

Универзитет у Београду

Машински факултет

Александар С. Тоћић

МОДЕЛИРАЊЕ И НУМЕРИЧКЕ
СИМУЛАЦИЈЕ ВИХОРНИХ
СТРУЈАЊА

Докторска дисертација

Београд, 2013

Belgrade University
Faculty of Mechanical Engineering

Aleksandar S. Čović

MODELING AND NUMERICAL
SIMULATIONS OF SWIRLING FLOWS

Doctoral dissertation

Belgrade, 2013

Комисија за преглед и одбрану

Ментор: *Ван. проф. др Милан Лечић,*
Универзитет у Београду, Машински факултет

Чланови Комисије: *Ван. проф. др Милан Лечић,*
Универзитет у Београду, Машински факултет

др Светислав Чантрак, ред. проф. у пензији
Универзитет у Београду, Машински факултет

Ред. проф. др Цветко Црнојевић
Универзитет у Београду, Машински факултет

Ред. проф. др Марко Иветић
Универзитет у Београду, Грађевински факултет

Ван. проф. др Невена Стевановић, дипл. маж. инж.
Универзитет у Београду, Машински факултет

Датум одбране:

Моделирање и нумеричке симулације вихорних струјања

Резиме

Вихорна струјања су веома присутна у техничкој пракси. Струјања у турбомашинама и ротирајућим системима, струјања у цевоводима након разних локалних отпора, струјања ваздуха у циклонима и коморама за сагоревање су само неки од примера вихорних струјања у техничкој пракси. Структура турбулентних вихорних струјања је изразито нехомогена и анизотропна, па у већини случајева турбулентни модели базирани на Бусинесковој хипотези не дају задовољавајуће резултате у нумеричком прорачуну ових струјања. То је посебно изражено у случају када је профил обимске брзине типа Ранкиновог вртлога. Напонски модели дају боље резултате у предвиђању струјања, али њихова примена у комплексним геометријама је даље веома захтевна са аспекта конвергенције и времена прорачуна. У овој докторској дисертацији главни акценат истраживања је на нумеричким прорачунима турбулентних вихорних струјања, коришћењем разних турбулентних модела, као и теоријској анализи модела и методама које се користе при тим прорачунима. За прорачуне је коришћен софтвер отвореног типа (енг. open-source) под називом OpenFOAM. Захваљујући отворености програмског кода OpenFOAM-а, анализиран је начин имплементације одговарајућих физичко-математичких модела у његовом коду. На основу те анализе извршена је и сопствена имплементација Speziale-Sarkar-Gatski (SSG) напонског модела у програмски код OpenFOAM-а. Такође, креиране су и додатне апликације за анализу резултата добијених нумеричким прорачуном. Разматрана су два проблема: случај осносиметричног вихорног струјања са профилем Ранкиновог вртлога у дугачкој цеви, и случај тродимензијског вихорног струјања у цеви које се формира иза кола аксијалног вентилатора. У првом проблему генератор вихора није разматран, већ су постојећи експериментални резултати коришћени за дефинисање физичких величина на улазној граници прорачунског домена. За валидацију нумеричких прорачуна коришћени су експериментални резултати у осталим мерним пресецима. На овом случају

тестирани су разни турбулентни модели: двоједначински $k-\varepsilon$, RNG $k-\varepsilon$, Launder-Sharma $k-\varepsilon$, $k-\omega$ SST модел, као и напонски модели Launder-Reece-Rodi (LRR), Launder-Gibson (LG) и Speziale-Sarkar-Gatski (SSG). Показано је да двоједначински модели дају веома лоша предвиђања, како профила осредњених брзина, тако и профила кинетичке енергије турбуленције. Напонски модели дају знатно боља предвиђања профила осредњених брзина. Модел SSG боље предвиђа смањење аксијалне брзине у зони вртложног језгра у поређењу са LG моделом, док LG модел даје нешто боља слагања са експерименталним резултатима за профиле обимских брзина. У случају прорачуна струјања у цеви иза кола аксијалног вентилатора, његова геометрија је узета у обзир при генерисању нумеричке мреже. Разматрана су два приступа моделирања обртања вентилатора: случај „замрзнутог ротора“, у коме се у једном делу прорачунског домена решавају једначине у ротирајућем координатном систему, и случај када нумеричка мрежа, у делу у коме се налази вентилатор, ротира у реалном времену. У прорачуну су коришћена два турбулентна модела RNG $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ SST. Добијени резултати су показали добро слагање са постојећим експерименталним резултатима. То је показало да су недостаци ових модела мање изражени у случају када се геометрија генератора вихора обухвата при генерисању нумеричке мреже. Прорачунима са ротирајућом мрежом су добијена нестационарна кретања вртложног језгра у цеви, као и више детаља о вртложниом структурама које се јављају у струјном пољу. Сви ови резултати су показали да се OpenFOAM може успешно користити за прорачун комплексних струјања у турбомашинама.

Кључне речи: вихорна струјања, обимска брзина, турбулентни модел, нумеричка механика флуида, OpenFOAM

Научна област: машинство

Ужа научна област: механика флуида

УДК број: 532.517.4:519.673(043.3)

Modeling and Numerical Simulations of Swirling Flows

Abstract

Swirling flows are very common in technical practice. Flows in turbomachinery and rotating systems, flows in pipelines after local resistances, flows of air in cyclones and combustion chambers are just few examples of swirling flows in technical practice. Turbulence structure in swirling flows are highly inhomogeneous and anisotropic. In most cases turbulent models based on Boussinesq, linear eddy viscosity assumption, give poor results. That is specially pronounced in case of Rankine type profile for circumferential velocity. Reynolds stress models give better results in prediction of swirling flows, but their usage in complex geometries are very demanding from the viewpoint of solution convergence and time of calculation. In this thesis main accent of research is on numerical simulations of swirling flows by use of various turbulent models, and on theoretical analysis of the models and numerical methods which are used for computations. An open-source software OpenFOAM was used for all computations. Due to openness of the OpenFOAM code, it's possible to analyze the way of implementation of various mathematical models. Based on the code analysis, Speziale-Sarkar-Gatski (SSG) Reynolds stress model was implemented in OpenFOAM code. Also, some additional postprocessing tools and applications were created and implemented in the code. Two problems are considered: axisymmetric swirl flow in long circular pipe with Rankine profile of circumferential velocity, and three-dimensional swirl flow in the pipe behind axial fan. In first problem, swirl generator wasn't considered, and experimental results in one cross-section were used as boundary condition at the inlet. As a validation tool for numerical computations, experimental results in other cross-sections were used. Several turbulent models were tested on this problem. From class of two equation models $k-\varepsilon$, RNG $k-\varepsilon$, Launder-Sharma $k-\varepsilon$ and $k-\omega$ SST models were used, while from Reynolds stress models class Launder-Reece-Rodi (LRR), Launder-Gibson (LG) and SSG model were used. It was shown that all two-equation models give poor results, both for profiles of mean velocities, and for turbulent kinetic energy. Reynolds stress models

give better results for mean velocity profiles. SSG model gives better prediction of axial velocity near the pipe axis, in the core region, while LG model gives slightly better prediction of circumferential velocity. In case of swirling flow in the pipe behind axial fan, the geometry of fan is taken into consideration in creation of numerical mesh. Two approaches were used for computations: frozen-rotor approach and moving mesh approach. In frozen-rotor approach equations in rotating frame of reference are solved in one part of the domain, while in other approach mesh is moving (rotating) during computations. In these computations RNG $k-\varepsilon$ and $k-\omega$ SST models were used. Obtained results showed good agreement with existing experimental results. That agreement showed that weakness of these models are less pronounced in cases where swirl generator is also taken into consideration. In case of rotating mesh, unsteady motion of vortex core is detected in the pipe, and also some additional vortex structures. All these results also showed that OpenFOAM can also be used for computations of complex flows in turbomachinery.

Key words: swirling flows, circumferential velocity, turbulent model, computational fluid dynamics, OpenFOAM

Scientific area: mechanical engineering

Specific scientific area: fluid mechanics

UDK number: 532.517.4:519.673(043.3)

Садржај

1	Увод	1
1.1	Карактеристике вихорних струјања	2
1.1.1	Нелокални турбулентни пренос у вихорном струјању	10
1.2	Преглед досадашњих нумеричких истраживања вихорних струјања	12
1.3	Мотивација и циљ истраживања	16
1.4	Структура дисертације	19
2	Основни закони и основне једначине механике флуида	20
2.1	Диференцијални облици основних једначина механике флуида (континуума)	23
2.2	Основне једначине за њутновски флуид	26
3	Физичко-математичко моделирање турбулентних струјања	30
3.1	Феноменолошки опис турбуленције	30
3.2	Рејнолдсова статистика и Рејнолдсове једначине	36
3.3	Турбулентни модели базирани на концепту турбулентне вискоз- ности	40
3.3.1	Алгебарски и једно-једначински модели	41
3.3.2	Двоједначински модели	45
3.3.3	Ограничења модела базираних на турбулентној вискозно- сти у прорачуну вихорних струјања	53
3.4	Пуни напонски модели	55
3.4.1	Моделирање тензора турбулентне дифузије	58
3.4.2	Моделирање тензора дисипације	59
3.4.3	Моделирање редистрибутивног члана	60
4	Методологија прорачуна и њена примена у OpenFOAM-у	69
4.1	Дискретизација просторног домена	71
4.2	Дискретизација једначина преноса	77
4.2.1	Дискретизација просторних интеграла	79

4.2.2	Временска дискретизација	93
4.2.3	Гранични услови	97
4.3	Структура система алгебарских линеарних једначина и методе његовог решавања	102
4.4	Дискретизација Рејнолдсове једначине	107
4.4.1	Дискретизација дифузионог члана	108
4.4.2	Дискретизација нелинеарног конвективног члана	109
4.4.3	Алгебарска једначина притиска	110
4.5	Основна структура OpenFOAM-а	113
4.5.1	Имплементација тензорских поља	113
4.5.2	Имплементација класа која описују парцијалне диференцијалне једначине	115
4.5.3	Топологија нумеричке мреже и гранични услови	116
4.5.4	Начин имплементације турбулентних модела	117
4.5.5	Сопствена имплементација SSG модела у OpenFOAM коду	123
5	Прорачун осносиметричног вихорног струјања у цеви	129
5.1	Осносиметрично вихорно струјање у цеви са профилем Ранкиновог вртлога	129
5.1.1	Дефинисање неопходних параметера за нумерички прорачун струјања	131
5.1.2	Нумерички резултати добијени применом двоједначинских модела	135
5.1.3	Нумерички резултати добијени применом LG и SSG напонских модела	140
6	Прорачун вихорног струјања у цеви иза кола аксијалног вентилатора	155
6.1	Прорачун струјања у домену са периодичним површима	160
6.1.1	Генерисање геометрије и нумеричке мреже	160
6.1.2	Гранични услови, методе дискретизације и избор метода за решавање система линеарних једначина	166
6.1.3	Резултати и дискусија	170
6.2	Прорачун струјања у комплетном 3D домену	181

6.2.1	Генерисање геометрије и нумеричке мреже	181
6.2.2	Гранични услови, начин решавања и методе дискретизације	185
6.2.3	Резултати и дискусија	187
7	Закључак	198
	Литература	203
	Прилози	213
A	Рејнолдсове једначине у поларно-цилиндричним координатама	214
B	Основи инваријантне теорије у турбуленцији	223
C	Навије-Стоксове једначине у ротирајућем координатном систему	232
	Биографија аутора	237

Списак ознака

Физичке величине

Φ_ε	деструкција дисипације кинетичке енергије турбуленције
α_f	угао неортогоналности
\mathbf{A}	карактеристична матрица која се добија дискретизацијом диференцијалних једначина преноса
\mathbf{b}	карактеристични вектор у коме се смештају познате величине које потичу од дискретизације дела изворског члана и задатих граничних услова
\dot{m}	масени проток флуида
\dot{q}_V	количина топлоте у јединици времена која се генерише унутар контролне запремине (извор топлоте)
\dot{V}	запремински проток флуида
η	динамичка вискозност флуида
II_b	друга инваријанта нормализованог тензора анизотропности
III_b	трећа инваријанта нормализованог тензора анизотропности
λ	топлотна проводљивост
\mathbb{P}	прва инваријанта тензора градијента брзине
\mathbb{Q}	друга инваријанта тензора градијента брзине
\mathbb{R}	трећа инваријанта тензора градијента брзине
Re	Рејнолдсов број
ν_{eff}	ефективна вискозност
ω	фреквенција дисипације кинетичке енергије турбуленције

Φ	вискозна дисипација
ϕ	скаларна величина
τ_w	смицајни напон на зиду
τ_η	карактеристична временска размера микровртлога - Колмогоровљева раз- мера времена
θ_p	јачина вихора
ε	вискозна дисипација кинетичке енергије турбуленције по јединици масе и у јединици времена - дисипација
κ	таласни број
$\tilde{\phi}$	нормализована промењива
A_f	површина стране (површи) контролне запремине (ћелије)
A_p	затворена површ која ограничава контролну запремину V_p
D_k	турбулентна дифузија кинетичке енергије турбуленције
D_ε	дифузија дисипације кинетичке енергије турбуленције
E	спектар кинетичке турбуленције
e	јединична (специфична) унутрашња енергија
G	продукција кинетичке енергије турбуленције
k	кинетичка енергија турбуленције
l_0	карактеристична дужинска размера макровртлога
l_η	дужинска размера микровртлога - дужинска размера Колмогорова
p	притисак
P^*	генералисани кинематички притисак
p^*	кинематички притисак
P_k	продукција кинетичке енергије турбуленције

P_ε	продукција дисипације кинетичке енергије турбуленције
S	вихорни број
s	јединична (специфична) ентропија
S_ϕ	изворски члан
T	температура
u	флуктуација вектора брзине у аксијалном правцу
u_τ	привидна брзина
v	флуктуација вектора брзине у радијалном правцу
v_0	карактеристична брзина макровртлога
V_P	запремина контролне ћелије
v_η	карактеристична брзина микровртлога - Колмогоровљева размера брзине
w	флуктуација вектора брзине у обимском правцу
y^+	бездимензијско нормално растојање од зида
ν	кинематичка вискозност флуида
ν_t	турбулентна вискозност
ρ	густина флуида
$\underline{\Omega}$	вектор угаоне брзине ротације ротирајућег координатног система
\underline{e}_k	јединични вектори изабраног координатног система
\underline{f}	вектор јединичне масене силе
\underline{n}_f	вектор нормале површи контролне запремине (ћелију)
\underline{q}_A	вектор топлотног флукса
\underline{r}_P	вектор положаја тежишта контролне ћелије (запремине)
\underline{r}_f	вектор положаја тежишта површи контролне запремине (ћелије)

- \underline{U} вектор брзине
- \underline{U}_T вектор апсолутне брзине у ротирајућем координатном систему
- \underline{U}_R вектор релативне брзине у ротирајућем координатном систему
- $\langle \underline{\underline{S}} \rangle, \underline{\underline{S}}$ осредњени тензор брзине деформисања
- $\langle \underline{\underline{W}} \rangle, \underline{\underline{W}}$ осредњени тензор вртложности
- $\langle \underline{U} \rangle$ вектор осредњене брзине
- $\langle \underline{u} \rangle$ вектор флукуационе брзине
- $\langle P \rangle, P$ осредњени притисак
- $\langle u^2 \rangle$ нормални турбулентни напон у аксијалном правцу
- $\langle uv \rangle$ компонента тензора турбулентних напона (смицајни турбулентни напон)
- $\langle U \rangle, U$ осредњена пројекција вектора брзине у аксијалном правцу (осредњена аксијална брзина)
- $\langle v^2 \rangle$ нормални турбулентни напон у радијалном правцу
- $\langle V \rangle, V$ осредњена пројекција вектора брзине у радијалном правцу (осредњена радијална брзина)
- $\langle w^2 \rangle$ нормални турбулентни напон у обимском правцу
- $\langle W \rangle, W$ осредњена пројекција вектора брзине у обимском правцу (осредњена обимска брзина)
- $\underline{\underline{\Pi}}$ тензор тензор прерасподеле (редистрибуције) турбулентних напона
- $\underline{\underline{\sigma}}$ тензор напона
- $\underline{\underline{\tau}}$ тензор вискозних напона
- $\underline{\underline{\epsilon}}$ тензор вискозне дисипације турбулентних напона
- $\underline{\underline{a}}$ тензор анизотроности турбулентних напона
- $\underline{\underline{b}}$ нормализовани тензор анизотроности турбулентних напона

$\underline{\underline{D}}$	тензор дифузије турбулентних напона
$\underline{\underline{P}}$	тензор продукције турбулентних напона
$\underline{\underline{R}}$	тензор турбулентних напона
$\underline{\underline{T}}$	тензор укупног напона

Симболи

δ_{ij}	Кронекеров делта симбол
$\underline{\underline{I}}$	јединични тензор
∇	векторско-диференцијални оператор „набла“ (Хамилтонов оператор)

Константе

α	константа у једначини преноса фреквенције дисипације у $k-\omega$ моделу
β	константа у једначини преноса фреквенције дисипације у $k-\omega$ моделу
β^*	константа у једначини преноса фреквенције дисипације у $k-\omega$ SST моделу
β^*	константа у једначини преноса фреквенције дисипације у $k-\omega$ моделу
β_1	константа у $k-\omega$ SST моделу
β_2	константа у $k-\omega$ SST моделу
β_m	коэффицијент у Гама схеми дискретизације
γ_1	константа у $k-\omega$ SST моделу
γ_2	константа у $k-\omega$ SST моделу
π	број „пи“, однос обима и пречника круга
σ_k	константа у дифузионом члану у моделској једначини преноса кинетичке енергије турбуленције
$\sigma_{\omega 1}$	константа у једначини преноса фреквенције дисипације у $k-\omega$ SST моделу
$\sigma_{\omega 2}$	константа у једначини преноса фреквенције дисипације у $k-\omega$ SST моделу

σ_ω	константа у једначини преноса фреквенције дисипације у $k-\omega$ моделу
σ_ϵ	константа у дифузионом члану моделске једначине преноса дисипације кинетичке енергије турбуленције
σ_{k1}	константа у једначини преноса кинетичке енергије турбуленције у $k-\omega$ SST моделу
σ_{k2}	константа у једначини преноса кинетичке енергије турбуленције у $k-\omega$ SST моделу
κ	Карманова константа
a_1	константа у $k-\omega$ SST моделу
B	константа у универзалном логаритамском профилу брзине
C_1	константа у LRR, LG и SSG моделу
C_1^*	константа у SSG моделу
C_2	константа у LRR, LG и SSG моделу
C_3	константа у SSG моделу
C_3^*	константа у SSG моделу
C_4	константа у SSG моделу
C_5	константа у SSG моделу
C_D	константа у моделској једначини за дисипацију код једноједначинског турбулентног модела
C_s	константа у моделској једначини за тензор дифузије турбулентних напона
$C_{1,ref}$	константа у LG моделу
$C_{2,ref}$	константа у LG моделу
C_μ	константа $k-\epsilon$ модела
$C_{\epsilon 1}$	константа у дисипативном члану моделске једначине преноса дисипације кинетичке енергије турбуленције

$C_{\varepsilon 1}$ константа у продукционом члану моделске једначине преноса дисипације кинетичке енергије турбуленције

Скраћенице

LG Launder-Gibson напонски модел

LRR Launder-Reece-Rodi напонски модел

NVA Normalized Variable Approach схеме дискретизације конвективног члана

SSG Speziale-Sarkar-Gatski напонски модел

TVD Total Variation Diminishing схеме дискретизације конвективног члана

*If I have seen further it is by standing on the shoulders
of giants.*

*(Ако сам и видео даље, то је зато што сам стајао на
раменима великана.)*

Isaac Newton (1643-1727)

1

Увод

Вихорна струјања су често присутна у природи и у техничкој пракси. Феномени као што су торнадо, ураган, затим разни вртлози (вирови) који се јављају у текућим и стајаћим водама представљају најкарактеристичније примере вихорних струјања који се могу јавити у природи. У техничкој пракси, феномени одвајања струјања, вртлога (ротације) и стварања вихора су свакако најприсутнији, а уједно и најкомплекснији феномени који се јављају. Струјања у турбомашинама и ротирајућим системима, струјања у цевоводима након разних локалних отпора, струјања ваздуха у циклонима и коморама за сагоревање су само неки од примера вихорних струјања у техничкој пракси. Како су сва споменута струјања су такође и турбулентна, под појмом вихорна струјања подразумевају се вихорна турбулентна струјања.

Код струјања у турбомашинама вихор утиче како на перформансе струјне машине, тако и на губитке механичке енергије у струјним просторима који се налазе иза те струјне машине. Тако је, на пример, са аспекта испитивања аксијалних вентилатора у циљу одређивања њихове карактеристике врло значајно и истраживање вихорног струјања које се иза њега јавља, обично у правој кружној цеви у којој је вентилатор постављен. Код хидрауличких турбина, вихор који се јавља у сифону иза турбине има великог утицаја на укупне губитке механичке енергије, тако да је веома важно истражити тај утицај. Вихорна струјања у дифузорима су такође веома честа, и ту је посебно значајан утицај вихора на спречавање одвајања струјања које се у дифузорима може јавити.

У случају комора за сагоревање, главна улога вихора је у стабилизацији

пламена и побољшању процеса мешања горива и оксиданата. Ово су кључни аспекти контроле хемијских реакција које се при процесу сагоревања одвијају, тако да је значај разумевања и предвиђања вихорног струјања у овом случају евидентан.

Вихор се често формира и приликом струјања у цевоводима, након неких локалних отпора. То је најизраженије приликом струјања кроз колена и кривине. Вихор који се јавља као последица дејства центрифугалних сила на флуид у кривини, дуго се задржава у праволинијској деоници после кривине. У овом случају главни акценат истраживања је на појави одумирања вихора услед вискозних сила у флуиду, јер је са практичне стране што тачнијег мерења протока потребно знати на ком месту после кривине струјање поново има једнодимензијски карактер.

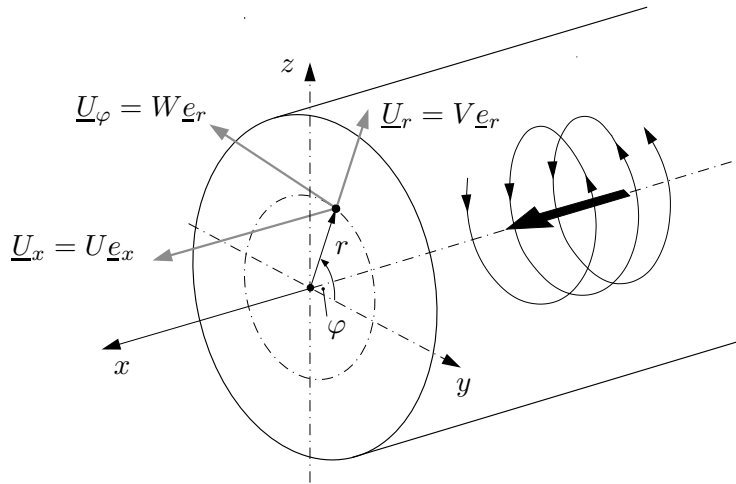
Због свеопште присутности у природи и техници, вихорна струјања су предмет континуалних истраживања у области механике флуида у последњих неколико деценија. У новије време, та истраживања се паралелно одвијају на три начина: теоријски, експериментално и путем нумеричких симулација. Сваки од ових видова истраживања има свој немерљив значај, али су међусобно јако испрелетани и не могу се посматрати као нека издвојена острва. Главни акценат ове дисертације је нумеричко истраживање феномена вихорних турбулентних струјања која се јављају у техничкој пракси.

1.1 Карактеристике вихорних струјања

Основна подела вихорних струјања, која се јављају у техничкој пракси, је на спољашња или неограничена и унутрашња или ограничена. Пример за неограничена вихорна струјања је случај вихорних млазева, док се унутрашња струјања јављају у ограниченим просторима као што су цев, дифузор, конвергентни млазник, циклон, итд. Главна карактеристика, било спољашњих, било унутрашњих вихорних струјања је постојање и аксијалне и обимске компоненте брзине. Ова чињеница има за последицу неколико комплексних феномена који се истовремено јављају, а то су: постојање секундарних смицајних напона и центрифугалних сила, закривљење струјница и ротација. Сви ови феномени

доведе до стварања изразито нехомогене и анизотропне структуре турбуленције, што има за последицу да турбулентни модели базирани на Бусинесковој хипотези дају физички потпуно погрешне резултате.

Како је вихорно струјање у суштини вртлог просторне структуре (струјање у пољу вртлога + аксијално струјање), природно се намеће да се за његово разматрање усвоји поларно-цилиндрични координатни систем. Уобичајено је да у том координатном систему поларна равна одговара равни Oyz буде равна попречног пресека, док је аксијални правац одређен осом x , слика 1.1. У том смислу правоугле координате (x_1, x_2, x_3) постају (x, r, φ) а одговарајуће пројекције брзина (U_1, U_2, U_3) постају (U, V, W) .



Слика 1.1. Пројекције $U = \langle U \rangle + u$, $V = \langle V \rangle + v$ и $W = \langle W \rangle + w$ вектора тренутне брзине у аксијалном, радијалном и обимском правцу при вихорном струјању у цеви.

У случају турбулентних струјања, применом Рејнолдсове статистике, све физичке величине се могу приказати преко збира временски осредњене вредности и флуктуације, тј. као

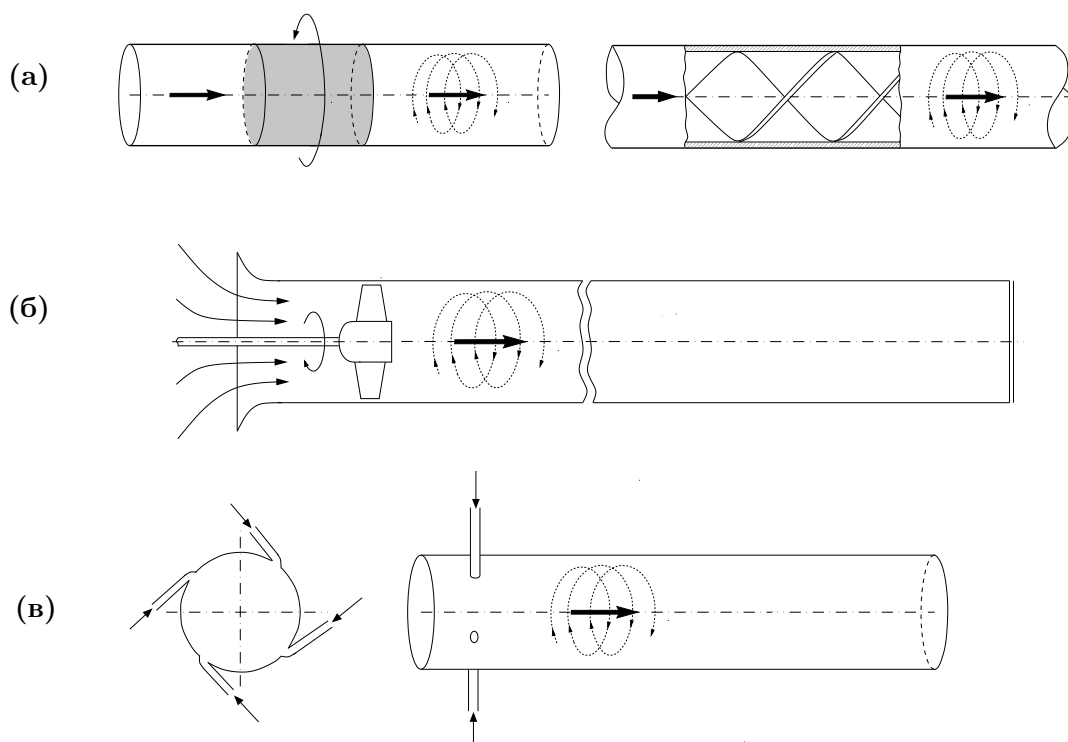
$$\tilde{f} = \langle f \rangle + f, \quad (1.1)$$

где је \tilde{f} тренутна вредност физичке величине, $\langle f \rangle$ њена осредњена вредност (у времену или по ансамблу), док је f флуктуација физичке величине \tilde{f} . У том светлу се дефинишу и одговарајуће пројекције брзине у случају вихорних струјања: аксијална $U = \langle U \rangle + u$ у правцу осе x , радијална $V = \langle V \rangle + v$ у правцу потега r и брзина $W = \langle W \rangle + w$ у обимском правцу. У великом броју случајева вихорних струјања у техничкој пракси, радијална брзина је знатно

мања од обимске и аксијалне брзине, тако да се њен утицај у тим случајевима може занемарити.

Вихор се може формирати на више начина, од чега ће зависити и облик профила обимске брзине, а самим тим и физика самог струјања. Код експерименталног истраживања вихорног струјања у цевима, принципијелно, постоји неколико начина генерисања вихора, Gupta et al. (1984):

- помоћу ротирајућег цилиндра са саћем или помоћу непокретних завојних трака уграђених у цев
- помоћу непокретних лопатица или ротацијом аксијалне струјне машине уграђене у цеви
- тангенцијалним увођењем флуида у цев, по њеном обиму



Слика 1.2. Начини генерисања вихора при струјању у цеви: **(а)** ротирајући цилиндар са саћем и непокретне завојне траке уграђене у цев; **(б)** аксијални вентилатор на улазу у цев; **(в)** тангенцијалним увођењем флуида по обиму цеви.

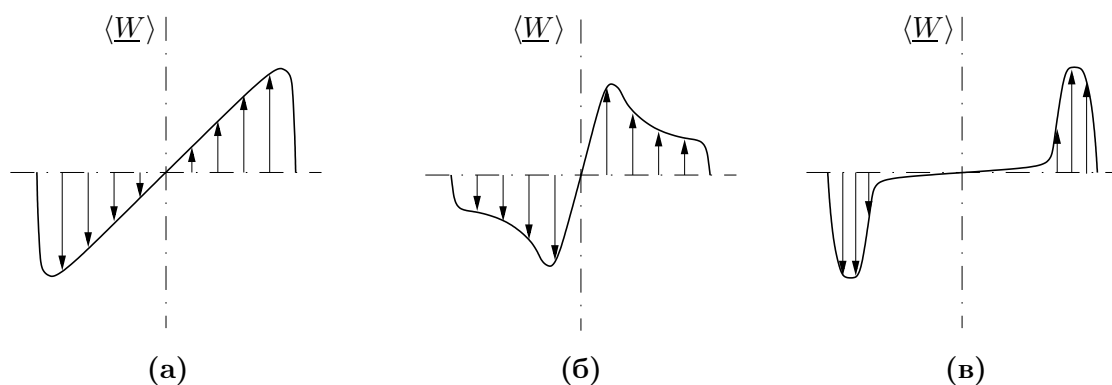
Након проласка флуида кроз генератор вихора, аксијалном струјању се додаје обимска компонента брзине, и струјнице добијају карактеристични спирални (хеликодни) облик.

Сваки од ова три начина генерисања вихора даје три карактеристична профила временски осредњене обимске брзине приказаних на слици 1.3. У сваком од ових профила, изузимајући област непосредно уз зид цеви, уочавају се два модела вртлога:

- **модел принудног вртлога**, у коме флуид ротира као круто тело, при чему је $\langle W \rangle \propto r$, слика 1.3(а) и 1.3(в)
- **модел принудно-потенцијалног (Ранкиновог) вртлога**, у коме је у зони око осе цеви област принудног вртлога, док њега окружује област потенцијалног вртлога $\langle W \rangle \propto r^{-1}$, слика 1.3(б)

Сходно тим моделима, карактеристични профили временски осредњене обимске брзине имају и одговарајуће називе. Профил „зидног млаза“ се може моделирати помоћу два принудна вртлога, различитих угаоних брзина.

