JUGOSLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKU - JDM
ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ЗА МЕХАНИКУ - ЈДМ
YUGOSLAV SOCIETY OF MECHANICS -YSM, 11 000 - BEOGRAD, Kneza Miloša 9/1

XXI JUGOSLOVENSKI KONGRES TEORIJSKE I PRIMENJENE MEHANIKE
XXI ЈУГОСЛОВЕНСКИ КОНГРЕС РАЦИОНАЛНЕ И ПРИМЕЊЕНЕ МЕХАНИКЕ
XXI YUGOSLAV CONGRESS OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS
JUMEH NIŠ' 95 - ЈУМЕХ НИШ"95 - ,YUCTAM NIŠ '95, 29 maj -3 jun 1995 A - 17

PRIMENA GRINOVE TEOREME (METOD MIELE) U OPTIMALNOM UPRAVLJANJU KRETANJEM SISTEMA SA JEDNIM STEPENOM SLOBODE

GREEN THEOREM APPLICATION (MIELE METHOD) IN OPTIMAL CONTROL OF MECHANICAL SYSTEM WITH ONE DOF

Aleksandar Obradović, asistent
Mašinski fakultet Beograd, ul.27. marta 80, 11000 Beograd

SUMMARY

The variational problem with inequality constraints has been solved by the application of the Green theorem in the flight mechanic before the maximum principle appearing. Method has been applied on optimal control of mechanical system with one DOF in this paper. Nonpotential generalized force has been taken as control. The optimal control problem has been solved in some particular case.

1.UVOD

Početkom pedesetih godina, pre pojave principa maksimuma, Angelo Miele je razvio metod za rešavanje određene klase varijacionih zadataka zasnovan na primeni Grinove teoreme [5]. Metod je omogućio veoma efikasno i jednostavno rešavanje velikog broja zadataka iz mehanike leta [5,6,7].

Namera ovoga rada je da proširi primenu Metoda Miele na optimalno upravljanje kretanjem sistema krutih tela. Naime, teškoće numeričke prirode ograničavaju primenu postojećih postupaka izračunavanja programskog optimalnog upravljanja (princip maksimuma ili dinamičko programiranje). U radu [4] dat je opširan pregled rezultata iz upravljanja robotskim sistemima. Iz pregleda se može uočiti da se usled pomenutih teškoća vezanih za izračunavanje optimalnih upravljanja odustaje od optimalnih, već se izračunavaju odgovarajuća suboptimalna upravljanja (npr. dekompozicija, uprošćavanje modela, traženje upravljanja zadatog oblika i sl.).

Usled "prokletstva dimenzionalnosti" dinamičkog programiranja [9], ovim postupkom mogu se uspešno rešavati uglavnom zadaci vezani za mehaničke sisteme sa jednim stepenom slobode. Na jedan stepen se svodi i zadatak optimalnog upravljanja manipulatora sa tri stepena slobode i zadatom putanjom vrha hvataljke, rešavan u radu [10].

U ovome radu, primenom Metoda Miele, daje se jednostavniji postupak određivanja optimalnih upravljanja za opšti slučaj mehaničkog sistema sa jednim stepenom slobode. Ukazuje se i na vezu sa singularnim upravljanjima [2,8] koja se dobijaju primenom Pontrjaginovog principa maksimuma [3].

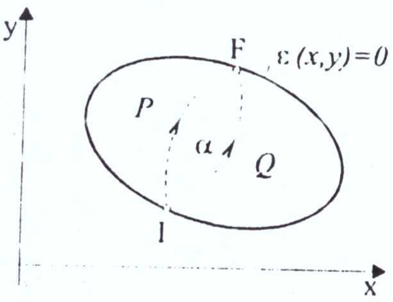
Rešen je odgovarajući zadatak optimalnog upravljanja na primeru jednog uprošćenog klipnog mehanizma.

