ЈДМ ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ЗА МЕХАНИКУ
Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука
СИМПОЗИЈУМ ИЗ ОПШТЕ МЕХАНИКЕ
Нови Сад, 29. и 30. септембар 1994.

BRAHISTOHRONO RAVNO KRETANJE KRUTOG TELA

BRACHISTOCHRONIC RIGID BODY PLANE MOTION

mr ALEKSANDAR OBRADOVIĆ
mr SAŠA MARKOVIĆ
Katedra za mehaniku, Mašinski fakultet Beograd
27.marta 80, 11000 Beograd

ABSTRACT:
The problem of the motion of a rigid body beetwen two given configurations in a plane during the shortest possible time has been solved in this paper. The conservation of the mechanical energy is satisfied as well as in the brachistochronic motion of a material point in the known Bernouly's problem. The problem is postulated as a form of the optimal control and has been solved by the application of the Pontryagin's Principle. It has been neccesary to use Kelley's conditions of singular optimal controls, having in mind that the control forces arise lineary in the equations of motion. In the example given in this paper the exact analytical solution of the equations of motion has been found. It is shown that brachistochronic motion in a plane is possible to realize with two ideal holonomic constraints without an influence of active forces. One of the possible ways is the rolling of the moving centroid over another fixed centroid, without sliding, the equations of which are given in the parameter forms. These centroids are also shown graphically.

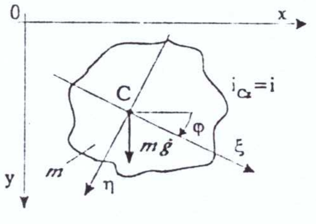
1 UVOD

Problem određivanja glatke veze materijalne tačke, iz uslova da za najkraće vreme stigne iz zadatog početnog u zadat krajnji položaj u vertikalnoj ravni, postavljen 1696 godine od strane Bernulija, ušao je u skoro sve udžbenike iz varijacionog računa (npr. [5], [6]). S obzirom na poznatu vezu između potrebnih uslova optimalnosti varijacionog računa i Potrjaginovog principa maksimuma [1], problem se može formulisati i rešiti kao zadatak optimalnog upravljanja [2].

Takođe korišćenjem varijacionog računa, izvođene su diferencijalne jednačine i ostali potrebni uslovi optimalnosti brahistohronog kretanja materijalnog sistema i određenih zadataka u slučaju krutog tela [7]. Osim toga, rezultati su uopštavani za kretanje nekonzervativnog mehaničkog sistema [8]. U svim slučajevima da bi se zadatak konačno rešio potrebno je rešavati dvotačkasti granični problem za sistem običnih diferencijalinih jednačina. Njegovo rešavanje izaziva velike teškoće sa numeričkog aspekta. Namera ovog rada je da pokaže da se pri brahistohronom ravnom kretanju, pod određenim uslovima, može doći do tačnog analitičkog rešenja. Iz njega slede poznati rezultati za materijalnu tačku. Problem se formuliše i rešava kao zadatak optimalnog upravljanja. Posebna pažnja posvećena je mogućim načinima realizacije upravljanja.

2. POSTAVKA ZADATKA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Na slici 1 prikazano je kruto telo, mase m i poluprečnika inercije i za osu Cz, koje vrši kretanje u vertikalnoj ravni.



Slika 1

Uzimajući generalisane koordinate:

$$q^1 = x_c \qquad q^2 = y_c \qquad q^3 = \varphi \tag{1}$$

jednačine kretanja u kanonskom obliku [3] izgledaju:

$$\begin{aligned} \dot q^1 &= \frac{1}{m} p_1 & \dot p_1 &= u_1 \\ \dot q^2 &= \frac{1}{m} p_2 & \dot p_2 &= u_2 + mg \\ \dot q^3 &= \frac{1}{m i^2} p_3 & \dot p_3 &= u_3 \end{aligned} \tag{2}$$

gde su: p_i $i=1,2,3$ generalisani impulsi, u_i $i=1,2,3$, generalisane sile u koje ne ulazi sila Zemljine teže(g-ubrzanje sile Zemljine teže)

