

Na slici 2 prikazana je realizacija brahistohronog ravnog kretanja krutog tela kotrljanjem bez proklizavanja rulete (22) po bazi (21), za $a=1[m]$.

LITERATURA

- [1] Поигргини Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, Москва, 1983.
- [2] Vuković J., *Optimalno upravljanje kretanjem mehaničkih sistema*, Doktorski rad, PMF Beograd, 1984.
- [3] Лурье А.Н., *Аналитическая механика*, Гос. изд. физ.-мат. литературы, Москва, 1961.
- [4] Kelley H.J., Kopp R.E., Moyer H.G., *Singular Extremals, Topics in Optimization* (ed. by. Leitmann G.), Academic press., N.Y., 1967.
- [5] Fempl S., *Elementi varijacionog računa*, Građevinska knjiga, Beograd 1965.
- [6] Vučjanović B.D., *Varijacioni račun, analitička mehanika, optimalno upravljanje*, Radivoj Čirpanov, Novi Sad, 1980.
- [7] Dukić D.S., *The Brachistochronic Motion of a Gyroscope Mounted on The Gimbals*, Theoretical and Applied Mechanics 7, Beograd, 1981.
- [8] Čović V., Lukačević M., *On Brachistochronic Motions on Non-Conservative Dynamical System*, Theoretical and Applied Mechanics 7, Beograd, 1981.
- [9] Bilimović A., *Racionalna mehanika III (Mehanika čvrstog tela)*, Naučna knjiga, Beograd, 1964.
- [10] Габасов Р., Кириллова Ф.М., *Особые оптимальные управления*, Наука, Москва, 1973.

Ovaj rad je urađen u okviru Projekta 0402 Fonda za nauku Srbije

OPTIMALNO UPRAVLJANJE KRETANJEM KRUTOG TELA PRI POSTOJANJU NEHOLONOMNE MEHANIČKE VEZE OPTIMAL CONTROL OF MOTION OF A RIGID BODY WITH NON- HOLONOMIC CONSTRAINT

mr ALEKSANDAR OBRADOVIĆ
dr NIKOLA MLADENIĆ
Katedra za mehaniku, Mašinski fakultet Beograd
27. marta 80, 11000 Beograd

ABSTRACT:

The motion of a rigid body between two given positions in a horizontal plane during the shortest possible time has been solved in this paper. During this motion a nonholonomic constraint in the form of the Chaplygin's blade is imposed upon the body. The conservation of the mechanical energy is maintained independently of the constraint. The problem is postulated as a problem of the optimal control and has been solved by the application of the Pontryagin's Principle. This problem is singular by using dynamic equations and it is necessary to apply Kelley's conditions. The other method of the solution is based on the usage of generalized velocities as controls. The application of both of the methods mentioned yields to a two point boundary problem during an unknown time interval. By introducing the "undimensional time" the problem is reduced to a classical boundary problem. As a confirmation of the mentioned model, the example of the motion of a rigid body in a plane has been solved numerically by applying the finite difference method. The analysis of the realization of the mentioned motion is also given. A possible way is to impose an additional ideal holonomic constraint without influence of any active force.

1. UVOD

Rezultati savremene matematičke teorije optimalnog upravljanja [1] našli su svoju primenu u raznim problemima optimalnosti u mehanici [7]. Jedan od njih je i određivanje optimalnog upravljanja kretanjem mehaničkog sistema kod koga postoje mehaničke veze uporedo sa nametnutim drugim ograničenjima na fazne promenjive. U radu [6] autori daju postupak rešavanja ovakvih zadataka, a takođe ukazuju na suštinsku razliku napred navedenih ograničenja i mehaničkih veza. Osim toga, pokazana je razlika između zadataka gde postoje holonomne ili neholonomne mehaničke veze, usled činjenice da neki autori ([2] str. 81) sva fazna ograničenja nazivaju holonomnim vezama.

U ovome radu rešava se zadatak optimalnog upravljanja kretanjem (minimizacija vremena) krutog tela u horizontalnoj ravni pri postojanju mehaničke neholonomne idealne veze, a sa nametnutim ograničenjem neizmenjivosti mehaničke energije. Ovakav zadatak

rešavan je u radu [4] za kretanje u vertikalnoj ravni, gde je dato odgovarajuće numeričko rešenje na osnovu diferencijalnih jednačina dobijenih iz potrebnih uslova optimalnosti klasičnog varijacionog računara.

