JUGOSLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKU - JDM
ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ЗА МЕХАНИКУ - ЈДМ
YUGOSLAV SOCIETY OF MECHANICS -YSM, 11 000 - BEOGRAD, Kneza Miloša 9/1

XXI JUGOSLOVENSKI KONGRES TEORIJSKE I PRIMENJENE MEHANIKE
XXI ЈУГОСЛОВЕНСКИ КОНГРЕС РАЦИОНАЛНЕ И ПРИМЕЊЕНЕ МЕХАНИКЕ
XXI YUGOSLAV CONGRESS OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS
JUMEH NIŠ' 95 - ЈУМЕХ НИШ"95 - YUCTAM NIŠ '95, 29 maj -3 jun 1995 A - 20

BRAHISTOHRONO OPŠTE KRETANJE KRUTOG TELA

BRACHISTOCHRONIC RIGID BODY GENERAL MOTION

Aleksandar Obradović,asistent, **Nikola Mladenović**,vanr.prof., **Saša Marković**,asistent
Mašinski fakultet Beograd, ul.27. marta 80, 11000 Beograd

SUMMARY

The time interval minimization of rigid body motion with constant mechanical energy has been considered in this paper. Generalized coordinates are Cartesian coordinates of mass center and the Euler angles, that are specified at the initial and the final position point. Problem has been solved by the application of the Pontryagins principle. Finite difference method has been applied in order to obtain the solution of the boundary value problem.

1.UVOD

Poznati Bernulijev problem brahistohrone [5] iz 1696. godine postavio je temelje mnogih istraživanja u analitičkoj mehanici. Pomenimo rad [3] , gde su izvođene diferencijalne jednačine kretanja materijalnog sistema i rešavani određeni zadaci kretanja krutog tela. Korišćenjem klasičnog varijacionog računa dobijene su diferencijalne jednačine brahistohronog kretanja nekonzervativnog mehaničkog sistema [4]. U napred navedenim zadacima, a u cilju konačnog rešavanja, neophodno je rešavati dvotačkaste granične probleme sistema običnih diferencijalnih jednačina ili, čak i za specijalne slučajeve, rešavati složene algebarske probleme.

S obzirom na ekvivalenciju određenih zadataka klasičnog varijacionog računa i zadataka optimalnog upravljanja, navedeni problemi se mogu formulisati i rešavati primenom Pontrjaginovog principa [7]. Cilj ovoga rada je dobijanje konačnih jednačina brahistohronog opšteg kretanja krutog tela, što predstavlja nastavak istraživanja rada [2]. U njemu [2] je dato analitičko rešenje za slučaj ravnog kretanja, kao i realizacija upravljanja. U ovome radu neophodno je bilo primeniti odgovarajuće numeričke metode [8].

Teškoće numeričke prirode predstavljaju limitirajući faktor primene teorije optimalnog upravljanja u mehanici. Činjenica da danas ne postoji opšti algoritam i odgovarajući programi za rešavanje dvotačkastog graničnog problema principa maksimuma, svaki uspešno rešeni zadatak ove vrste čini vrednim pažnje. O tome svedoče i neki nedavno rešeni problemi iz upravljanja mehaničkih sistema [9].

Pojedini rezultati ovoga rada nalaze se i u disertaciji [1].

2.POSTAVKA ZADATKA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Rešava se zadatak određivanja konačnih jednačina kretanja krutog tela u polju Zemljine teže između dva zadata položaja za minimalno vreme i uz neizmenjenu vrednost mehaničke energije. Pošto su zadate početne i krajnje vrednosti generalisanih koordinata (koordinate centra masa x_c, y_c i z_c kao i Ojlerovi uglovi ψ,θ i φ) a ne i vrednosti generalisanih brzina, za upravljanja se mogu uzeti projekcije vektora brzine v_i kao i projekcije vektora ugaone brzine ω_i na glavne ose inercije krutoga tela. Zadatak optimalnog upravljanja ima oblik:

$$\dot{x}_c = v_1 \qquad \dot{\psi} = \omega_1 \sin\varphi \sin^{-1}\theta + \omega_2 \cos\varphi \sin^{-1}\theta$$

$$\dot{y}_c = v_2 \qquad \dot{\theta} = \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi$$

$$\dot{z}_c = v_3 \qquad \dot{\varphi} = \omega_3 - \omega_1 \sin\varphi \,\mathrm{ctg}\theta - \omega_2 \cos\varphi \,\mathrm{ctg}\theta$$

$$\frac{1}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + i_1^2\omega_1^2 + i_2^2\omega_2^2 + i_3^2\omega_3^2\right) - gy_c = 0$$

$$t_o = 0,\ x_c(0) = x_{co},\ y_c(0) = y_{co},\ z_c(0) = z_{co},\ \psi(0) = \psi_o,\ \theta(0) = \theta_o,\ \varphi(0) = \varphi_o$$

$$t_1 = ?\ \ x_c(t_1) = x_{c1},\ y_c(t_1) = y_{c1},\ z_c(t_1) = z_{c1},\ \psi(t_1) = \psi_1,\ \theta(t_1) = \theta_1,\ \varphi(t_1) = \varphi_1$$

$$J = \int_{t_o}^{t_1} 1\, dt \longrightarrow \inf \tag{1}$$

gde je g ubrzanje Zemljine teže a i_k, k=1,2,3 poluprečnici inercije za glavne težišne ose.

Na zadatak (1) svodi se i odgovarajući zadatak sa singularnim upravljanjima [1] ukoliko se za upravljanja uzmu odgovarajuće projekcije glavnog vektora i glavnog momenta za središte masa svih sila koje deluju na telo.

3.ANALIZA REŠENJA

Da bi rešili zadatak (1), napišimo Pontrjaginovu funkciju [7] :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \lambda_o + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \psi_1\left(\omega_1 \sin\varphi \sin^{-1}\theta + \omega_2 \cos\varphi \sin^{-1}\theta\right) + \\ &+ \psi_2\left(\omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi\right) + \psi_3\left(\omega_3 - \omega_1 \sin\varphi\ \mathrm{ctg}\theta - \omega_2 \cos\varphi\, \mathrm{ctg}\theta\right)\end{aligned} \tag{2}$$

i spregnuti sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned}&\dot\lambda_1 = 0 \qquad \dot\psi_1 = 0\\ &\dot\lambda_2 = -\rho g \quad \dot\psi_2 = \omega_1\left(\sin^{-2}\theta \cos\theta \sin\varphi\psi_1 - \sin^{-2}\theta \sin\varphi\psi_3\right) + \\ &\qquad\qquad + \omega_2\left(\sin^{-2}\theta \cos\theta \cos\varphi\psi_1 - \sin^{-2}\theta \cos\varphi\psi_3\right)\\ &\dot\lambda_3 = 0 \qquad \dot\psi_3 = -\omega_1\left(\sin^{-1}\theta \cos\varphi\psi_1 - \psi_2 \sin\varphi - \psi_3 \mathrm{ctg}\theta \cos\varphi\right) + \\ &\qquad\qquad + \omega_2\left(\sin^{-1}\theta \sin\varphi\psi_1 + \psi_2 \cos\varphi - \psi_3 \mathrm{ctg}\theta \sin\varphi\right)\end{aligned} \tag{3}$$

gde je ρ množitelj veze iz zadatka (1).

Pošto su upravljanja iz otvorenog skupa, uslovi optimalnosti postaju:

$$\begin{aligned}&\lambda_1 - \rho v_1 = 0 \quad \psi_1 \sin^{-1}\theta \sin\varphi + \psi_2 \cos\varphi - \psi_3 \mathrm{ctg}\theta \sin\varphi - \rho i_1^2\omega_1 = 0\\ &\lambda_2 - \rho v_2 = 0 \quad \psi_1 \sin^{-1}\theta \cos\varphi - \psi_2 \sin\varphi - \psi_3 \mathrm{ctg}\theta \cos\varphi - \rho i_2^2\omega_2 = 0\\ &\lambda_3 - \rho v_3 = 0 \qquad\qquad \psi_3 - \rho i_3^2\omega_3 = 0\end{aligned} \tag{4}$$