Neka je u početnom trenutku vremena $t_o=0$ zadato

$$q^i(0) = 0 \qquad i = 1,2,3 \tag{3a}$$

a u trenutku T, koji nije zadat:

$$q^i(T) = q^{iT} \qquad i = 1,2,3 \tag{3b}$$

Kao i kod Bernulijevog problema uzmimo da je vrednost mehaničke energije konstantna tokom kretanja:

$$\frac{1}{2} m\left[(\dot q^1)^2 + (\dot q^2)^2 + i^2(\dot q^3)^2\right] - mgq^2 = 0 \tag{4}$$

odnosno uzmajući u obzir (2):

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + i^{-2} p_3 u_3 = 0 \tag{4a}$$

Zadatak programskog optimalnog upravljanja sastoji se u određivanju optimalnih upravljanja $u^*_i = u^*_i(t)$ tako da sistem, čije je ponašanje opisano jednačinama (2), iz zadatog početnog (3a) u zadati krajnji položaj (3b) pređe za minimalno vreme

$$\int_0^T 1 \cdot dt \Rightarrow \min \tag{5}$$

a da pri tome na optimalnoj trajektoriji budu ispunjena ograničenja na upravljanja (4a) i u jednoj tački (4).

3. REŠENJE ZADATKA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

U cilju rešavanja postavljenog zadatka napišimo proširenu Pontrijaginovu funkciju:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \lambda_0 &+ \frac{1}{m}\left(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + i^{-2}\lambda_3 p_3\right) + v^1 u_1 + \\ &+ v^2\left(u_2 + mg\right) + v^3 u_3 - \rho\left(p_1 u_1 + p_2 u_2 + i^{-2} p_3 u_3\right) \end{aligned} \tag{6}$$

i spregnuti sistem jednačina :

$$\begin{aligned} \dot\lambda_1 &= 0 & \dot v^1 &= -\frac{1}{m}\lambda_1 + \rho u_1 \\ \dot\lambda_2 &= 0 & \dot v^2 &= -\frac{1}{m}\lambda_2 + \rho u_2 \\ \dot\lambda_3 &= 0 & \dot v^3 &= -\frac{1}{m} i^{-2}\lambda_3 + \rho i^{-2} u_3 \end{aligned} \tag{7}$$

gde su λ_i i v_i, $i=1,2,3$ koordinate spregnutog vektora, a ρ množitelj koji odgovara vezi (4a)

S obzirom da su upravljanja u_i $i=1,2,3$ iz otvorenog skupa, Potrebni uslovi optimalnosti glase:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0 \qquad i = 1,2,3 \tag{8}$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
v^1 - \rho p_1 &= 0 \\
v^2 - \rho p_2 &= 0 \qquad (8a) \\
v^3 - \rho i^{-2} p_3 &= 0
\end{aligned}
$$

gde se vidi da je problem singularan [4], pa se određivanje optimalnog upravljanja vrši daljim diferenciranjem, tj.:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0 \qquad i = 1,2,3 \tag{9}$$

Na osnovu čega, u skladu sa (2) i (7), dobijamo:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{m}\lambda_1 - \dot{\rho} p_1 &= 0 \\
-\frac{1}{m}\lambda_2 - \dot{\rho} p_2 - \rho m g &= 0 \qquad (9a) \\
-\frac{1}{m} i^{-2}\lambda_3 + \dot{\rho} i^{-2} p_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Uzimajući u obzir da je usled nepoznatog T $\mathcal{H}=0$, uz korišćenje uslova $\lambda_0=-1$, (4a),(6),(8a) i (9a), iz daljeg razmatranja mogu se isključiti koordinate spregnutog vektora λ_i i v^i $i=1,2,3$, kao i množitelj ρ.

$$\dot{\rho} = \frac{-1}{2mE_k} \tag{10}$$

gde je E_k kinetička energija krutog tela.

Optimalna upravljanja određuju se iz uslova

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0 \qquad i = 1,2,3 \tag{11}$$

pri čemu je neophodno ispunjenje Kelijevih uslova za višedimenzioni vektor upravljanja [10]. S obzirom da Kelijeva matrica ima oblik

$$\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \kappa}{\partial u_j}\right)\right]\right\} = \begin{Bmatrix} -\dot{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\rho} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

vidi se, s obzirom na (10), da je ova matrica pozitivno definitne kvadratne forme, a samim tim su ispunjeni Kelijevi uslovi. Iz uslova (11) slede optimalna upravljanja:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= p_1 p_2 (m q^2)^{-1} \\
u_2 &= -2mg + p_2 p_2 (m q^2)^{-1} \qquad (13) \\
u_3 &= p_3 p_2 (m q^2)^{-1}
\end{aligned}
$$

koja zavise isključivo od faznih koordinata.