2.KRATAK PRIKAZ METODA MIELE

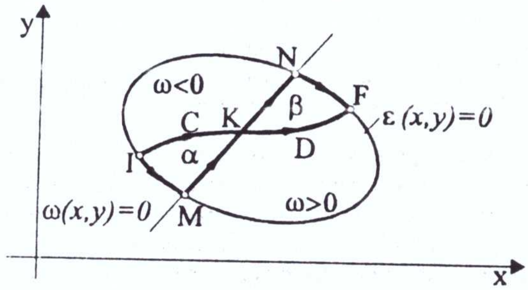
Metod obuhvata određivanje funkcije $y=y(x)$ koja saopštava ekstremnu vrednost funkcionalu oblika:

$$H = \int_i^f \left[\varphi(x,y) + \psi(x,y)y'\right]dx = \int_i^f \varphi dx + \psi dy \tag{1}$$

pri čemu sve dopustive krive koje spajaju zadatu početnu tačku $I(x_I,y_I)$ i krajnju $F(x_F,y_F)$ leže u oblasti unutar zatvorene krive $\varepsilon(x,y)=0$ (slika 1). Oblast se određuje na osnovu ograničenja veličina x, y i y'.



Slika 1



Slika 2

Metod ispituje razliku funkcionala ΔH za različite dopuštene funkcije, npr. one kojima odgovaraju krive IPF i IQF :

$$\Delta H = \int_{IQF} \varphi dx + \psi dy - \int_{IPF} \varphi dx + \psi dy = \oint_{IQFPI} \varphi dx + \psi dy \tag{2}$$

Ako je $\Delta H>0$, a određuje se minimalna vrednost H , Tada je kriva IPF "bolja" u smislu optimalnosti. Ukoliko je još i $\Delta H>0$ za proizvoljno izabranu krivu IQF , onda je funkcija y=y(x) kojoj odgovara kriva IPF rešenje postavljenog problema.

Ako su funkcije $\varphi(x,y)$ i $\psi(x,y)$ zajedno sa odgovarajućim izvodima neprekidne u posmatranoj oblasti x, tada se prema Grinovoj teoremi (2) transformiše u :

$$\Delta H = \iint_\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dxdy = \iint_\alpha \omega(x,y)dxdy \tag{3}$$

gde je funkciju $\omega(x,y)$ A. Miele nazvao fundamentalna funkcija. Linija njenih nula $\omega(x,y)=0$, u opštem slučaju, seče dopustivu oblast (slika 2).

Funkcija kojoj odgovara kriva IMNF optimalna je u smislu minimalnosti H, jer je za proizvoljno izabranu krivu $\Delta H>0$. Na primer, proizvoljno izabrana kriva ICKDF koja jednom preseca liniju $\omega(x,y)=0$ odgovara funkciji za koju je :

$$\Delta H = \int_{ICKDF} \varphi dx + \psi dy - \int_{IMKNF} \varphi dx + \psi dy = -\iint_\alpha \omega\, dxdy + \iint_\beta \omega\, dxdy > 0 \tag{4}$$

U slučaju da se linije $\omega(x,y)=0$ i $\varepsilon(x,y)=0$ ne seku, optimalna kriva leži na granici $\varepsilon(x,y)=0$ sa odgovarajućim smerom. Ako su nametnuta i odgovarajuća izoperimetrijska ograničenja:

$$\int_i^f \left[\varphi_1(x,y) + \psi_1(x,y)y'\right]dx = C \tag{5}$$

tada se uvođenjem konstantnog množitelja λ formira novi izraz za razliku funkcionala:

$$\Delta H = \oint_{IQFPI} \varphi^* dx + \psi^* dy = \iint_{\alpha} \omega^* dxdy$$

$$\varphi^* = \varphi + \lambda\varphi_1 \qquad \psi^* = \psi + \lambda\psi_1$$

$$\omega^*(x,y,\lambda) = \frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \frac{\partial\varphi^*}{\partial y} \tag{6}$$

i postupak je kao u prethodnom slučaju. Umesto krive $\omega(x,y)=0$ imamo jednoparametarsku familiju krivih $\omega^*(x,y,\lambda)=0$. Funkcija $\omega^*(x,y,\lambda)$ naziva se proširena fundamentalna funkcija. Množitelj λ određuje se iz (5).