Množitelj veze određen je iz uslova:

$$\mathcal{H} = 0 \qquad \lambda_o = -1 \tag{5}$$

tako da je njegova vrednost:

$$\rho = \frac{1}{2gy_c} \tag{6}$$

pa su odgovarajuća optimalna upravljanja:

$$v_1 = 2g\lambda_1 y_c \qquad \omega_1 = \frac{2gy_c}{(i_1)^2}\left(\psi_1 \sin^{-1}\theta \sin\varphi + \psi_2 \cos\varphi - \psi_3 \mathrm{ctg}\theta \sin\varphi\right)$$

$$v_2 = 2g\lambda_2 y_c \qquad \omega_2 = \frac{2gy_c}{\left(i_2\right)^2}\left(\psi_1 \sin^{-1}\theta\cos\varphi - \psi_2\sin\varphi - \psi_3 \mathrm{ctg}\theta\cos\varphi\right)$$

$$v_3 = 2g\lambda_3 y_c \qquad \omega_3 = \frac{2gy_c}{\left(i_3\right)^2}\psi_3 \tag{7}$$

Pre nego što, nakon zamene (7) u (1), pristupimo rešavanju dvotačkastog graničnog problema uočimo sledeće:

a) putanja centra masa je ravanska kriva, jer je na osnovu (1),(3) i (7) :

$$\frac{dx_c}{dz_c} = const. \tag{8}$$

pa, bez ograničenja opštosti, možemo uzeti:

$$z_c(t) = 0, \qquad t \in \left[t_o, t_1\right] \tag{9}$$

b) konačna jednačina kretanja:

$$y_c = \frac{g}{p^2}\left(1 - \cos pt\right) \tag{10}$$

ima isti oblik kao kod brahistohronog kretanja materijalne tačke ili ravnog kretanja krutog tela [2].

c) u slučaju da je elipsoid inercije sfera ($i_1=i_2=i_3=i$), na osnovu (1), (3) i (7), vektor ugaone brzine je konstantnog pravca. Za opšti slučaj elipsoida inercije pravac ugaone brzine je promenljiv.

4.ANALITIČKO REŠENJE ZA SLUČAJ SFERE INERCIJE

Pošto je pravac vektora ugaone brzine ovde konstantan, sledi da se promena orijentacije krutog tela ostvaruje rotacijom oko ose takođe konstantnog pravca. Pravac i ugao mogu se odrediti na osnovu teorije konačnih rotacija [6]. Naime, poznavanje Ojlerovih uglova na početku i kraju intervala kretanja omogućava da se izračunaju vektori konačnih rotacija: $\overline{\theta_o}$ koji odgovara rotaciji između položaja $\varphi=\theta=\psi=0$ i početnog položaja, $\overline{\theta_1}$ koji odgovara rotaciji između položaja $\varphi=\theta=\psi=0$ i krajnjeg položaja, kao i $\overline{\theta}$ za rotaciju između početnog i krajnjeg položaja. Pri tome koristimo vezu Ojlerovih uglova i vektora konačne rotacije [6]:

$$\bar{\theta}_s = \frac{2\left(\sin\frac{\theta_s}{2}\cos\frac{\psi_s - \varphi_s}{2}\bar{i} + \sin\frac{\theta_s}{2}\sin\frac{\psi_s - \varphi_s}{2}\bar{j} + \cos\frac{\theta_s}{2}\sin\frac{\psi_s + \varphi_s}{2}\bar{k}\right)}{\cos\frac{\theta_s}{2}\cos\frac{\psi_s + \varphi_s}{2}}, \quad s = 0,1 \tag{11}$$

kao i pravilo o oduzimanju rotacija [6] :

$$\bar{\theta} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\bar{\theta}_o \circ \bar{\theta}_1}\left(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_o + \frac{1}{2}\bar{\theta}_o \times \bar{\theta}_1\right) \tag{12}$$