Профили обимске брзине приказани на слици 1.3 су осносиметрични, али експерименти показују да постоје извесна одступања од осносиметричности код свих физичких величина. Главни разлог је свакако то што је готово немогуће постићи да се оса генератора и оса цеви поклапају, а и с друге стране увек постоје мала геометријска одступања осносиметричности и код саме цеви. Такође, један важан феномен је присутан код вихорног струјања у цеви, а то је прецесионо кретање вртложног језгра око осе цеви.



Слика 1.3. Карактеристични профили обимске брзине код вихорног струјања: (а) принудни вртлог; (б) принудно-потенцијални вртлог; (в) зидни млаз, Steenberg (1995).

Експериментална истраживања вихорних струјања са профилем принудног вртлога су дата у радовима Ito et al. (1980), Kreith and Sonju (1965), Yajnik and Subbaiah (1973), Cazan and Aidun (2009). Профили типа Ранкиновог вртлога

су експериментално истраживани у Algifri et al. (1988), Kitoh (1991), Li and Tomita (1994), Vukašinović (1996), Benišek (1979), Čantrak (1981), Лечић (2003), Чантрак (2012). Профили типа „зидног млаза“ су истраживани у Sukhovich (1978) и Steenberg (1995).

Најчешћи тип вихорног струјања у цеви, који се среће у техничкој пракси, припада типу Ранкиновог вртлога. У таквом вихорном струјању разликују се три карактеристичне области, чије се дефинисање базира на карактеристичном профилу обимске брзине, слика 1.4. Те карактеристичне области су:

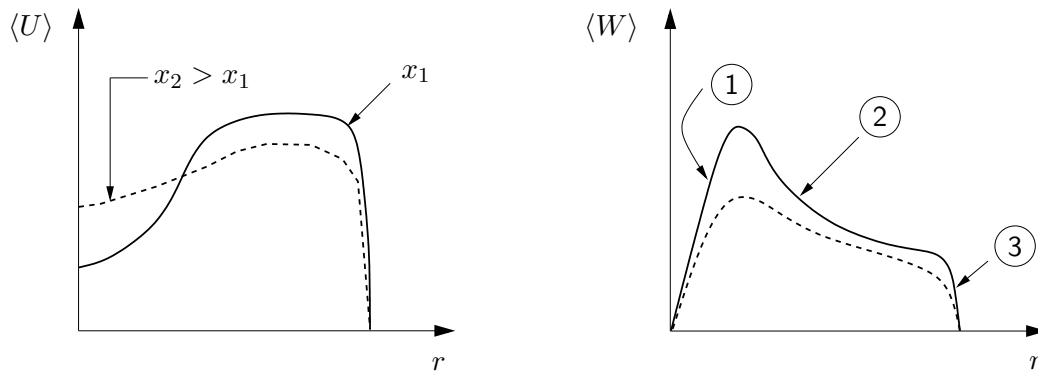
- **област принудног вртлога (вртложно језгро)** је зона уз осу цеви у којој флуид ротира константном угаоном брзином (принудни вртлог), $\omega = W/r = const.$
- **област слободног вртлога**, у коме се обимска брзина расподељује по закону $W = C/r$, и
- **област зида** у којој вискозност постаје доминантна и где долази до наглог смањења интензитета брзине, до вредности једнаке нули на зиду цеви.

Оваква структура је такође често присутна и код вихорних млазева, као и код вихорних струјања у цевима прстенастог попречног пресека. За разлику од оригиналног, теоријског модела Ранкиновог вртлога, где је прелаз између области принудног и потенцијалног вртлога оштар, у случају профила обимске брзине тај прелаз је гладак. Због тога се на том месту јавља додатно смицање, па неки аутори око тачке прелаза дефинишу и подобласт смицајног слоја, Čantrak (1981).

У зони зида, расподела профила осредњене аксијалне брзине у великој мери задовољава универзални логаритамски профил, док је у тој области обимска брзина знатно мања од аксијалне а њена расподела је приближно линеарна, Kitoh (1991).

Генерисање обимске компоненте неминовно доводи до промене профила аксијалне брзине, као и до промене расподеле притиска, што директно следи и из једначина континуитета и количине кретања. У зависности од интензитета вихора, та промене могу бити знатне, а може доћи и до појаве повратног струјања у области око осе цеви. Такође, вихор низструјно слаби и након одређене дужине цеви струјање поново има карактеристичан профил потпуно развијеног

турбулентног струјања у цеви. На слици 1.4 су приказани карактеристични профили аксијалне и обимске брзине у два пресека цеви. Са слике се може видети да се у низструјном пресеку, у зони око осе цеви аксијална брзина повећава, док се интензитет обимске брзине смањује. Дужина цеви, после које ће обимска брзина бити приближно једнака нули, а аксијална брзина имати типични профил потпуно развијеног турбулентног струјања, у највећој мери зависи од начина генерисања вихора као и интензитета вихора. Та дужина може бити и сто пута већа од пречника цеви!



① - област принудног вртлога; ② - област слободног вртлога; ③ - област зида.

Слика 1.4. Профили аксијалне и обимске брзине у два различита пресека у цеви. Испрекиданом линијом је означен ниструјни пресек.

Интензитет вихора се обично изражава преко *вихорног броја*. Он се у литератури дефинише на неколико начина. Најубичајенија дефиниција је да се вихорни број дефинише као однос флуkseва момента количине кретања и количине кретања помноженог са полупречником цеви R кроз попречни пресек цеви.

$$S = \frac{(\text{флуks момента количине кретања у аксијалном правцу})}{R \cdot (\text{флуks количине кретања у аксијалном правцу})} = \frac{\Phi_{mkk,x}}{R \Phi_{kk,x}}. \quad (1.2)$$

Приликом практичног срачунавања вихорног броја користе се временски осредњене брзине за одређивање флуkseва. Тако је, сходно дефиницији (1.2), вихорни број у случају осносиметричног струјања нестишљивог флуида, одређен изразом:

$$S = \frac{\rho \iint_A (\underline{r} \times \langle \underline{U} \rangle)_x (\langle \underline{U} \rangle \cdot \underline{n}) dA}{\rho R \iint_A \langle \underline{U} \rangle \langle \underline{U} \rangle \cdot \underline{n} dA} = \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} r \langle W \rangle \langle U \rangle r dr d\varphi}{R \int_0^R \int_0^{2\pi} \langle U \rangle^2 r dr d\varphi},$$

односно,

$$S = \frac{\int_0^R r^2 \langle U \rangle \langle W \rangle dr}{R \int_0^R r \langle U \rangle^2 dr} \quad (1.3)$$

Често се за дефинисање вихорног броја користи израз за флукс количине кретања базиран на средњој брзини $U_m = \dot{V}/(R^2\pi)$, па се израз за вихорни број своди на:

$$S = \frac{2\pi \int_0^R r^2 \langle U \rangle \langle W \rangle dr}{2\pi R^3 U_m^2} = \int_0^1 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\langle U \rangle \langle W \rangle}{U_m U_m} d\left(\frac{r}{R}\right). \quad (1.4)$$

Важно је напоменути да вихорни број представља тзв. интегрални параметар струјања, и да његова вредност може бити иста за два физички потпуно различита вихорна струјања.

У случају вихорног струјања у дугачким цевима ($L \gg D$), анализом реда величине одговарајућих чланова у једначинама континуитета и количине кретања,¹ добија се да је пројекција једначине количине кретања у радијалном правцу

$$\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial r} = \rho \frac{\langle W \rangle^2}{r}. \quad (1.5)$$

Ова једначина показује да су у случају вихорних струјања у цевима јако изражени и градијенти притиска у радијалном правцу. Тај градијент притиска је позитиван, тако да на зиду цеви притисак има максималну вредност. У случајевима вихорних струјања са великим вредностима вихорног броја, разлика притисака између осе и зида цеви може бити и неколико редова величина! Са слабљењем интензитета вихора, расподела притиска по попречном пресеку постаје равномернија, што повлачи за собом да се у аксијалном правцу (смеру главног струјања) притисак у зони око осе цеви повећава. Ти позитивни градијенти притиска у аксијалном правцу у зони око цеви, локално могу довести до формирања повратног струјања у тој зони. Повратно струјање се обично формира при већим интензитетима вихорних бројева ($S > 1$).

¹Детаљна анализа Рејнолдсових једначина у поларно-цилиндричним координатама којима се описују је турбулентно вихорно струјање у цевима је дата у Прилогу А.

Смањење интензитета вихорног броја у аксијалном правцу, или одумирање вихора се обично изражава експоненцијалном зависношћу, Steenberg (1995)

$$S = S_0 \exp\left(-\beta \frac{x - x_0}{d}\right), \quad (1.6)$$

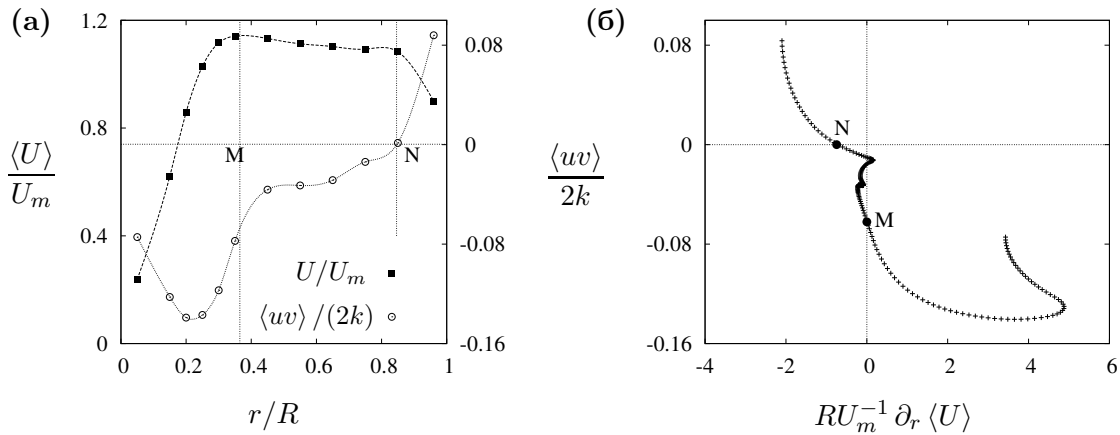
где је S_0 вредност вихорног броја у референтном пресеку са координатом x_0 , а S вредност вихорног броја у пресеку са координатом x . Експериментална истраживања дата у Kitoh (1991) су показала да је коефицијент β функција Рејнолдсовог броја, и да се са смањивањем Рејнолдсовог броја он повећава. Kitoh (1991) је такође показао да не постоји универзална формула за одређивање законитости слабљења вихора, јер тај феномен зависи од начина како је вихор генерисан, као и од његове иницијалне расподеле. Са слабљењем вихора се такође нарушава и симетрија ротационог кретања. Експериментална истраживања вихорних струјања су показала да се оса вртлога не поклапа са осом цеви, након што вихор ослаби до неког одређеног нивоа. То непоклапање оса може бити веће чак и веће од 10% полупречника цеви, Parchen and Steenberg (1998), Pashtrapanska et al. (2006).

Карактеристике турбуленције у вихорним струјањима су такође доста истраживане, како експериментално, тако и нумерички. Анализирајући структуру турбулентног вихорног струјања у цеви Kitoh (1991) је показао да су турбулентне структуре изложене дејству центрифугалне силе због карактеристичног хеликоидног облика струјница, и да су оне изразито нехомогене и анизотропне. Таква структура доводи до тога да се главне осе тензора турбулентних напона и тензора осредњене брзине деформисања не поклапају. Та одступања су највише изражена у области слободног вртлога. До истих закључака о анизотропној структури турбуленције су дошли и Čantrak (1981), Parchen and Steenberg (1998), Pashtrapanska et al. (2006), Лечић (2003), Тоћић (2007), Чантрак (2012). Одумирање вихора такође знатно утиче на структуру турбуленције, и утицај тог феномена је највише изражен у области слободног вртлога. Експериментална истраживања у Čantrak (1981) и Steenberg (1995) су показала да се кинетичка енергија турбуленције у пресецима непосредно након генератора вихора прво низструјно смањује, да би потом на рачун смањења и нестанка области вртложног језгра поново дошло до њеног пораста. У тим истраживањима такође је

показано да нормални турбулентни напони у зони око осе цеви имају своје максимуме и да су напони у радијалном и обимском правцу $\langle v^2 \rangle$ и $\langle w^2 \rangle$ приближно једнаки, и већи од нормалног турбулентног напона у аксијалном правцу, што указује на анизотропну структуру турбуленције.

1.1.1 Нелокални турбулентни пренос у вихорном струјању

Вихорно турбулентно струјање је, као што је већ речено, једно изразито нехомогено струјање. Примена стандардних турбулентних модела који се базирају на концепту турбулентне вискозности при прорачуну вихорних струјања струјања би у већини случаја дала незадовољавајуће резултате (некад и физички погрешне), те је стога неопходно извршити њихову корекцију приликом примене у вихорним струјањима. Наиме, сви ти турбулентни модели претпостављају да се турбулентна размена (импулса, масе или енергије) одвија кретањима малих размера, тј. високих фреквенција. Међутим, турбуленција се карактерише и присуством структура великих размера које својом конвективном дифузијом додатно доприносе турбулентном преносу. Такође, кретања великих размера карактерише и тзв. „ефекат памћења“ којим се обухвата предисторија струјања и њен утицај на карактеристике осредњеног поља брзине.



Слика 1.5. Област нелокалног турбулентног преноса у пресеку $x/R = 0$, за вредност вихорног броја $S = 0,302$, на основу експерименталних резултата из Čantrak (1981). Више детаља о експерименталним резултатима се, поред изворне литературе, може наћи и у Глави 5 ове дисертације.

Покушаји да се турбулентна вискозност третира као тензор четвртог реда, а не као скалар, као што је предложено у Stanišić and Groves (1965), у циљу побољшања резултата дали су само делимичне резултате. Практична примена

тих модела је веома компликована јер је неопходно разматрати и једначине преноса за корелације трећег реда, Тоћић (2007).

На слици 1.5 је дат приказ области нелокалног преноса, добијен на основу анализе експерименталних резултата из Čantrak (1981). На слици 1.5(a) су приказани профили временски осредњене аксијалне брзине $\langle U \rangle$, као и профили бездимензијског смицајног турбулентног напона $\langle uv \rangle$, где је $k = \frac{1}{2}[\langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle + \langle w^2 \rangle]$ кинетичка енергија турбуленције. На основу концепта турбулентне вискозности, смицајни турбулентни напон $\langle uv \rangle$, је повезан са осредњеним тензором брзине деформисања релацијом преко скаларне величине која се назива турбулентна вискозност²

$$\langle uv \rangle = -\nu_t \left(\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} + \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial x} \right). \quad (1.7)$$

Код вихорног струјања у дугачким цевима, градијент аксијалне брзине у радијалном правцу је много већи од градијента радијалне брзине у аксијалном правцу, па се једначина (1.7) у том случају своди на

$$\langle uv \rangle = -\nu_t \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r} \Rightarrow \frac{\langle uv \rangle}{2k} = -\frac{\nu_t}{2k} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial r}. \quad (1.8)$$

Из једначине (1.8) следи да се места на којима $\langle uv \rangle$ и $\partial_r \langle U \rangle$ мењају знак морају поклапати, да би она имала физичког смисла. Међутим, као што је приказано на слици 1.5(a), градијент брзине $\partial_r \langle U \rangle$ мења свој знак од тачке М, и он је са даљим порастом бездимензијске координате негативан. На основу једначине (1.8) то повлачи за собом да смицајни турбулентни напон $\langle uv \rangle$ мора бити позитиван. Међутим, експериментални резултати показују да је у тој области он негативан, све до тачке N у којој мења свој знак и постаје позитиван. Дакле, релација (1.8) у области MN није задовољена. На слици 1.5(б) су приказане зависности бездимензијских величина $\langle uv \rangle / (2k)$ и $\partial_r \langle U \rangle$. Уочава се да за све три јачине вихора криве не пролазе кроз координатни почетак, тј. да се тачке М и N не поклапају, што означава нарушавање локалних феноменолошких релација базираних на концепту турбулентне вискозности (у случају да је он задовољен тачке М и N би се поклапале).

²Детаљна анализа тог концепта, као и анализе турбулентних струјања применом Рејнолдсове статистике дата је у Глави 3.

Већина турбулентних модела се базира управо на концепту турбулентне вискозности. Феномени анизотропности и нелокалног преноса који су присутни у вихорним струјањима чине да употреба тих модела у њиховм прорачунима вихорних струјања не даје задовољавајуће резултате. То се посебно односи на случајеве када се ради о вихорном струјању типа Ранкиновог вртлога, као и када се генератор вихора не моделира. Пуни напонски модели у којима се решавају једначине преноса турбулентних напона дају знатно боље резултате, али са друге стране знатно повећавају сложеност нумеричког прорачуна (решавање већег броја нелинеарних, парцијалних диференцијалних једначина). У Глави 3 дат је детаљан опис турбулентних модела који су коришћени у оквиру истраживања спроведених у току рада на овој дисертацији. Како се ова дисертација базира на нумеричким истраживањима турбулентних вихорних струјања, у даљем делу ове Главе се даје преглед релевантних, досадашњих истраживања на том пољу.

1.2 Преглед досадашњих нумеричких истраживања вихорних струјања

Нумерички прорачун турбулентних вихорних струјања применом турбулентних модела базираних на концепту турбулентне вискозности разматрано је од стране више аутора. Wall and Taulbee (1995) су нумерички разматрали вихорно струјање у млазу коришћењем стандардног и нелинеарног k - ϵ модела. Резултати добијени нелинеарним моделом су показали боље слагање са експерименталним резултатима, посебно у области око осе млаза. Chen and Lin (1999) су тестирали стандардни k - ϵ модел у случају вихорног струјања у цеви са јаким интензитетом вихора, експериментално истраживан у Kitoh (1991). Добијени резултати су показали велико неслагање у профилима осредњених брзина, а такође и у расподелама турбулентних напона.

Yaras and Grosvenor (2003) су користили формулације модела које прорачунавају вискозни подслој у нумеричким решавањима осносиметричних проблема сепарације и вихорних струјања у кружном прстену. У свом истраживању они су користили следеће турбулентне моделе: Родијеву формулацију k - ϵ модела дефинисану у Rodi (1988), Ченов нелинеарни k - ϵ модел дефинисан у

Chien (1982), оригинални $k-\omega$ модел, Wilcox (1994), Ментерову формулацију $k-\omega$ модела, $k-\omega$ SST (Shear Stress Transport), дефинисану у Menter (1994), као и Спаларт-Алмарасов модел, Spalart and Allmaras (1992). Yaras and Grosvenor (2003) су закључили да у случају струјања са сепарацијом модели дају веома добре резултате у предвиђању осредњених брзина, док са друге стране добијене вредности коефицијената притиска и трења у рециркулативној зони веће од експерименталних вредности. У случају вихорних струјања модели су дали лоше резултате, посебно у случају осредњене обимске брзине, где модели предвиђају профил принудног вртлога. Такође, аутори нису добили конвергентно решење у случају примене $k-\omega$ модела. Модификације модела уз примену додатног члана, који обухвата ефекат великог закривљења струјница у одређеним деловима струјног поља нису дале значајно боље резултате. Аутори су закључили да у случају вихорног струјања Ментеров $k-\omega$ SST даје најбоље резултате у поређењу са осталим моделима, али и да је степен неслагања са експерименталним резултатима ипак неприхватљив.

Speziale (1996) је предложио да у случају двоједначинских модела концепт нелинеарне турбулентне вискозности представља најбољи компромис по питању тачности и нумеричке стабилности и конвергенције решења. Као што је већ речено, ови модели представљају проширење Бусинескове хипотезе увођењем додатних квадратних или кубних чланова, у којима фигуришу тензори осредњене брзине деформисања и вртложности. Како се Рејнолдсови напони одређују из те алгебарске релације, ни ови модели не обухватају утицај „историје“ струјања.

Shih et al. (1997) су користили нелинеарни $k-\varepsilon$ модел дефинисан у Shih et al. (1993) за прорачун аксијалног турбулентног струјања у цеви која ротира око своје осе и вихорног струјања у комори за сагоревање. Резултати добијени нелинеарним $k-\varepsilon$ моделом су показали боље слагање са експерименталним резултатима у поређењу са резултатима добијеним стандардним $k-\varepsilon$ моделом.

Wall and Taulbee (1995) су развили побољшану верзију алгебарског напонског модела (ASM). Алгебарска једначина за одређивање напона у њиховој верзији модела је моделована тако да она буде примењива на ширем опсегу анизотропности, а такође је додат и члан који обухвата утицај ротације. Резултати овог модела су дали добро слагање са експерименталним резултатима у случају вихорног млаза, али су ипак резултати добијени пуним напонским моделом,

дефинисаним у Gibson and Launder (1978), показали најбоље слагање са експериментом. Као главни разлог за то Wall and Taulbee (1995) наводе да алгебарски модели не узимају у обзир „историју“ турбуленције.

Jakirlić et al. (2002) су показали да примена стандардног k - ϵ модел у случају вихорног струјања у цеви, са профилем обимске брзине типа принудно-потенцијалног вртлога, даје веома лоше резултате. Они су такође закључили да се независно од типа профила обимске брзине који се зада на улазној граници прорачунског домена, модел увек предвиђа профил типа принудног вртлога за обимски брзину.

Gyllenam (2008) је, између осталог истражио нестационарно вихорно струјање у сифону турбине, као и вихорно струјање у комори за сагоревање коришћењем стандардног k - ϵ модела, као и модификованог k - ω SST модела коришћењем софтвера отвореног типа OpenFOAM. Главни акценат истраживања је био на валидација софтвера у случајевима таквих струјања. Показано је да OpenFOAM може успешно да се користи при прорачуну таквих струјања.

Petit et al. (2011) су нумерички истраживали нестационарно струјање у генератору вихора коришћењем k - ϵ модела. Аутори су користили OpenFOAM, и своје нумеричке резултате поредили са експерименталним резултатима. Добијени нумерички резултати су показали задовољавајуће слагање са експерименталним резултатима.

Escue and Cui (2010) су нумерички истраживали вихорно струјање у цеви, са профилем обимске брзине типа принудног вртлога. Поредиши своје резултате са резултатима експеримената, они показали да у случају малих вредности вихорног броја примена RNG k - ϵ модела даје добра предвиђања профила временски осредњених брзина.

У прорачуну вихорних и ротирајућих струјања многи напонски модели су коришћени. Liu et al. (1998) су показали да LG модел даје боље резултате у поређењу са стандардним k - ϵ и RNG k - ϵ моделом у случају вихорног струјања у комори за сагоревање. Sharif and Wong (1995) су вршили поређења три модела: нелинеарног k - ϵ модела дефинисаног у Speziale (1987), Родијевог имплицитног алгебарског напонског модела, Rodi (1976), и пуног напонски LG модела, Gibson and Launder (1978) на случају вихорног струјања у комори за сагоревање. У предвиђању осредњених брзина, Родијев и LG модел су дали приближно исте резултате, који су у одличном слагању са експериментом, док се нелинеарни

k - ε модел показао као неадекватан. Сви модели су дали погрешна предвиђања турбулентних напона, па су аутори закључили да је потребно извршити додатна побољшања конститутивних релација у моделима.

Chen and Lin (1999) су тестирали k - ε , LG и SSG модел на два типа вихорног струјања у цеви. Први случај је био случај ограниченог вихора у коме је вихор генерисан у кружном прстену, који заједно са централним чисто аксијалним млазом улази у цев. У другом случају вихор је генерисан лопатицама спроводног апарата, тако да је профил обимске брзине био типа Ранкиновог вртлога, 1.3. Двоједначински k - ε модел је у оба случаја дао потпуно погрешне резултате. У првом случају оба напонска модела су показала одлично слагање са резултатима експеримента, док је у другом случају SSG модел показао боље слагање, посебно у случају осредњене аксијалне брзине у зони вихорног језгра, око осе цеви.

Younis et al. (1996) су поредили резултате три различита напонска модела на случају струјања у аксијалном и у вихорном млазу. Они су користили две варијанте LRR модела дефинисане у Launder et al. (1975), и SSG модел. Оба проблема су разматрана као осносиметрична. У случају аксијалног млаза, сви модели су дали приближно исте резултате, који су у добром слагању са експерименталним резултатима. С друге стране, у случају вихорног млаза, SSG модел даје боље слагање турбулентних напона са експерименталним резултатима.

Jakirlić et al. (2002) су обавили опсежна нумеричка истраживања вихорних и ротирајућих струјања. Користили су стандардни k - ε модел, као и његове формулације за мале вредности Рејнолдсових бројева, Ченов и Лаундер-Шарма k - ε модел, и три напонска модела - LG, SSG и Јакирлић-Хањалићев напонски модел. Истраживања су показала да у случају вихорног струјања у цеви са профилем Ранкиновог вртлога сви напонски модели дају одлична слагања са експерименталним резултатима датим у Kitoh (1991) и Steenberg (1995) за профиле осредњених брзина, док сви двоједначински модели дају лоша предвиђања. Аутори су такође дискутовали проблем погрешног предвиђања знака турбулентног напона $\langle uw \rangle$ свих тестираних турбулентних модела. Као разлог за то они наводе неадекватност конститутивне релације за компоненту Π_{13} тензора редистрибуције.

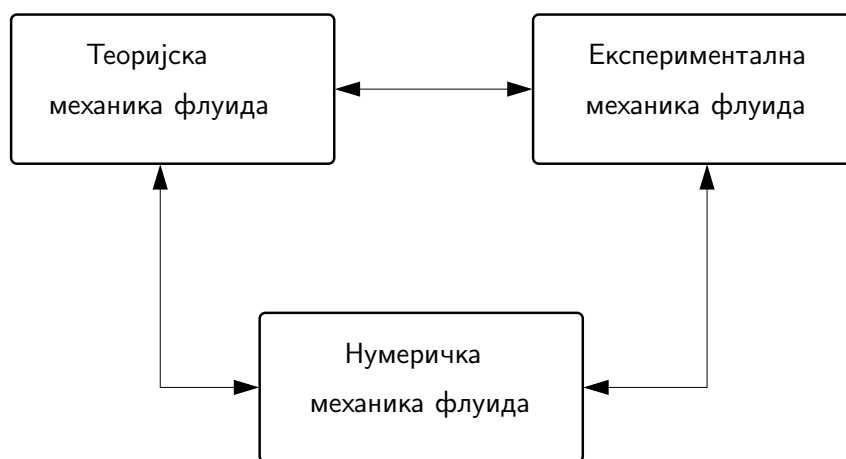
Jawarneh and Vatistas (2006) су истраживали ограничено струјање у вихорној комори, коришћењем LG модела. Они су показали да у овом случају LG модел

даје одличне резултате за поља осредњених брзина, као и за пад притиска у правцу главног струјања и његову радијалну расподелу.

Escue and Cui (2010) су тестирали напонски LRR модел за случај вихорног струјања у цеви са профилем принудног вртлога за обимску брзину. Проблем је разматран као осносиметричан, и за верификацију прорачуна су користили експерименталне резултате презентоване у Rocklage-Marliani et al. (2003). Оба модела су дала добре резултате за профиле осредњених брзина и у случају струјања са малим вредностима вихорног броја, док су неслагања са експерименталним резултатима јасно изражена у случају јачег интензитета вихора.

1.3 Мотивација и циљ истраживања

Како су, као што је речено на почетку ове Главе, вихорна струјања веома заступљена у техничкој пракси, а са друге стране и веома комплексна, њихово проучавање представља увек актуелну тему у истраживањима у механици флуида. Данашња, модерна истраживања у области механике флуида представљају један стални узајамни однос између три приступа, која се међусобно прожимају, а то су: теоријски, експериментални и нумерички, што је схематски приказано на слици 1.6.



Слика 1.6. Методологија истраживања у савременој механици флуида - стални међусобни (узајамни) однос теоријског, експерименталног и нумеричког истраживања.

Главни део истраживања у оквиру ове дисертације припада нумеричкој механици флуида, мада, као што је приказано на слици 1.6 она се не може посматрати као изоловано острво, тако да је један део дисертације посвећен и

теоријским разматрањима, а у једном њеном мањем делу даје су и анализа експерименталних резултата других аутора.

Нумеричка механика флуида је добила на значају у последњој деценији, захваљујући веома великом развоју рачунара и брзине којом они могу да обављају одређене операције (прорачуне). Упоредо са развојем рачунара, развијали су се и одговарајући физичко-математички модели и нумерички алгоритми, са циљем што ефикаснијег, а уједно и што тачнијег прорачуна. У последњој деценији појавило се доста специјализованих софтвера за нумеричке прорачуне у механици флуида. Већина тих софтвера је комерцијалног типа, и за њихово коришћење је неопходно платити велику своту новца одговарајућој компанији која га развија. Лиценце за коришћење софтвера које се при том добијају су обично ограничене на одређени број рачунара или процесора. Са друге стране, ти софтвери су затвореног типа где корисник бира понуђене опције, не знајући имплементацију (код) која се иза њих крије. Као и код свих комерцијалних компанија, главни циљ компанија које дистрибуирају и креирају комерцијални софтвер је профит. Са друге стране, са развојем комерцијалних софтвера и компанија, постојао је и постоји и други принцип у развоју софтвера, а то је принцип базиран на тзв. слободном софтверу (free-software), од кога су касније настали и софтвери отвореног типа (open-source). Покрет слободног софтвера се базира на етичким принципима у коришћењу софтвера, и дефинише четири основна принципа у коришћењу софтвера, Stallman (2010):

- Слобода покретања програма, у било које сврхе.
- Слобода проучавања рада програма, и слобода прилагођавања истог тако да извршава рачунарске активности онако како корисник програма жели. Приступ изворном коду је предуслов за то.
- Слобода поновне дистрибуције копија софтвера.
- Слобода дистрибуције копија измењених верзија другима. Радећи то можете дати целој заједници прилику да има корист од ваших измена програма. Ово је могуће јер је слободан приступ изворном коду.

Јасно је да ови принципи директно подстичу истраживачки дух на подручју софтверских технологија, и са друге стране директно повезују истраживаче и кориснике софтвера, и колико год то некоме звучало утопијски, развијају

хуманије односе међе људима. Обично су софтвери овог типа бесплатни и могу се слободно преузети са интернета, али то свакако није њихова главна предност, већ набројане „слободе“.