Zamenom (13) u (2) iz uslova (3a) i (3b) dobijaju se jednačine brahistohronog ravnog kretanja krutog tela

$$
\begin{aligned}
q^1(t) &= \left[1 + i^2 (q^{3T})^2 (q^{1T})^{-2}\right] \frac{g}{p^2}(pt - \sin pt) \\
q^2(t) &= \frac{g}{p^2}(1 - \cos pt) \qquad (14) \\
q^3(t) &= q^{3T} (q^{1T})^{-1} q^1(t)
\end{aligned}
$$

gde se konstanta p i vreme T određuju iz prva dva uslova (3b), numerički u opštem slučaju.

Neka su zadati krajnji uslovi zadati:

$$q^{1T} = a \cdot \frac{\pi}{2} \qquad q^{2T} = 2a \qquad q^{3T} = \frac{\pi}{2} \qquad , a > 0 \tag{15}$$

i neka je $i=a\sqrt{3}$. Tada se može i analitički odrediti

$$p = \sqrt{\frac{g}{a}} \qquad i \qquad T = \pi \cdot \sqrt{\frac{a}{g}}$$

čime je zadatak u potpunosti rešen.

Uzmajući $i=0$ (koncentrisana masa), prve dve relacije (14) predstavljaju jednačinu cikloide, koja je rešenje klasičnog Bernulijevog problema brahistohronog kretanja tačke u ravni.

Istovremeno, iz (14) sledi da je kriva kod brahistohronog kretanja tačke između dva položaja u prostoru ravanska. Naime, formalno stavljajući $i=1$ i uzimajući za generalisane koordinate

$$q^1 = x_M \qquad q^2 = y_M \qquad q^3 = z_M \tag{16}$$

koordinate tačke M u prostoru relacije (14) daju konačno rešenje zadatka. Putanja tačke M je, naravno, cikloida, ali u ravni određenoj trećom relacijom. Sve navedeno važi i za brahistohrono translatorno kretanje krutog tela.

4. REALIZACIJA UPRAVLJANJA

Pošto su poznate konačne jednačine kretanja (14), mogu se odrediti i upravljanja rešavajući direktan problem dinamike, a za konkretne brojne vrednosti prethodnog poglavlja:

$$u_1(t) = \frac{1}{2} gm \sin pt$$
$$u_2(t) = gm(\cos pt - 1) \qquad (17)$$
$$u_3(t) = \frac{3}{2} gm\, a \sin pt$$

Ukoliko za upravljačke sile uzmemo aktivne generalisane sile, onda se optimalno upravljanje može ostvariti ukoliko se one menjaju prema (17). Takođe, mogu se kombinovati na razne načine aktivne sile i nametnute mehaničke holonomne idealne veze. Posebnu pažnju posvetićemo upravljanju bez dejstva aktivnih sila. Neka su, u skladu sa konačnim jednačinama kretanja (14), odabrane idealne holonomne mehaničke veze

$$f^i(q^j) = 0 \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2,3 \qquad (18)$$

S obzirom da je:

$$u_j = \sum_{i=1}^{2} \lambda_1 \cdot \frac{\partial f_i}{\partial q^j} \qquad j = 1,2,3 \qquad (19)$$

i da je :

$$\mathrm{rang}\left\{\frac{\partial u_j}{\partial \lambda_i}\right\} = 2 \qquad (20)$$

iz relacija (19) jednoznačno su određeni množitelji veza $\lambda_1(t)$ i $\lambda_2(t)$, čime je zadatak u potpunosti rešen.