Cilj ovog rada je da, korišćenjem numeričkih postupaka za rešavanje dvotačkastog graničnog problema (dobijenog na osnovu Pontrjaginovog principa maksimuma), precizno definiše rešenje zadatka u zavisnosti od proizvoljno zadatih graničnih uslova. Osim toga data je i diskusija o načinima upravljanja kretanjem, gde je pokazano da se optimalna trajektorija može ostvariti i bez dejstva aktivnih sila.

2. POSTAVKA ZADATKA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Na slici 1 je prikazano telo mase m i y poluprečnika inercije i za osu Cz , koje se kreće po nepomičnoj idealno glatkoj horizontalnoj podlozi. Kretanje tela je ograničeno idealnom neholonomnom vezom realizovanom u obliku Čapljinogovog sečiva [4].

Uzmajući za generalisane koordinate:

$$q^1 = x_c \quad q^2 = y_c \quad q^3 = \varphi \quad (1)$$

jednačine kretanja u kanonskom obliku [5] glase:

$$\dot{q}^1 = \frac{1}{m} p_1 \quad \dot{q}^2 = \frac{1}{m} p_2 \quad \dot{q}^3 = \frac{1}{mi^2} p_3 \quad (2a)$$

$$\dot{p}_1 = Q_1 + \lambda \tan q^3 \quad \dot{p}_2 = Q_2 - \lambda \quad \dot{p}_3 = Q_3$$

$$\dot{q}^1 \tan q^3 - \dot{q}^2 = 0 \quad (2b)$$

a jednačina idealne neholonomne veze:

$$p_1 \tan q^3 - p_2 = 0 \quad (3b)$$

ili u skladu sa (2a):

gde su:

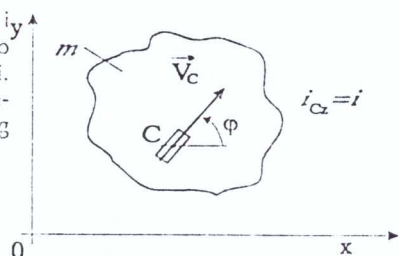
p_i - generalisani impulsi ($i=1,2,3$)

λ - množitelj neholonomne veze

Q_i - generalisane sile ($i=1,2,3$)

Treba odrediti $Q_i=Q_i(t)$ da se kruto telo iz zadanog početnog položaja:

$$q^i(0) = q^i_0 \quad (i=1,2,3) \quad (4a)$$



Slika 1

prevede u zadati krajnji položaj:

$$q^i(T) = q^i_T \quad (i=1,2,3) \quad (4b)$$

pri čemu vremenski interval T nije zadat, njega treba minimizirati, ali da tokom kretanja zadata vrednost mehaničke, u ovom slučaju kinetičke, energije E bude konstantna:

$$\frac{1}{2} m \left[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + i^2 (\dot{q}^3)^2 \right] - E = 0 \quad (5a)$$

odnosno

$$\frac{1}{2m} \left[p_1^2 + p_2^2 + i^{-2} p_3^2 \right] - E = 0 \quad (5b)$$

Uzmajući za upravljanje ukupnu generalisanu silu jednačine (2b) prelaze u:

$$\dot{p}_i = u_i \quad (i=1,2,3) \quad (2c)$$

a na osnovu jednačine neholonomne veze (3) i faznih ograničenja (5), u skladu sa (2a) i (2c), dobijaju se ograničenja upravljanja:

$$u_1 \tan q^3 + p_1 p_3 (m \cdot i^2)^{-1} \cos^{-2} q^3 - u_2 = 0 \quad (3c)$$

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + i^{-2} p_3 u_3 = 0 \quad (5c)$$

ZADATAK 1:

Za sistem čije su jednačine ponašanja (2a) i (2c) odrediti programsko optimalno upravljanje $u^*_i = u^*_i(t)$, $i=1,2,3$, uslovljavajući minimum funkcionala

$$J = \int_0^T 1 dt \quad (6)$$

pri kretanju iz stanja (4a) u stanje (4b), pri čemu su na optimalnoj trajektoriji ispunjena ograničenja (3c) i (5c). Osim toga, da bi (3c) i (5c) zamenili (3) i (5) potrebno je ispunjenje (3b) odnosno (5b) u jednom proizvoljnom trenutku.