Činjenica da se ovom metodom dobija apsolutni minimum, daje joj prednost u odnosu na ostale metode. Nedostaci metode su teškoće vezane za određivanje dopustive oblasti, kao i primena na veći broj promenljivih. Dopustive oblasti se uglavnom uspešno mogu odrediti ako je jedna promenljiva prema svojoj fizičkoj prirodi monotona (npr. vreme ili promenljiva masa rakete). Zbog toga je ovaj metod našao veliku primenu u mehanici leta. Drugi nedostatak onemogućava primenu na mehaničke sisteme sa većim brojem stepena slobode.

3. OPTIMALNO UPRAVLJANJE KRETANJEM MEHANIČKOG SISTEMA SA JEDNIM STEPENOM SLOBODE

Razmotrimo zadatak optimalnog upravljanja mehaničkog sistema sa jednim stepenom slobode:

$$\dot q = a(q)p$$

$$\dot p = -\frac{1}{2}\frac{\partial a(q)}{\partial q}p^2 - \frac{\partial\Pi(q)}{\partial q} + u \qquad A(q,p) \le u \le B(q,p)$$

$$t_o = 0, \quad q(0) = q^o, \quad p(0) = p_o$$

$$t_1 = ?, \quad q(t_1) = q^1, \quad p(t_1) = p_1 \qquad J = \int_0^{t_1} f^o(q,p)dt \longrightarrow \inf \tag{7}$$

gde je q generalisana koordinata, p generalisani impuls, $a(q)$ inercioni koeficijent, $\Pi(q)$ potencijalna energija a za upravljanje u uzeta je ograničena nepotencijalna sila.

Na osnovu Pontrjaginove funkcije [3] :

$$\mathcal{H} = \lambda_0 f^o(q,p) + \lambda_1 a(q)p + \upsilon^1\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial a(q)}{\partial q}p^2 - \frac{\partial\Pi}{\partial q} + u\right) \tag{8}$$

kao i uslova :

$$\mathcal{H} = 0 \qquad \lambda_0 = -1 \qquad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u} = 0 \tag{9}$$

dobija se jednačina singularne linije u faznoj ravni :

$$-f^o(q,p) + p\frac{\partial f^0(q,p)}{\partial p} = 0 \tag{10}$$

koja odgovara singularnom upravljanju u, koje uzima vrednosti iz unutrašnjosti skupa dopustivih upravljanja određenim na osnovu (7).

U cilju primene Metoda Miele, najpre je potrebno odrediti dopustivu oblast u faznoj q-p ravni, i to integracijom jednačina kretanja za $u=A(q,p)$ i $u=B(q,p)$ iz početne, odnosno za $u=A(q,p)$ i $u=B(q,p)$ "unazad" iz krajnje tačke. Činjenica da se u većini problema može predvideti monotonost generalisane koordinate olakšava postupak određivanja.

Funkcional $H(1)$ iz (1), prema (7), postaje:

$$H = \int_i^f \frac{f^o(q,p)}{pa(q)} dq + 0dp \tag{11}$$

a fundamentalna funkcija:

$$\omega(q,p) = -\frac{p\frac{\partial f^0(q,p)}{\partial p} - f^o(q,p)}{p^2 a(q)} \tag{12}$$

Na osnovu (12) vidi se da linija nula fundamentalne funkcije predstavlja singularnu liniju u faznoj ravni (10) i u tome je suštinska povezanost Metoda Miele i teorije singularnih optimalnih upravljanja.

U problemima minimizacije vremena upravljanog kretanja ($f^o(q,p)=1$) fundamentalna funkcija ima oblik:

$$\omega(q,p) = \frac{1}{p^2 a(q)} > 0 \tag{13}$$

odakle sledi da se tačka u faznom prostoru sve vreme kreće po granici dopustive oblasti.