У оквиру рада на овој дисертацији коришћен је софтвер за нумеричку механику флуида (CFD - Computational Fluid Dynamics) отвореног типа под називом OpenFOAM (Open-source Field Operation and Manipulation). Два су основна разлога за то. Први разлог лежи у претходно набројаним принципима слободе и етичности, каква би природно требала да влада у образовним и истраживачким институцијама као што је универзитет. Други је што је за разумевање принципа и метода у нумеричкој механици флуида, и њиховог кодирања у одговарајућем програмском језику неопходно да софтвер који је за то намењен буде отвореног типа. OpenFOAM је написан у програмском језику C++, и суштински представља велики скуп C++ библиотека које су намењене за нумеричке прорачуне у механици континуума, Weller et al. (1998). OpenFOAM је реализован као софтвер отвореног кода 2004. године и од тада се он константно унапређује од стране научника и истраживача, и данас представља поуздан софтвер за нумеричке прорачуне проблема механике флуида. Његова тачност и ефикасност не заостаје за комерцијалним софтверима чак и у комплексним нестационарним прорачунима вихорних струјања у турбомашинама, што су показала истраживања Nilsson (2006), Petit et al. (2008), Muntean et al. (2009) и Petit (2012). Сходно својој „open-source“ филозофији, OpenFOAM ради на ГНУ/Линукс (GNU/Linux) оперативном систему, тако да је само за његово коришћење неопходно познавати BASH³ окружење у ГНУ/Линукс терминалу, као и многе друге пратеће софтвере. У оквиру истраживања у овој дисертацији коришћена је верзија OpenFOAM-а која се углавном развија на водећим светским универзитетима и институтима који се баве истраживањима у овласти нумеричке механике флуида. Та верзија је означена са OpenFOAM-1.6-ext⁴.

Рад на овој дисертацији није само подразумевао нумеричке прорачуне вихорних струјања, јер је пре тог великог корака било неопходно начинити велики број (условно) малих корака у разумевању саме физике струјања и физичко-математичких модела који га описују, затим саме структуре OpenFOAM-а и начина на који су одговарајући модели имплементирани у њега. То је омогућило

³<http://www.gnu.org/software/bash/manual/bashref.html>

⁴<http://www.extend-project.de>

да се испрограмирају нове апликације у OpenFOAM-у, као и да се имплементира турбулентни напонски модел који је коришћен за прорачун осносиметричног вихорног струјања у Глави 5.

Разумевање структуре OpenFOAM-а, и отклањање разних недоумица би било готово немогуће без директне и индиректне помоћи OpenFOAM заједнице⁵, као и веома корисних материјала који се тичу OpenFOAM-а доступних на интернету, посебно са Чалмерс Универзитета (Chalmers University), Шведска⁶, као и доступних материјала са OpenFOAM радионица⁷. Свима који су учествовали у њиховом креирању, веома сам захвалан.

1.4 Структура дисертације

Након уводне Главе, у којој су дате основне физичке карактеристике вихорних струјања, као и преглед литературе који се тиче њихових нумеричких истраживања, у Главама 2 и 3 се дају теоријска разматрања која се тичу основних једначина механике континуума и физичко-математичком моделирању турбулентних струјања. У четвртој Глави се објашњава метода коначних запремина, као и начин њене имплементације у OpenFOAM-у. У петој Глави се разматра стационарно, осносиметрично вихорно струјање у правој кружној цеви, и на том примеру се тестирају разни турбулентни модели. У шестој Глави се разматра вихорно струјање у цеви иза кола аксијалног вентилатора. У тим прорачунима вентилатор, као генератор вихора, се такође моделира, и то на два начина. У првом случају, моделом „замрзнутог ротора“, у коме се у делу прорачунског домена у коме се налази вентилатор решавају једначине кретања у ротирајућем координатном систему. У другом приступу његово кретање моделира стварним померањем нумеричке мреже у делу прорачунског домена у коме се он налази.

⁵<http://www.cfd-online.com/Forums/openfoam/>

⁶http://www.tfd.chalmers.se/~hani/kurser/OS_CFD/

⁷<http://www.openfoamworkshop.org/2012/0FW7.html>

*Mathematics is the language in which God has written
the universe.*

(Језик којим Бог описује свемир је математика.)

Galileo Galilei (1564 - 1642)

2

Основни закони и основне једначине механике флуида

Основни постулат у механици флуида је претпоставка о непрекидности средине, тј. претпоставка да су карактеристичне временске и дужинске мере много веће од размера карактеристичних за саму структуру материје, тј. размера на нивоу молекула. Стога је могуће сваку макроскопску физичку величину описати као непрекидну функцију просторних координата и времена.

Механика флуида, тј. механика континуума се базира на фундаменталним принципима, тј. основним законима одржања одговарајућих, карактеристичних физичких величина. То су:

- закон одржања масе
- закон промене количине кретања
- закон одржања енергије
- принцип ентропије

За масу и енергију ови принципи важе само за *укупну* масу и за *укупну* енергију материјалног система у контролном простору. Тако је, на пример, принцип одржања масе у случају хемијских реакција у контролном простору односи на укупну масу, а не на појединачну масу компоненти. У случају енергије, у механици континуума је уобичајена подела на механичку и унутрашњу. Процесом дисипације механичка енергија се претвара (трансформише) у унутрашњу

- једна се продукује, друга се губи, али укупна енергија (њихова сума) остаје очувана. Закон о промени количине кретања представља други Њутнов закон кретања непрекидне средине (континуума). Ентропија се, као и маса, импулс и енергија такође покорава одређеним билансним једначинама дефинисаним за контролни простор, само се у њеном случају увек појављује тзв. *изворски* члан који описује њену продукцију. Величине које остају очуване карактеришу се тиме, да њихов баланс показује да не постоје њихови извори и понори, који би их на било који начин мењали. Формирањем баланса за поједине физичке величине настају математичке једначине, чијом се применом одређују тражене (непознате) величине. У принципу, са сваком новом једначином може се одредити следећа непозната величина. Баланси се при томе могу тако интерпретирати, да се улазне (унете) и излазне (изнете) величине на фиксним границама контролног простора „региструју“ унутар контролног простора. Принципи одржања (конзервације) масе, импулса и енергије могу да се формулишу како за материјалну запремину V_m тако и за запремину V фиксну (непокретну) у простору. Како размере ових области (домена) могу да буду или коначне, или инфинитезималне (елементарне), основне једначине механике флуида се изводе у интегралном или диференцијалном облику. Природни концепт у оквиру модела континуума је материјална запремина за коју се изводе: (а) одржање масе - једначина континуитета; (б) баланс количине кретања (други Њутнов закон) - једначина количине кретања и (в) баланс енергије - једначина енергије. Применом материјалног извода и Рејнолдс - Лајбницевог теореме преноса повезују се материјална и контролна запремина, док теорема Гауса - Остроградског омогућује извођење диференцијалних једначина из њиховог интегралног облика. Различите методе извођења основних једначина приказане су на слици 2.1.

Ако се једначине баланса постављају за коначно велике фиксиране домене простора, онда се непосредно из њих не могу добити искази о тачном понашању у унутрашњости овог контролног простора, тј. запремине. Ово се ипак постиже, када се та коначна контролна запремина у мислима раздели на инфинитезимално мале домене простора, за које важе баланси физичких величина. На овај начин се могу основне једначине механике флуида извести непосредно у облику диференцијалних једначина, које омогућују одређивање тражених величина у укупном посматраном струјном пољу, тј. у свакој тачки простора као величине поља. Интеграљење диференцијалних једначина у општем случају је



Слика 2.1. Шематски приказ методологије извођења основних једначина механике флуида.

веома отежано, некада и немогуће, изузимајући посебне једноставне случајеве. У овом смислу је са балансом за коначну контролну запремину често повезано формирање модела, тј. моделирање физичких процеса, као што су, на пример, претпоставке модела осносиметричног или пак једнодимензијског струјања, које су за стварно (реално) струјање само приближно испуњене. Потпун и коректан баланс за коначни контролни простор се добија интеграљењем диференцијалних једначина за посматрану контролну запремину, што је и основни принцип такозване методе коначних запремина која се користи у нумеричкој механици флуида.

2.1 Диференцијални облици основних једначина механике флуида (континуума)

Полазећи од основних принципа и фундаменталних закона изложених у уводу ове главе, долази се до диференцијалних облика основних једначина кретања непрекидне средине. Те једначине су следећег облика:

- **Једначина континуитета**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{U}) = 0 \quad (2.1)$$

где је ρ густина, а \underline{U} вектор брзине;

- **Једначина количине кретања**

$$\frac{\partial (\rho \underline{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{U} \underline{U}) = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.2)$$

где је \underline{f} вектор јединичне масене силе, а $\underline{\underline{\sigma}}$ тензор напона којим се описује стање напона у флуиду, и који репрезентује површинске силе. Тензор напона се може претставити као сума изотропног тензора који одговара силама (термодинамичког) притиска и тензора вискозних напона, тј.

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}, \quad (2.3)$$

где је $\underline{\underline{I}}$ јединични тензор. Заменом једначине (2.3) у једначину (2.1), добија се алтернативни облик једначине количине кретања,

$$\frac{\partial (\rho \underline{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{U} \underline{U}) = \rho \underline{f} - \nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}. \quad (2.4)$$

- **Једначина енергије.**

Као што је већ речено на почетку ове Главе, под појмом енергија у класичној механици флуида обично се подразумева збир кинетичке и унутрашње енергије. Кинетичка енергија флуида настаје као последица макроскопског кретања флуида, док је унутрашња енергија повезана са хаотичним

кретањима молекула флуида. Та кретања молекула се макроскопски представљају преко одговарајућих физичких својстава и величина као што су специфична топлота и температура. При струјању флуида промена унутрашње енергије је спрегнута са променама како кинетичке, тако и укупне енергије, јер при кретању флуида и масене и површинске силе врше рад, али се при томе може и топлота размењивати са околином. Услед свих ових феномена и кинетичка и потенцијална енергија се могу мењати, али основни постулат или принцип енергије мора бити увек задовољен: енергија не може бити створена нити уништена; она само може мењати свој облик. Примењујући тај основни принцип на неку материјалну запремину флуида, као и одговарајуће теореме на добијену интегралну једначину, долази се до диференцијалног облика једначине енергије

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} |\underline{U}|^2 \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} |\underline{U}|^2 \right) \underline{U} \right] = \rho \underline{f} \cdot \underline{U} + \nabla \cdot (\underline{\underline{g}} \cdot \underline{U}) - \nabla \cdot \underline{q}_A + \rho \dot{q}_V \quad (2.5)$$

где су: e - јединична унутрашња енергија, $\frac{1}{2} |\underline{U}|^2$ - јединична кинетичка енергија, \underline{q}_A [W/m²] - вектор топлотног флукса, који је директно повезан са количином топлоте која се у јединици времена преко контролне површи предаје флуиду у контролном простору (запремини), \dot{q}_V [W/kg] - извор топлоте унутар контролне запремине.

Једначина кинетичке енергије се изводи из једначине количине кретања, јдн. (2.2), њеним скаларним множењем са вектором \underline{U} . Тако се добија следећа једначина

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{1}{2} |\underline{U}|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\underline{U}|^2 \underline{U} \right) = \rho \underline{f} \cdot \underline{U} + \nabla \cdot (\underline{\underline{g}} \cdot \underline{U}) - \underline{\underline{g}} : (\nabla \underline{U}) \quad (2.6)$$

Једначина унутрашње енергије се добија на основу једначина (2.5) и (2.6), из којих следи

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \underline{U}) = -\nabla \cdot \underline{q} + \rho \dot{q}_V + \underline{\underline{g}} : (\nabla \underline{U}) \quad (2.7)$$

Ако се искористи релација (2.3), добијају се алтернативни облици једначина кинетичке и унутрашње енергије, у којима се укупна снага површинских сила $\nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{U})$ представља као збир снага сила притиска и вискозних сила.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{1}{2} |\underline{U}|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\underline{U}|^2 \underline{U} \right) = \rho \underline{f} \cdot \underline{U} - (\nabla p) \cdot \underline{U} + \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{U}) - \underline{\underline{\tau}} : (\nabla \underline{U}), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \underline{U}) = -\nabla \cdot \underline{q} + \rho \dot{q}_V - p \nabla \cdot \underline{U} + \underline{\underline{\tau}} : (\nabla \underline{U}). \quad (2.9)$$

Величина $\Phi = \underline{\underline{\tau}} : (\nabla \underline{U})$ се назива вискозна дисипација, и она је увек позитивна, тј. $\Phi > 0$. Њоме су описани сложени ефекти дисипације кинетичке (механичке) енергије, који настају сложеним дејством поља вискозних напона и деформације. Она се се у једначини кинетичке енергије појављује са предзнаком минус, док се у једначини унутрашње енергије појављује са предзнаком плус. Дакле, вискозна дисипација представља део кинетичке енергије који се неповратно трансформише у унутрашњу енергију, тј. део механичке енергије који директно утиче на повећање унутрашње енергије.

• Баланс ентропије

Користећи Гибсову релацију $T ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho$, и једначину унутрашње енергије (2.9), долази се до једначине преноса јединичне ентропије у следећем облику,

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \underline{U}) = \underbrace{\frac{\rho q_V}{T} - \nabla \cdot \left(\frac{\underline{q}_A}{T} \right)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{\Phi}{T} - \frac{\underline{q}_A \cdot \nabla T}{T^2}}_{\textcircled{2}} \quad (2.10)$$

- ① укупна количина топлоте по јединици запремине која се преда (у том случају она је позитивна), или пак коју флуид преда (у том случају она је негативна)
- ② како је увек $\underline{q}_A \cdot \nabla T < 0$ (вектор топлотног флукса и вектор градијента температуре увек граде туп угао); како је и дисипација увек позитивна, овај члан је увек позитиван. Њиме се описује иреверзибилно

увећање ентропије услед вискозне дисипације и довођења/одвођења топлоте.

Често се принцип ентропије, или други принцип термодинамике исказује релацијом

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \underline{U}) \geq \frac{\rho \dot{q}_v}{T} - \nabla \cdot \left(\frac{\underline{q}_A}{T} \right). \quad (2.11)$$

Знак једнакости одговара пререверзибилним или неповратним процесима, који у суштини не постоје у природи, већ представљају мањи или већи степен идеализације процеса.

2.2 Основне једначине за њутновски флуид

Основне једначине кретања непрекидне средине (2.1), (2.2) и (2.5) чине затворен систем једначина, и у циљу њиховог затварања, неопходно је дефинисати одговарајуће конститутивне релације. Оне зависе од физичких особина непрекидне средине, и са аспекта механике флуида најзначајнија је веза између стања напона и стања деформације. Тако је у случају њутновског флуида та веза дефинисана следећом релацијом

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \eta \left[\nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T - \left(\frac{2}{3} \nabla \cdot \underline{U} \right) \underline{\underline{I}} \right], \quad (2.12)$$

где је η динамичка вискозност флуида. Поред везе између стања напона и стања деформације, потребно је дефинисати и одговарајуће термодинамичке релације, тј. једначину стања $\rho = \rho(p, T)$, релације за унутрашњу енергију $e = e(p, T)$ као и релацију за вектор топлотног флукса. Он се обично дефинише Фуријеовим законом провођења топлоте као $\underline{q}_A = -\lambda \nabla T$, где је λ топлотна проводљивост флуида.

Са овако дефинисаним конститутивним релацијама систем једначина (2.1), (2.2) и (2.5) је затворен, и оне заједно чине затворен систем парцијалних диференцијалних једначина које описује кретање њутновског флуида, као и све процесе трансформације енергије који се при том кретању одвијају.

• Једначина континуитета

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{U}) = 0 \quad (2.13)$$

• Једначина количине кретања - Навије-Стоксова једначина

$$\frac{\partial (\rho \underline{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{U} \underline{U}) = \rho \underline{f} - \nabla \left(p + \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \underline{U} \right) + \nabla \cdot \left\{ \eta \left[\nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \right] \right\} \quad (2.14)$$

• Једначина енергије

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} |\underline{U}|^2 \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} |\underline{U}|^2 \right) \underline{U} \right] &= \rho \underline{f} \cdot \underline{U} - \nabla \cdot (p \underline{U}) \\ - \nabla \cdot \left[\frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \underline{U}) \underline{U} \right] + \nabla \cdot \left\{ \eta \left[\nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \right] \cdot \underline{U} \right\} &- \nabla \cdot \underline{q}_A + \rho \dot{q}_V \end{aligned} \quad (2.15)$$

Једначина кинетичке енергије:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{1}{2} |\underline{U}|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\underline{U}|^2 \underline{U} \right) &= \rho \underline{f} \cdot \underline{U} - (\nabla p) \cdot \underline{U} \\ - \nabla \cdot \left[\frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \underline{U}) \underline{U} \right] + \nabla \cdot \left\{ \eta \left[\nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \right] \cdot \underline{U} \right\} & \\ - \nabla \underline{U} : \left\{ \eta \left[\nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \right] - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \underline{U}) \underline{I} \right\} & \end{aligned} \quad (2.16)$$

Једначина унутрашње енергије:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \underline{U}) &= \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho \dot{q}_V \\ - \nabla \underline{U} : \left\{ \eta \left[\nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \right] - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \underline{U}) \underline{I} \right\} & \end{aligned} \quad (2.17)$$

• Принцип ентропије

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \underline{U}) \geq \frac{\rho \dot{q}_V}{T} + \nabla \cdot \left(\frac{\lambda \nabla T}{T} \right). \quad (2.18)$$

У случају да се ефекти стишљивости и размене топлоте могу занемарити у односу на остале ефекте, једначине се знатно поједностављују. За такав њутновски флуид се може сматрати да су његове физичке карактеристике константне, $\rho = const$, $\eta = const$ и $\lambda \rightarrow \infty$. Једначина енергије није неопходна у анализи таквих струјања, већ су довољне једначина континуитета и једначина количине кретања, из којих се одређују непознато скаларно поље притиска и векторско поље брзине. Те једначине су облика

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{U}\underline{U}) &= \underline{f} - \nabla p^* + \nu \nabla^2 \underline{U}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где је ν кинематичка вискозност, а $p^* = p/\rho$ кинематички притисак. У највећем броју случајева струјања флуид је изложен дејству поља конзервативних масених сила¹ које се могу изразити преко потенцијала ϕ_f као $\underline{f} = -\nabla\phi_f$, па се утицај масених сила може обухватити и преко генералисаног кинематичког притиска $P^* = p^* + \Phi_f$. Због једноставнијег означавања у даљем току текста, на овом месту се дефинише ознака p за генералисани кинематички притисак, тј. $P^* \equiv P$, и у даљем току текста, под појмом притисак се подразумева генералисани кинематички притисак. Имајући претходно речено у виду, систем једначина (2.19) се своди на следећи облик

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{U}\underline{U}) &= -\nabla P + \nu \nabla^2 \underline{U}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Струјања флуида, која се разматрају у оквиру ове дисертације, спадају у ову класу струјања (изотермска струјања нестишљивог њутновског флуида у пољу силе Земљине теже), па се посматрано са математичког становишта проблем своди на решавање система једначина (2.20). Овај систем једначина је познат већ више од 150 година, али још увек није доказано да ли, уз задате почетне

¹Обично је то сила гравитације, односно $\underline{f} = \underline{g}$. Ова сила се може изразити и преко свог потенцијала, као $\underline{g} = \nabla\phi_g$, где је обично $\phi_g = \pm gx_i$. Координата x_i је вертикална координата усмерена вертикално навише или вертикално наниже.

и граничне услове, његово решење уопште постоји и да ли је оно јединствено. Извођење тог доказа је један од седам нерешених класичних математичких проблема, за чијим се решењима трага последњих неколико стотина година.² Са аспекта физике и физичких процеса, Навије-Стоксовим једначинама је описана турбуленција, хаотично и непредвидиво кретање флуида, у коме су присутне сложене вртложне структуре. Просторно-временске размере тих вртлога имају веома широк опсег. Тако се просторне размере крећу од димензија микро-вртлога, који одговарају размерама Колмогорова, па до карактеристичних дужинских размера датог струјања, док се временске размере могу кретати од делова микросекунди до неколико десетина секунди. Са повећањем Рејлдсовог броја, димензије микро-вртлога се смањују а тај просторно-временски опсег се такође повећава.³ Гледано са аспекта механике континуума, поље сваке физичке величине, а то се посебно односи на брзинско поље, се нерегуларно и хаотично мења и у времену и у свакој тачки простора. Те чињенице природно намећу математичку статистику као један од могућих начина истраживања феномена турбуленције. Тако се у већини случајева истраживања турбуленције, уместо полазних Навије-Стоксових једначина, користе једначине добијене применом одговарајућих статистичких операција над њима, тј. одговарајућим осредњавањем по времену, по ансамблу или њиховим осредњавањем по просторним координатама. Те теме се обрађују у Поглављима који следе.

²Та листа проблема је састављена од стране математичког института Клеј (Clay Mathematical Institute - <http://www.clay.org>) почетком овог миленијума, и за решење сваког од њих Институт је понудио и нуди по милион долара. Многи признати научници сматрају да су ти проблеми нерешиви, тј. да доказе није могуће извести. Међутим, руски математичар Григори Перлерман је 2006. године доказао Поанкареову хипотезу у тродимензионалном простору, до тада један од најизазовнијих проблема у топологији. Оно што је занимљиво је да тај доказ није објавио у научном часопису, већ на интернету, а награде и признања за то достигнуће је одбио, јер по његовим речима он потпуно разуме како Универзум функционише, и у том светлу све остало делује потпуно безначајно, а посебно материјалне ствари.

³То је један од разлога зашто је директно нумеричко решавање Навије-Стоксових једначина могуће само у случају релативно малих вредности Рејнолдсових броја, и у једноставним геометријама. Чак и тада, нумеричка мрежа мора бити веома густа, јер њене прорачунске ћелије морају мање од димензија микро-вртлога, а такође и временски корак довољно мали да би се промене брзине у времену могле предвидети са одговарајућом тачношћу.

*I am an old man now, and when I die and go to Heaven
there are two matters on which I hope for enlightenment.
One is quantum electrodynamics and the other is the
turbulent motion of fluids.*

Horace Lamb (1849 - 1934)

3

Физичко-математичко моделирање турбулентних струјања

3.1 Феноменолошки опис турбуленције

Прецизну дефиницију турбуленције није могуће дати, али је свакако могуће дефинисати њене основне карактеристике, Tennekes (1972), Hinze (1975), Pope (2006), Davidson (2004).

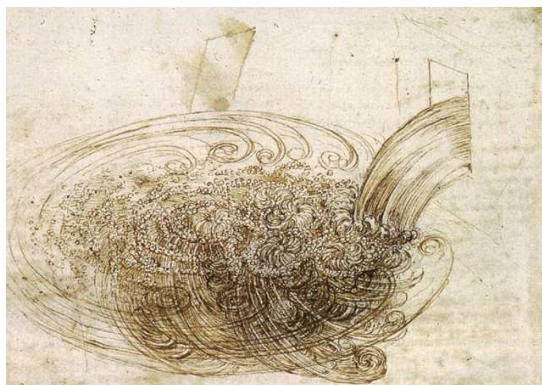
- 1. Нерегуларност.** Турбулентна струјања су нерегуларна, случајна и хаотична. Структура струјања је таква да су у њему присутни вртлози различитих димензија. Под појмом турбулентног вртлога се подразумева одређена кохерентна структура која се јавља у одређеном делу простора и која постоји у одређеном временском интервалу. За турбулентни вртлог се може дефинисати карактеристичне размере дужине, брзине и времена.
- 2. Турбулентна дифузија.** У турбулентним струјањима дифузија је знатно израженија него у случају ламинарних струјања. Она је последица додатног преноса количине кретања и кинетичке енергије хаотичним брзинским пољем.
- 3. Велике вредности Рејнолдсових бројева.** Турбулентна струјања се карактеришу релативно великим вредностима Re броја, односно знатно већим односом инерцијалних и вискозних сила. Турбуленција настаје

и одржава се једино у смицајним струјањима. Градијенти брзине који су присутни у тим струјањима представљају извор енергије за повећање нестабилности струјања изазваних иницијалним, малим пертурбацијама, која се сложеним механизмима трансформише у велике вртложне структуре.

4. Тродимензионалност и нестационарност. Турбулентна струјања су увек тродимензионална и нестационарна.

5. Каскадни процеси преноса кинетичке енергије турбуленције и дисипативност. У случају смицајних струјања, извори кинетичке енергије највећих турбулентних вртлога су градијенти брзине у главном току. Ти макровртлози се након одређеног времена (временска размера вртлога) трансформишу у мање вртлоге којима предају своју енергију, ови се затим трансформишу у још мање, и тако све до веома малих размера и микровртлога (размере Колмогорова) на којима се та енергија вискозним дисипативним ефектима трансформише у унутрашњу енергију. Овај процес преноса енергије се назива *каскадни процес преноса енергије*. До ових закључака је први дошао Луис Фрај Ричардсон (Lewis Fry Richardson), чувени енглески математичар и физичар и зачетник коришћења нумеричких метода у за решавање парцијалних диференцијалних једначина у механици флуида.¹ Његова реченица „*Велики вртлози имају мале вртлоге, који се хране њиховом брзином; И мали вртлози имају још мање, и тако све до вискозности (на молекуларном нивоу) -Big whorls have little whorls, which feed on their velocity; And little whorls have lesser whorls, and so on to viscosity (in molecular sense)*“ је једна од најцитиранијих реченица у литератури везаној за турбуленцију, а графика Леонарда да Винчија приказана на слици 3.1 је један од најчувенијих приказа турбуленције.

¹Ричардсон (1881-1953) је једно од најпознатијих имена геофизике и метеорологије. Он је први, почетком двадесетог века, нумерички решавао парцијалне диференцијалне једначине који описују кретања ваздуха у Земљиној атмосфери. Оно што гледано из данашње перспективе делује незамисливо је чињеница да је у својим нумеричким прорачунима користио само папир и оловку. Касније анализе су показале да су резултати које је том приликом добио били без иједне грешке. Својом књигом „Предвиђање времена нумеричким процесом“, Richardson (1922), је успоставио темеље примене нумеричких метода у решавању једначина које описују динамику Земљине атмосфере. Почетком другог светског рата Ричардсон у потпуности престао са истраживањима у области метеорологије и свој фокус преместио на рационално откривање и искорењивање узрока сукоба у човечанству, као повода за започињање ратова.



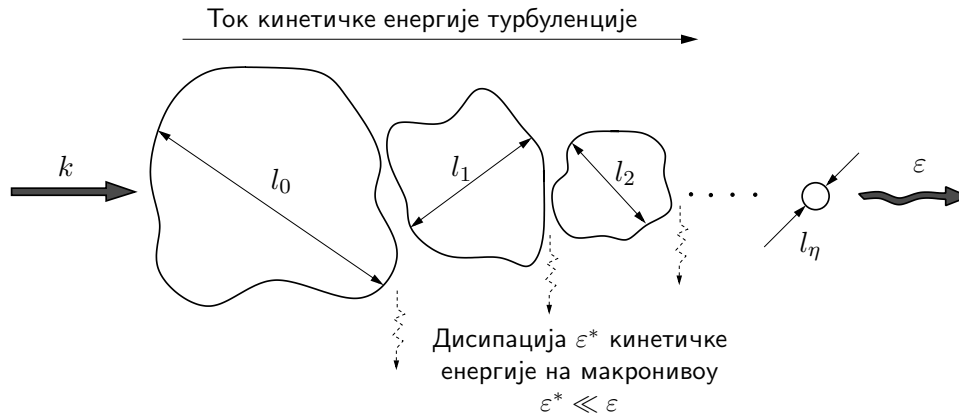
Слика 3.1. Чувена скица „Студија истицања воде“ Леонарда да Винчија (1452-1519) у којој се виде вртлози разних размера. Преузето са интернет адресе <http://www.drawingsofleonardo.org>.

6. Карактеристичне размере турбуленције. Карактеристичне димензије највећих вртлога могу бити реда величине карактеристичних дужина самог струјања (за струјање у млазу то би била ширина млаза, за струјање у цевима реда величине 20% пречника, итд.) и за њих се хипотетички може рећи да је њихова дужинска размера l_0 и карактеристична брзина v_0 . Временска размера ових вртлога је реда величине l_0/v_0 . Као што је већ речено, кинетичка енергија ових вртлога се ствара у главном току, и она се даље преноси вртлозима мањих димензија, карактеристичних размера $l_1, v_1, t_1, l_2, v_2, t_2$, све до размера најмањих, микровртлога, чије се карактеристичне размере означавају са l_η, v_η и τ_η . Карактеристичне размере микровртлога се називају и размере Колмогорова, јер је њих први дефинисао руски математичар Андреј Колмогоров, још једно велико име не само у свету турбуленције већ и у свету математике, и науке уопште. На основу физичко-теоријских разматрања, и поступком димензијске анализе, Колмогоров је дошао до следећих израза за карактеристичне размере микровртлога

$$l_\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad v_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4}, \quad \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad (3.1)$$

где су ν кинематичка вискозност, а ε је вискозна дисипација кинетичке енергије турбуленције по јединици масе и у јединици времена (ε [m^2/s^3]). Наравно, вискозне силе постоје на свим размерама вртлога, тако да је кинетичка енергија турбуленције који неки вртлог „добије“ од вртлога већих

димензија, нешто већа од енергије коју он преда вртлогу мањих димензија. Међутим, највећи део кинетичке енергије турбуленције (реда величине 90%) се на размерама микровртлога претвара у унутрашњу енергију.



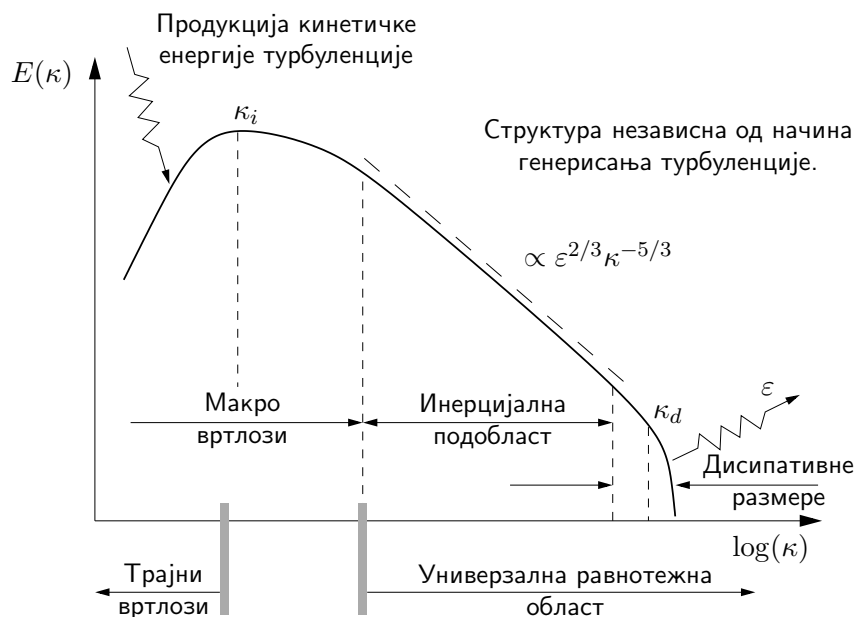
Слика 3.2. Шематски приказ каскадног процеса преноса кинетичке енергије турбуленције.

У чувеном раду Kolmogorov (1941) се по први пут теоријски образлаже интеракција између турбулентних вртлога различитих димензија, тј. дужинских размера. Тај рад је сигурно један од значајних радова у теорији турбуленције, и теоријски резултати приказани у том раду показују да је у случају изотропне турбуленције² кинетичка енергија турбуленције зависи само од њене дисипације у јединици времена. Другим речима, ако је дужинска размера макровртлога у којима се кинетичка енергија турбуленције ствара много већа од дужинских размера микровртлога, онда ће карактер турбуленције бити независан и од начина како од начина на који се кинетичка енергија турбуленције ствара, тако и од вискозности флуида. Колмогоровљева теоријска разматрања су и експериментално потврђена у разним класама турбулентних струјања, од струјања у атмосфери до струјања у турбулентним млазевима. Ово је такозвани Колмогоровљев закон пет-трећина, и у спектру кинетичке енергије турбуленције приказаном у логаритамској размери он је представљен правом линијом, слика 3.3. Та законитост је дефинисана изразом

$$E(\kappa) = C_k \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad (3.2)$$

²Изотропна турбуленција је специјалан случај турбуленције у коме су турбулентне структуре независне од ротације координатног система, тј. у којој не постоји неки главни правац.