Izračunavanjem vektora $\bar{\theta}$ određeni su i jedinični vektor $\bar{e}$ ose konačne rotacije kao i ugao χ , jer je:

$$\bar{\theta} = 2\bar{e}\tan\frac{\chi}{2} \tag{13}$$

Na taj način zadatak (1) svodi se na :

$$\dot{x}_c = v_1 \qquad \frac{1}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + i^2\omega^2\right) - gy_c = 0 \qquad \int_{t_o}^{t_1} dt \to \inf$$

$$\dot{y}_c = v_2 \qquad t_o = 0 \qquad x_c\left(t_o\right) = x_{c(o)} \qquad y_c\left(t_o\right) = y_{c(o)} \qquad \alpha\left(t_o\right) = 0$$

$$\dot{\alpha} = \omega \qquad t_1 = ? \qquad x_c\left(t_1\right) = x_{c(1)} \qquad y_c\left(t_1\right) = y_{c(1)} \qquad \alpha\left(t_1\right) = \chi \tag{14}$$

koji ima analitičko rešenje, kao i u slučaju brahistohronog ravnog kretanja [2], na čemu se ovde nećemo zadržavati.

5.NUMERIČKO REŠENJE

Rešimo zadatak (1) kada je zadato:

$$x_{co}=0\ [\mathrm{m}],\quad y_{co}=1\ [\mathrm{m}],\quad \psi_o=0,\quad \theta_o=\frac{\pi}{6},\quad \varphi_o=0$$

$$x_{c1}=1\ [\mathrm{m}],\quad y_{c1}=1\ [\mathrm{m}],\quad \psi_1=\frac{\pi}{3},\quad \theta_1=\frac{\pi}{3},\quad \varphi_1=\frac{\pi}{3} \tag{15}$$

$$i_1=5{,}5[\mathrm{m}]\quad i_2=3{,}5[\mathrm{m}]\quad i_3=1{,}5[\mathrm{m}] \tag{16}$$

Pošto t_1 nije zadato, uvođenjem bezdimenzionog vremena t':

$$0\le t'\le 1,\quad t=T\cdot t',\quad t_1=T \tag{17}$$

na osnovu (1),(3),(6),(7) i (17) imamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$(x_c)'=2g\lambda_1 y_c T$$

$$(y_c)'=2g\lambda_2 y_c T$$

$$(\psi)'=T\Big[\frac{2gy_c}{(i_1)^2}\big(\psi_1\sin^{-1}\theta\sin\varphi+\psi_2\cos\varphi-\psi_3\mathrm{ctg}\theta\sin\varphi\big)\sin\varphi\sin^{-1}\theta+$$
$$+\frac{2gy_c}{(i_2)^2}\big(\psi_1\sin^{-1}\theta\cos\varphi-\psi_2\sin\varphi-\psi_3\mathrm{ctg}\theta\cos\varphi\big)\cos\varphi\sin^{-1}\theta\Big]$$

$$(\theta)'=T\Big[\frac{2gy_c}{(i_1)^2}\big(\psi_1\sin^{-1}\theta\sin\varphi+\psi_2\cos\varphi-\psi_3\mathrm{ctg}\theta\sin\varphi\big)\cos\varphi-$$
$$-\frac{2gy_c}{(i_2)^2}\big(\psi_1\sin^{-1}\theta\cos\varphi-\psi_2\sin\varphi-\psi_3\mathrm{ctg}\theta\cos\varphi\big)\sin\varphi\Big]$$

$$(\varphi)'=T\Big[\frac{2gy_c}{(i_3)^2}\psi_3-\frac{2gy_c}{(i_1)^2}\big(\psi_1\sin^{-1}\theta\sin\varphi+\psi_2\cos\varphi-\psi_3\mathrm{ctg}\theta\sin\varphi\big)\sin\varphi\mathrm{ctg}\theta-$$
$$-\frac{2gy_c}{(i_2)^2}\big(\psi_1\sin^{-1}\theta\cos\varphi-\psi_2\sin\varphi-\psi_3\mathrm{ctg}\theta\cos\varphi\big)\cos\varphi\mathrm{ctg}\theta\Big]$$

