minimalno.



Slika 1

Zadatak optimalnosti ima oblik:

$$\dot{q}^1 = p_1 \qquad \dot{p}_1 = u-\lambda$$

$$\dot{q}^2 = p_2 \qquad \dot{p}_2 = -g+\lambda \tag{4.1}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \rightarrow \inf \tag{4.2}$$

$$|R| \leq 4g\sqrt{2} \Rightarrow |\lambda| \leq 4g, \quad \forall t \in [0,t_1] \tag{4.3}$$

$$\varphi(q^1,q^2) = q^2 - q^1 = 0 \tag{4.4}$$

$$q^1(0) = q^2(0) = p_1(0) = p_2(0) = p_1(t_1) = p_2(t_1) = 0 \qquad q^1(t_1) = q^2(t_1) = 1 \tag{4.5}$$

Transformacijama:

$$u = v_1 + v_2 + g$$

$$\lambda = v_2 + g \tag{4.6}$$

dobijamo:

$$\dot{q}^1 = p_1 \qquad \dot{p}_1 = v_1$$

$$\dot{q}^2 = p_2 \qquad \dot{p}_2 = v_2 \tag{4.7}$$

$$-5g \leq v_2 \leq 3g \tag{4.8}$$

$$\Phi(\nu_1, \nu_2) = \nu_2 - \nu_1 = 0 \tag{4.9}$$

Na osnovu (4.2), (4.7) i (4.9) formirajmo funkciju:

$$\mathcal{H} = \Psi_o + \Psi_1 p_1 + \Psi_2 p_2 + \Psi_3 \nu_1 + \Psi_4 \nu_2 + \eta(\nu_2 - \nu_1) \tag{4.10}$$

Prema principu maksimuma je:

$$\sup_{\nu \in G_\nu} \mathcal{H} = 0 \tag{4.11}$$

$$\dot{\Psi}_1 = 0,\ \dot{\Psi}_2 = 0,\ \dot{\Psi}_3 = -\Psi_1,\ \dot{\Psi}_4 = -\Psi_2,\ \Psi_o \leq 0 \tag{4.12}$$

S obzirom na (4.8) iz (4.11) sledi:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_1} = \Psi_3 - \eta = 0$$

$$\nu_2 = \begin{cases} -5g, & \Psi_4 < 0 \\ 3g, & \Psi_4 > 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

odnosno s obzirom na (4.7), (4.9) i (4.12):

$$\nu_1 = \nu_2 = \begin{cases} 3g, & \forall t \in [0, \tau],\ \tau = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3g}\right)^{\frac{1}{2}} \\ -5g, & \forall t \in [\tau, t_1],\ t_1 = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{3g}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{4.14}$$

pa je prema transformacijama (4.6):

$$u = \begin{cases} 7g, & \forall t \in [0, \tau] \\ -9g, & \forall t \in [\tau, t_1] \end{cases} \tag{4.15}$$

V PRIMER. MEHANIČKI SISTEM SA NEHOLONOMNIM VEZAMA

Telo 1 koje može da se pomera duž svoje obrtne ose prenosi obrtanje sa diska 2 na disk 3 (slika 2). Na telo 1 deluje sila F ($|F| \leq 1$) a na telo 2, koje se obrće konstantnom ugaonom brzinom $\dot{\Psi} = 1$, moment M. Inerciona matrica sistema je jedinična.

Potrebno je rešiti sledeći zadatak:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_o) &= 0, & \dot{\theta}(t_o) &= 2, \\ \dot{x}(t_1) &= 0, & \dot{\theta}(t_1) &= 4, \end{aligned} \quad \int_{t_o}^{t_1} dt \rightarrow \inf \tag{5.1}$$

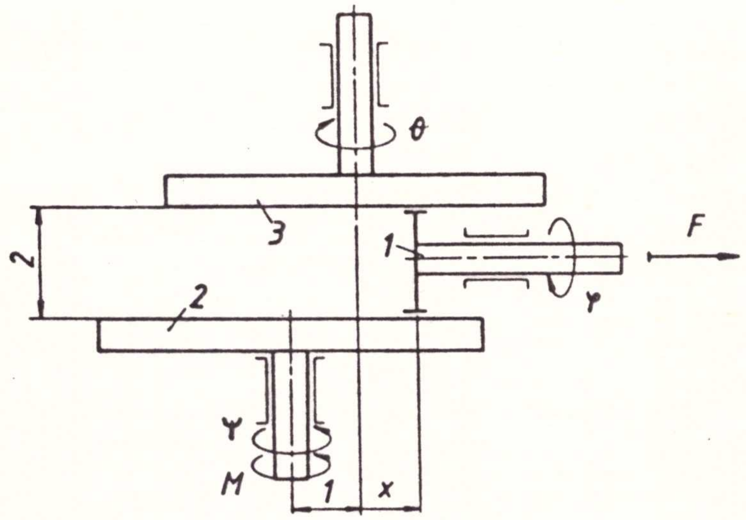
Unutrašnje veze sistema su:

$$(1+x)\dot{\Psi} - \dot{\varphi} = 0$$

$$\dot{\varphi} - x\dot{\theta} = 0 \tag{5.}$$

a zadato ograničenje:

$$\dot{\Psi} - 1 = 0 \tag{5.}$$



Slika 2

Uvodeći promenljive:

$$q^1 = x,\ q^2 = \varphi,\ q^3 = \Psi,\ q^4 = \theta$$

$$p_1 = \dot{x},\ p_2 = \dot{\varphi},\ p_3 = \dot{\Psi},\ p_4 = \dot{\theta} \tag{5.}$$

s obzirom na (5.2) imamo jednačine kretanja:

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &= p_1 & \dot{p}_1 &= F \\ \dot{q}^2 &= p_2 & \dot{p}_2 &= -\mu_1 + \mu_2 \\ \dot{q}^3 &= p_3 & \dot{p}_3 &= M + \mu_1(1+q^1) \\ \dot{q}^4 &= p_4 & \dot{p}_4 &= -\mu_2 q^1 \end{aligned} \tag{5.}$$

i ograničenja:

$$(1+q^1)p_3 - p_2 = 0,\quad p_2 - q^1 p_4 = 0,\quad p_3 - 1 = 0 \tag{5.}$$

Transformacijama:

$$\nu_1 = F$$

$$\nu_2 = -\mu_1 + \mu_2$$

$$\nu_3 = M + \mu_1 (1+q^1) \qquad (5.7)$$

$$\nu_4 = -\mu_2 q^1$$

jednačine (5.5) dobijaju oblik:

$$\dot{q}^i = p_i, \quad \dot{p}_i = \nu_i \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad (5.8)$$

na osnovu čega ograničenja (5.6) mogu da se dovedu na oblik:

$$p_1 p_3 + (1+q^1)\nu_3 - \nu_2 = 0$$

$$\nu_2 - p_1 p_4 - q^1 \nu_4 = 0 \qquad (5.9)$$

$$\nu_3 = 0$$

pri čemu je:

$$|\nu_1| \leq 1 \quad \forall t \in [t_o, t_1] \qquad (5.10)$$

Uslovi na granicama intervala $[t_o, t_1]$, uzimajući u obzir (5.1) i (5.6), su:

$$q^1(t_o) = 1, \; p_1(t_o) = 0, \; p_2(t_o) = 2, \; p_3(t_o) = 1, \; p_4(t_o) = 2$$

$$q^1(t_1) = \frac{1}{3}, \; p_1(t_1) = 0, \qquad p_4(t_1) = 4 \qquad (5.11)$$

Na osnovu (5.1), (5.8) i (5.9) imamo funkciju:

$$\mathcal{H} = \Psi_o + \sum_{i=1}^{4} (\Psi_i p_i + \Psi_{4+i} \nu_i) + \eta_1 [p_1 p_3 + (1+q^1)\nu_3 - \nu_2] + \eta_2 [\nu_2 - p_1 p_4 - q^1 \nu_4] + \eta_3 \nu_3 \qquad (5.12)$$

pri čemu je:

$$\begin{array}{ll} \Psi_o \leq 0 & \\ \dot{\Psi}_1 = -\eta_1 \nu_3 + \eta_2 \nu_4 & \dot{\Psi}_5 = -\Psi_1 - \eta_1 p_3 + \eta_2 p_4 \\ \dot{\Psi}_2 = 0 & \dot{\Psi}_6 = -\Psi_2 \\ \dot{\Psi}_3 = 0 & \dot{\Psi}_7 = -\Psi_3 - \eta_1 p_1 \\ \dot{\Psi}_4 = 0 & \dot{\Psi}_8 = -\Psi_4 + \eta_2 p_1 \end{array} \qquad (5.13)$$