где је C_k универзална константа, чија се вредност одређује експериментално, а обично се креће око вредности 1.5.



Слика 3.3. Спектар кинетичке енергије турбулентције.

У спектру кинетичке енергије турбулентције приказаном на слици 3.3, разликује се неколико карактеристичних области:

- Прву област, која одговара малим вредностима таласног броја, чине енергетске или интегралне размере. Таласни број који карактерише ову област је k_i . На овим размерама постоје трајни вртлози, и на њима се се кинетичка енергија турбулентције перманентно ствара, као део енергије који се предаје од главног тока.
- Друга област се назива инерцијална подобласт и она се карактерише Колмогоровљевим законом пет-трећина; механизам стварања турбулентције у овој области не утиче на њену структуру, тако да је у овој области она универзална. У њој је доминантан утицај инерцијалних сила, док је утицај вискозности занемарљив, тако практично нема дисипације кинетичке енергије. Главна улога ових структура да је изврше „пренос“ енергије од макровртлога до микровртлога.

- Трећа, и последња област спектра се назива *дисипативна подобласт*. Раз- мере вртлога у овој области су реда величине Колмогорових микрораз- мера, јдн. (3.1), и мање, тако да је њихов карактеристични таласни број $\kappa_d \propto (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$. При овим вредностима таласног броја, вискозни ефекти су доминантни. На самом крају спектралне криве је нагли, готово експонен- цијални пад енергетског спектра у коме је садржан главни део кинетичке енергије који се дисипира у унутрашњу енергију. Дисипативна и инерци- јална подобласт заједно чине такозвану *универзалну равнотежну област*.

Међутим, као и све остало у случају турбуленције, и спектар приказан на слици 3.3, иако широко распрострањен, није универзалан. Ако су на пример размере макровртлога релативно близу размерама микровртлога, инерцијална подобласт неће ни постојати. Такође, појава интермитенције и других нестацио- нарних феномена може знатно модификовати енергетски спектар у инерцијал- ној подобласти, Davidson (2004).

Процес трансформације кинетичке енергије главног тока у кинетичку енер- гију турбуленције се генерално може одвијати на два начина. Ова два начина се практично односе на две класе струјања - слободна смицајна струјања (ме- шајући слојеви, турбулентни млазеви, вртложни трагови) и струјања у прису- ству чврстих контура или граница (унутрашња струјања - струјања у цевима, каналима, итд.). У првом случају, профил осредњене брзине има превојну тачку, што је узрок нестабилности струјања и стварања тубуленције. Утицај вискоз- ности у том процесу је практично занемарљив, и он се може моделирати као невискозан Bayly et al. (1988). Такве врсте нестабилности генерално еволуирају у велике квази дво-димензијске вртлоге путем Келвин-Хелмолчевих таласа у мешајућим слојевима или пак путем Карманових вртлога у вртложном трагу. Како су ти вртлози дводимензијске структуре, а процес невискозан, саглас- но Хелмхолчевим теоремама, интензитет вртлога се у струјном пољу одржава, па се често дешава да они формирају и велике вртложне структуре³. Са дру- ге стране, истовремено те велике структуре се распадају (али се истовремено

³У случају дводимензијских струјања издуживање и скраћивање вртложних влакана нема утицаја на динамику вртложности, јер су векторска поља вртложности и брзине међусобно ортогонална. Анализа Хелмхолчеве једначине вртложности показује да се, у случају вискоз- ног флуида, вртложност понаша као „пасивни скалар“ тј. она не утиче на брзинско поље. У случају да је флуид невискозан, вртложна влакна не могу започети нити се завршити унутар посматраног флуида.

стварају и нове, енергијом главног тока) на мање вртлоге кроз процесе каскадног преноса енергије. Свакако, најважнија карактеристика слободних смицајних струјања је да су вртлози највећих дужинских размера истовремено и вртлози са највећом кинетичком енергијом, тако да се у овој класи структура струјања покорова Колмогоровљевом закону.

У случају струјања у присуству чврстих, непокретних и непропусних контура, са друге стране повећање нестабилности струјања и стварање турбуленције се не може моделирати невискозним процесом. Чињеница да је на чврстој контури брзина једнака нули, намеће физички услов да су вртлози који садрже највише енергије у њеној непосредној близини, јер је градијент осредњене брзине ту највећи. Димензије тих вртлога су у поређењу са вртлозима са највећом енергијом у случају слободних смицајних струјања веома мале, па у овом случају практично инерцијална подобласт не може да се развије.

У случају вихорног струјања у цеви вртлози носиоци енергије се не налазе у зони зида, већ у зони око језгра цеви.

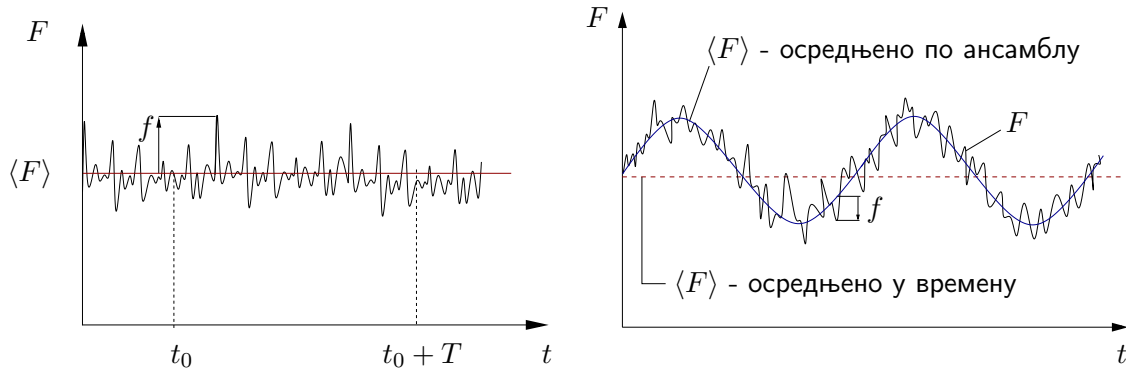
3.2 Рејнолдсова статистика и Рејнолдсове једначине

Применом Рејнолдсове статистике, свака физичка величина (у случају нестишљивог флуида, свака компонента брзине и притисак) се представља као збир осредњене или просечне вредности и флукуације те физичке величине, тј.

$$F = \langle F \rangle + f, \quad (3.3)$$

где је $\langle F \rangle$ осредњена вредност физичке величине, а f њена флукуација око те средње вредности. Осредњене вредности физичких величина се у Рејнолдсовој статистици дефинишу на два суштински различита начина, али је коначна форма осредњених Навије-Стоксових једначина идентична у оба случаја.

- **Временски осредњене вредности.** Временско осредњавање има смисла дефинисати у случају *статистички стационарне турбуленције*, код



Слика 3.4. Карактеристично временско осредњавање за статистички стационарну и осредњавање по ансамблу за статистички нестационарну турбуленцију.

које се статистички параметри не мењају у току времена. Типичан сигнал брзине у случају статистички стационарне турбуленције је приказан на слици 3.4. Временски осредњена вредност неке физичке величине се прецизно математички дефинише следећим изразом

$$\langle F(\underline{x}) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T F(\underline{x}, t) dt \right]. \quad (3.4)$$

Наравно, период осредњавања не може бити бесконачно велики у неким практичним прорачунима, или пак анализи експерименталних резултата, па се у том светлу временски осредњена вредност дефинише као

$$\langle F(\underline{x}) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(\underline{x}, t) dt. \quad (3.5)$$

При дефинисању временски осредњене вредности једначином (3.5), дужина интервала осредњавања игра кључну улогу. Његова вредност мора бити довољно велика да обухвата све амплитудно-фреквентне карактеристике случајне величине F , и такође да се за свако t_0 (слика 3.4) добије иста вредност $\langle F \rangle$. Оно што је важно напоменути је да се временским осредњавањем добијају физичке величине које зависе само од просторних координата, не и од времена. У случају када у струјном пољу постоје промене физичких величина у времену чије су временске размере много веће од временских размера турбуленције, као што је на пример периодично одвајање вртлога при опструјавању тела, временским осредњавањем би се

изгубиле информације о тим променама, те је стога у таквим проблемима неопходно користити осредњавање по ансамблу.

- **Осредњавање по ансамблу.** Овде се хипотетички посматра N екперимената који се изводе под идентичним условима. У сваком експерименту се мери величина F у одређеном временском интервалу. Вредност величине F осредњене по ансамблу се дефинише као

$$\langle F(\underline{x}, t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F^{(k)}(\underline{x}, t), \quad (3.6)$$

где је $F^{(k)}$ величина измерена у k -том експерименту. При оваквом осредњавању, за разлику од временског осредњавања, добијена осредњена вредност је такође функција времена. На слици 3.4 је приказана вредност величине F осредњене по ансамблу, за случај статистички нестационарне турбуленције, као и њена вредност осредњена у времену. У случају статистички стационарне турбуленције осредњавање по ансамблу и осредњавање по времену даје исти резултат.

Временским осредњавањем једначине континуитета и Навије-Стоксове једначине, (2.20), добијају се следеће једначине за стационарно струјање нестишљивог флуида

$$\nabla \cdot \langle \underline{U} \rangle = 0 \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot [\langle \underline{U} \rangle \otimes \langle \underline{U} \rangle] = -\nabla \langle P \rangle + \nabla \cdot [\nu \nabla \langle \underline{U} \rangle - \langle \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle], \quad (3.8)$$

док се у случају њиховог осредњавања по ансамблу добијају по својој форми идентичне једначине, уз додатак нестационарног члана у једначини количине кретања,

$$\nabla \cdot \langle \underline{U} \rangle = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \langle \underline{U} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot [\langle \underline{U} \rangle \otimes \langle \underline{U} \rangle] = -\nabla \langle P \rangle + \nabla \cdot [\nu \nabla \langle \underline{U} \rangle - \langle \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle]. \quad (3.10)$$

Величина $\underline{R} = \langle \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle$ који се у једначинама (3.8) и (3.10) представља *тензор турбулентних (Рејнолдсових) напона*, и он се јавља као последица осредњавања

нелинеарног конвективног члана. Тензор турбулентних напона је симетричан тензор другог реда, и он је одређен са својих шест компоненти - три нормална и три турбулентна смицајна напона. Суштински, турбулентни напони имају потпуно друго физичко тумачење у односу на вискозне напоне. За разлику од вискозних напона који су последица кретања молекула флуида, која се преко вискозности као физичког својства флуида манифестују на макро-нивоу, турбулентни напони представљају додатни флукс количине кретања изазван флукуацијама брзине, тј. кретањима флуида на макронивоу. Међутим, формално математички турбулентни напон се може груписати заједно са вискозним напонима, те се често у случају турбулентних струјања дефинише и укупни напон, дефинисан релацијом

$$\underline{\underline{T}} = \nu [\nabla \langle \underline{U} \rangle + (\nabla \langle \underline{U} \rangle)^T] - \langle \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle = 2\nu \langle \underline{\underline{S}} \rangle - \langle \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle,$$

где је $\langle \underline{\underline{S}} \rangle \equiv \frac{1}{2} [\nabla \langle \underline{U} \rangle + (\nabla \langle \underline{U} \rangle)^T]$ осредњени тензор брзине деформисања. Систем једначина (3.7)-(3.8), тј. (3.9)-(3.10) је у литератури познат као Рејнолдсове једначине или осредњене Навије-Стоксове једначине (RANS - Reynolds Averaged Navier Stokes). Главна карактеристика овог система једначина је да је он незатворен, јер се у односу на полазну Навије-Стоксову једначину јавља нова, непозната величина - тензор турбулентних напона. Дакле, на располагању је систем од четири скаларне једначине, док је број непознатих величина у њима десет - три компоненте осредњене брзине, осредњени притисак и шест компоненти тензора турбулентних напона. Допунске једначине биланса (преноса) турбулентних напона је могуће извести користећи једначине (3.10) и (2.20) и одговарајуће трансформације.⁴ Као резултат се добија следећа једначина:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial t} + \nabla \cdot [\langle \underline{U} \rangle \otimes \underline{\underline{R}}] &= - [\underline{\underline{R}} \cdot \nabla \underline{U} + (\underline{\underline{R}} \cdot \nabla \underline{U})^T] - 2\nu \langle (\nabla \underline{u})^T \cdot (\nabla \underline{u}) \rangle \\ &\quad - \nabla \cdot \langle \underline{u} \otimes \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle - \langle \underline{u} \otimes \nabla p + (\underline{u} \otimes \nabla p)^T \rangle \\ &\quad + \nu \nabla^2 \underline{\underline{R}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

⁴Прво се, одузимањем једначине (3.10) од једначине (2.20) налази једначина преноса за флукуационо векторско поље брзине. Затим се добијена једначина диадно множи са вектором \underline{u} , и потом сабира са својом транспонованом једначином. Коначно, над тако добијеном једначином се врши осредњавање по времену, тј. по ансамблу.

У једначини (3.11) су појављују нове непознате величине, па је систем једначина (3.9), (3.10), (3.11) такође незатворен. Даљим трансформацијама је могуће наћи транспортну једначину за корелацију трећег реда $\langle \underline{u} \otimes \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle$, али ће се у тој једначини појавити нове непознате величине (корелације четвртог реда).

Слична ситуација је већ сретана у оквиру Поглавља 2.1, где је за затварање система једначина (2.1)-(2.5) било неопходно дефинисати одговарајуће конститутивне релације. Међутим, у том случају су конститутивне релације биле директно повезане са физичким својствима флуида, док је турбуленција карактеристика струјања па је из тог разлога проналажење одговарајућих конститутивних релација које затварају једначине (3.10) или (3.11) знатно компликованије. Трагање тим конститутивним релацијама којима се Рејнолдсове једначине затварају је у литератури познато под именом *моделирање турбуленције*.

3.3 Турбулентни модели базирани на концепту турбулентне вискозности

Полазна хипотеза у већини стандардних турбулентних модела је Бусинескова хипотеза, која се базира на аналогiji са молекуларним преносом количине кретања, тако да се турбулентни напони повезују са осредњеним пољем деформације преко турбулентне вискозности ν_t , тј.

$$\underline{\underline{R}} = -2\nu_t \underline{\underline{S}} + \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{R}}) \underline{\underline{I}} = -2\nu_t \underline{\underline{S}} + \frac{2}{3} k \underline{\underline{I}}, \quad (3.12)$$

где је $k = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{R}})$ кинетичка енергија турбуленције. Члан $\frac{2}{3} k \underline{\underline{I}}$ је неопходно додати на десну страну једначине (3.12) јер је $\text{tr}(\underline{\underline{S}}) = \nabla \cdot \underline{\underline{U}} = 0$. Ако се Бусинескова хипотеза замени у једначину (3.10), добија се једначина

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \underline{\underline{U}} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot [\langle \underline{\underline{U}} \rangle \otimes \langle \underline{\underline{U}} \rangle] &= -\nabla \langle P \rangle + \nabla \cdot [(\nu + \nu_t) \nabla \langle \underline{\underline{U}} \rangle] - \frac{2}{3} \nabla k, \\ \frac{\partial \langle \underline{\underline{U}} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot [\langle \underline{\underline{U}} \rangle \otimes \langle \underline{\underline{U}} \rangle] &= -\nabla \underbrace{\left[\langle P \rangle + \frac{2}{3} k \right]}_{\hat{P}} + \nabla \cdot [(\nu + \nu_t) \nabla \langle \underline{\underline{U}} \rangle], \end{aligned} \quad (3.13)$$

чиме се проблем затварања Рејнолдсових једначина своди на одређивање једне скаларне величине - турбулентне вискозности ν_t . Сферни део тензора турбулентних напона се може груписати заједно са осредњеним притиском, и дефинисати модификовани притисак \tilde{P} . За одређивање турбулентне вискозности се користе додатне конститутивне релације, тј. одговарајући алгебарски изрази, или пак додатне диференцијалне једначине, из којих се директно или посредно одређује турбулентна вискозност. На основу начина одређивања турбулентне вискозности разликују се алгебарски, једно-једначински и дво-једначински модели турбуленције базирани на концепту турбулентне вискозности.

3.3.1 Алгебарски и једно-једначински модели

Историјски гледано, први модели или прве конститутивне релације које су предложене у циљу затварања Рејнолдсових једначина (3.10) су били алгебарски модели. Полазна претпоставка је да се турбулентна вискозност може изразити преко карактеристичних дужинских и временских размера турбуленције, као

$$\nu_t = \frac{l_0^2}{t_0} \quad (3.14)$$

где су l_0 и t_0 карактеристична дужинска, односно временска размера макровртлога. Те размере нису универзалне, а чак се и по правилу знатно мењају у простору и времену за дато струјање. У алгебарским моделима, величине l_0 и t_0 се одређују из алгебарских једначина, добијених емпиријски.

Први турбулентни модел се везује за Прантла, Prandtl (1925), и он се базира на аналогији са кинетичком теоријом гасова. Прантл је разматрао просто смицајно струјање чије осредњено поље има само једну пројекцију брзине (случај струјања у близини зида - струјања у граничном слоју), и предложио следећу релацију између турбулентне вискозности и градијента осредњене брзине

$$\nu_t = l_0^2 \left| \frac{dU}{dy} \right|. \quad (3.15)$$

Величина l_0 се назива Прантлова путања мешања, и она је одређена изразом

$$l_0 = \kappa y \quad (3.16)$$

где је y координата чији је координатни почетак на зиду и која је управна на њега, а κ је Карманова константа чија је уобичајена вредност $\kappa = 0.41$. Прантлов модел даје добре резултате у случају слободних смицајних струјања (млазеви, вртложни трагови), Wilcox (1994). Међутим, овај модел има и велике недостатак, јер у њему није садржан утицај преноса турбулентних величина у струјном пољу. Његова потпуно емпиријска подлога га чини неупотребљивим у случају струјања која нису смицајна. Варијације Прантловог модела, где су предложене другачије релације него (3.15), се могу наћи у Smith and Cebeci (1967) и Baldwin and Lomax (1978). Ови модели дају боље резултате за случајеве струјања у граничном слоју и каналу, Wilcox (1994), али имају исти недостатак као и оригинални Прантлов модел.

Једноједначински модели, уместо алгебарских релација за одређивање турбулентне вискозности, користе једначину преноса кинетичке енергије турбуленције за одређивање турбулентне вискозности. Једначина преноса кинетичке енергије турбуленције се једноставно одређује из једначине (3.11), њеном контракцијом, односно проналажењем трага сваког члана (тензора) у њој, јер је $k = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{R}})$. Та једначина, записана у индексној нотацији у Декартовом координатном систему, је облика

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = & - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \langle u_j u_i u_i \rangle + \langle p u_i \rangle \delta_{ij} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где је δ_{ij} Кронекеров делта симбол. Једначина (3.17) се може написати у компактној форми као

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = P_k - \varepsilon + D_k + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.18)$$

где су:

$$P_k \equiv - \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \underline{\underline{R}} : (\nabla \underline{U})^T \quad (3.19)$$

продукција кинетичке енергије турбуленције градијентима (деформационим радом) осредњеног тока,

$$\varepsilon \equiv \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \quad (3.20)$$

вискозна дисипација кинетичке енергије турбуленције,⁵

$$D_k = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \langle u_j u_i u_i \rangle + \langle p u_i \rangle \delta_{ij} \right) \quad (3.21)$$

турбулентна дифузија кинетичке енергије турбуленције флукуацијама брзине и флукуацијама притиска.

У једначини (3.17) се појављују непознати чланови, за које се морају дефинисати одговарајуће конститутивне релације. Тако се дифузиони члан D_k моделира, уз претпоставку о градијентној дифузији као

$$D_k = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), \quad (3.22)$$

где је ν_t турбулентна вискозност, а σ_k је константа, чија је вредност обично једнака јединици, али се променом њене вредности може мењати и вредност фиктивног коефицијента дифузије α_t , Davidson (2004).

Дисипација кинетичке енергије у јединици времена ε се такође мора моделирати. Користећи теоријске и феноменолошке анализе физике турбуленције,

⁵Прецизна дефиниција дисипације кинетичке енергије турбуленције је $\varepsilon = 2\nu \langle s_{ij} s_{ij} \rangle$ и она физички представља вредност кинетичке енергије турбуленције k која јединици времена прелази (дисипира) у унутрашњу енергију флуидног тока. Како је $s_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$, дисипација се може представити и у облику

$$\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle + \nu \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i \partial x_j} = \tilde{\varepsilon} + \nu \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_i \partial x_j},$$

где је $\tilde{\varepsilon}$ тзв. псеудодисипација. Међутим, како последњи члан износи свега пар процената од псеудодисипације, често се у литератури дисипација и псеудодисипација поистовећују, тј. $\varepsilon \approx \tilde{\varepsilon}$.

чије су основе представљене у потпоглављу 3.1, и димензијску анализу, зависност дисипација од кинетичке енергије турбуленције се представља као

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l_0}, \quad (3.23)$$

где је C_D константа која се одређује емпиријски. У ту сврху се користе резултати експеримената, који се упоређују са нумеричким резултатима. Оптимална вредност константе C_D се одређује из услова што бољег слагања резултата експеримената и нумеричких прорачуна. За струјања у близини зида оптимална вредност константе C_D је 0.08, Wilcox (1994).

Продукција P_k кинетичке енергије турбуленције (3.19) је на основу Бусинескове хипотезе (3.12) одређена изразом

$$P_k = \nu_t \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (3.24)$$

Заменом једначина (3.22)-(3.24) у једначину (3.17) добија се моделска једначина кинетичке турбуленције у случају једно-једначинских модела,

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} &= \nu_t \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - C_D \frac{k^{3/2}}{l_0} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Коначно, зависност турбулентне вискозности од кинетичке енергије турбуленције и карактеристичне дужинске размере макровртлога l_0 се добија поступком димензијске анализе. Та зависност је облика

$$\nu_t = \sqrt{k} l_0. \quad (3.26)$$

Уз задату вредност интегралне размере l_0 , која се обично одређује емпиријски, или у случају смицајних струјања преко једначине (3.16), Рејнолдсове једначине се затварају једначинама (3.25) и (3.26).

Поред једноједначинских модела базираних на једначини преноса кинетичке енергије турбуленције, модел базиран на једначини преноса турбулентне вискозности је представљен у Spalart and Allmaras (1992). Овај модел даје одлична

предвиђања турбулентних струјања око аеропрофила, и константе у том моделу су калибрисане управо за та струјања.

Генерално, једноједначински модели дају боље резултате у поређењу са алгебарским моделима, управо због чињенице да је у њима садржана једначина преноса величине која карактерише турбуленцију. То се посебно односи на случајеве комплекснијих струјања.

Међутим, и једноједначински модели поседују ограничења и недостатке. Свакако, главни недостатак је емпиријски начин одређивања интегралне размере l_0 . Величина l_0 зависи од локалних услова у струјном пољу, као што је на пример удаљеност од зида. То значи да је за њено што прецизније одређивање потребно знати „историју“ струјања, јер је у супротном готово немогуће знати расподелу l_0 у целом струјном пољу.

3.3.2 Двоједначински модели

Двоједначински модели представља надоградњу једноједначинских модела јер су у њима садржане једначине преноса и за временске и за интегралне или дужинске размере турбуленције. Већина модела из ове класе не садржи једначину која експлицитно описује пренос интегралне размере l_0 . Kolmogorov (1942) је први дефинисао једначину преноса за интегралну размеру преко фреквенције дисипације енергије, тј. преко величине \sqrt{k}/l_0 , али се у ту сврху, у већини двоједначинских модела користи дисипација ε у јединици времена.

Стандардни $k - \varepsilon$ модел

Овај модел користи једначину преноса дисипације кинетичке енергије за одређивање интегралне размере турбуленције. Временска размера турбуленције се одређује из једначине преноса кинетичке енергије турбуленције, (3.18). Модел су оригинално дефинисали Jones and Launder (1972), и он је додатно калибрисан у Launder and Sharma (1974) у коме је објављена његова данас позната „стандардна“ форма.

Егзактна једначина преноса дисипације кинетичке енергије се може исвести

полазећи од једначине преноса флукуационог векторског поља. Детаљно извођење те једначине је дато у Тоћић (2007), а овде се даје њена коначна форма,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = P_\varepsilon + D_\varepsilon - \Phi_\varepsilon + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (3.27)$$

где су:

$$\begin{aligned} P_\varepsilon = & -2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle - 2\nu \left\langle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \\ & - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

продукција дисипације кинетичке енергије турбуленције,

$$D_\varepsilon = -2\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left\langle \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left\langle u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \right) \quad (3.29)$$

дифузија дисипације кинетичке енергије турбуленције и

$$\Phi_\varepsilon = -2\nu^2 \left\langle \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle \quad (3.30)$$

деструкција дисипације кинетичке енергије турбуленције. Како сви чланови на десној страни једначине, осим молекуларне дифузије дисипације, представљају корелације вишег реда, они се морају моделирати.

Пре тога је потребно дефинисати израз којим се одређује турбулентна вискозност. Поступком димензијске анализе Jones and Launder (1972) су дошли до следећег израза

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (3.31)$$

где је C_μ константа која се одређује калибрисањем модела на основу што бољег слагања са експерименталним резултатима.

Дифузиони члан у једначини дисипације се моделира на сличан начин као дифузиони члан у једначини кинетичке енергије турбуленције,

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right), \quad (3.32)$$

где је σ_ε нова константа, уведена из сличних разлога као код моделирања дифузионог члана у једначини кинетичке енергије турбуленције.

Продукциони члан (3.37) дисипације се моделира увођењем претпоставке да је продукција дисипације пропорционална продукцији кинетичке енергије турбуленције, па је

$$P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k, \quad (3.33)$$

где је $C_{\varepsilon 1}$ емпиријска константа, а P_k продукција кинетичке енергије турбуленције, одређена једначином (3.19).

Моделирање члана (3.30) који представља деструкцију дисипације је засновано на аналогiji са дисипацијом (деструкцијом) кинетичке енергије, дефинисане једначином (3.20), односно (3.23). Тако се коришћењем поступка димензијске анализе добија следећа зависност

$$\Phi_\varepsilon = C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (3.34)$$

где је $C_{\varepsilon 2}$ нова емпиријска константа.

Заменом једначина (3.32)-(3.34), добија се моделски облик једначине дисипације,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} &= C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_T \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Моделски облик једначине кинетичке енергије турбуленције је идентичан једначини (3.25),

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = \nu_t \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right], \quad (3.36)$$

где је турбулентна вискозност ν_t одређена (3.31), док се одређивање дисипације ε користи једначина (3.35). Вредности коефицијената модела су дати у табели 3.1. Продукција кинетичке енергије и њена деструкција (дисипација) су тесно

Табела 3.1. Вредности константи у једначинама (3.31), (3.35), (3.36) стандардног $k-\varepsilon$ модела, Jones and Launder (1972).

Константа	C_μ	σ_k	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_ε
Вредност	0.09	1.0	1.44	1.92	1.3

повезане; дисипација је велика у оним деловима струјног поља у којима је велика и кинетичка енергија турбуленције. С друге стране, у моделској једначини за дисипацију се претпоставља да су продукциони и деструкциони члан пропорционални продукцијом и деструкцијом члану у једначини за k . Оваква форма обезбеђује да брзи пораст кинетичке енергије турбуленције буде праћен истим степеном пораста дисипације, и у обрнутом случају, довољно брзи степен смањења обезбеђује да се не добијају негативне вредности (физички немогуће) кинетичке енергије турбуленције.

Имплементација $k-\varepsilon$ модела је релативно једноставна - Рејнолдсове једначине су сада затворене и како у њима фигуришу осредњене вредности физичких величина оне имају егзактна и поновљива решења за задате почетне и граничне услове. Ефективна, односно турбулентна вискозност, која у њима фигурише се одређује из две допунске парцијалне диференцијалне једначине, (3.36) и (3.35). Како су временске размере турбуленције много мање од карактеристичних временских размера осредњеног струјања, у нумеричкој процедури једначине за k и ε се третирају одвојено од Рејнолдсових једначина. Наиме, прво се у одвојеном итеративном циклусу одређују вредности за k и ε , па се из дискретизованих једначина за притисак (која се базира на Пуасоновој парцијалној диференцијалној једначини) и дискретизованих Рејнолдсових једначина одређују вредности осредњених величина. Ако би се једначине третирале истовремено, било би веома тешко добити конвергентна решења - велики временски корак може довести до негативних вредности кинетичке енергије турбуленције или дисипације, и до нумеричке нестабилности.

У примени $k-\varepsilon$ (и осталих двоједначинских модела) постоји два приступа, која се разликују по томе како се третира струјање у близини чврсте контуре, односно зида. Наиме, да би формулација модела дата једначинама (3.36) и (3.35) била валидна и у близини зида, морају се користити зидне функције, које су формиране на основу експерименталних и теоријских изучавања струјања у близини зида. Разлог је вредност члана деструкције дисипације Φ_ε дефинисаног

једначином (3.34) на зиду. Наиме, како је на зиду $k = 0$, а ε има коначну вредност различиту од нуле, онда следи да Φ_ε тежи бесконачности, што је физички неоправдано. Коришћењем зидних функција тај проблем се решава тако што се вискозни подслој не прорачунава директно, већ се за расподелу физичких величина у њему претпостављају универзалне законитости. Наиме, експериментална истраживања, заједно са директним нумеричке симулацијама су показала да је у случајевима струјања у близини зида у области одређеној бездимензијским растојањем⁶ $y^+ \sim 30$ продукција кинетичке енергије турбуленције приближно једнака њеној дисипацији. Ако се са x_1 означи координата усмерена дуж зида, а са x_2 координата управна на њега, онда је

$$\varepsilon = P_k = - \langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x_2}. \quad (3.37)$$

Користећи релације

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 = -\rho \langle u_1 u_2 \rangle, \quad \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x_2} = \frac{u_\tau}{\kappa x_2},$$

које следе из дефиниције брзине трења u_τ , као и израза за универзални логаритамски профил брзине који важи у тој области, следи да је

$$\varepsilon = P_k = \frac{u_\tau^3}{\kappa x_2} \quad \rightarrow \quad u_\tau = (\kappa x_2 \varepsilon)^{1/3} \quad (3.38)$$

Примењујући даље Бусинескову хипотезу и израз за турбулентну вискозност

⁶Бездимензијско растојање од зида y^+ се дефинише релацијом

$$y^+ = \frac{u_\tau x_2}{\nu},$$

где је $u_\tau = \tau_w / \rho$ привидна брзина или брзина трења, x_2 нормално растојање од зида, а ν кинематичка вискозност флуида. Са τ_w је означен смицајни напон на зиду. Сходно Рејнолдсовој статистици, код турбулентног струјања, укупни смицајни напон се може приказати као збир турбулентног и вискозног смицајног напона. У непосредној близини зида, тј. у вискозном подслоју ($y^+ < 5$) вискозни смицајни напон је много већи од турбулентног; у прелазној области они истог реда величине; у следећој зони, зони турбулентног језгра ($y^+ > 30$) вискозни напони се могу занемарити у односу на турбулентне смицајне напоне, али опет претпоставити да су они приближно једнаки смицајном напону на зиду. Том анализом се долази до универзалног логаритамског профила брзине у турбулентном језгру,

$$\frac{\langle U \rangle}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$$

где су κ и B константе, чије су типичне вредности $\kappa = 0.41$ и $B = 5.2$.