$$(\lambda_1)'=0$$

$$(\lambda_2)'=\frac{-T}{2y_c}$$

$$(\psi_1)'=0$$

$$(\psi_2)'=T\Big[\frac{2gy_c}{(i_1)^2}\big(\psi_1\sin^{-1}\theta\sin\varphi+\psi_2\cos\varphi-\psi_3\mathrm{ctg}\theta\sin\varphi\big)\cdot$$
$$\cdot\big(\sin^{-2}\theta\cos\theta\sin\varphi\psi_1-\sin^{-2}\theta\sin\varphi\psi_3\big)+$$
$$+\frac{2gy_c}{(i_2)^2}\big(\psi_1\sin^{-1}\theta\cos\varphi-\psi_2\sin\varphi-\psi_3\mathrm{ctg}\theta\cos\varphi\big)\cdot$$
$$\cdot\big(\sin^{-2}\theta\cos\theta\cos\varphi\psi_1-\sin^{-2}\theta\cos\varphi\psi_3\big)\Big]$$

$$\left(\psi_3\right)' = T\Bigg[-\frac{2gy_c}{\left(i_1\right)^2}\left(\psi_1 \sin^{-1}\theta \sin\varphi + \psi_2 \cos\varphi - \psi_3 \mathrm{ctg}\theta \sin\varphi\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sin^{-1}\theta \cos\varphi\psi_1 - \psi_2 \sin\varphi - \psi_3 \mathrm{ctg}\theta \cos\varphi\right) +$$

$$+\frac{2gy_c}{\left(i_2\right)^2}\left(\psi_1 \sin^{-1}\theta \cos\varphi - \psi_2 \sin\varphi - \psi_3 \mathrm{ctg}\theta \cos\varphi\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sin^{-1}\theta \sin\varphi\psi_1 + \psi_2 \cos\varphi - \psi_3 \mathrm{ctg}\theta \sin\varphi\right)\Bigg]$$

$$(T)' = 0 \tag{18}$$

gde je sa oznakom ( )′ označeno diferenciranje po t'. Problem je sada sveden na slučaj zadatog intervala nezavisne promenljive, a graničnim uslovima (15) treba dodati uslov u početnoj tački :

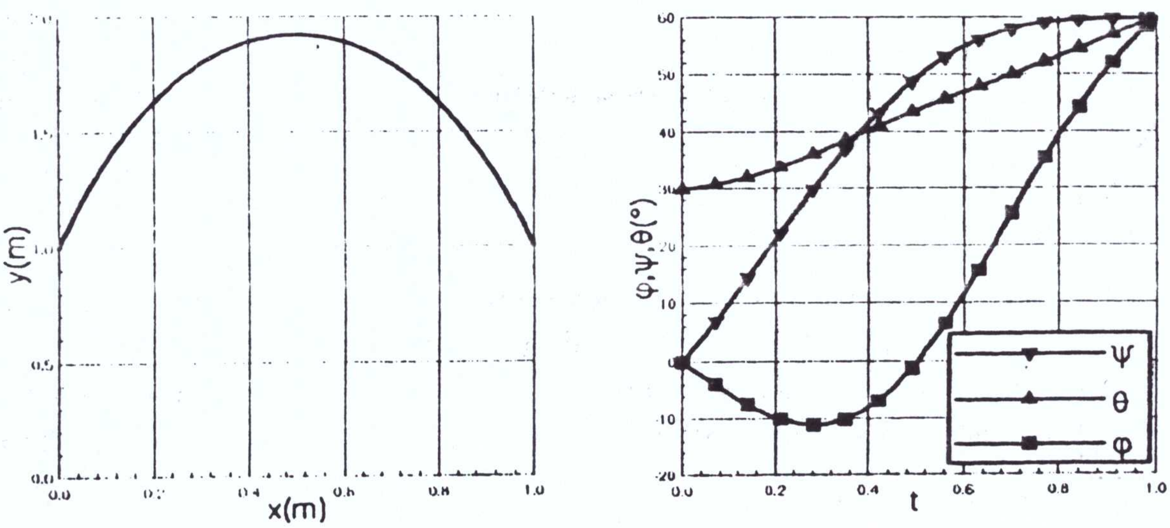
$$\frac{1}{2}\Bigg[\left(2g\lambda_{1o}y_{co}\right)^2 + \left(2g\lambda_{2o}y_{co}\right)^2 + \frac{\left(2gy_{co}\right)^2}{\left(i_1\right)^2}\Big(\psi_{1o} \sin^{-1}\theta_o \sin\varphi_o + \psi_{2o} \cos\varphi_o - \tag{19}$$