Koristeći princip maksimuma pokazuje se da sva upravljanja ν_i ne mogu biti singularna pa na osnovu (5.10) i (5.12) imamo potrebne uslove optimalnosti:

$$\nu_1 = \text{sign}\,\Psi_5, \quad \Psi_6 - \eta_1 + \eta_2 = 0, \quad \Psi_7 + \eta_1 (1+q^1) + \eta_3 = 0,$$

$$\Psi_8 - \eta_2 q_1 = 0 \qquad (5.14)$$

odakle, s obzirom na (5.6), (5.9), (5.11) i (5.13) dobijamo:

$$\nu_1 = \begin{cases} -1, & t \in [0, \tau] \\ 1, & t \in [\tau, t_1] \end{cases}, \quad \nu_2 = p_1, \quad \nu_3 = 0, \quad \nu_4 = \frac{-p_1}{(q^1)^2} \tag{5.15}$$

odnosno, s obzirom na (5.5) i (5.7):

$$F = \begin{cases} -1, & t \in [0, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}] \\ 1, & t \in (\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, 2\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}] \end{cases} \qquad M = \frac{p_1[(q^1)^3 - 1)(q^1 + 1)]}{(q^1)^3}$$

$$\mu_1 = \frac{p_1[1 - (q^1)^3]}{(q^1)^3}, \quad \mu_2 = \frac{p_1}{(q^1)^3} \tag{5.16}$$

$$p_1 = -t, \qquad q^1 = -\frac{1}{2}t^2 + 1, \qquad \forall t \in [0, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}]$$

$$p_1 = t - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \; q^1 = \frac{1}{2}t^2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} t + \frac{5}{3}, \; \forall t \in (\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, 2\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}]$$

VI ZAKLJUČAK

Izloženi metod nametnut je potrebom da se pri razmatranju optimalnog upravljanja kretanjem neslobodnog mehaničkog sistema analiziraju i reakcije bilo spoljašnjih bilo unutrašnjih veza. Da bi rezultati teorije optimalnog upravljanja mogli biti neposredno primenjeni na postavljeni problem neophodno je bilo da se, u tom smislu, prethodno formiraju pogodni mehanički i matematički modeli. Pri tome mogu da se naprave različiti pristupi problemu. Naime, moguće je rešavati problem smatrajući neodređene množitelje veza kao deo funkcija upravljanja ili uvodeći nove funkcije upravljanja koje u sebi sadrže, kao komponente, reakcije veza. Pored toga moguće je da se jednačine mehaničkih veza transformišu kao ograničenja za funkcije upravljanja, u skladu sa početnim i krajnjim stanjem sistema. Međutim, svi takvi pristupi daju isti broj uslova za konačno rešenje problema, a koje od njih treba koristiti zavisi isključivo od pogodnosti modela zadatka za rešavanje.

Takođe, postoje mehanički sistemi, npr. zatvoreni kinematski lanci, kod kojih je daleko pogodnije koristiti matematički model u kome eksplicitno postoje množioci veza u odnosu na model dobijen njihovom eliminacijom, čak i u onim zadacima u kojima reakcije veza nemaju značaja.

Primeri koji su ilustrovali metodologiju izabrani su zbog mogućnosti dobijanja konačnog rešenja. Međutim, u problematiku ovoga rada spadali bi i pojedini značajni problemi kao što je optimalno upravljanje manipulatorom kod koga hvataljka vrši tzv. ograničeno kretanje a reakcije veza moraju biti podvrgnute ograničenjima.

Iako su u ovom zadatku razmatrane isključivo idealne mehaničke veze ne isključuje se mogućnost da se ovakav metod proširi i na sisteme sa realnim vezama.

VII LITERATURA

[1] Pontrjagin L.S., Boltjanskij V.G., Gamkrelidze R.V. , Miščenko E. F., "MATEMATIČESKAJA TEORIJA OPTIMALJNIH PROCESOV" (na ruskom), Nauka, Moskva, 1983.

[2] Alcksejev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V., "OPTIMALJNOE UPRAVLJENJIE" (na ruskom), Nauka, Moskva, 1979.

[3] Lurje A.I., "ANALITIČESKAJA MEHANIKA" (na ruskom), Gos.izd. fizičesko-matematičeskoj literaturi, Moskva, 1961.

SUMMARY

OPTIMAL CONTROL AND JOINT REACTIONS OF A CONSTRAINED MECHANICAL SYSTEM

Josif Vuković Aleksandar Obradović
Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade

The problem of optimal control with determination of joint reactions of a constrained mechanical system has been presented in this paper. This method is based upon essential difference between reaction forces of material joints and other limitations imposed on the controlled system. State equations including explicit reaction forces have been also set. The problem has been transformed to be suitable for the application of optimal control theory in solving of practical tasks.