(3.31), добија се следећа релација

$$-\langle u_1 u_2 \rangle = u_\tau^2 = \nu_t \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x_2} = \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon} \frac{u_\tau}{\kappa x_2} \Rightarrow \varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{\kappa x_2 u_\tau} \quad (3.39)$$

Коначно, из једначина (3.38) и (3.39) следи израз из кога се може одредити ε у овој области

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa x_2} \quad (3.40)$$

Применом зидних функција при решавању једначина (3.31), (3.35) и (3.36) као гранични услов за дисипацију на зиду се користи релација (3.40), док се за кинетичку енергију турбуленције користи Нојманов гранични услов, где је $\partial_n k = 0$. Да би овакав приступ дао што тачније резултате, неопходно је да нумеричка мрежа буде таква да за њену прву прорачунску тачку најближу зиду важи да је $y^+ \sim 30$. Током прорачуна вредности продукције и бездимензијског растојања у првој прорачунској тачки се могу такође одредити на основу релација (3.38) и (3.39), из којих следи

$$P_k = \nu_t \frac{C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\kappa x_2} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x_2}, \quad y^+ = \frac{C_\mu^{1/4} k^{1/2} x_2}{\nu} \quad (3.41)$$

Међутим, овакав приступ није погодно увек примењивати. Наиме, у случајевима када струјања у непосредној близини зида знатно утичу на расподеле осталих величина у струјном простору, као што су примери конвективне размене топлоте, затим спољашња струјања, струјања са сепарацијом, повратна струјања итд., употреба зидних функција даје лошије резултате. Да би се тај проблем пренебрегнуо, формиран су такозвани модели за мале вредности Рејнолдсовог броја⁷ (low-Re number models), који прорачунавају и струјања у вискозном подслоју, односно непосредно уз чврсту површ (зид). У тим моделима у моделским једначинама за k и ε појављују такозване пригушне функције и одговарајући допунски чланови, које се разликују од модела до модела, али оно што је њихова заједничка особина је да оне обезбеђује да у вискозном подслоју напони услед вискозности имају доминантнији утицај у односу на турбулентне

⁷Овде се мисли на вредности Рејнолдсовог броја базираног на карактеристикама турбуленције, $Re_t = k^2/(\varepsilon \nu)$ у непосредној близини зида.

напоне. Како ови модели прорачунавају и вискозни подслој, неопходно је да за прва прорачунска тачку важи да је $y^+ < 1$, па је у поређењу са формулацијом модела са зидним функцијама број прорачунских тачака много већи.

$k - \omega$ модел

У овом двоједначинском моделу, за одређивање интегралне размере турбуленције користи се транспортна једначина фреквенције дисипације, означене са ω . Она се дефинише као однос дисипације и кинетичке енергије у јединици времена. Модерна формулација модела је дата у Wilcox (1994), и она се базира на ранијим формулацијама датим у Kolmogorov (1942) и Saffman (1970). У тој формулацији турбулентна вискозност је представљена следећим односом

$$\nu_t = \frac{k}{\omega}, \quad (3.42)$$

док је транспортна једначина фреквенцију дисипације ω

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right], \quad (3.43)$$

где је P_K дефинисано једначином (3.24). Чланови на десној страни једначине (3.43) су продукција, дисипација и дифузија величине ω . Дифузиони члан је моделиран хипотезом о градијентној дифузији.

Једначина преноса кинетичке енергије турбуленције у овом моделу је модификована у односу на њен облик (3.36), у смислу одређивања дисипације кинетичке енергије турбуленције. У $k - \omega$ моделу дисипација се одређује као

$$\varepsilon = \beta^* \omega k, \quad (3.44)$$

па је једначина преноса кинетичке енергије облика

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]. \quad (3.45)$$

Вредности константи модела су дате у табели 3.2.

Предност $k-\omega$ у односу на стандардни $k-\varepsilon$ модел је у томе што су једначине

Табела 3.2. Вредности константи у k - ω моделу, Wilcox (1994).

Константа	α	β	β^*	σ_ω	σ_k
Вредност	0.5556	0.075	0.09	2	2

(3.43) и (3.45) интегралне у целом струјном пољу, односно и близини зида, као и на самом зиду. То значи да, за разлику од стандардног k - ε модела, коришћење зидних функција као граничног услова за k и ω у овом моделу није неопходно, тако да се он може користити и за прорачунавање вискозног подслоја.

k - ω SST модел

Menter (1994) је први дошао на идеју да изврши извесно спајање k - ε и k - ω модела у циљу тачнијег прорачуна одвајања струјања и струјања са позитивним градијентима притиска. У овом моделу се за прорачун области зида користи k - ω модел, док се за прорачун струјања изван области зида користи k - ε модел.

Спајање модела се врши на следећи начин. Оба модела су обухваћена са две једначине преноса. Прва је, наравно, једначина преноса за кинетичку енергију турбуленције, која је идентична једначини (3.45), с тим што константа σ_k има другу вредност. У једначини преноса фреквенције дисипације ω , у поређењу са једначином (3.43), појављују се додатни чланови. Они одговарају члановима у једначини дисипације (3.35). Дефинисањем функције F_1 која има вредност један у близини зида, а нула далеко од зида, тај додатни члан се множи са $(1 - F_1)$, тако да је он једнак нули у зони зида. Такође, свака константа у једначини за ω се дефинише као $C = F_1 C_1 + (1 - F_1) C_2$, где су C_1 и C_2 константе у које се односе на k - ω , односно k - ε модел.

Функција F_1 се дефинише на следећи начин

$$F_1 = \tanh(G_1^4), \quad G_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2}k}{(CD)_{k\omega}y^2} \right],$$

$$(CD)_{k\omega} = \max \left(2\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-20} \right)$$

Тако су једначине k - ω SST модела

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]. \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \omega}{\partial x_i} &= \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] \\ &= 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

За одређивање турбулентне вискозности у k - ω SST моделу користи се другачија релације него у случају стандардног k - ω модела, из разлога њеног другачијег третирања у зони зида у и зони далеко од зида. У ту сврху се дефинише нова функција F_2 , која је, такође као и функција F_1 блиска јединици у области зида, док далеко од њега тежи нули. Тако је генерална форма за одређивање турбулентне вискозности

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, \quad (3.48)$$

где су

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{2 \langle W_{ij} \rangle \langle W_{ij} \rangle}, \quad \text{где је} \quad \langle W_{ij} \rangle = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} - \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right)}, \\ G_2 &= \tanh(G_2^2), \quad F_2 = \max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right) \end{aligned}$$

и a_1 константа чија је вредност $a_1 = 0.31$. Величина y представља нормално растојање од зида. Вредности осталих константи су дате у Табели 3.3.

Табела 3.3. Константе C_1 и C_2 у k - ω SST моделу.

σ_{k1}	$\sigma_{\omega 1}$	β_1	β^*	γ_1
0,85	0,5	0,075	0,09	$\frac{\beta_1 - \sigma_{\omega 1} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}$
σ_{k2}	$\sigma_{\omega 2}$	β_2	β^*	γ_2
1,0	0,856	0,0828	0,09	$\frac{\beta_2 - \sigma_{\omega 2} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}$

3.3.3 Ограничења модела базираних на турбулентној вискозности у прорачуну вихорних струјања

Сви модели базирани на концепту турбулентне вискозности, па самим тим и двоједначински модели, имају одговарајуће недостатке, који у извесној мери

ограничавају њихову примену. Ти недостаци директно следе из полазне једначине (3.12) из које се може закључити следеће

- тензор турбулентних напона \underline{R} и осредњени тензор брзине деформисања су повезани скаларном, а не тензорском величином, што је у случају сложених струјања са израженом анизотропношћу турбуленције далеко од реалности.
- модели предвиђају изотропну расподелу нормалних турбулентних напона, $\langle u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle = \langle w^2 \rangle$, у случају осредњеног једнодимензијског смицајног струјања, $\langle \underline{U} \rangle = (\langle U \rangle, 0, 0)$, док експерименти и директне нумеричке симулације тих струјања показују значајну разлику тих напона, посебно у близини зида. У табели 3.4 су дати експериментални резултати за вредности нормалних напона у хомогеном смицајном струјању. Уочава се јасна разлика вредности нормалних напона
- Турбулентни напони су одређени само локалном деформацијом осредњеног поља, а не и са „историјом“ турбуленције. Та чињеница доводи до неприхватљивих резултата у оним струјањима у којима су присутне нагле деформације које у великој мери утичу на вртложне структуре, а самим тим и на вредности турбулентних напона.

Табела 3.4. Експерименталне вредности нормалних турбулентних напона у приближно хомогеном смицајном струјању, Tavoularis and Corssin (1981).

	$x/h = 7,5$	$x/h = 11,0$
$\langle u^2 \rangle / k$	1,04	1,07
$\langle v^2 \rangle / k$	0,37	0,37
$\langle w^2 \rangle / k$	0,58	0,56

Ови недостаци се у извесној мери могу отклонити модификацијом полазне Бусинескове хипотезе, тако да она обухвати анизотропност нормалних турбулентних напона. Концепт нелинеарне турбулентне вискозности, односно нелинеарне зависности тензора турбулентних напона од тензора осредњене брзине деформисања, је први пут предложен у Launder (1975). Полазећи од те иницијалне

идеје развијено је неколико нелинеарних модела, на пример Speziale (1987), Shih et al. (1993), у којима је претпостављена квадратна зависност између тензора анизотропије турбулентних напона и тензора осредњене брзине деформисања и вртложности, као и Craft et al. (1993) у коме је претпостављена кубна зависност. Speziale (1996) је показао да се код струјања у каналима различитих попречних пресека, секундарна струјања могу предвидети само анизотропним моделом, односно нелинеарним k - ε моделом, дефинисаним у Speziale (1987). Модели са концептом нелинерне вискозности се још и називају експлицитни алгебарски напонски модели (EARSМ), Davidson (2012).

Као што је закључено у већини истраживања, примена двоједначинских модела за прорачун вихорних струјања не даје задовољавајуће резултате, а у одређеним ситуацијама потпуно се погрешно предвиђаја физика струјања. У том светлу, неопходно је користити турбулентне моделе вишег реда, односно пуне напонске моделе у којима се решава диференцијална једначина преноса турбулентних напона (3.11), уз додатно моделирање појединих чланова.

3.4 Пуни напонски модели

У овом приступу моделирања полазна је једначина преноса тензора турбулентних напона (3.11), која се може написати и у следећем облику:

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial t} + \nabla \cdot [\langle \underline{U} \rangle \otimes \underline{\underline{R}}] = \underline{\underline{P}} - \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\Pi}} + \underline{\underline{D}} + \nu \nabla^2 \underline{\underline{R}} \quad (3.49)$$

где су:

$$\underline{\underline{P}} = - [\underline{\underline{R}} \cdot \nabla \underline{U} + (\underline{\underline{R}} \cdot \nabla \underline{U})^T] = - [\underline{\underline{R}} \cdot \nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \cdot \underline{\underline{R}}] \quad (3.50)$$

тензор продукције турбулентних напона градијентима у главном току,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = 2\nu \langle (\nabla \underline{u})^T \cdot (\nabla \underline{u}) \rangle \quad (3.51)$$

тензор вискозне дисипације турбулентних напона деформацијама изазваним флукуационим пољем брзине,

$$\underline{\underline{\Pi}} = \langle p [\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T] \rangle \quad (3.52)$$

тензор прерасподеле (редистрибуције) турбулентних напона заједничким дејством флукуација притиска и деформације изазване флукуацијама брзине,

$$\underline{\underline{D}} = -\nabla \cdot [\langle \underline{u} \otimes \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle] - [\nabla \otimes \langle p \underline{u} \rangle + (\nabla \otimes \langle p \underline{u} \rangle)^T] \quad (3.53)$$

дифузија турбулентних напона изазвана флукуационим пољима брзине и притиска.

Последњи члан на десној страни једначине (3.49) представља молекуларну дифузију тензора турбулентних напона.

Компоненте тензора дефинисаних једначинама (3.50)- (3.53) у Декартовим координатама, записане у индексној нотацији су

$$\underline{\underline{R}} \equiv R_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j = \langle u_i u_j \rangle \underline{e}_i \underline{e}_j, \quad (3.54)$$

$$\underline{\underline{P}} \equiv P_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j = - \left[\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] \underline{e}_i \underline{e}_j, \quad (3.55)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \equiv \varepsilon_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j = 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle \underline{e}_i \underline{e}_j, \quad (3.56)$$

$$\underline{\underline{\Pi}} \equiv \Pi_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j = \left\langle p \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle \underline{e}_i \underline{e}_j, \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} \equiv D_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j &= \left(\frac{\partial \langle u_i u_j u_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle p u_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle p u_i \rangle}{\partial x_j} \right) \underline{e}_i \underline{e}_j \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle u_i u_j u_k \rangle + \langle p u_j \rangle \delta_{ik} + \langle p u_i \rangle \delta_{jk}] \underline{e}_i \underline{e}_j. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Тензори $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ и $\underline{\underline{\Pi}}$ се морају моделирати у функцији тензора турбулентних напона и векторског поља осредњених брзина, да би једначина (3.49) била затворена.

Rotta (1951) је разматрајући проблем турбуленције без присуства градијента осредњеног поља, познатији као проблем „повратка турбуленције у изотропно

стање“, први предложио конститутивну релацију за моделирање редистрибутивног члана, на којој се сви остали модели тог члана у извесној мери базирају. Daly and Harlow (1970) и Hanjalic and Launder (1972) су главни акценат истраживања ставили на моделирање дифузионог члана. Hanjalic and Launder (1972) су користили пуни напонски модел за нумерички прорачун простих смицајних струјања, и добили резултате који су имачи веома добро слагање са експерименталним резултатима.

Модел презентован у Launder et al. (1975), назван Лаундер-Рис-Роди (LRR) модел, представља прекретницу, и „камен-темељац“ у моделирању турбуленције пуним напонским моделом. Истраживања представљена у том раду представљају велики искорак у моделирању редистрибутивног члана. Аутори су коефицијенте такозваног „брзог члана“ редистрибуције изразили у функцији тензора анизитропије турбулентних напона. Заједно са допунском релацијом која обухвата утицај близине зида, аутори су користили овај модел за нумеричку анализу струјања у цеви у случају осносиметричног сужења пресека.

Gibson and Launder (1978) су извршили одређена побољшања LRR модела, и то тако што су модификовали одговарајуће чланове тако да се обухвати ефекат рефлексије флукуација притиска од зида. Модел дефинисан у том раду је познат као Лаундер-Гибсонов(LG) напонски модел. Lumley (1978) је истакао потребу да се коефицијенти који стоје уз осредњени тензор брзине деформисања у редистрибутивном члану представе као нелинеарна функција анизотропности турбулентних напона. Такође, они су дефинисали одговарајући физички услови који морају бити испуњени при моделирању, а то су да кинетичка енергија турбуленције мора бити увек већа од нуле, затим Коши-Шварцова неједнакост⁸ за тензор турбулентних напона, итд. Ламли је дефинисао инваријантну формулацију реализабилности, независну од избора координатног система, и такође

⁸У случају тензора турбулентних напона, имајући у виду да они представљају корелације другог реда, за флукуације u_1 и u_2 две случајне величине U_1 и U_2 се може дефинисати коефицијент корелације ρ_{12} на следећи начин

$$\rho_{12} = \frac{\langle u_1 u_2 \rangle}{\sqrt{\langle u_1^2 \rangle} \sqrt{\langle u_2^2 \rangle}}.$$

Може се лако показати да за тако дефинисан коефицијент корелације важи Коши-Шварцова неједнакост

$$-1 \ll \rho_{12} \ll 1.$$

разматрајући инваријанте тензора анизотропије, дефинисао инваријантну мапу или Ламлијев троугао унутар кога се морају налазити сва физички могућа стања турбуленције. Више детаља о инваријатној теорији и Ламлијевом троуглу може се наћи у Додатку В.

Speziale et al. (1991) су предложили нову конститутивну релацију за моделирање тензора редистрибуције. Тај модел је у литератури познат као Speziale-Sarkar-Gatski (SSG) напонски модел. Разматрајући хомогену турбуленцију, и користећи инваријантне формулације, аутори су предложили релацију у којој је зависност „брзог члана“ редистрибуције од тензора анизотропије квадратна, што представља побољшање у односу на LRR и LG моделе, у којима се користи линеарна веза. Такође, захваљујући таквој формулацији, чланови којима се моделира утицај рефлекције флукуација притиска од зида присутни у LG моделу, овде нису потребни. Аутори су предложени SSG модел тестирали на случају ротирајућег смицајног струјања, и поредили добијене резултате за резултатима LRR модела. Истраживања су показала да SSG модел даје неупоредиво боље резултате од LRR модела.

У потпоглављима који следе дају се теоријске подлоге моделирања тензора дифузије, редистрибуције и дисипације. Главна разлика међу напонским моделима је у начину моделирања редистрибутивног члана. Док сви модели углавном користе исте или сличне релације за моделирање тензора дифузије и дисипације.

3.4.1 Моделирање тензора турбулентне дифузије

Турбулентна дифузија се, као што је већ речено у поглављу 3.4, састоји од дифузије турбулентних напона флукуацијама притиска и дифузије флукуацијама брзине, једначина (3.53), односно (3.58). Тензор дифузије се обично моделира преко уопштене хипотезе о градијентној дифузији, представљеној у Daly and Harlow (1970). На основу те хипотезе, компоненте тензора турбулентне дифузије су повезане са компонентама тензора турбулентног напона преко релације

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left[C_s \frac{\varepsilon}{k} \langle u_l u_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} \right], \quad (3.59)$$

где је C_s константа чија је типична вредност 0,22. Поред оваквог начина моделирања дифузионог члана, поједини аутори предлажу и одвојено моделирање два члана која чине турбулентну дифузију. Тако се за моделирање турбулентне дифузије флукуацијама брзине најчешће користе се модели Hanjalic and Launder (1972), у коме је

$$\langle u_i u_j u_k \rangle = -C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\langle u_i u_m \rangle \frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_m} + \langle u_j u_m \rangle \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_m} + \langle u_k u_m \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_m} \right), \quad (3.60)$$

и модел Mellor and Herring (1973) где је

$$\langle u_i u_j u_k \rangle = -\frac{2}{3} C_s \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \langle u_j u_k \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_m} \right). \quad (3.61)$$

У оба модела C_s је константа чија је вредност 0,11.

Моделирање члана турбулентне дифузије флукуацијама притиска је предложио Lumley (1978), на основу анализе приближно хомогене турбуленције. Тај модел се не може примењивати код нехомогене турбуленције, односно у близини чврстих контура, јер он има занемарљив утицај у тим областима. У новије време се на основу резултата директних нумеричких симулација предлажу модели за овај члан, међутим најчешће се за практичне прорачуне користи конститутивна релација (3.59).

3.4.2 Моделирање тензора дисипације

Тензор дисипације се обично моделира на основу хипотезе Колмогорова о изотропности на микроразмери турбуленције. Имајући у виду да се дисипација кинетичке енергије турбуленције одиграва управо на том нивоу, претпоставља се да је тензор дисипације изотропан, тј.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \quad (3.62)$$

Дисипација ε се одређује из моделске једначине, аналогне једначини (3.27), с тим што су сада турбулентни напони условно познати. Та чињеница омогућава да се продукција кинетичке енергије турбуленције и турбулентна вискозност

могу изразити преко турбулентних напона.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = & -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu \delta_{ij} + C_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \langle u_i u_j \rangle \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Први члан на десној страни једначине представља продукцију дисипације, други члан је деструкција дисипације, док последњи члан представља укупну дифузију дисипације (збир молекуларне и турбулентне дифузије).

Међутим, ова претпоставка да се ε_{ij} може представити преко свог изотропног дела није увек сасвим оправдана. Наиме, треба имати на уму да је она апсолутно тачна за велике вредности (локалног) Рејнолдсовог броја ($Re \rightarrow \infty$). Како у близини зида имамо мале вредности Рејнолдсовог броја, у тој зони тензор дисипације више није изотропан. Код струјања где је присутно закривљење струјница, дисипација такође није изотропна. Rotta (1951) је први предложио једноставан модел за ε_{ij} који би обухватио и анизотропност тензора дисипације у близини зида,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{k} \varepsilon. \quad (3.64)$$

Међутим, овај модел је прилично ограничен и не може се примењивати за све компоненте тензора дисипације јер за мале вредности нормалног растојања од зида предвиђа 2, односно 4 пута мање вредности за ε_{12} и ε_{22} , Pore (2006).

So et al. (1999) су показали да у случају хомогеног смицајног струјања анизотропност дисипације може бити и више од 50% већа од анизотропности турбулентних напона. Међутим, моделирање анизотропности дисипације у случају струјања са великим вредностима Рејнолдсових бројева је прилично компликовано, и зато се у већини модела се користи претпоставка да је тензор дисипације изотропан, док се анизотропност турбуленције на одговарајући начин обухвата моделирањем редистрибутивног члана (3.52).

3.4.3 Моделирање редистрибутивног члана

Редистрибуциони члан је, заједно са продукцијом и дисипацијом, доминантни члан у процесу успостављања баланса између турбулентних напона. Његово

моделирање је стога изузетно важно, и предмет је интензивног истраживања у претходним деценијама.

Полазна једначина у моделирању редистрибутивног члана је Пуасонова парцијална диференцијална једначина за поља флутуационог притиска. До те једначине се долази на следећи начин:

- прво се применом оператора набла његовим скаларним множењем са сваким чланом Навије-Стоксове једначине (2.20) добија Пуасонова једначина за поље тренутног притиска,

$$\nabla^2 P = -\nabla \cdot [\nabla \cdot (\underline{U} \otimes \underline{U})]; \quad (3.65)$$

- применом оператора набла његовим скаларним множењем са сваким чланом Рејнолдсове једначине (3.10) добија Пуасонова једначина за поље осредњеног притиска,

$$\nabla^2 \langle P \rangle = -\nabla \cdot [\nabla \cdot (\langle \underline{U} \rangle \otimes \langle \underline{U} \rangle) - \nabla \cdot (\nabla \cdot \langle \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle)]; \quad (3.66)$$

- одузимањем једначине (3.66) од једначине (3.65) добија се Пуасонова једначина за поље флукуационог притиска

$$\nabla^2 p = -\nabla \cdot [\nabla \cdot (\underline{u} \otimes \underline{u} - \langle \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle)] - 2\nabla \cdot [\nabla \cdot (\langle \underline{U} \rangle \otimes \underline{u})] \quad (3.67)$$

Решење једначина (3.67) се формално може добити применом Гринових функција, и тако добити вредност притиска у тачки одређеној вектором положаја \underline{x} ,

$$p(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\{\nabla \cdot [\nabla \cdot (\underline{u} \otimes \underline{u} - \langle \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle)]\}_{\underline{x}', t}}{|\underline{x}' - \underline{x}|} dV(\underline{x}') + \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{2\{\nabla \cdot [\nabla \cdot (\langle \underline{U} \rangle \otimes \underline{u})]\}_{\underline{x}', t}}{|\underline{x}' - \underline{x}|} dV(\underline{x}') \quad (3.68)$$

где је V неограничени просторни домен облика сфере ($R \rightarrow \infty$), а \underline{x} је вектор положаја тачке која се налази унутар домена V . Егзактна форма тензора редистрибуције (3.52) се добија множењем једначине (3.68) са двоструком вредношћу

флуктуационог тензора брзине деформисања дефинисаним у тачки одређеној вектором положаја \underline{x} , и осредњевањем тако добијеног производа. При томе се посматра коначни домен V , кога ограничава површ A . Резултат тих операција је следећи израз:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Pi}} &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left\langle \{ \nabla \cdot [\nabla \cdot (\underline{u} \otimes \underline{u})] \}_{\underline{x}', t} [\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T] \right\rangle \frac{dV(\underline{x}')}{|\underline{r}|} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \iiint_V \left\langle \{ \nabla \cdot [\nabla \cdot (\langle \underline{U} \rangle \otimes \underline{u})] \}_{\underline{x}', t} [\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T] \right\rangle \frac{dV(\underline{x}')}{|\underline{r}|} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_A \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n'} \left\langle p' [\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T] \right\rangle dA \\ &- \frac{1}{4\pi} \iint_A \left\langle p' [\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T] \right\rangle \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dA, \end{aligned} \quad (3.69)$$

где је $\underline{r} = \underline{x}' - \underline{x}$, док је n' правац нормале површи A којом је ограничен домен V . Посматрано формално математички, последња два, површинска интеграла у једначини (3.69) су повезана са граничним условима, од којих је један довољан да би расподела $\underline{\underline{\Pi}}$ унутар домена V била једнозначно одређена - или вредност $\underline{\underline{\Pi}}$ на површи (Дириклеов гранични услов) или вредност градијента $\underline{\underline{\Pi}}$ на површи (Фон Нојманов гранични услов).

У анализи једначине (3.69) са становишта моделирања турбуленције, сваки од њених појединачних чланова добија своје физичко тумачење. Тензор редистрибуције се при томе представља преко збира три тензора, од којих прва два одговарају запреминским интегралима, док последњи одговара површинским интегралима у једначини (3.69). Тако је

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\Pi}}_1 + \underline{\underline{\Pi}}_2 + \underline{\underline{\Pi}}_w \quad \Rightarrow \quad \Pi_{ij} = \Pi_{ij,1} + \Pi_{ij,2} + \Pi_{ij,w} \quad (3.70)$$

Физичко тумачење чланова се може наћи у Hanjalić and Jakirlić (2002) и Stevanović (2008). Тензором $\underline{\underline{\Pi}}_1$ је представљен физички процес повратка турбулентних напона у изотропно стање флуктуацијама притиска у случају када нема градијената осредњеног брзинског поља, и без утицаја чврстих граница. Овај члан је у литератури познат и као „спори члан“ редистрибуције (енг. slow term). Тензором $\underline{\underline{\Pi}}_2$ је представљен процес изотропизације турбулентних напона који настају градијентима брзине осредњеног тока, односно прерасподелом између турбулентних напона флуктуацијама притиска - он описује интеракцију између

турбулентног и осредњеног поља. Овај члан је у литератури под називом „брзи члан“ редистрибуције (енг. rapid term). Последњи члан, $\underline{\Pi}_w$, описује утицај чврсте контуре (зида) на структуру турбуленције у области зида. У непосредној близини зида нормални турбулентни напон у правцу управном на зид се пригушује, док се остала два нормална напона увећавају. Ти ефекти су повезани са пригушењем флукуација притиска у близини зида. Феномен рефлексije притиска од зида је такође присутан у овој зони. Утицај рефлексije притиска на турбулентне напоне је такав да он тежи да их доводе у изотропно стање, али је ефекат пригушења знатно израженији.

Моделирање спорог члана прерасподеле се углавном базира на проблему одумируће хомогене неизотропне турбуленције. При таквом струјању је брзи члан прерасподеле једнак нули, па је тада $\Pi_{ij} = \Pi_{ij,1}$. Први модел је дао Rotta (1951) полазећи од егзактне једначине за турбулентне напоне,

$$\frac{d \langle u_i u_j \rangle}{dt} = \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij}, \quad (3.71)$$

и кинетичку енергију турбуленције,

$$\frac{dk}{dt} = -\varepsilon \quad (3.72)$$

које важе за случај хомогене неизотропне турбуленције. Како $\underline{\Pi}$ нема утицаја на расподелу кинетичке енергије, Speziale (1996), његов утицај на расподелу енергије између нормалних напона је погодно проучити увођењем тензора анизотропности турбулентних напона, који се дефинише као девијаторски део тензора турбулентних напона,

$$\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{R}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{R}}) \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{R}} - \frac{2}{3} k \underline{\underline{I}} \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = \langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.73)$$

Тензор анизотропности се често представља у свом бездимензијском облику као

$$\underline{\underline{b}} = \frac{\underline{\underline{A}}}{\text{tr}(\underline{\underline{R}})} = \frac{\underline{\underline{R}}}{2k} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (3.74)$$

Уз претпоставку да је тензор дисипације изотропан, тј. $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{2}{3}\varepsilon \underline{\underline{I}}$, и имајући у виду једначину (3.74), из (3.71) и (3.72) може се добити следећа једначина:

$$\frac{db_{ij}}{dt} = \frac{\varepsilon}{k} \left(b_{ij} + \frac{\Pi_{ij}}{2\varepsilon} \right) \quad (3.75)$$

Rotta (1951) је претпоставио да турбуленција тежи смањењу степена анизотропности у процесу одумирања, и то је назвао тенденцијом повратка турбуленције у изотропно стање (енг. return to isotropy), па је за тензор редистрибуције у овом случају предложио зависност

$$\Pi_{ij} = -C_R \varepsilon b_{ij}, \quad (3.76)$$

где је C_R Ротина константа. Заменом једначине (3.76) у (3.75) добија се

$$\frac{db_{ij}}{dt} = -(C_R^* - 1) \frac{\varepsilon}{k} b_{ij} \quad (3.77)$$

Јасно је да вредност C_R^* мора бити већа од јединице, да би компонента b_{ij} експоненцијално опадала у времену. Вредност константе C_R се одређује калибрацијом модела, коришћењем експерименталних резултата.

Вредности константе C_R , као и изрази да моделирање $\Pi_{ij,2}$ и $\Pi_{ij,w}$ се разликују од модела до модела. У даљем току текста се даје преглед модела који су коришћени у оквиру ове дисертације.

LRR напонски модел

Моделирање спорог члана редистрибуције у овом напонском моделу је потпуно аналогно моделу предложеном у Rotta (1951), односно једначини (3.76),

$$\Pi_{ij,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right). \quad (3.78)$$

Израз за брзи члан редистрибуције се такође базира на раду Rotta (1951), где је претпостављена зависност

$$\phi_{ij,2} = \frac{\partial \langle U_l \rangle}{\partial x_m} (c_{ljmi} + c_{limj}). \quad (3.79)$$

Базирано на Ротиним кинематичким разматрањима везаним за компоненте тензора четвртог реда c_{limj} , у LRR моделу се претпоставља да се он може изразити линеарном зависношћу од турбулентних напона, Launder et al. (1975):

$$c_{ijmi} = \alpha \delta_{ij} \langle u_m u_i \rangle + \beta (\delta_{ml} \langle u_i u_j \rangle + \delta_{mj} \langle u_i u_l \rangle + \delta_{il} \langle u_m u_j \rangle + \delta_{ij} \langle u_m u_l \rangle) + C_2 \delta_{mi} \langle u_l u_j \rangle + [\eta \delta_{mi} \delta_{mj} + \nu (\delta_{ml} \delta_{ij} + \delta_{mj} \delta_{il})] k, \quad (3.80)$$

где су

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{11}(4C_2 + 10), & \beta &= -\frac{1}{11}(2 + 3C_2), \\ \eta &= -\frac{1}{55}(50C_2 + 4), & \nu &= \frac{1}{55}(20C_2 + 6). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Константа C_2 се одређује калибрацијом модела. Из једначина (3.79), (3.80) и (3.81) следи моделска једначина за брзи члан дистрибуције,

$$\begin{aligned} \Pi_{ij,2} &= -\frac{C_2 + 8}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) - \frac{30C_2 - 2}{55} k \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \frac{8C_2 - 2}{11} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right), \end{aligned} \quad (3.82)$$

где су: P_k продукција кинетичке енергије турбуленције, дефинисана једначином (3.19), P_{ij} је компонента тензора продукције турбулентних напона, дефинисана једначином (3.55), док је компонента D_{ij} дефинисана са

$$D_{ij} = - \left[\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_j} + \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial \langle U_k \rangle}{\partial x_i} \right]. \quad (3.83)$$

Формулација LRR модела у којој се користи једначина (3.82) за моделирање брзог члана редистрибуције је у литератури позната и као квази-изотропна формулација LRR модела (LRR-QI). У тој верзији модела вредности константи C_1 и C_2 су $C_1 = 1,5$ и $C_2 = 0,404$.