$$-\psi_{3o}\mathrm{ctg}\theta_o \sin\varphi_o\Big)^2 + \frac{\left(2gy_{co}\right)^2}{\left(i_2\right)^2}\left(\psi_{1o} \sin^{-1}\theta_o \cos\varphi_o - \psi_{2o} \sin\varphi_o - \psi_{3o}\mathrm{ctg}\theta_o \cos\varphi_o\right)^2 +$$

$$+\frac{\left(2gy_{co}\right)^2}{\left(i_3\right)^2}\psi_{3o}^2 \Bigg] - gy_{co} = 0$$

tako da ih ima 11, kao i diferencijalnih jednačina (18).

Zadatak je rešen primenom programa [8] zasnovanom na metodi konačnih razlika sa tolerancijom relativne greške 10^{-6}. Na slici 1 prikazana je putanja centra masa kao i zakoni promene Ojlerovih uglova. Ujedno je izračunato i vreme kretanja t_1=0,959330 [s].



Slika 1

Činjenica da je upravljanje iz otvorenog skupa, kao i glatkost dobijenog rešenja omogućila je relativno jednostavnu primenu numeričkih metoda. Međutim, zadaci iz upravljanja kretanjem mehaničkih sistema sa upravljanjima iz zatvorenog skupa zahtevaju dosta složeniji postupak rešavanja. Primeri se mogu naći iz dinamike sistema krutih tela [1] ili u dinamici tela promenljive mase [9].

LITERATURA

[1] Obradović,A., Singularna optimalna upravljanja mehaničkih sistema, doktorska disertacija, Mašinski fakultet Beograd, 1994.

[2] Obradović,A.,Marković,S., Brahistohrono ravno kretanje krutog tela, Zbornik radova Simpozijuma opšte mehanike, Novi Sad, 1994.

[3] Đukić,Đ.,The Brachistochronic Motion of a Gyroscope Mounted on the Gimbals, Teorijska i primenjena mehanika 2, 1976.

[4] Čović,V.,Lukačević,M., On Brachistochronic Motions of Non-Conservative Dynamical Systems, Teorijska i primenjena mehanika 7, 1981.

[5] Vujanović,B.D., Varijacioni račun, analitička mehanika, optimalno upravljanje, Radivoj Ćirpanov, Novi Sad, 1980.

[6] Лурье,А.И., Аналитическая механика, Гос. изд. физ.-мат. литератури, Москва, 1961.

[7] Понтрягин,Л.С.,Болтянский,В.Г.,Гамкрелидзе,Р.В.,Мищенко,Е.Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Наука, Москва, 1983.

[8] Pereyra,V., PASVA3: An Adaptive Finite Difference FORTRAN Program for First Order Non-Linear Ordinary Boundary Problems, Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, Berlin, 1978.

[9] Григорьев,К.Г.,Заплетин,М.П., Численное решение краевых задач принципа максимума в оптимизационных задачах динамики космического полета, Известия РАН Техническая кибернетика, Н°. 1 , 1993.

Ovaj rad urađen je u okviru projekta Savremeni problemi mehanike (br. ugovora 0402) Fonda za nauku Srbije, čiji je nosilac Matematički institut SANU.