Metodologijom iznetom u [6], primenili smo Pontrjaginov princip maksimuma za upravljanje kretanjem mehaničkog sistema sa mehaničkim vezama, jer na osnovu izračunatog $u^*_i(t)$, $i=1,2,3$, iz (2a) i (2c) određuju se generalisane sile $Q_i(t)$ i $\lambda(t)$ na optimalnoj trajektoriji, čime je zadatak rešen do kraja. O tome će detaljnije biti reči u Poglavlju 5.

Napred formulisani Zadatak 1 ne može se do kraja rešiti samo principom maksimuma. Naime, s obzirom da su jednačine ponašanja sistema i ograničenja upravljanja linearna po upravljanjima u_i , $i=1,2,3$, optimalna upravljanja se ne mogu odrediti iz uslova maksimuma Pontrjaginove funkcije \mathcal{H} :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (7)$$

Za ovakav slučaj kaže se da je singularan [8], optimalna upravljanja se određuju daljim diferenciranjem (7), pri čemu singularna optimalna upravljanja moraju zadovoljiti Kelijeve uslove [8] za trodimenzionalni vektor upravljanja.

Međutim činjenica da početni (4a) i krajnji (4b) uslovi ne obuhvataju generalisane brzine, odnosno impulse, omogućava da se brže dođe do rešenja. Naime uzimajući za upravljanja v^i , $i=1,2,3$, generalisane brzine

$$\dot{q}^i = v^i \quad (i=1,2,3) \quad (8)$$

jednačina neholonomne veze prelazi u:

$$v^1 \tan q^3 - v^2 = 0 \quad (9)$$

a ograničenja energije u:

$$\frac{1}{2} m \cdot \left[(v^1)^2 + (v^2)^2 + i^2 (v^3)^2 \right] - E = 0 \quad (10)$$

ZADATAK 2:

Za sistem čije su jednačine ponašanja (8), odrediti programsko optimalno upravljanje $v_i^* = v_i^*(t)$, $i=1,2,3$, koje saopštava minimum funkcionalu (6), tako da su na optimalnoj trajektoriji ispunjena ograničenja (9) i (10), a početno i krajnje stanje dati uslovima (4a) i (4b).

Ovako formulisan zadatak više nije singularan, a osim toga jednačina ponašanja ima dva puta manje. Naredno poglavlje je posvećeno rešavanju Zadatka 2.

3. REŠAVANJE ZADATKA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

U cilju rešavanja Zadatka 2 formirajmo Pontrjaginovu funkciju:

$$\mathcal{H} = -1 + \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 v^3 \quad (11)$$

i na osnovu (9), (10) i (11) spregnuti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= 0 \\ \dot{\lambda}_3 &= \psi_1 v^1 \cos^{-2} \end{aligned} \quad (12)$$

gde su λ_i , $i=1,2,3$, koordinate spregnutog vektora.

Uslovi maksimuma (7) u slučaju kada postoje ograničenja (9) i (10) dobijaju oblik

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \psi_1 \tan q^3 - \psi_2 v^1 &= 0 \\ \lambda_2 + \psi_1 - \psi_2 v^2 &= 0 \\ \lambda_3 - \psi_3 i^2 v^3 &= 0 \end{aligned}$$