У формулацији LRR модела који се назива и изотропизација продукције (LRR-IP), или основни LRR модел користи се само први члан у изразу (3.82), док се остала два занемарују. Тако је у LRR-IP моделу

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij,1} + \Pi_{ij,2} = -C_1 \varepsilon a_{ij} - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right), \quad (3.84)$$

где су C_1 и C_2 константе. У оригиналном раду Launder (1975) предложено је моделирање турбулентне дифузије једначином (3.60), али је у каснијој верзији модела коришћена релација (3.59). Тензор дисипације је моделиран уз претпоставку о локалној изотропности, једначина (3.62), па је коначна форма једначине преноса турбулентних напона у случају LRR-IP модела

$$\frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + \langle U_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} = P_{ij} - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + C_1 \varepsilon a_{ij} - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left[\left(\nu \delta_{lk} + C_s \frac{\varepsilon}{k} \langle u_l u_k \rangle \right) \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} \right]. \quad (3.85)$$

Једначина за дисипацију ε је идентична једначини (3.63), тј.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \langle u_i u_j \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu \delta_{ij} + C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \langle u_i u_j \rangle \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]. \quad (3.86)$$

у којој су $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ и C_ε константе.

Табела 3.5. Вредности константи у једначинама (3.85) и (3.86) LRR-IP модела.

C_1	C_2	C_s	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	C_ε
1,8	0,6	0,22	1,44	1,92	0,15

Ефекат зида, односно моделирање тензора Π_w , се у оквиру LRR модела на разматра, тако да се он занемарује.

Проширење LRR модела у коме се обухвата утицај рефлексije притиска од зида је дато у Gibson and Launder (1978), и тај модел је у литератури познат као Лаундер-Гибсонов (LG) модел.

LG напонски модел

Утицај рефлексije притиска од зида се обухвата чланом

$$\begin{aligned} \Pi_{ij,w} = & C_{1,ref} \frac{\varepsilon}{k} \left[\langle u_k u_m \rangle n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \langle u_k u_i \rangle n_k n_j - \frac{3}{2} \langle u_k u_j \rangle n_k n_i \right] f \\ & + C_{2,ref} \left[\Pi_{ij,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Pi_{ij,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \Pi_{jk,2} n_k n_i \right] f \end{aligned} \quad (3.87)$$

где су:

- $C_{1,ref}$ и $C_{2,ref}$ константе чије су вредности $C_{1,ref} = 0,5$ и $C_{2,ref} = 0,3$,
- $\Pi_{ij,2}$ део редистрибутивног члана дефинисан једначином (3.84);
- n_i пројекција јединичног вектора нормале у i -том правцу и
- $f = C_\mu^{0,75} k^{1,5} / (\varepsilon \kappa y)$, где су C_μ и κ константе чије су вредности $C_\mu = 0,09$ и $\kappa = 0,41$, а y је нормално растојање од најближег зида.

Једначина дисипације је идентична једначини (3.86), док се у једначини преноса турбулентних напона (3.85) са десне стране појављује допунски члан дефинисан једначином (3.87).

Табела 3.6. Вредности константи у једначинама LG модела.

C_1	C_2	$C_{1,ref}$	$C_{2,ref}$	C_s	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	C_ε
1,8	0,6	0,5	0,3	0,22	1,44	1,92	0,15

SSG модел

Примењујући инваријантну теорију при разматрању општег решења Поасонове једначине (3.69), Speziale et al. (1991) су дошли до нелинеарне зависности компоненти тензора редистрибуције и тензора анизотропије турбулентних напона, дефинисане изразом

$$\begin{aligned}
 \Pi_{ij} = & -(C_1 \varepsilon + C_1^* P_k) b_{ij} + C_2 \varepsilon \left(b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} b_{kl} b_{kl} \right) \\
 & + \left(C_3 - C_3^* \sqrt{\Pi_b^*} \right) k \langle S_{ij} \rangle + C_4 k \left(b_{ik} \langle S_{jk} \rangle + b_{jk} \langle S_{jk} \rangle - \frac{2}{3} b_{kl} \langle S_{kl} \rangle \delta_{ij} \right) \\
 & + C_5 k (b_{ik} \langle W_{jk} \rangle + b_{jk} \langle W_{ik} \rangle), \tag{3.88}
 \end{aligned}$$

где су $\Pi_b^* = b_{ij} b_{ij}$ друга инваријанта тензора анизотропије турбулентног напона. У инваријантној анализи структуре турбуленције, о чему ће бити више речи у Глави 5, друга инваријанта тензора анизотропије дефинише као $\Pi_b = -\frac{1}{2} b_{ij} b_{ij}$. Величине

$$\langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad \text{и} \quad \langle W_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right)$$

представљају компоненте осредњеног тензора брзине деформисања и вртложности. Може се приметити да је поред саме нелинеарне, квадратне везе са тензором анизотропије турбулентних напона, у овој зависности присутна и интеракција између тензора анизотропије и осредњених тензора брзине деформисања и вртложности.

Константе SSG модела су дате у Табели 3.7

Табела 3.7. Вредности константи у стандардном SSG моделу.

C_1	C_1^*	C_2	C_3	C_3^*	C_4	C_5	C_s	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	C_ε
3,4	1,8	4,2	0,8	1,3	1,25	0,4	0,22	0,18	1,44	1,83

Из формулације редистрибутивног члана (3.88) у SSG моделу, може се директно добити LRR модел за вредности константи $C_1 = 3$, $C_1^* = C_2 = C_3^* = 0$ и $C_3 = 0,8$.

Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.

(Читајте Ојлера, читајте Ојлера, он је мајстор све-
га.)

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

4

Методологија прорачуна и њена примена у OpenFOAM-у

Приликом нумеричког решавања или нумеричких симулација неких физичких проблема, императив је да грешке које неизбежно настају као последица просторне и нумеричке дискретизације буду сведене на минимум. Са друге стране, методологија при томе такође треба бити и у довољној мери генерална, у циљу примењивања и на сложенијим случајевима. То се у проблематици струјања флуида посебно односи на примену у случајевима струјања у сложеним струјним просторима или геометријама.

У механици флуида постоји неколико генералних нумеричких метода, а то су: метода коначних разлика, метода коначних елемената, метода коначних запремина, спектралне методе, као и у новије време Латис-Болцманова (Lattice-Boltzmann) методе. Метода коначних разлика је релативно једноставна за примену, и као и спектралне методе, може бити веома велике тачности (четвртог реда или више). Међутим, нумеричка мрежа у овим методама мора бити специјалног типа - у случају методе коначних разлика, мрежа мора бити таква да ју је могуће, уз одговарајућу трансформацију координата, пресликати у ортогоналну мрежу у правоуглом Декартовом координатном систему; у случају спектралних метода сва три координатна правца (ако се ради о тродимензијском проблему) морају бити хомогена. Због тих особина, ове методе је практично немогуће користити у случају неких сложених струјних геометрија.

Метода коначних елемената не поставља никакве захтеве при генерисању мреже, а такође може бити веома велике тачности. Међутим, главни недостак ове методе што сама њена формулација не гарантује локално одржање масе, што је много значајније у механици флуида, него формална тачност. Јер, основни закон у механици флуида је закон о одржању масе, тј. основна једначина је једначина континуитета. Метода коначних запремина (енг. Finite Volume Method - FVM), која је најчешће у употреби као нумеричка метода у механици флуида, се показала као најбољи компромис између тачности и флексибилности. Њена полазна формулација гарантује да су сви закони одржања испуњени. Битно је још напоменути да се поступак решавања проблема струјања флуида применом методе коначних запремина подржава примену тзв. паралелних поступака који се базира на декомпозицији просторног домена и додељивању поддомена појединачним процесорима. Размена информација између процесора се одвија применом MPI (Message Passing Interface) протокола, Gropp et al. (1996).

У оквиру ове дисертације као нумеричка метода коришћена је метода коначних запремина, са следећим особинама:

- метода се базира на дискретизацији интегралних облика основних једначина чиме се обезбеђује да закони одржања важе и за дискретизоване једначине. Приликом решавања проблема струјања флуида применом методе коначних запремина врши се дискретизација просторно-временског домена у коме се одвија струјање, као и једначина које га описују.
- рачунска мрежа се дефинише као скуп контролних запремина (ћелија) које у потпуности прекривају прорачунски домен и могу бити произвољног полиедарског облика, дефинишући тако неструктурирану мрежу. Све зависне променљиве, тј. физичке величине користе исте ћелије и њихове вредности се одређују у прорачунским тачкама које одговарају тежиштим контролних запремина (ћелија). Овај приступ се назива *неизмештени распоред променљивих* (енг. *colocated arrangement*).
- нумеричко решавање полазног система једначина се базира на тзв. *одвојеном приступу* (енг. *segregated approach*). У овом приступу једначина за једну физичку величину се решава за сваку ћелију у рачунској мрежи, па се потом прелази на решавање једначине за следећу физичку величину. Ако између тих величина постоји нека физичка веза (конститутивна релација

или пак нека изведена једначина у току нумеричког поступка), релације које описују те везе се нумерички третирају на експлицитан начин.

Како је у великом броју случајева геометрија у којој се одвија струјање флуида сложена, најефикаснија прорачунска мрежа је она која прати границе те геометрије, и која је у општем случају неортогонална (енг. *boundary-fitted non-orthogonal grid*). Она може бити блок-структурирана, структурирана или неструктурирана. Предност такве мреже је вишеструка: она се може прилагодити свакој геометрији, и неупоредиво лакше је достићи оптималне карактеристике него у случају ортогоналне криволинијске мреже. Као прво генерисање такве мреже је једноставније. Такође, пошто прорачунска мрежа прати границе геометрије, дефинисање граничних услова је знатно лакше имплементирати. Одређени скуп линија (страна контролних запремина ако се ради о тродимензијском проблему) се може дефинисати тако да је он паралелан са струјницама, што повећава тачност, у зонама са великим градијентима резолуција мреже се може повећати.

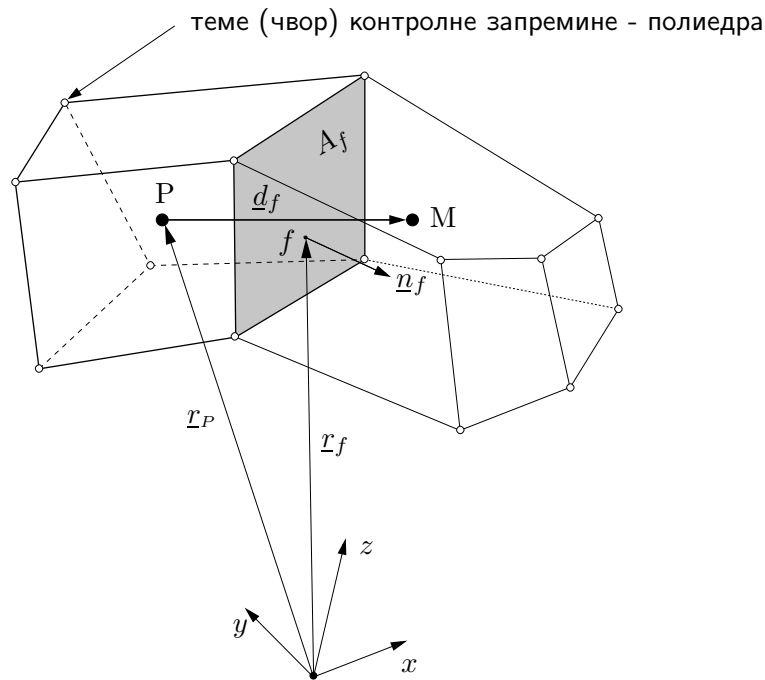
У оквиру свих истраживања у овој дисертацији коришћене су мреже које прате границе струјне геометрије, водећи рачуна да степен неортогоналности у њима буде што мањи. У следећим поглављима се даје опис методе коначних запремина у случајевима таквих мрежа. У првом делу се говори о важним параметрима прорачунске мреже, док је други део посвећен дискретизацији једначина преноса и анализи једначина које се при тим поступцима добијају.

Теоријска разматрања која се дају у оквиру ове главе се базирају се на много литературних извора из проблематике методе коначних запремина, од којих се овде наводе само неки: Jasak (1996), Ferziger and Perić (2002), Villiers (2006), Tuković (2005), Veersteg and Malalasekera (2007), Hirsh (2007).

4.1 Дискретизација просторног домена

Просторном дискретизацијом домен \mathcal{D} , у коме се одвија струјање (струјна геометрија) дефинише се као коначан скуп одговарајућих контролних запремина (ћелија) V_i које у потпуности испуњавају тај домен. Контролне запремине или ћелије у општем случају, имају конвексни, полиедарски облик, и ограничене су произвољним бројем равних полигоналних страна. Мрежа која се састоји од

ћелија дефинисаних на овај начин назива се неструктурираном мрежом. На слици 4.1 је приказана једна произволна ћелија, чије је тежиште означено са P , и једна од њених суседних ћелија, тежишта означеног са M . Са \underline{d}_f је означен вектор који спаја тежишта суседних ћелија, \underline{n}_f је јединични вектор нормале заједничке површи ове две ћелије, дефинисан за ћелију чији је центар P (вектор спољашње нормале). Тежиште заједничке површи је означено са f , а њена површина са A_f .



Слика 4.1. Две суседне ћелије у методи коначних запремина. Страна f „припада“ ћелији чије је тежиште P .

Вектор положаја тежишта \underline{r}_P произвољне контролне запремине се математички прецизно дефинише изразом

$$\iiint_{V_P} (\underline{r} - \underline{r}_P) dV = \underline{0}, \quad (4.1)$$

где је V_P запремина ћелије. Слична релација важи и за тежишта равних површи A_f која ограничавају запремину V_P :

$$\iint_{A_f} (\underline{r} - \underline{r}_f) dA = \underline{0}, \quad (4.2)$$

где је \underline{r}_f је вектор положаја тежишта површи. Главни проблем при одређивању геометријских карактеристика рачунске мреже дефинисане интегралима (4.1) и (4.2), лежи у томе да је мрежа неструктурирана, односно у чињеници да контролне запремине (полиедри) и површи које их ограничавају (стране тих полиедара), могу бити потпуно произвољног облика.

Тако се све површи растављају на одговарајући број троуглова, обично помоћу централног темена или централног чвора површи. Вектор положаја централног темена је једнак аритметичкој средини вектора положаја темена који граде ту површ. Троуглове чине два суседна темена површи и централни чвор, тако да ће број троуглова бити једнак броју страница, односно броју темена који чине ту површ. Тада се геометријска својства полигоналних страна полиедарске контролне запремине (ћелије) одређују на следећи начин, Tuković (2005):

- Површина стране се рачуна као сума површи троуглова

$$A_f = \sum_{k=1}^n A_k, \quad (4.3)$$

где је n број троуглова који образују страну.

- Вектор положаја тежишта \underline{r}_f стране се одређује осредњавањем вектора положаја тежишта труглова који чине ту страну:

$$\underline{r}_f = \frac{1}{A_f} \sum_{k=1}^n A_k \underline{r}_k \quad (4.4)$$

- Јединични вектор нормале површи се рачуна као нормализована сума нормала троуглова који чине ту страну

$$\underline{n}_f = \frac{\underline{N}}{|\underline{N}|}, \quad \text{где је } \underline{N} = \sum_{k=1}^n \underline{n}_k \quad (4.5)$$

Геометријска својства контролне запремине рачунају на основу тетраедара који је сачињавају. Они се конструишу на основу темена троуглова који чине појединачне стране, и централног чвора контролне запремине, дефинисаног као аритметичка средина вектора положаја њених темена. Укупна запремина ћелије

је при томе једнака збиру запремина тетраедара, док се њено тежиште одређује као средња вредност тежишта тетраедара који је чине,

$$\underline{r}_P = \frac{1}{V_p} \sum_{i=1}^m V_i \underline{r}_i. \quad (4.6)$$

Са m је означен број тетраедара који чине контролну запремину, тј. ћелију, V_i је вредност запремине, а \underline{r}_i вектор положаја i -тог тетраедра.

За описивање рачунске мреже у OpenFOAM-у користи се адресирање по странама ћелија. Адресирање по странама ћелија се састоји из следећих елемената:

- *Листа темена* у којој је свако теме дефинисано просторном координатом, а ознака темена одговара индексу у листи, умањеном за један¹ - теме које је прво у листи, има индекс нула.
- *Листа полигоналних страна*, у којој је свака страна дефинисана својим припадајућим чворовима. Ознака стране одговара индексу у листи. Стране се могу поделити на унутрашње, које се налазе између две ћелије и граничне, које се налазе на границама просторног домена.
- *Листа граничних зона* које се дефинишу листом ознака припадајућих граничних страна, које су груписане сходно дефинисаним граничним условима.
- *Листа ћелија*, која се дефинише са две листе; прва има онолико чланова као и листа полигоналних страна, и у њој се наводи припадност стране из листе полигоналних страна одговарајућој ћелији (датотека `owner` у OpenFOAM-у); друга листа има онолико елемената колико има унутрашњих страна, и у њој се наводе суседне ћелије које такође садрже страну из претходне листе (датотека `neighbour` у OpenFOAM-у) .

Овде је веома важно напоменути и следеће: поредак страна у листи полигоналних страна се једнозначно дефинише, на следећи начин. Листа страна прво садржи унутрашње странице, па онда граничне стране, сортиране по зонама,

¹Како је OpenFOAM развијан у C++, први члан неког низа има индекс 0, тј. „бројање почиње од нуле.“

сходно томе како су те граничне зоне дефинисане у листи граничних зона. При томе се унутрашње стране у листи полигоналних страна попуњавају тако што се креће од прве ћелије коју оне сачињавају, а затим следе стране које поседује друга ћелија, итд.

Горе набројане листе страна, граничних зона и ћелија чине топологију мреже, а када се њима додају и просторне координате темена, односно листа темена добија, се геометријски облик мреже.

Да би мрежа била тополошки добро дефинисана, она мора да задовољи следеће критеријуме, Tuković (2005):

- при дефинисању површи не може се два пута појавити исто теме,
- унутрашњу страну могу делити само две ћелије,
- гранична страна може припадати само једној ћелији и једној граничној зони,
- растављањем свих страна једне ћелије у њене странице, свака страница се сме појавити у само две стране посматране ћелије, и
- растављањем свих граничних страна у њихове странице, свака страница се сме појавити у само две граничне стране.

Прва три критеријума се односе на ваљаност дефиниције мреже, док се последња два односе на проверу да ли су ћелије и гранична површ, која ограничава прорачунски домен, затворени.

Поред тополошких критеријума, рачунска мрежа мора да задовољи геометријске критеријуме ваљаности. То су:

- Све ћелије морају бити конвексне.²
- Све ћелије морају бити геометријски затворене, тј. збир вектора нормала свих површи које ограничавају контролну запремину мора бити једнак нули.

²Строга математичка дефиниција конвексности n -димензионалног геометријског објекта (тела) гласи да свака дуж која спаја две тачке које су налазе унутар објекта такође мора налазити унутар граница тог објекта. У методи коначних запремина та дефиниција се примењује у својој „слабијој“ форми, која услов конвексности своди на услов да тежишта објеката морају бити унутар њихових граница.

- Граница домена мора бити геометријски затворена
- За све унутрашње стране (површи) скаларни производ вектора нормале \underline{n}_f и вектора $\underline{d} = \overrightarrow{PM}$ (слика 4.1) мора бити позитиван:

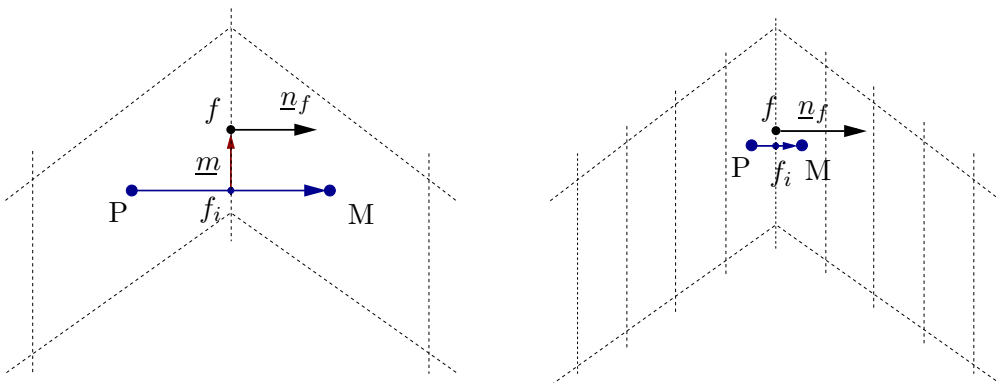
$$\underline{d}_f \cdot \underline{n}_f > 0. \quad (4.7)$$

Ово је такозвани тест ортогоналности контролне запремине, тј. ћелије. Ортогоналност страна или површи које ограничавају контролну запремину се обично изражава помоћу угла неортогоналности, дефинисаним следећим изразом:

$$\alpha_f = \arccos \left(\frac{\underline{d}_f \cdot \underline{n}_f}{|\underline{d}_f|} \right) \quad (4.8)$$

Пожељно је да овај угао буде што мањи, и у случају идеалне ортогоналности $\alpha_f = 0^\circ$. За рачунске мреже у случају струјања у сложеним геометријама, услов идеалне ортогоналности је немогуће задовољити, па се стога у тим случајевима врше одређене корекције приликом рачунања дифузијског члана. О томе ће бити више речи у поглављима која следе.

- Асиметрија мреже на њеним површима треба бити што је могуће мања, тј. треба тежити да вектор \underline{m} буде једнак нули, односно да се тачке f_i и f поклапају, слика 4.2(a). То се једноставно може постићи повећањем броја ћелија у областима где је могућа асиметрија мреже, 4.2(b).



Слика 4.2. Асиметрија мреже на површима контролних запремина и начин њеног смањења.

Приликом генерисања прорачунске мреже треба тежити да степен неортогоналности и асиметрија мреже буду што мањи, како би њихов утицај на тачност нумеричког решења био у унапред прописаној толеранцији. Тако су се у методи коначних запремина за случај неортогоналних мрежа методе дискретизације другог реда тачности показале као најбољи компромис између једноставности, генерализације и тачности, Ferziger and Perić (2002). Те методе дискретизације карактеристичних чланова у једначинама преноса су описане у следећем поглављу.

4.2 Дискретизација једначина преноса

Диференцијална једначина преноса неке скаларне величине ϕ може бити написана у облику

$$\underbrace{\partial_t(\rho\phi)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{U})}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\nabla \cdot (\rho\Gamma_\phi\nabla\phi)}_{\textcircled{3}} = \underbrace{S_\phi}_{\textcircled{4}} \quad (4.9)$$

- $\textcircled{1}$ - Промена величине ϕ у времену, $\textcircled{2}$ - Конвективни члан,
 $\textcircled{3}$ - Дифузиони члан, $\textcircled{4}$ - Изворски члан

Једначина (4.9) је парцијална диференцијална једначина другог реда. Да би дискретизација диференцијалне једначине била задовољавајуће тачности, неопходно је да ред тачности дискретизације буде једнак или већи реду диференцијалне једначине. Зато су све дискретизационе схеме коришћене у овом раду другог реда тачности, и у времену и у простору.

Тачност дискретизације једначине (4.9) зависи од претпостављене просторно-временске зависности $\phi = \phi(\underline{r}, t)$ у околини тачке P (унутар контролне запремине). За методу другог реда тачности, довољно је претпоставити линеарну расподелу ϕ унутар контролне запремине, као и да је промена величине ϕ између два временска тренутка линеарна. Тако је произвољном временском тренутку t у произвољној контролној запремини

$$\phi(\underline{r}) = \phi_P + (\underline{r} - \underline{r}_P) \cdot (\nabla\phi)_P, \quad (4.10)$$

а у тренутку времена $t + \Delta t$ та расподела је дефинисана са

$$\phi(t + \Delta t) = \phi^{(t)} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_t \Delta t. \quad (4.11)$$

Са $\phi_P = \phi(\underline{r}_P)$ је означена вредност промењиве ϕ у прорачунској тачки P, а $\phi^{(t)}$ вредност промењиве у временском тренутку t , тј. $\phi^{(t)} = \phi(\underline{r})$.

Једначине (4.10) и (4.11), као и њихове тачности, директно следе развоја функције у Тајлоров реда функције $\phi(\underline{r}, t)$ у околини тачке P. Тако је у производном тренутку времена t Тејлоров ред функције ϕ у околини тачке P

$$\begin{aligned} \phi(\underline{r}) &= \phi_P + (\underline{r} - \underline{r}_P) \cdot (\nabla \phi)_P + \frac{1}{2} (\underline{r} - \underline{r}_P)^{\otimes 2} : (\nabla \nabla \phi)_P \\ &+ \frac{1}{3!} (\underline{r} - \underline{r}_P)^{\otimes 3} : (\nabla \nabla \nabla \phi)_P + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} (\underline{r} - \underline{r}_P)^{\otimes n} \underbrace{\underbrace{\dots}_{n}}_{n} (\nabla \nabla \dots \nabla \phi)_P. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Израз $(\underline{r} - \underline{r}_P)^{\otimes n}$ у једначини (4.12) представља n тензорских производа вектора $\underline{r} - \underline{r}_P$, тј. њиме је представљен тензор n -тог реда:

$$(\underline{r} - \underline{r}_P)^{\otimes n} = (\underline{r} - \underline{r}_P) \otimes (\underline{r} - \underline{r}_P) \otimes \dots \otimes (\underline{r} - \underline{r}_P) \equiv (\underline{r} - \underline{r}_P)(\underline{r} - \underline{r}_P) \dots (\underline{r} - \underline{r}_P)$$

док је са „ $\underbrace{\dots}_n$ “ означен унутрашњи производ n -тог реда два тензора n -тог реда, што као резултат даје скалар.

Упоређивањем једначина (4.10) и (4.12), види се да се занемаривањем чланова вишег реда чини грешка која је реда величине $|(\underline{r} - \underline{r}_P)^2|$, односна та грешка се може записати и као $\Delta x_i \Delta x_j$, где i и j означавају правце оса изабраног координатног система, а Δx_i и Δx_j карактеристичне димензије контролне запремине у тим правцима. У случају једномензијских проблема, контролна запремина се своди на једну дуж, чија је дужина Δx , а ред величине грешке се своди на $(\Delta x)^2$. Аналогна анализа је и у случају израза (4.11), у коме је грешка реда величине $(\Delta t)^2$, па је реч о временској дискретизацији другог реда тачности.

Метода коначних запремина се базира на томе да једначина (4.9) мора бити задовољена за контролну запремину (ћелију) формирану око прорачунске тачке

P , па се интеграцијом једначине (4.9) по контролној запремини V_P добија

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_P} \rho\phi \, dV + \iiint_{V_P} \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{U}) \, dV - \iiint_{V_P} \nabla \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi) \, dV \right] dt \\ = - \int_t^{t+\Delta t} \left(\iiint_{V_P} S_\phi \, dV \right) dt \end{aligned} \quad (4.13)$$

Сада ће бити објашњена дискретизација свих појединачних чланова у једначини (4.13).

4.2.1 Дискретизација просторних интеграла

Уз претпоставку о линеарној расподели³ величине ϕ унутар контролне запремине, јдн. (4.10), као и дефиницији вектора положаја њеног тежишта, јдн. (4.1), добија се следећи израз за израчунавање запреминског интеграла:

$$\iiint_{V_P} \phi(\mathbf{r}) \, dV = \phi_P \iiint_{V_P} dV + (\nabla\phi)_P \cdot \left[\iiint_{V_P} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \, dV \right] = \phi_P V_P. \quad (4.14)$$

Пре поступка дискретизације конвективног и дифузионог члана, обавља се њихова трансформација у површинске интеграле теоремом Гаус-Остроградског, свдећи на тај начин одређивање просторних извода унутар контролне запремине на рачунање одговарујућих флуксева на контролној површи. Тако, на основу теореме Гаус-Остроградског важе следеће релације

$$\begin{aligned} \iiint_{V_P} \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{U}) \, dV &= \oiint_{A_P} \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\mathbf{U}) \, dA \quad \text{и} \\ \iiint_{V_P} \nabla \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi) \, dV &= \oiint_{A_P} \mathbf{n} \cdot (\rho\Gamma_\phi \nabla\phi) \, dA. \end{aligned}$$

³Потпуно оправдано се може поставити питање зашто баш линеарна расподела? Као прво, теорија линеарних система и линеарна алгебра је веома развијена математичка област, примењива у многим областима физике и технике, док са друге стране теорија нелинеарних система још увек није ни приближно развијена као теорија линеарних система. И друга чињеница, која потпуно оправдава употребу једначина (4.10) и (4.11): зависно од угла посматрања, тј. изабране просторно-временске размере произвољна нелинеарна функција $\phi(\mathbf{r}, t)$ се, са мањом или већом тачношћу, може представити као збир више линеарних функција. Што је та просторно-временска размера мања, та тачност је све већа. У неком малом просторном домену (запремине V_P), и у неком малом временском интервалу Δt може се са великом тачношћу промена функције ϕ апроксимирати као линеарна. Што је та просторно-временска размера мања, односно што је више ћелија унутар контролне запремине, то је апроксимативна функција ближа реалној.