Materijalna realizacija ovakvih veza može se izvesti na beskonačno načina. Na primer, bilo koje dve tačke krutog tela mogu imati nametnute putanje koje inače treba da imaju pri optimalnom kretanju, koje je unapred određeno. Kao najinteresantnija autoru se učinila ideja da se upravljanje realizuje kotrljanjem pokretnog centroida (rulete) po nepokretnom centroidu (bazi) [9]. Naime, svako ravno kretanje krutog tela jednoznačno se može ostvariti na napred navedeni način, pri čemu su jednačine u parametarskom obliku nepokretnog:

$$x_p = x_c - \frac{1}{\dot\varphi}\dot y_c = x_p(t)$$
$$y_p = y_c + \frac{1}{\dot\varphi}\dot y_c = y_p(t)$$

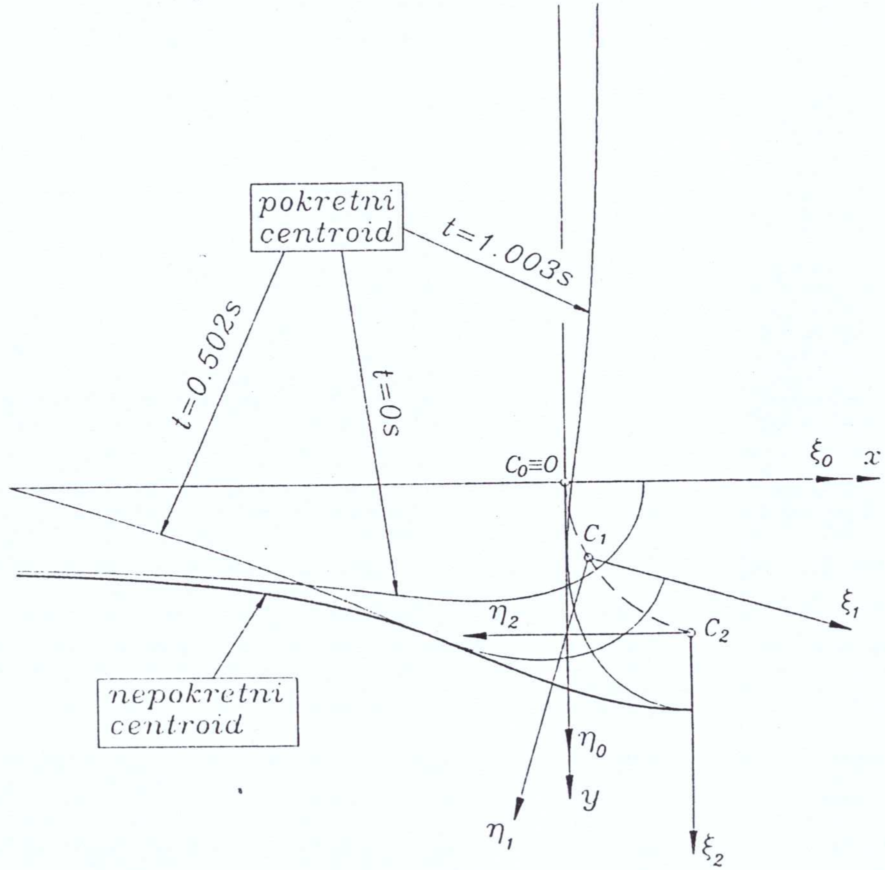
21

odnosno pokretnog centroida:

$$\xi_p = \dot\varphi^{-1}\left(\dot x_c \sin\varphi - \dot y_c \cos\varphi\right) = \xi_p(t) \qquad (22)$$
$$\eta_p = \dot\varphi^{-1}\left(\dot x_c \cos\varphi + \dot y_c \sin\varphi\right) = \eta_p(t)$$

gde su $C\xi$ i $C\eta$ ose koordinatnog sistema vezanog za kruto telo (slika 1). Pošto su konačne jednačine kretanja poznate, određene su i (21) i (22), na primer:

$$x_p = a\left[\frac{1}{2}(pt - \sin pt) - 2\sin pt(1 - \cos pt)^{-1}\right] \qquad (21a)$$
$$y_p = a(2 - \cos pt)$$



Slika 2

Na slici 2 prikazana je realizacija brahistohronog ravnog kretanja krutog tela kotrljanjem bez proklizavanja rulete (22) po bazi (21), za $a=1[m]$.

LITERATURA

[1] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г.,Гамкрелидзе Р.В.,Мищенко Е.Ф.,*
Математическая теория оптимальных процессов,
Наука, Москва, 1983.