Iz relacija (9), (10), (11) i (13), uz uslov $\mathcal{H}=0$ za slučaj nepoznatog vremenskog intervala, slede množitelji veza:

$$\psi_1 = \lambda_1 \sin q^3 \cos q^3 - \lambda_2 \cos^2 q^3 \quad (14)$$

$$\psi_2 = \frac{m}{2E}$$

kao i optimalna upravljanja:

$$v^1 = \frac{2E}{m} \cdot (\lambda_1 \cos^2 q^3 + \lambda_2 \cdot \sin q^3 \cos q^3) \quad (15)$$

$$v^2 = \frac{2E}{m} \cdot (\lambda_1 \sin q^3 \cos q^3 + \lambda_2 \sin^2 q^3)$$

$$v^3 = \frac{2E}{m} \lambda_3$$

Na osnovu relacija (8), (12), (14) i (15) sledi dvotačkasti granični problem za sistem diferencijalnih jednačina:

$$\dot{q}^1 = \frac{2E}{m} (\lambda_1 \cos^2 q^3 + \lambda_2 \sin q^3 \cos q^3), \quad \dot{\lambda}_1 = 0 \quad (16)$$

$$\dot{q}^2 = \frac{2E}{m} (\lambda_1 \sin q^3 \cos q^3 + \lambda_2 \sin^2 q^3), \quad \dot{\lambda}_2 = 0$$

$$\dot{q}^3 = \frac{2E}{m} i^2 \lambda_3, \quad \dot{\lambda}_3 = \frac{m}{2E} \cdot (\lambda_1 \sin q^3 - \lambda_2 \cos q^3) (\lambda_1 \cos q^3 + \lambda_2 \sin q^3)$$

sa zadatim graničnim uslovima (4a) i (4b). Za određivanje nepoznatog vremena T na raspolaganju ima uslov $\mathcal{H}=0$, za $t_0=0$ uz (4a) i (15). Na osnovu rešenja $q_i = q_i(t)$, $\lambda_i = \lambda_i(t)$, $i=1,2,3$, dvotačkastog graničnog problema, diferencirajući (15) u skladu sa (16) dobija se $\dot{q}^i = \dot{q}^i(t)$ a time i ukupne generalisane sile $\dot{p}_i(t) = u_i(t)$ na optimalnoj trajektoriji.

4 NUMERIČKO REŠENJE

Uzmimo, da je bez ograničenja opštosti,

$$q^i(0) = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (17)$$

i neka je

$$\frac{2E}{m} = 1 \left[\frac{m^2}{s^2} \right], \quad i=1 [m]$$

Iz uslova $\mathcal{H}=0$ i relacija (11), (15) i (17) sledi:

$$0 = -1 + [\lambda_1(0)]^2 + [\lambda_3(0)]^2 \quad (18)$$

S obzirom da su jednačine (16) nelinearne neophodno je numerički rešavati problem. Predhodno, neophodno je preformulisati zadatak na slučaj zadatog intervala nezavisne promenive [3]. Učinimo to uvođenjem tzv. "bezdimenzionog" vremena t' :

$$t = T \cdot t', \quad 0 \leq t' \leq 1 \quad (19)$$

Sistem jednačina (16), uzimajući u obzir napred navedeno, prelazi u

$$\begin{aligned} (\dot{q}^1)' &= T \cdot (\lambda_1 \cdot \cos^2 q^3 + \lambda_2 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^3), & (\lambda_1)' &= 0 \\ (\dot{q}^2)' &= T \cdot (\lambda_1 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^3 + \lambda_2 \cdot \sin^2 q^3), & (\lambda_2)' &= 0 \\ (\dot{q}^3)' &= T \cdot \lambda_3, & (\lambda_3)' &= T \cdot (\lambda_1 \cdot \sin q^3 - \lambda_2 \cdot \cos q^3) \cdot (\lambda_1 \cdot \cos q^3 + \lambda_2 \cdot \sin q^3) \\ & & (T)' &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

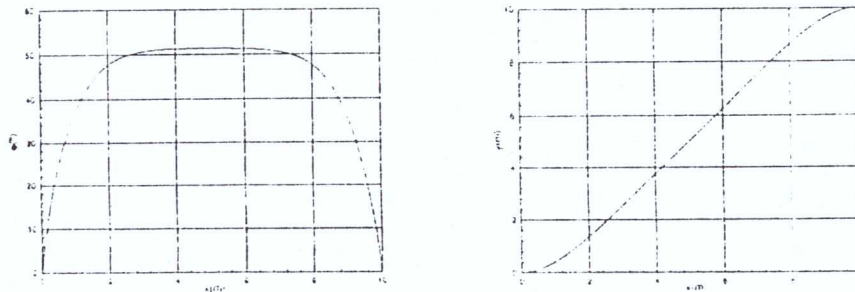
gdje je oznakom ($'$) označeno diferenciranje po t' . Početnim uslovima (17) i (18) treba dodati krajnje:

$$q^i(1) = q^{i*} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (21)$$

tako da je njihov ukupan broj jednak broju diferencijalnih jednačina (20) i problem je prilagođen da se numerički rešava nekim od postupaka za rešavanje dvotačkastog graničnog problema. Osim generalisanih koordinata i spregnutog vektora, određeno je i vreme trajanja kretanja T .