U zadacima sa zadatim vremenom t_1, odnosno izoperimetrijskim ograničenjem:

$$\int_i^f \frac{f^o(q,p)}{pa(q)} dq + 0dp = t_1 \tag{14}$$

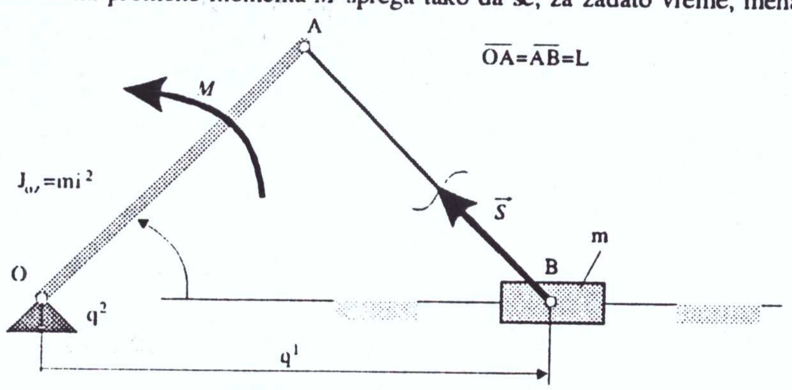
linija nula fundamentalne funkcije (singularna linija u faznoj ravni) ima jednačinu :

$$p\frac{\partial f^0(q,p)}{\partial p} - f^o(q,p) = \lambda = const. \tag{15}$$

Za slučaj $f^o=f^o(q)$ na singularnom delu putanje podintegralna funkcija funkcionala (7) je konstantna, odnosno jednaka nuli ako t_1 nije zadato, što u konkretnim zadacima ima i odgovarajuće fizičko tumačenje.

4.PRIMER

Rešimo zadatak optimalnog upravljanja kretanjem uprošćenog klipnog mehanizma (slika 3), koji se sastoji u određivanju zakona promene momenta M sprega tako da se, za zadato vreme, mehanizam kreće



Slika 3

minimalnom srednjom vrednošću kinetičke energije, pri čemu je vrednost sile u spojnoj polužii ograničena ($|S| \le S^*$).

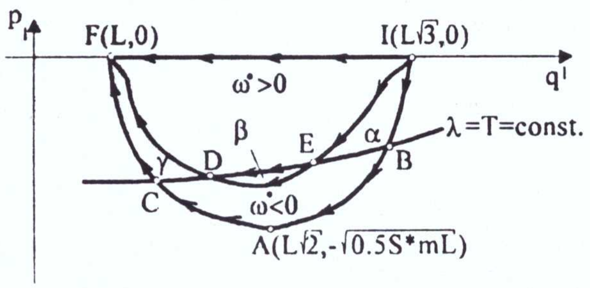
Na osnovu diferencijalnih jednačina kretanja u prekobrojnim koordinatama q^1 i q^2, veze između njih kao i ograničenja $|S| \le S^*$, zadatak se konačno može napisati u obliku [1] :

$$
\begin{array}{llll}
\dot{q}_1 = \dfrac{1}{m} p_1 & t_o = 0 & q^1(0) = L\sqrt{3} & p_1(0) = 0 \\
\dot{p}_1 = u_1 & t_1 & q^1(t_1) = L & p_1(t_1) = 0 \\
|u_1| \le \dfrac{S^*}{2L} q^1 & & J = \displaystyle\int_0^{t_1} p_1^2 \frac{4L^2 - (q^1)^2 + i^2}{4L^2 - (q^1)^2} \frac{1}{2m} dt \longrightarrow \inf &
\end{array}
\quad . \tag{16}
$$

Oblast dopustivih upravljanja (slika 4) ograničena je linijama :

$$
(q^1)^2 + \frac{2L}{S^* m}(p_1^2) = 3L^2, \quad (q^1)^2 - \frac{2L}{S^* m}(p_1^2) = L^2, \quad i \quad p_1 = 0 \tag{17}
$$

gde sama linija p_1=0 ne pripada dopustivoj oblasti, a odgovara beskonačno velikom vremenu t_1.