И конвективни и дифузиони члан се могу свести на општи израз

$$\oint_{A_P} \underline{n} \cdot \underline{a} \, dA = \sum_f \iint_{A_f} \underline{n} \cdot \underline{a} \, dA, \quad (4.15)$$

где је $\underline{a} = \rho\phi\underline{U}$ у случају конвективног, а $\underline{a} = \rho\Gamma_\phi\nabla\phi$ код дифузионог члана. Развојем векторског поља \underline{a} у Тејлоров ред у околини тачке f (тежиште површи) и занемаривањем чланова вишег реда, следи да се вектор \underline{a} у произвољној тачки површи може релацијом другог реда тачности апроксимирати преко вектора \underline{a}_f у тежишту те површи као

$$\underline{a} = \underline{a}_f + (\nabla\underline{a})_f \cdot (\underline{r} - \underline{r}_f). \quad (4.16)$$

Овде је $(\nabla\underline{a})_f$ градијент вектора \underline{a} у тежишту површи (тензор другог реда чија је компонента $\partial_i a_j$). Заменом релације (4.16) у једначину (4.15), и имајући у виду релацију (4.2), као и чињеницу да је површ A_f равна, тако да је јединични вектор нормале константан на њој, добија се

$$\begin{aligned} \iint_{A_f} \underline{n} \cdot \underline{a} \, dA &= \iint_{A_f} \underline{n} \cdot [\underline{a}_f + (\nabla\underline{a})_f \cdot (\underline{r} - \underline{r}_f)] \, dA \\ &= \iint_{A_f} \underline{n} \cdot \underline{a}_f \, dA + \iint_{A_f} \underline{n} \cdot (\nabla\underline{a})_f \cdot (\underline{r} - \underline{r}_f) \, dA \\ &= \sum_f \underline{n}_f \cdot \underline{a}_f A_f + (\nabla\underline{a})_f : \left[\underline{n} \otimes \iint_{A_f} (\underline{r} - \underline{r}_f) \, dA \right] \\ &= \sum_f \underline{n}_f \cdot \underline{a}_f A_f \end{aligned} \quad (4.17)$$

Израчунавање суме по површима које ограничавају контролну запремину, односно израза $\sum_f \underline{n}_f \cdot \underline{a}_f A_f$ се одређује на основу правила којима је нумеричка мрежа дефинисана. Као што је претходно речено, површи које ограничавају контролну запремину могу припадати тој ћелији и бити у листи „owner“ или пак припадати суседној ћелији и бити у листи „neighbour“. У првом случају, ради се о вектору спољашње нормале, док је у другом случају вектор нормале усмерен ка унутрашњости ћелије, јер та површ припада суседној ћелији. Тако се сума по површима раздваја на суму по површима које припадају ћелији у

суми по површима које припадају суседним ћелијама, тј.

$$\sum_f \underline{n}_f \cdot \underline{a}_f A_f = \sum_{\text{owner}} \underline{n}_f \cdot \underline{a}_f A_f - \sum_{\text{neighbour}} \underline{n}_f \cdot \underline{a}_f A_f \quad (4.18)$$

Ово правило важи за свако сумирање по површима које ограничавају контролну запремину (ћелију) и подразумева да се свака таква сума раставља на основу једначине (4.18).

Конвективни члан. Схеме дискретизације конвективног члана.

Дискретизација конвективног члана се врши на основу једначина (4.16) и (4.17):

$$\oint_{A_P} \underline{n} \cdot \rho \underline{U} \phi \, dA = \sum_f \underline{n}_f \cdot (\rho \underline{U})_f \phi_f A_f = \sum_f (\rho u_n A)_f \phi_f = \sum_f \dot{m}_f \phi_f, \quad (4.19)$$

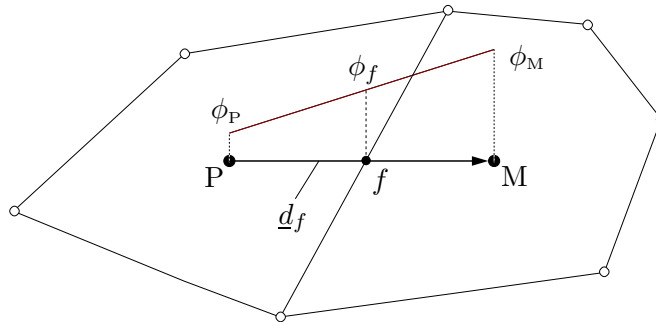
где је u_n пројекција вектора \underline{U} на правац нормале \underline{n}_f , а \dot{m}_f је масени проток кроз страну f контролне запремине (ћелије). У складу са дефиницијом мреже која се базира на адресирању страна контролних запремина, тј. ћелија, вредности величине ϕ_f на површима (странама) f контролне запремине се рачунају на основу вредности у тежиштима ћелија које деле ту површ, применом одговарајуће схеме дискретизације, која се уопштено може изразити као

$$\phi_f = \phi_f(\phi_P, \phi_M), \quad (4.20)$$

где су ϕ_P и ϕ_M вредности величине ϕ у тежиштима ћелија за које је страна f заједничка. Овде је битно напоменути да је код произвољних неструктурираних мрежа практично веома компликовано користити информације о вредностима у неким другим ћелијама за одређивање ϕ_f , осим у оним за које је страна f заједничка. У том случају је потребно чувати јако пуно информација у меморији рачунара, а и диферендне схеме вишег реда за неструктурирану мрежу су још увек јако нестабилне.

Пре описа одговарајућих диференцијских схема за конвективни члан, врло је битно нагласити и следеће. Независно од расподеле брзинског поља у домену у

коме се проучава струјање, конвективни члан не може довести до промене величине ϕ ван њених граница у којима је она била у почетном тренутку. Другим речима, ако је у почетном тренутку величина ϕ била у границама 0-100, конвективни члан никада неће генерисати вредности ϕ веће од 100 или мање од 0 у струјном домену. Ово је веома важно својство ограничености код конвективног члана, и о том својству се посебно мора водити рачуна код избора диференцијалних схема које се користе за његово израчунавање.



Слика 4.3. Централна схема дискретизације.

При централној схеми дискретизације претпоставља се линеарна веза величине ϕ између тачака P и M , тако да се вредност на страни f добија линеарном интерполацијом:

$$\phi_f = f_x \phi_P + (1 - f_x) \phi_M, \quad f_x = \frac{fM}{PM} \quad (4.21)$$

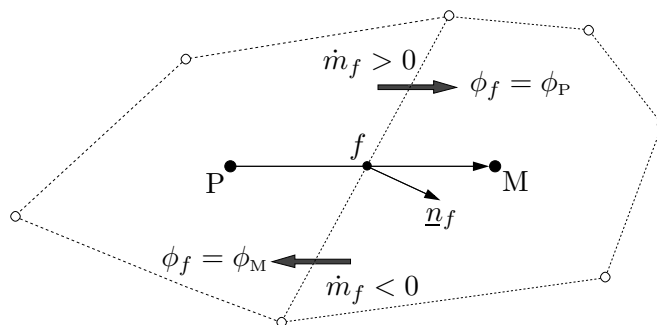
где је f_x фактор интерполације, слика 4.3. Централна схема дискретизације је другог реда тачности, али њен главни недостатак је што у случају проблема у којима је конвекција доминантна, може доћи до нефизикалних осцилација решења, Hirsh (2007), Ferziger and Perić (2002), Veerstedt and Malalasekera (2007). Као последица тих осцилација у току нумеричке процедуре може доћи до појаве да вредности физичких величина могу имати вредности које нису у оквиру физички прихватљивих граница, односно кажемо да ове осцилације могу довести до неограничености решења. На примеру једначине преноса кинетичке енергије турбуленције, важност ограничености решења постаје јасна; ако се у току нумеричког поступка појаве негативне вредности кинетичке енергије турбуленције (што је физички немогуће, али је могуће у току нумеричког поступка), при употреби $k - \varepsilon$ модела, вредности турбулентне вискозности ће такође бити

негативне, што готово аутоматски доводи до дивергенције решења након тог итеративног корака.⁴ Ова појава се може спречити повећањем броја ћелија у мрежи, посебно у деловима прорачунског домена у коме су присутни велики градијенти физичких величина. Ово је још једна потврда да се пре нумеричког решавања проблема струјања мора физички разумети проблем, и на основу тога генерисати одговарајућа прорачунска мрежа - у свим случајевима нумеричких симулација турбулентних струјања она је неуниформна, тј. са већом густином ћелија у зонама великих градијената. У појединим случајевима појава нефизикалних осцилација може бити ублажена увођењем додатних дисипативних чланова у полазним једначинама, како је показано у Jameson et al. (1981) и Pulliam (1986).

Схема која обезбеђује ограниченост решења и има бољу стабилност је *узводна* (енгл. upwind) *схема*. Вредност величине ϕ на страни f се на основу ове схеме одређује на основу смера струјања, на следећи начин:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P, & \dot{m}_f \geq 0 \\ \phi_M, & \dot{m}_f < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Међутим, ова схема дискретизације је првог реда тачности. Поред мање тачности у односу на централну схему, њен недостатак је и то што она уводи тзв. нумеричку или лажну дифузију у решење, Ferziger and Perić (2002), Veersteeg and Malalasekera (2007).



Слика 4.4. Узводна схема дискретизације.

Нумеричка дифузија делује стабилизирајуће на решење, али с друге стране

⁴Са становишта TVD методологије, која ће ускоро бити презентована, појам ограничености решења се своди на то да вредност решења у прорачунској тачки P буде ограничена вредностима у суседним прорачунским тачкама које на њу имају утицај.

знатно смањује тачност, посебно у областима са великим градијентима ϕ . Покушаји да се повећањем тачности узводне схеме, односно дефинисањем линеарне узводне схеме као у Warming and Beam (1976) смањи нумеричка дифузија нису у потпуности уродили плодом.

Комбинована (енг. blended) схема дискретизације је линеарна комбинација централне и узводне схеме, задржавајући при томе други ред тачности и ограниченост решења, Perić (1996), Ferziger and Perić (2002)

$$\begin{aligned} \phi_f = & \{(1 - \gamma_f) \max[\text{sgn}(\dot{m}_f), 0] + \gamma_f f_x\} \phi_P \\ & + \{(1 - \gamma_f) \min[\text{sgn}(\dot{m}_f), 0] + \gamma_f(1 - f_x)\} \phi_M \end{aligned} \quad (4.23)$$

Фактором пропорционалности γ_f , $0 \leq \gamma_f \leq 1$ одређује се количина нумеричке дифузије која се уводи у решење. Perić предлаже константну вредност γ_f за све стране у нумеричкој мрежи. За $\gamma_f = 0$ комбинована схема се своди на узводну схему.

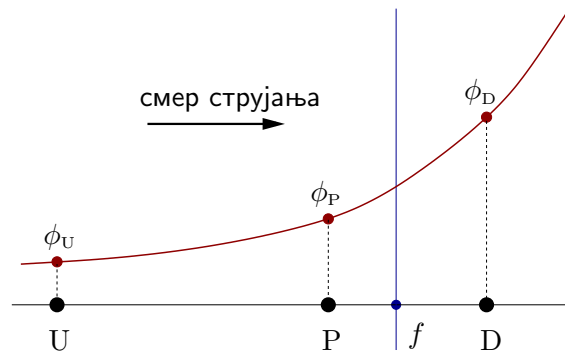
Схеме дискретизације конвективног члана су предмет опсежног истраживања, са циљем да се створи схема другог реда тачности која у исто време гарантује ограниченост решења и његову стабилност у току поступка решавања. Досадашња истраживања су довела до поделе на две главне групе схема дискретације конвективног члана:

- TVD схеме (енг. Total Variation Diminishing), Harten (1983)
- NVA схеме (енг. Normalized Variable Approach), Leonard (1988), Leonard (1991), Darwish (1993).

TVD методологија је оригинално развијена у случајевима надзвучних струјања, усвајајући Лаксову неједнакост за ударни талас као полазни критеријум ограничености решења, а касније је генерализована и за дозвучна струјања. За разлику од комбиноване схеме, фактор пропорционалности између неограничених схема вишег реда и ограничене схеме првог реда није константан већ зависи од локалног облика решења, што аутоматски уводи нелинеарност у нумеричко решење. Главни закључак TVD методологије је да схема мора бити нелинеарна ако се жели да она истовремено буде ограничена и да њена тачност буде већа од првог реда. Међутим, нелинеарна зависност која се уводи у само решење свакако утиче на његову конвергенцију. У случају TVD методологије стриктни

доказ конвергенције је могуће извести једино у случају једнодимензијских проблема са експлицитном схемом дискретизације. Како су оригинално ове схеме развијане за надзвучна струјања, оне дају добре резултате у случајевима када физичко решење има дисконтинуитет, тј. нагле скокове (нпр. ударни талас). У случајевима када су решења физички континуалне функције, ови нумерички поступци могу довести до појава малих скокова у решењу (решење може имати облик „степеница“).

У циљу побољшања схема базираних на TVD методологији, развијене су схеме базиране на NVA методологији. Код ових схема услов ограничености решења се уводи за сваку ћелију у рачунској мрежи. Критеријум ограничености конвективне схеме за произвољну ћелију (eng. Convective Boundedness Criterion - CBC) су увели Gaskell and Lau (1988). Како се већина схема дискретизације конвективног члана које су коришћене у оквиру ове дисертације базира на NVA методологији, њени најважнији делови ће укратко бити презентовани у редовима који следе.



Слика 4.5. Промена величине ϕ у близини површи f .

Посматра се једнодимензијски случај преноса скаларне величине ϕ кроз површ f структуриране мреже, слика 4.5. Нормализована промењива $\tilde{\phi}$ се дефинише на следећи начин, Leonard (1991):

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (4.24)$$

На основу ове дефиниције, свака диференцна схема којом се одређује ϕ_f на основу вредности ϕ у тачкама P, U и D се може приказати преко опште зависности:

$$\tilde{\phi}_f = f(\tilde{\phi}_P), \quad (4.25)$$

где су

$$\tilde{\phi}_P = \frac{\phi_P - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad \text{и} \quad \tilde{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad (4.26)$$

Да би се избегле нежељене нефизикалне осцилације решења у диференчној схеми (4.25), вредност ϕ_P (самим тим и ϕ_f) мора бити локално ограничена између вредности ϕ_U и ϕ_D , тј.

$$\phi_U \leq \phi_P \leq \phi_D \quad \text{или} \quad \phi_U \geq \phi_P \geq \phi_D \quad (4.27)$$

Ако је услов (4.27) задовољен за сваку прорачунску тачку онда се у решењу за целокупни домен не јављају нефизикалне осцилације. На овом услову се базира NVD методологија. Нешто модификовани критеријум (CBC критеријум) су дефинисали Gaskell and Lau (1988), релацијом

$$0 \leq \tilde{\phi}_P \leq 1. \quad (4.28)$$

Овај критеријум се суштински своди на услов (4.27), јер на основу дефиниције (4.24) једнозначно следи

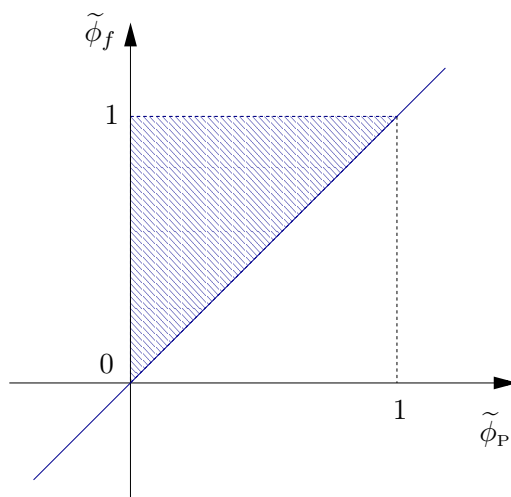
$$\tilde{\phi}_P = 0 \Rightarrow \phi_P = \phi_U \quad \text{и} \quad \tilde{\phi}_P = 1 \Rightarrow \phi_P = \phi_D. \quad (4.29)$$

Gaskell and Lau (1988) су такође показали да се критеријум ограничености решења може представити и на дијаграму нормализованих промењивих (енг. Normalized Variable Diagram), приказујући зависност $\tilde{\phi}_f$ од $\tilde{\phi}_P$.

Критеријум ограничености решења одговара осенченој области, укључујући и праву $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_P$, слика 4.6, тј. следећим условима:

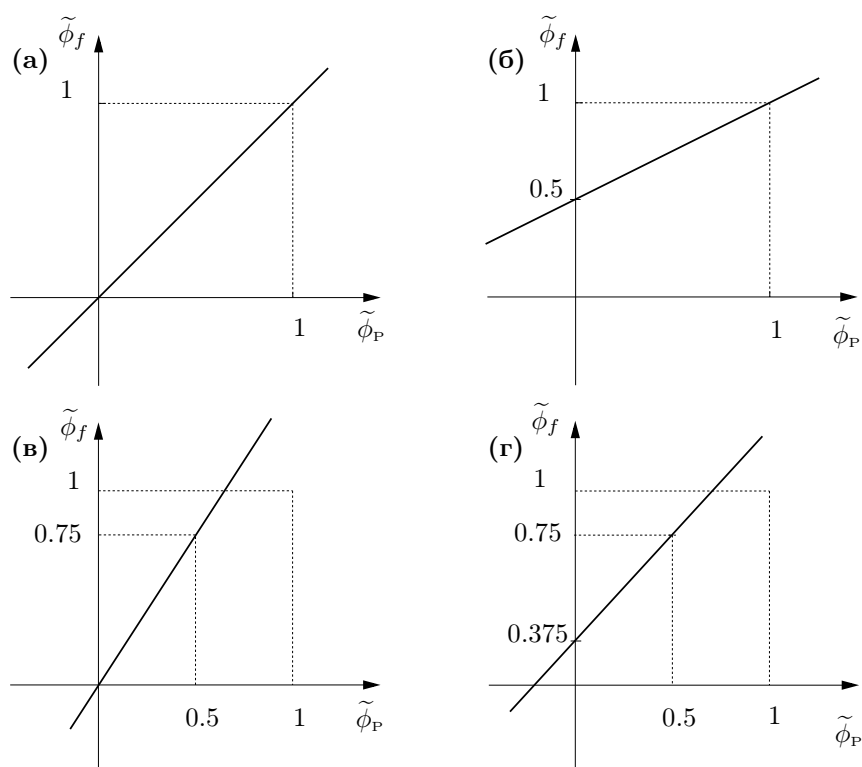
- за $0 \leq \tilde{\phi}_P \leq 1$, величина $\tilde{\phi}_f$ је ограничена са своје доње стране правом $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_P$, а са своје горње стране правом $\tilde{\phi}_f = 1$;
- за $\tilde{\phi}_P < 0$ и $\tilde{\phi}_P > 1$, вредност $\tilde{\phi}_f$ је једнака вредности $\tilde{\phi}_P$

На слици 4.7 су приказани дијаграми нормализованих промењивих за неке од основних диференцих схема: узводну, централну, линеарну узводну схему



Слика 4.6. Област ограничености решења у дијаграму нормализованих промењивих.

коју су дефинисали Warming and Beam (1976), као и QUICK схему коју је дефинисао Leonard (1979).



Слика 4.7. Дијаграм нормализованих промењивих за разне схеме дискретизације конвективног члана: (а) узводна схема; (б) централна схема; (в) линеарна узводна схема; (г) QUICK схема

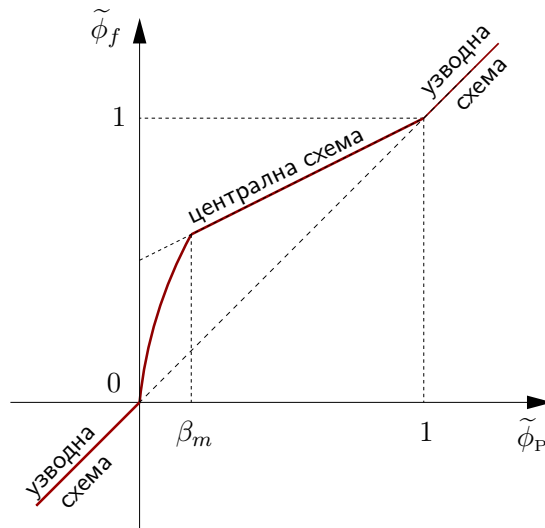
На основу критеријума ограничености конвективне схеме, (4.28) који важи за структурирану мрежу Jasak (1996) дефинише модификовани критеријум за

неструктурирану мрежу, у коме се вредност $\tilde{\phi}_P$ одређује на основу израза

$$\tilde{\phi}_P = 1 - \frac{(\nabla\phi)_f \cdot \hat{\underline{d}}}{2(\nabla\phi)_P \cdot \hat{\underline{d}}}, \quad \hat{\underline{d}} = \frac{\underline{d}_f}{|\underline{d}_f|} \quad (4.30)$$

где је $\hat{\underline{d}}$ јединични вектор правца који повезује тежишта ћелија (ако посматрамо слику 4.5, то би био правац \overline{PD}). У модификованом критеријуму се не појављује вредност величине ϕ у далекој узводној тачки U већ само вредности у тачкама P и D, тако да је информација о тополошкој структури мреже ирелевантна.

Полазећи од модификованог критеријума Jasak (1996) и Jasak et al. (1999) дефинишу гама диференцну схему, која је често коришћена у оквиру рада на овој дисертацији. Ова диференцна схема гарантује ограниченост решења на произвољној неструктурираној мрежи. На слици 4.8 је приказана гама схема у дијаграму нормализованих промењивих.



Слика 4.8. Дијаграм нормализованих промењивих за гама диференцну схему.

Горња гранична вредност коефицијента β_m треба увек бити мања од $\frac{1}{2}$. То следи из следеће чињенице: ако је $\tilde{\phi}_P = \frac{1}{2}$, онда следи да је зависност између прорачунских тачака P и D (слика 4.5) линеарна, па централна схема даје тачну вредност ϕ_f . У случају да решења имају дисконтинуитете (ударни талас) вредност β_m треба бити око 0.1. Мање вредности β_m не утичу на повећање тачности, али уводе нестабилности у поступак решавања, Jasak (1996). Тако се

препоручује да коефицијент β_m буде у опсегу:

$$\frac{1}{10} \leq \beta_m \leq \frac{1}{2} \quad (4.31)$$

Код стационарних проблема, фактор који утиче на вредност β_m је конвергенција решења. Гама схема се показала као боља по питању конвергенције од осталих комбинованих схема, јер има континуални прелаз између узводне и централне схеме. Повећање вредности β_m (али не преко $\frac{1}{2}$) у знатној мери побољшава конвергенцију решења. Гама схема се може представити у облику комбиноване схеме, јдн. (4.23), у којој је

$$\gamma_f = \begin{cases} 0, & \text{за } \tilde{\phi}_P \leq 0 \text{ и } \tilde{\phi}_P \geq 0 \\ \frac{\tilde{\phi}_P}{\beta_m}, & \text{за } 0 < \tilde{\phi}_P < \beta_m \\ 1, & \text{за } \beta_m < \tilde{\phi}_P < 1 \end{cases} \quad (4.32)$$

Генерално, NVA приступ приликом одређивања диференцијалних схема је знатно побољшао понашање решења у односу на TVD приступ, и то у случајевима када решење физички има дисконтинуитет и када је оно глатко, и такође знатно умањио удео нумеричке дифузије у решењу. Али, са друге стране стриктни доказ о конвергенцији ових метода није могуће извести, чак и за једноставне једнодимензијске случајеве!

Дифузиони члан

Дифузиони члан се, применом једначина (4.16) и (4.17), може написати у следећем облику:

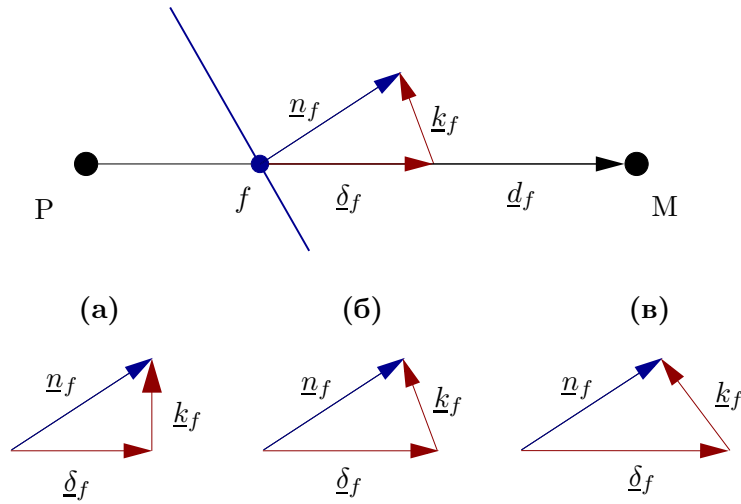
$$\iint_{A_P} \underline{n} \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dA = \sum_f \iint_{A_f} \underline{n} \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dA = \sum_f (\rho \Gamma_\phi) A_f \underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f, \quad (4.33)$$

где је $\underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f$ пројекција вектора градијента ϕ у тежишту површи (тачка f) на правац нормале те површи. Уколико је мрежа ортогонална, вектори \underline{n}_f и \underline{d}_f су паралелни, па се пројекција градијента ϕ на правац нормале приближно може

израчунати на следећи начин:

$$\underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f = \frac{\phi_M - \phi_P}{|\underline{d}_f|} \quad (4.34)$$

Апроксимација (4.34) је другог реда тачности, и при томе се у њој користе вредности величине ϕ само у тежиштима ћелија које деле ту страну, што чини да је тзв. прорачунски молекул компактан.



Слика 4.9. Неортогонална мрежа и начини дефинисања неортогоналне корекције. (а) минимална корекција; (б) јединична корекција; (в) надрелаксацијска корекција.

Да би се и на неортогоналној мрежи задржао други ред тачности приликом одређивања дифузионог члана, а уједно и компактност прорачунског молекула, уводи се тзв. *неортогонална корекција*, растављањем вектора \underline{n}_f на векторе $\underline{\delta}_f$ и \underline{k}_f , тј.

$$\underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f = \underbrace{\underline{\delta}_f \cdot (\nabla \phi)_f}_{\text{ортогонални део}} + \underbrace{\underline{k}_f \cdot (\nabla \phi)_f}_{\text{неортогонална корекција}} \quad (4.35)$$

где је вектор $\underline{\delta}_f$ паралелан са вектором \underline{d}_f , и $\underline{n}_f = \underline{\delta}_f + \underline{k}_f$. Постоји неколико приступа за одређивање интензитета вектора $\underline{\delta}_f$, а то су, Jasak (1996):

- *Минимална неортогонална корекција*. У овом приступу вектори $\underline{\delta}_f$ и \underline{k}_f су ортогонални, тако да је корекција неортогоналности у једначини (4.35) минимална, тј.

$$\underline{\delta}_f = \frac{(\underline{n}_f \cdot \underline{d}_f) \underline{d}_f}{|\underline{d}_f|} \quad (4.36)$$

Са порастом неортогоналности, вектор $\underline{\delta}_f$ се смањује, а самим тим и утицај ϕ_P и ϕ_M на вредност флукса градијента ϕ кроз површ f .

- *Јединична ортогонална корекција.* Овде се δ_f дефинише као јединични вектор

$$\underline{\delta}_f = \frac{\underline{d}_f}{|\underline{d}_f|}, \quad (4.37)$$

и при томе се ортогонални део у изразу (4.35) рачуна као у случају ортогоналне мреже, јдн. (4.34).

- *Надрелаксацијска неортогонална корекција.* У овом приступу вектор $\underline{\delta}_f$ се одређује на основу израза

$$\underline{\delta}_f = \frac{\underline{d}_f}{\underline{d}_f \cdot \underline{n}_f}, \quad (4.38)$$

чиме се са повећањем неортогоналности повећава утицај ϕ_P и ϕ_M на вредност флукса градијента ϕ кроз површ f .

Могуће је, на основу једначина (4.34) и (4.35), написати и једну једначину којом се обухватају сва три приступа:

$$\underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\underline{\delta}_f| \frac{\phi_M - \phi_P}{|\underline{d}_f|} + \underline{k}_f \cdot (\nabla \phi)_f \quad (4.39)$$

Разлика између ова три приступа се огледа у њиховој тачности и стабилности у поступку решавања. На основу истраживања датих у Jasak (1996) надрелаксацијска неортогонална корекција се показала као најстабилнија, и она је, за разлику од прва два приступа, имала конвергентно решење чак и на изразито неортогоналним мрежама. Зато ће се у овом раду на неортогоналним мрежама користити надрелаксацијска неортогонална корекција.

Овде је битно напоменути и следеће: дифузиони члан у свом диференцијалном облику, као и конвективни члан, такође има својство ограничености. Међутим, у својој дискретизованој форми његова ограниченост ће бити задовољена само на ортогоналним мрежама. Све неортогоналне корекције, које се уводе са циљем повећања тачности израчунавања дифузионог члана, могу потенцијално довести до његове неограничености. Ако је питање ограничености

важније од тачности, онда неортогоналне корекције треба свести на минимум.

И на крају овог дела, треба додати и да се градијент $(\nabla\phi)_f$ у једначини (4.39) израчунава линеарном интерполацијом градијената у тежиштима контролних запремина, тј. применом централне диферендне схеме

$$(\nabla\phi)_f = f_x(\nabla\phi)_P + (1 - f_x)(\nabla\phi)_M. \quad (4.40)$$

Градијенти у тежиштима контролних запремина се одређују на основу теореме Гаус-Остроградског и једначина (4.14) и (4.17):

$$(\nabla\phi)_P = \frac{1}{V_P} \sum_f \underline{n}_f \phi_f A_f, \quad (4.41)$$

где је ϕ_f вредност величине ϕ на површи f , срачуната на основу централне схеме, тј. на основу вредности ϕ у тежиштима ћелија за коју је та површ заједничка, у претходном итеративном кораку.

Изворски члан

Сви чланови у основним једначинама који се не могу сврстати у временски, конвективни или дифузиони члан се означавају као *изворски чланови*, Ferziger and Perić (2002), Hirsh (2007), Veersteg and Malalasekera (2007).

Изворски члан S_ϕ у једначини (4.14) је у неком општем случају нелинеарна функција која зависи од ϕ , или пак функција просторних координата x_i . Његова дискретизација је специфична, зависно од интеракције са осталим члановима у једначини, као и од тога како та дискретизација утиче на ограниченост и тачност решења. У случају да је изворски члан функција промењиве ϕ , пре дискретизације функција изворски члан се линеаризује, тј.

$$S_\phi(\phi) = S_u + S_p \phi. \quad (4.42)$$

У једначини (4.42) коефицијенти S_u и S_p такође могу зависити од ϕ . На основу једначина (4.14) и (4.42) следи да се изворски члан рачуна као

$$\iiint_{V_P} S_\phi dV = S_u V_P + S_p \phi_P V_P \quad (4.43)$$

4.2.2 Временска дискретизација

Заменом дискретизованих израза за конвективни, дифузиони и изворски члан, једначине (4.19), (4.33) и (4.43), у интегрални облик једначине преноса (4.13) добија се:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P V_P + \sum_f \dot{m}_f \phi_f - \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} (S_u V_P + S_p V_P \phi_P) dt. \quad (4.44)$$

Једначина (4.44) се у методи коначних запремина уобичајено назива „полу-дискретизована“ форма једначине преноса, Hirsh (2007).

Имајући у виду претпостављену расподелу у времену, тј. једначину (4.11), сви интегрални у једначини (4.44), као и извод у времену се израчунавају као

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt = \frac{\phi^{(n+1)} + \phi^{(n)}}{2} \Delta t, \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P = \frac{\rho_P^{(n+1)} \phi_P^{(n+1)} - \rho_P^{(n)} \phi_P^{(n)}}{\Delta t} \quad (4.45)$$

где су $\phi^{(n)} = \phi(t)$ и $\phi^{(n+1)} = \phi(t + \Delta t)$. Ако се претпостави да се густина ρ и дифузивност Γ_ϕ не мењају у времену, из једначина (4.44) и (4.45) следи

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_P \phi_P^{(n+1)} - \rho_P \phi_P^{(n)}}{\Delta t} V_P + \frac{1}{2} \sum_f \dot{m}_f \phi_f^{(n+1)} - \frac{1}{2} \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f^{(n+1)} \\ & + \frac{1}{2} \sum_f \dot{m}_f \phi_f^{(n)} - \frac{1}{2} \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f^{(n)} \\ & = S_u V_P + \frac{1}{2} S_p V_P \left[\phi_P^{(n+1)} + \phi_P^{(n)} \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ова метода временске дискретизације се назива *Кранк-Николсонов метода* (енг. Crank-Nicholson) и она је другог реда тачности. У њој фигуришу вредности ϕ_f и $(\nabla \phi)_f$ на површима и у текућем и у наредном временском тренутку. Ове вредности на површима се рачунају на основу вредности у тој ћелији (чије је тежиште P), као и вредности ϕ у тежиштима суседних ћелија, применом одговарајућих диференцијалних схема.