Na slici 2 i slici 3 dati su dijagrami zavisnosti $y_i = y_i(x_j)$ i $\varphi = \varphi(x_j)$ nacrtani na osnovu rezultata numeričke integracije.

Za numeričku integraciju iskorišćen je program za rešavanje konturnih problema, zasnovan na metodi konačnih razlika [9].

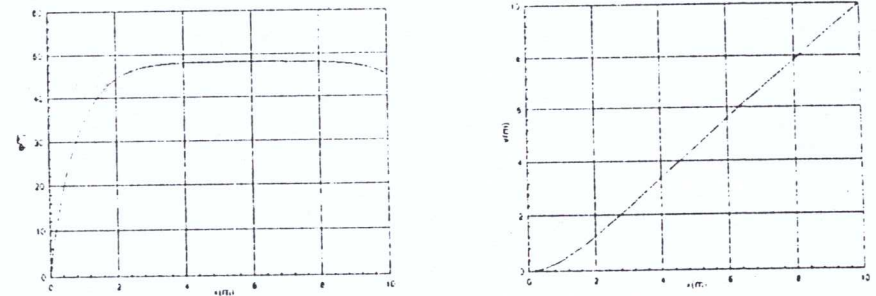


$$q^1(T) = 10 \text{ [m]} \quad q^2(T) = 10 \text{ [m]} \quad q^3(T) = 0 \quad t = 14,80625 \text{ [s]}$$

Slika 2

5. REALIZACIJA UPRAVLJANJA KRETANJEM

Na osnovu rezultata prethodnih poglavlja možemo smatrati poznatom ukupnu generalisanu silu $u_i = u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $0 < t < T$. Takođe, znamo i $q_i = q_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, a na optimalnoj trajektoriji održava se integral energije i zadovoljena je jednačina neholonomne veze.



$$q^1(T) = 10 \text{ [m]} \quad q^2(T) = 10 \text{ [m]} \quad q^3(T) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad t = 14,45512 \text{ [s]}$$

Slika 3

Određivanje $Q_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, i množitelja $\lambda(t)$, rešavanjem direktnog zadatka dinamike na osnovu (2b) i (2c), nema jednoznačno rešenje. Navedimo neke od slučajeva:

$$Q_i(t) = u_i(t), \quad \lambda(t) \equiv 0 \quad (22a)$$

$$Q_3(t) = u_3(t), \quad Q_2(t) \equiv 0, \quad \lambda(t) = -u_2(t), \quad Q_1(t) = u_1(t) + u_2(t) \cdot \tan q^3(t) \quad (22b)$$

$$\begin{aligned} Q_3(t) &= u_3(t), \quad Q_1(t) \equiv 0, \quad \lambda(t) = u_1(t) \cdot \tan^{-1} q^3(t), \\ Q_2(t) &= u_2(t) + u_1(t) \tan^{-1} q^3(t) \end{aligned} \quad (22c)$$

Slučaj (22a) odgovara parazitskoj vezi, tj. onoj čija je reakcija jednaka 0. On se može ostvariti kada se aktivne sile menjaju po odgovarajućem zakonu ili sa dve idealne holonomne veze

$$f_i = (q^j) = 0 \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3 \quad (23)$$

One se mogu, s obzirom na poznato $q_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, ostvariti na beskonačno načina. Na primer "ukopavanjem" žljebova u podlozi za proizvoljne dve tačke krutog tela, tako da žljeb prati odgovarajuće putanje tačaka pri optimalnom kretanju. Drugi način je kotrljanje pokretnog po nepokretnom centroidu.