Slika 4

Funkcional (1) tada postaje :

$$
H = \int_i^f \frac{1}{2} p_1 \frac{4L^2 - (q^1)^2 + i^2}{4L^2 - (q^1)^2} dq^1 + 0dp_1 \tag{18}
$$

pri čemu je izoperimetrijsko ograničenje :

$$
\int_i^f \frac{m}{p_1} dq^1 + 0dp_1 = t_1 \tag{19}
$$

U tom slučaju izraz za razliku dva funkcionala ima oblik :

$$
\Delta H = \oint \left[\frac{1}{2} p_1 \frac{4L^2 - (q^1)^2 + i^2}{4L^2 - (q^1)^2} + \lambda \frac{m}{p_1} \right] dq^1 + 0dp_1 = \iint_D \omega^* dq^1 dp_1 \tag{20}
$$

gde je proširena fundamentalna funkcija:

$$\omega^* = -\frac{1}{2}\frac{4L^2 - \left(q^1\right)^2 + i^2}{4L^2 - \left(q^1\right)^2} + \lambda \frac{m}{p_1^2} \tag{21}$$

Linija njenih nula, kojoj odgovara konstantna vrednost kinetičke energije, deli dopustivu oblast na dva dela (slika 4). Upoređivanjem bilo koje krive, npr. IEDF, sa IBCF razlika funkcionala biće:

$$\Delta H = \iint_{\alpha} \omega^* dq^1 dp_1 - \iint_{\beta} \omega^* dq^1 dp_1 + \iint_{\gamma} \omega^* dq^1 dp_1 > 0 \tag{22}$$

što znači da je optimalno rešenje fazna trajektorija IBCF. Vremena koja odgovaraju tačkama B i C određuju se numerički tako da zadovolje krajnje uslove za $q^1(t_1)$ i $p_1(t_1)$ u zadatom trenutku t_1.

Zadatak minimizacije vremena kretanja između tačaka I i F, sa ograničenjem$|S| \leq S^*$, kao rešenje ima trajektoriju IAF (slika 4), što je posledica izraza za fundamentalnu funkciju (13).

LITERATURA

[1] Obradović,A., Singularna optimalna upravljanja mehaničkih sistema, doktorska disertacija, Mašinski fakultet Beograd, 1994.

[2] Габасов,Р.,Кириллова,Ф.М., Особые оптимальные управления, Наука, Москва, 1973.

[3] Понтрягин,Л.С.,Болтянский,В.Г.,Гамкрелидзе,Р.В.,Мищенко,Е.Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Наука, Москва, 1983.

[4] Болотник,Н.Н.,Черноусько,Ф.Л, Оптимизация управления манипуляционными роботами, Известия АН СССР Техническая кибернетика, Но. 1 , 1990.

[5] Миеле, А., Определение экстремумов криволинейных интегралов по теореме Грина, Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, Наука, Москва, 1965.

[6] Летов,А.М., Динамика полета и управление, Наука, Москва, 1969.

[7] Leitmann,G., An Introduction to Optimal Control, Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[8] Kelley,H.J.,Kopp,R.E.,Moyer,H.G.,Singular Extremals,in Topics in Optimization(ed.by Leitmann G.), Academic Press, New York, 1967.

[9] Sage,A.P.,White,C.C.,Optimum Systems Control,Prentice-Hall,Englewood,1977.

[10] Singh,S.,Leu,M.C., Optimal Trajectory Generation for Robotic Manipulators Using Dynamic Programming, ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control, Vol. 109, June 1987.

Ovaj rad urađen je u okviru projekta Savremeni problemi mehanike (br. ugovora 0402) Fonda za nauku Srbije, čiji je nosilac Matematički institut SANU.