[2] *Vuković J.,*
Optimalno upravljanje kretanjem mehaničkih sistema,
Doktorski rad, PMF Beograd, 1984.

[3] *Лурье А.И.*
Аналитическая механика
Гос. изд. физ.-мат. литератури, Москва, 1961.

[4] *Kelley H.J. Kopp R.E., Moyer H.G.*
Singular Extremals, Topics in Optimization (ed.by. Leitmann G.),
Academic press., N.Y., 1967.

[5] *Fempl S.,*
Elementi varijacionog računa,
Građevinska knjiga, Beograd 1965.

[6] *Vujanović B.D.,*
Varijacioni račun, analitička mehanika, optimalno upravljanje,
Radivoj Cirpanov, Novi Sad, 1980.

[7] *Đukić Đ.S.,*
The Brachistochronic Motion of a Gyroscope Mounted on The Gimbals,
Theoretical and Applied Mechanics 7, Beograd, 1981.

[8] *Čović V., Lukačević M.,*
On Brachistochronic Motions on Non-Conservative Dynamical System,
Theoretical and Applied Mechanics 7, Beograd, 1981.

[9] *Bilimović A.,*
Racionalna mehanika III (Mehanika čvrstog tela),
Naučna knjiga, Beograd ,1964.

[10] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.*
Особые оптимальные управления,
Наука, Москва, 1973.

Ovaj rad je urađen u okviru Projekta 0402 Fonda za nauku Srbije

ЈДМ ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ЗА МЕХАНИКУ
Универзитет у Новом Саду, Факултет техничких наука
СИМПОЗИЈУМ ИЗ ОПШТЕ МЕХАНИКЕ
Нови Сад, 29. и 30. септембар 1994.

OPTIMALNO UPRAVLJANJE KRETANJEM KRUTOG TELA PRI POSTOJANJU NEHOLONOMNE MEHANIČKE VEZE

OPTIMAL CONTROL OF MOTION OF A RIGID BODY WITH NON-HOLONOMIC CONSTRAINT

mr ALEKSANDAR OBRADOVIĆ
dr NIKOLA MLADENOVIĆ
Katedra za mehaniku, Mašinski fakultet Beograd
27. marta 80, 11000 Beograd

ABSTRACT:
The motion of a rigid body beetwen two given position in a horizontal plane during the shortest possible time has been solved in this paper. During this motion a nonholonomic constraint in the form of the Chaplygin's blade is imposed upon the body. The conservation of the mechanical energy is maintained independently of the constraint. The problem is postulated as a problem of the optimal control and has been solved by the application of the Pontryagin's Principle. This problem is singular by using dynamic equations and it is neccesary to apply Kelley's conditions. The other method of the solution is based on the usage of generalized velocites as controls. The application of both of the methods mentioned yields to a two point boundary problem during an unknown time interval. By introducing the "undimensional time" the problem is reduced to a classical boundary problem. As a confirmation of the mentioned model, the example of the motion of a rigid body in a plane has been solved numericaly by applying the finite difference method. The analysis of the realization of the mentioned motion is also given. A possible way is to impose an additional ideal holonomic constraint without influence of any active force.

1. UVOD

Rezultati savremene matematičke teorije optimalnog upravljanja [1] našli su svoju primenu u raznim problemima optimalnosti u mehanici [7]. Jedan od njih je i određivanje optimalnog upravljanja kretanjem mehaničkog sistema kod koga postoje mehaničke veze uporedo sa nametnutim drugim ograničenjima na fazne promenjive. U radu [6] autori daju postupak rešavanja ovakvih zadataka, a takođe ukazuju na suštinsku razliku napred navedenih ograničenja i mehaničkih veza. Osim toga, pokazana je razlika između zadataka gde postoje holonomne ili neholonomne mehaničke veze, usled činjenice da neki autori ([2]str. 81) sva fazna ograničenja nazivaju holonomnim vezama.

U ovome radu rešava se zadatak optimalnog upravljanja kretanjem (minimizacija vremena) krutog tela u horizontalnoj ravni pri postojanju mehaničke neholonomne idealne veze, a sa nametnutim ograničenjem neizmenjivosti mehaničke energije. Ovakav zadatak