Sledeći način je kada je jedna od generalisanih ostalih sila $Q_i(t)$ $i = 1, 2$, jednaka 0. Pri tome, za $Q_3(t) = 0$, u opštem slučaju, nije moguće ostvarenje optimalnog upravljanja.

Bez dejstva aktivnih sila upravljanje kretanjem može se ostvariti i tako što se telu, osim postojeće neholonomne nametne još samo jedna holonomna mehanička veza tipa (23).

Ukupne generalisane sile biće:

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial q^1} + \lambda \cdot \tan q^3 \\ u_2 &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial q^2} - \lambda \\ u_3 &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial q^3} \end{aligned} \quad (24)$$

a s obzirom da je:

$$\text{rang} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial u_i}{\partial \lambda} \right\} = 2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (25)$$

Iz relacija (24), na osnovu poznatih ukupnih generalisanih sila $u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, određeni su i množitelji veza $\lambda(t)$ i $\lambda_1(t)$, čime je zadatak u potpunosti rešen.

LITERATURA

- [1] Поцгрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, Москва, 1983.
- [2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В., *Оптимальное управление*, Наука, Москва, 1979.
- [3] Моисеев Н.И., *Элементы теории оптимальных систем*, Наука, Москва, 1975.
- [4] Зекочић Д., *О брхистохрономном движенни механической системы с неголономными нелинейными и нестационарными связями*, Прикладная математика и механика, Том 54, вып.6., 1990.
- [5] Лурье А.И., *Аналитическая механика*, Гос. изд. физ.-мат. литературы, Москва, 1961.
- [6] Vuković J., Obradović A., *Optimalno upravljanje i reakcije veza neslobodnog mehaničkog sistema*, Zbornik radova IV konferencije SAUM, Kragujevac, 1992.
- [7] Vuković J., *Optimalno upravljanje kretanjem mehaničkih sistema*, Doktorski rad, PMF Beograd 1984.
- [8] Kelley H.J., Cobp R.E., Moyer H.G., *Singular Extremals, Topics in Optimization* (ed. by Leitmann G.) Academic press, N.Y. 1967.
- [9] Pereya I., *PASVAL: An Adaptive finite Difference FORTRAN Program for First Order Non-Linear Ordinary Boundary Problems*, Lecture Notes in Computer Science, Vol.76, Springer Verlag, Berlin 1978.
- [10] Габасов Р., Кириллова Ф.М., *Особые оптимальные управления*, Наука, Москва, 1973.

Ovaj rad je urađen u okviru Projekta 0402 Fonda za nauku Srbije

Nenad T. Pavlović, dr Nenad D. Pavlović
Mašinski fakultet Niš

UTICAJ VRSTE VEZE UVRTNE ZAVOJNE OPRUGE SA NEPOKRETNIM OSLONCEM NA VREDNOST SOPSTVENE KRUŽNE FREKVENCije

THE INFLUENCE OF A SORT OF THE CONNECTION OF THE HELICAL TORSION SPRING WITH THE FRAME ON VALUE OF THE NATURAL CIRCULAR FREQUENCY

Summary:

The helical torsion springs are mostly used as driving elements for realization of the rotating discontinuous motion of the elements or subassemblies. One spring end is connected to the frame whilst the other one to the element to be moved. The fixing spring end can be rigidly clamped, joint connected or simply supported. In order to determine the influence of a sort of the connection of the helical torsion spring with the frame on value of the natural circular frequency, the spring is modeled as a space curved beam being stressed by flexion. A state of the element of the space curved beam can be described by the system of 12 linear differential equations of the first grade. This system can be reduced to 6 linear differential equations of the first grade by introducing some simplifications. In order to simplify the mathematical model, the beam is divided into n portions and the masses of the portions are concentrated at its ends. As n increases the error lowers. In this paper a matrix method is used to calculate the natural frequencies.

1. UVOD

Uvrtne zavojne opruge (sl.1) koriste se kao pogonski elementi za realizovanje obrtnog diskontinualnog kretanja elemenata ili sklopova. Telo opruge je najčešće navučeno na odgovarajuću osovinicu (trn). Opruga je kracima koji mogu