Имајући то у виду, једначина (4.46) се може записати и у следећем облику:

$$a_P \phi_P^{(n+1)} + \sum_M a_M \phi_M^{(n+1)} = b_P \quad (4.47)$$

Оваква једначина се може записати за сваку контролну запремину (ћелију). У коефицијенту a_P су укључени сви чланови који се односе на $\phi_P^{(n+1)}$; у коефицијенту a_M су укључени чланови који потичу од свих суседних ћелија; у изворском члану b_P се налазе сви чланови за чије одређивање није потребно знати $\phi_P^{(n+1)}$, односно вредности које одговарају временском тренутку t .

Вредност $\phi_P^{(n+1)}$ зависи од вредности у суседним ћелијама, тако да за целокупни домен формира систем алгебарских једначина облика

$$\mathbf{A} \phi = \mathbf{b}. \quad (4.48)$$

Овде је \mathbf{A} ретка матрица, у којој су елементи различити од нуле елементи на главној дијагонали (коефицијенти a_P) и елементи на неколико суседних места око главне дијагонале (коефицијенти a_M), ϕ вектор непознатих вредности ϕ за сваку ћелију и \mathbf{b} је вектор који потиче од изворских чланова и вредности у временском тренутку t , као и чланови који се третирају експлицитно. Решавањем система једначина (4.48) добијају се вредности ϕ у новом временском кораку. Систем једначина (4.48) се решава за сваки временски корак, почев од тренутка $t = 0$ у коме се дефинишу почетни услови за посматрани проблем.

Кранк-Николсонова метода је безусловно стабилна, Hirsh (2007), али она не гарантује ограниченост решења. Као и случају конвективног члана, ограниченост решења се може постићи временском дискретизацијом првог реда тачности. То постиже занемаривањем промене ϕ_f и $(\nabla \phi)_f$ у времену, узимајући њихове вредности само у текућем временском кораку (експлицитна метода) или пак у наредном временском кораку (имплицитна метода). У оба случаја дискретизована форма једначине (4.44) је

$$\frac{\rho_P \phi_P^{(n+1)} - \rho_P \phi_P^{(n)}}{\Delta t} + \sum_f \dot{m}_f \phi_f - \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f = S_u V_P + S_p V_P \phi_P \quad (4.49)$$

Код експлицитне Ојлерове методе дискретизације, вредности ϕ и $\nabla \phi$ се

одређују на основу вредности у текућем временском кораку

$$\phi_f = f_x \phi_P^{(n)} + (1 - f_x) \phi_M^{(n)}, \quad (4.50)$$

$$\underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\underline{\delta}_f| \frac{\phi_M^{(n)} - \phi_P^{(n)}}{|\underline{d}_f|} + \underline{k} \cdot (\nabla \phi)_f^{(n)}. \quad (4.51)$$

Линеарни део изворског члана се такође израчунава на основу вредности у текућем временском кораку, тако да је једначина (4.49) у случају експлицитне методе

$$\begin{aligned} \phi_P^{(n+1)} = & \phi_P^{(n)} + \frac{\Delta t}{\rho_P V_P} \sum_f \dot{m}_f \left[f_x \phi_P^{(n)} + (1 - f_x) \phi_M^{(n)} \right] \\ & - \frac{\Delta t}{\rho_P V_P} \sum_f \left(|\underline{\delta}_f| \frac{\phi_M^{(n)} - \phi_P^{(n)}}{|\underline{d}_f|} + \underline{k} \cdot (\nabla \phi)_f^{(n)} \right) \\ & + \frac{\Delta t}{\rho_P V_P} \left(S_u V_P + S_p V_P \phi_P^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

У једначини (4.52) сви чланови са њене десне стране су вредности одговарајућих величина у текућем временском кораку, тј, временском тренутку t , тако да се вредности ϕ у тренутку $t + \Delta t$ одређују директно - нема потребе за формирањем и решавањем система једначина (4.48). Међутим, главни недостатак експлицитне методе је доста ригорозан услов стабилности решења, који се дефинише максималном вредношћу Курантовог броја, $Co_{\max} = u_{\max} \Delta t / \Delta x < 1$, где је Δx_i одговарајућа димензија ћелије у правцу максималне компоненте брзине u_{\max} .

Вредности ϕ и $\nabla \phi$ на површима контролне запремине код **имплицитне Ојлерове методе** се израчунавају на основу вредности у наредном временском кораку

$$\phi_f = f_x \phi_f^{(n+1)} + (1 - f_x) \phi_f^{(n+1)} \quad (4.53)$$

$$\underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\underline{\delta}_f| \frac{\phi_M^{(n+1)} - \phi_P^{(n+1)}}{|\underline{d}_f|} + \underline{k} \cdot (\nabla \phi)_f^{(n)}. \quad (4.54)$$

Применом имплицитне Ојлерове методе формира се систем једначина (4.48), и за разлику од експлицитне методе, овај метод је стабилан и за вредности Курантовог броја веће од један, Hirsh (2007). Такође, имплицитна Ојлерова

метода, за разлику од експлицитне, гарантује ограниченост решења.

Повећање тачности временске дискретизације у односу на експлицитну и имплицитну Ојлерову схему, и при томе занемарујући промене ϕ_f и $(\nabla\phi)_f$ у времену, се може постићи применом коначних разлика уназад до другог реда тачности. То постиже развојем функција $\phi(t)$ и $\phi(t - \Delta t)$ у Тејлоров ред у околини $t + \Delta t$, и њиховим упоређивањем.

Развој функције $\phi(t)$ у околини $t + \Delta t$ је

$$\phi(t) = \phi(t + \Delta t) - \frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(\Delta t)^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\phi}{\partial t^3}(\Delta t)^3 + \dots \quad (4.55)$$

и из њега следи да је

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\phi(t + \Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (4.56)$$

Из једначине (4.56) се може видети да је апроксимација првог извода по времену првог реда тачности, за разлику од претпостављене линеарне расподеле ϕ између два временска интервала, јдн. (4.11) која је другог реда тачности. Да би у случају занемаривања промена у времену ϕ и $\nabla\phi$ у времену дискретизација једначине (4.44) била другог реда тачности, потребно је извод по времену дискретизовати схемом другог реда тачности (енг. Backward Differencing in Time). Да би се то постигло, користе се вредности ϕ у три временска корака. Из развоја $\phi(t - \Delta t)$ у Тејлоров ред у околини $\phi(t + \Delta t)$,

$$\phi(t - \Delta t) = \phi(t + \Delta t) - 2\frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (4.57)$$

следи да је

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\Delta t = \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\phi(t + \Delta t) - \phi(t - \Delta t)}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (4.58)$$

Заменом једначине (4.58) у једначину (4.56) добија је израз за дискретизацију првог извода по времену која је другог реда тачности

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{3\phi(t + \Delta t) - 4\phi(t) + \phi(t - \Delta t)}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \approx \frac{3\phi^{(n+1)} - 4\phi^{(n)} + \phi^{(n-1)}}{2\Delta t} \quad (4.59)$$

Као и у случају Кранк-Николсонове схеме, примена једначине (4.59) не гарантује ограниченост решења, управо због екстраполације у временским корацима.

Тако је дискретизовани облик једначине преноса у случају да се за дискретизацију временског члана користи временска схема другог реда тачности временска схема са коначним разликама уназад облика

$$\frac{3\rho_P\phi_P^{(n+1)} - 4\rho_P\phi_P^{(n)} + \rho_P\phi_P^{(n-1)}}{2\Delta t} V_P + \sum_f \dot{m}_f \phi_f^{(n+1)} - \sum_f (\rho\Gamma_\phi)_f \underline{n}_f \cdot (\nabla\phi)_f^{(n+1)} = S_u V_P + S_p V_P \phi_P^{(n+1)} \quad (4.60)$$

И ова једначина, написана за сваку ћелију у прорачунској мрежи, формира систем линеарних алгебарских једначина (4.48), чијим се решавањем у сваком временском кораку добија $\phi^{(n+1)}$ у свакој ћелији прорачунске мреже. Како се неке ћелије налазе непосредно уз границу прорачунског домена, сада је неопходно дефинисати типове граничних услова, јер ће се они у одговарајућим коефицијентима појавити у систему једначина (4.48).

4.2.3 Гранични услови

Нумеричка (прорачунска) мрежа садржи и скуп површи контролних запремина које се поклапају са границама физичког домена, тј. домена у коме се одвија струјање. Услови који владају на тим површима се дефинишу преко *граничних услова*. У нумеричкој механици флуида је уобичајена подела на нумеричке и физичке граничне услове.

Уопштено, постоје два типа нумеричких граничних услова: Дириклеов (eng. Dirichlet) и Нојманов (eng. von Neumann) гранични услов. Код Дириклеовог граничног услова се дефинише вредност физичке величине на граници, док се код Нојмановог дефинише вредност градијента физичке величине у правцу нормале граничне површи.

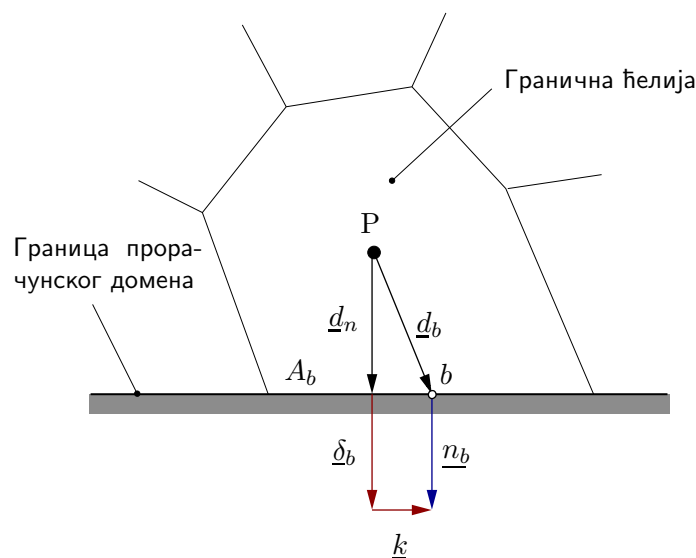
Под физичким граничним условима се подразумевају површи на којима је, са становишта механике флуида познато како се одређене физичке величине понашају. То су пример равни симетрије, разне чврсте контуре (eng. walls), делови граничних површи кроз које флуид улази у прорачунски домен (eng. inlets), делови граничних површи кроз које флуид напушта прорачунски домен (eng.

outlets), итд. Сваки од ових физичких граничних услова је повезан са скупом нумеричких граничних услова који се дефинишу за физичке величине које су од значаја у посматраном проблему.

Јасно је да граничне површи, преко којих се одвија интеракција између прорачунског домена и његовог окружења, морају бити тако изабране да су на њима вредности физичких величина или пак њихови градијенти познати.

Нумерички гранични услови

Пре самог дефинисања граничних услова, неопходно је дефинисати корекцију у случају неортогоналности прорачунске мреже на њеним границама.



Слика 4.10. Ћелија у близини границе физичког (прорачунског) домена.

У случају ћелија које се налазе уз саму границу прорачунског домена, не постоје суседне ћелије са којима би делиле граничне површи, тако да се вектор \underline{d}_f дефинише као вектор од тежишта те ћелије до тежишта граничне површи те ћелије. Вектор \underline{d}_f ће у овом случају бити означен са \underline{d}_b , док ће тежиште граничне површи ћелије бити означено са b , слика 4.10. Такође, претпоставља се да је на тој граничној површи једне ћелије вредност физичке величине или пак њеног градијента константан. Уз ту претпоставку, дефиниција корекције неортогоналности је једноставна: вектор \underline{k} је паралелан са граничном површи, док је ортогонални део, тј. вектор $\underline{\delta}_b$ у овом случају једнак вектору \underline{n}_b , али његов почетак није у тежишту граничне површи.

Дефиницијом вектора \underline{d}_n чији је почетак у тежишту граничне ћелије, и који је ортогоналан на граничну површ,

$$\underline{d}_n = (\underline{n}_b \cdot \underline{d}_b) \underline{n}_b \quad (4.61)$$

нема потребе за коришћењем вектора \underline{k} у неортогоналној корекцији.

Дириклеов гранични услов. Дириклеов гранични услов за физичку величину ϕ задат на површи A_b се своди да је на површи $\phi = \phi_b$, где је $\phi_b = const$.

- **Конвективни члан.** Начин дискретизације конвективног члана у случају унутрашњих страна (површи), дат је једначином (4.19), тј.

$$\iint_{A_P} \underline{n} \cdot \rho \underline{U} \phi \, dA = \sum_f \underline{n}_f \cdot (\rho \underline{U})_f \phi_f A_f = \sum_f (\rho u_n A)_f \phi_f = \sum_f \dot{m}_f \phi_f.$$

На граничним странама прорачунског домена, имајући у виду да је на тој страни $\phi = \phi_b$, овај израз се своди на

$$\dot{m}_b \phi_b, \quad (4.62)$$

где је \dot{m}_b масени проток кроз граничну површ. Због стабилности у поступку решавања, овај гранични услов за ϕ се користи на оним површима кроз које флуид улази у прорачунски домен, док се на излазним граничним површима користи Фон Нојманов гранични услов, тј. $(\nabla \phi)_b = 0$.

- **Дифузиони члан.** Начин дискретизације дифузионог члана у случају унутрашњих страна (површи) је дат једначином (4.33), тј.

$$\iint_{A_P} \underline{n} \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) \, dA = \sum_f \iint_{A_f} \underline{n} \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) \, dA = \sum_f (\rho \Gamma_\phi) A_f \underline{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f.$$

На граничним странама прорачунског домена, градијент $(\nabla \phi)_b$ у правцу нормале \underline{n}_b се своди на

$$\underline{n}_b \cdot (\nabla \phi)_b = \frac{\phi_b - \phi_P}{|\underline{d}_n|}, \quad (4.63)$$

па, према томе, дифузиони члан на граничној страни има облик

$$(\rho\Gamma_\phi)_b \frac{\phi_b - \phi_P}{|\underline{d}_n|} \quad (4.64)$$

Нојманов гранични услов. Као што је већ речено, код Нојмановог граничног услова на површи се задаје градијент физичке величине у правцу нормале површи, тј.

$$\underline{n}_b \cdot (\nabla\phi)_b = g_b \quad (4.65)$$

- *Конвективни члан.* Код конвективног члан потребно је израчунати вредност ϕ_b на граничној страни. Имајући у виду да су вектори \underline{d}_n и \underline{n}_b колинеарни, вредност ϕ_b је

$$\phi_b = \phi_P + \underline{d}_n \cdot (\nabla\phi)_b = \phi_P + g_b |\underline{d}_n|, \quad (4.66)$$

па је на граничној површи конвективни члан одређен изразом

$$\dot{m}_b(\phi_P + g_b |\underline{d}_n|) \quad (4.67)$$

- *Дифузиони члан.* На основу једначине (4.65), дифузиони члан ће имати следећи облик

$$(\rho\Gamma_\phi)_b A_b g_b \quad (4.68)$$

Физички гранични услови

Основни, и најчешћи физички гранични услови у случају струјања *нестисљивог флуида* су:

- **Улазна површ** (енг. inlet). На површима кроз које флуид улази у прорачунски домен, задају се вредности брзине (Дириклеов гранични услов за брзину), и због конзистентности, градијент притиска у правцу нормале једнак нули (Нојманов гранични услов за притисак), Hirsh (2007), Veersted

and Malalasekera (2007). У случају турбулентних струјања, на улазној површи се задају вредности карактеристичних физичких величина (кинетичка енергија турбуленције, дисипација кинетичке енергије турбуленције, компоненте Рејнолдсових напона, и сл.).

- **Излазна површ** (енг. outlet). На површима кроз које флуид излази из прорачунског домена, задаје се расподела притиска, односно константна вредност притиска, и градијент брзине једнак нули. На овај начин једначина континуитета је идентички задовољена, што следи из једначине притиска. Извођење једначине притиска се даје у оквиру потпоглавља 4.4.3. У случају турбулентних струјања, на излазној површи градијенти карактеристичних физичких величина турбуленције су једнаки нули.⁵
- **Површ симетрије** (енг. symmetry plane). На овој граничној површи пројекција градијента на правац њене нормале је једнака нули, и кроз ову површ нема протицања флуида (брзина у правцу нормале је једнака нули). Вредности физичких величина и пројекција градијента у правцу тангенте површи су једнаке њиховим вредностима у најближим прорачунским тачкама.
- **Непорозни зидови, са условом „лепљења“** (енг. no-slip impermeable walls). Брзина је на овим граничним површима једнака брзини саме површи. Како у правцу нормале површи нема флуксева (непорозни зидови), градијент притиска у том правцу је једнак нули.
- **Периодичне (цикличне) површи.** (енг. periodic (cyclic) boundaries). Периодичне површи се физички састаје од две површи, али у нумеричком смислу оне представљају једну површ. Вредности свих физичких величина, као и вредности градијената су једнаки на тим површима. За разлику од површи симетрије, кроз њих флуид протиче, и то тако да је масени проток који излази кроз једну периодичну површ једнак масеном протоку који улази кроз периодичну површ која њој одговара.

⁵Из самог начина дефинисања физичког граничног услова „излазне површи“, може се закључити да је пожељно да те површи физички морају бити дефинисане тако да су градијенти свих физичких величина у правцу струјања на њима једнаки нули, односно да је струјање потпуно развијено.

4.3 Структура система алгебарских линеарних једначина и методе његовог решавања

Крајњи продукт дискретизације једначина преноса, уз задате граничне услове је систем алгебарских линеарних једначина јдн. (4.47), тј. (4.48). Да би се показала структура појединих чланова у тим једначинама, овде се наводи коначна форма дискретизоване једначине применом временске схеме коначним разликама уназад, комбиноване схеме дискретизације конвективног члана, јдн.(4.23), схеме дискретизације дифузионог члана одређене једначином (4.39) и изворског члана једначином (4.43):

$$\begin{aligned}
 & \frac{3\rho_P\phi_P^{(n+1)} - 4\rho_P\phi_P^{(n)} + \rho_P\phi_P^{(n-1)}}{2\Delta t} V_P \\
 & + \sum_f \dot{m}_f \{ (1 - \gamma_f) \max[\text{sgn}(\dot{m}_f), 0] + \gamma_f f_x \} \phi_P^{(n+1)} \\
 & + \sum_f \dot{m}_f \{ (1 - \gamma_f) \min[\text{sgn}(\dot{m}_f), 0] + \gamma_f (1 - f_x) \} \phi_{M,f}^{(n+1)} \\
 & - \sum_f (\rho\Gamma_\phi)_f A_f \left[|\underline{\delta}_f| \frac{\phi_M^{(n+1)} - \phi_P^{(n+1)}}{|\underline{d}_f|} + \underline{k}_f \cdot (\nabla\phi)_f^{(n+1)} \right] \\
 & = S_u V_P + S_p V_P \phi_P^{(n+1)}. \tag{4.69}
 \end{aligned}$$

Једначина (4.69) се може записати и облику где ће уместо сума по површима које ограничавају контролну запремину, сума бити по суседним прорачунским тачкама, јдн. (4.47):

$$a_P \phi_P^{(n+1)} + \sum_M a_M \phi_M^{(n+1)} = b_P$$

Из једначина (4.47) и (4.69), следи да су коефицијенти a_P , a_M и b_P одређени изразима:

$$\begin{aligned}
 a_P &= \frac{3\rho_P V_P}{2\Delta t} + \sum_f \left\{ \dot{m}_f \{ (1 - \gamma_f) \max[\text{sgn}(\dot{m}_f), 0] + \gamma_f f_x \} + (\rho\Gamma_\phi)_f A_f \frac{|\underline{\delta}_f|}{|\underline{d}_f|} \right\} \\
 & - S_p V_P \tag{4.70}
 \end{aligned}$$

$$a_M = \dot{m}_{f,M} \{ (1 - \gamma_{f,M}) \min[\text{sgn}(\dot{m}_{f,M}), 0] + \gamma_{f,M}(1 - f_x) \} - (\rho\Gamma_\phi)_{f,M} A_{f,M} \frac{|\underline{\delta}_{f,M}|}{|\underline{d}_{f,M}|} \quad (4.71)$$

$$b_P = \frac{4\rho_P\phi_P^{(n)} - \rho_P\phi_P^{(n-1)}}{2\Delta t} V_P + (\rho\Gamma_\phi)_f \underline{k}_f \cdot (\nabla\phi)_f^{(n+1)} \quad (4.72)$$

Једначина (4.60) написана за сваку ћелију у рачунској мрежи формира систем једначина (4.48), где су a_P елементи на главној дијагонали у матрици \mathbf{A} , а a_M елементи који се налазе око главне дијагонале матрице. Дакле, решавање полазне једначина преноса (4.9) се методом коначних запремина се своди на решавање система линеарних алгебарских једначина, описаног једноставном матричном једначином

$$\mathbf{A}\phi = \mathbf{b}. \quad (4.73)$$

Начин решавања система линеарних алгебарских једначина може бити директни или итеративни. Примена директних метода доводи до решења у коначном броју аритметичких операција, док се код итеративних метода претпоставља решење и потом се одговарајућим алгоритмима то решење коригује све до унапред прописане тачности. Примена итеративних метода даје решење (ако оно конвергира) неупоредиво брже у поређењу за директним методама. Такође, итеративне методе су изузетно ефектне у случајевима када је \mathbf{A} ретка матрица, и током итеративног поступка, за разлику од директних метода, та њена структура се задржава. У исто време итеративне методе намећу и одређена ограничења по питању структуре матрице \mathbf{A} . Тако је њена дијагонална доминантност⁶ је директно повезана са конвергенцијом итеративног поступка.

⁶Матрица је дијагонално једнака ако је за сваку њену врсту задовољено да је апсолутна вредност члана на дијагонали једнака збиру апсолутних вредности осталих чланова у тој врсти, тј. $|a_{mm}| = \sum_{m \neq j} |a_{mj}|$. Ако за макар једну врсту важи $|a_{mm}| > \sum_{m \neq j} |a_{mj}|$, а за остале претходна једнакост, онда је матрица дијагонално доминантна. Ако је претходна неједнакост задовољена за сваку врсту матрице, онда се ради о строго дијагонално доминантној матрици, Meyer (2000).

Структура матрице коефицијената \mathbf{A} зависи од редоследа означавања контролних запремина (ћелија) у рачунској мрежи. Њена математичка својства зависе од структуре једначине преноса, начина дискретизације и геометрије рачунске мреже. Тако се на пример дискретизацијом једначине преноса (4.9) добија *несиметрична матрица* \mathbf{A} , док је у случају да нема конвективног преноса матрица \mathbf{A} *симетрична*. Такође, још једна карактеристика матрице коефицијената следи из саме дефиниције методе коначних запремина, а то је да је она увек *позитивно дефинитна*.⁷

Да би се анализирао утицај појединачних чланова полазне једначине преноса на структуру матрице \mathbf{A} , она се може написати као збир одговарајућих матрица

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4 \quad (4.74)$$

где су, сходно ознакама у једначини (4.9), \mathbf{A}_1 матрица чији елементи потичу од дискретизације временског члана, \mathbf{A}_2 матрица чији елементи потичу од дискретизације конвективног члана, \mathbf{A}_3 матрица чији елементи потичу од дискретизације дифузионог члана и \mathbf{A}_4 матрица чији елементи потичу од дискретизације изворског члана. Структура матрице \mathbf{A} , као и њених подматрица у једначини (4.78), је директно повезана са ограниченошћу решења. Тако у случајевима када је матрица \mathbf{A} дијагонално једнака са свим позитивним елементима или пак када је она дијагонално једнака са позитивним елементима на главној дијагонали, а негативним елементима испод и изнад ње, решење система линеарних алгебарских једначина (4.48) ће бити ограничено. Зато је значајно анализирати структуре подматрица дефинисаних једначином (4.78).

- *Временски члан.* Дискретизација временског члана даје само допринос дијагоналним елементима матрице \mathbf{A}_1 , тј. \mathbf{A} , те на тај начин повећава дијагоналну доминантност. Из једначине (4.60) се може видети да дискретизација временског члана директно пропорционална $\frac{\rho_P V_P}{\Delta t}$, што значи да се смањењем временског корака може повећати дијагонална доминантност матрице.
- *Конвективни члан.* Дијагонално једнака матрица \mathbf{A}_2 се добија једино у

⁷Матрица \mathbf{A} је позитивно дефинитна ако за било који вектор \mathbf{x} различит од нуле важи $\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}^T > 0$.

случају када је конвективни члан дискретизован узводном схемом. Свака друга схема даје негативне елементе матрице, нарушава дијагоналну једнакост матрице, и може потенцијално довести до неограниченог решења. У случају централне схеме на униформној мрежи ситуација се додатно компликује имајући у виду да су у том случају елементи на главној дијагонали матрице \mathbf{A}_2 једнаки нули.

- *Дифузиони члан.* У случају ортогоналних прорачунских мрежа, дискретизација дифузионог члана даје дијагонално једнаку матрицу \mathbf{A}_3 која гарантује ограниченост. У случају неортогоналне мреже матрица остаје дијагонално једнака, али неортогонална корекција се додаје у вектор \mathbf{b} , тако да дијагонална једнакост није довољна за очување ограничености.
- *Изворски члан.* Ако је $S_P < 0$ дијагонална доминантност матрице \mathbf{A} повећава, јер је у том случају $S_P V_P$ позитивно у једначини (4.70). Зато у поступку линеаризације изворског члана треба тежити да коефицијент S_P буде негативан. У случајевима да $S_P > 0$, тај део изворског члана ће се налазити унутар вектора \mathbf{b} .

Из ове анализе, што су показала и истраживања, може се закључити да на дијагоналну доминантност највише утичу изворски и временски члан. Како у случају стационарних струјања, нема временског члана, дијагонална доминантност матрице \mathbf{A} је нарушена. Да би се итеративни методе могле примењивати и у тим случајевима, користи се такозвана под-релаксација (енг. under-relaxation). У том приступу се полазној једначини

$$a_P \phi_P^{(n+1)} + \sum_M a_M \phi_M^{(n+1)} = b_P$$

додају чланови са њене леве и десне стране

$$a_P \phi_P^{(n+1)} + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_P \phi_P^{(n+1)} + \sum_M a_M \phi_M^{(n+1)} = b_P + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_P \phi_P^{(n)}, \quad (4.75)$$

односно

$$\frac{a_P}{\alpha} \phi_P^{(n+1)} + \sum_M a_M \phi_M^{(n+1)} = b_P + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_P \phi_P^{(n)}, \quad (4.76)$$

где је $\phi_P^{(n)}$ вредност из претходне итерације, док је α фактор под-релаксације ($0 < \alpha \leq 1$). На овај начин је могуће спровести итеративни поступак, и у случају када је у њему достигнута вредност која одговара стационарном стању $\phi_P^{(n+1)} = \phi_P^{(n)}$, једначина (4.75) се своди на полазну једначину (4.47).

Итеративне методе конјугованих градијената (енг. conjugate gradients - CG) које су дефинисали Hestens and Steifel (1952), су се показале као најприкладније за примену у случају решавања система линеарних једначина са великим бројем непознатих, код којих је матрица \mathbf{A} ретка матрица. Метода конјугованих градијената гарантује да ће број итерације који је потребан да би се добило решење мањи или једнак броју непознатих, тј. броју једначина. Брзина конвергенције је обрнуто пропорционална кондиционалном броју матрице⁸ и може се побољшати применом прекондиционарања. Основни принцип прекондиционарања је да се уместо полазног система једначина $\mathbf{A}\phi = \mathbf{b}$ решава систем

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\phi = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b} \quad (4.77)$$

где је \mathbf{C} прекондиционер. Он треба бити одређен тако да обезбеђује бољу конвергенцију решења у односу на полазни систем једначина. Током последњих деценија обимна истраживања су обављена у циљу постизања боље конвергенције решења код итеративних метода базираних на методи конјугованих градијената, како у случајевима када је матрица \mathbf{A} симетрична, тако и случајевима када је она несиметрична. У OpenFOAM-у је имплементиран велики број тих метода, и њихов детаљнији опис се може наћи у Behrens (2009).

Такође, оно што је битно напоменути је да се ефикасност методе конјугованих градијената се повећава са повећањем дијагоналне доминантности матрице \mathbf{A} , Golub and Van Loan (1996). С друге стране, имајући у виду да дијагонална доминантност матрице \mathbf{A} директно зависи од начина дискретизације појединих чланова у полазној једначини преноса, важност избора праве методе дискретизације у конкретним проблемима је очигледна. Наравно, готово увек то је питање компромиса - ако се жели већа тачност, потребно је имати нумеричку мрежу са већим бројем ћелија, користити схеме дискретизације вишег реда, али то са друге стране значајно повећава сложеност прорачуна и захтева знатно

⁸Ако је $\|\mathbf{A}\| \equiv \max_i \sum_j |a_{ij}|$ онда се кондициони број κ матрице \mathbf{A} дефинише као $\kappa \equiv \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|$.

веће рачунарске ресурсе, и та већа тачност не гарантује ограниченост решења. Једна од метода за превазилажење овог проблема је да се прорачун започне са методама нижег реда тачности, које стабилизују поступак решавања, а потом наставити прорачун са методама дискретизације вишег реда тачности.

Свако нумеричко решење је, у мањој или већој мери, приближно решење, али у великој већини проблема механике флуида и једино могуће! Зато је јако важно имати у виду начин на који се долази до тог решења и који све елементи утичу на тачност, односно који су извори грешке тог решења. Грешке се могу сврстати у две групе: грешке које настају као последица лоше дискретизације прорачунског домена, односно лоше прорачунске мреже (недовољна резолуција мреже, тј. неадекватан број ћелија, јако неортогонална и деформисана мрежа) и грешке које настају као последица коришћења схема дискретизације чији је ред тачности мањи од унапред прописаног реда тачности који је установљен у самој методи коначних запремина.

4.4 Дискретизација Рејнолдсове једначине

Дискретизација Рејнолдсове једначине је специфична због три ствари: нелинеарности конвективног члана, начину одређивања притиска и начину дискретизације члана који одговара турбулентној дифузији.

Као што је већ речено у глави 3, Рејнолдсова и Навије-Стоксова (НС) једначина се могу свести на исти облик, који је и случају струјања нестишљивог флуида

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{U}\underline{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \{ \nu_{eff} [\nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T] \} \quad (4.78)$$

где су: \underline{U} вектор брзине у случају Навије-Стоксове једначине, вектор осредњене брзине у случају Рејнолдсове једначине, p кинематички притисак дефинисан као p/ρ и ν_{eff} ефективна вискозност. У случају НС једначина $\nu_{eff} = \nu$, док је у случају Рејнолдсових једначина $\nu_{eff} = \nu + \nu_t$, где је ν_t турбулентна вискозност, која је функција просторних координата. У оба случаја векторско поље \underline{U} мора да задовољи једначину континуитета $\nabla \cdot \underline{U} = 0$. Интеграцијом једначина у

домену V_P и од временског тренутка t до $t + \Delta t$ добијају се следеће једначине

$$\iiint_{V_P} \nabla \cdot \underline{U} \, dV = \oint_{A_P} \underline{n} \cdot \underline{U} \, dA = 0 \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{d}{dt} \iiint_{V_P} \underline{U} \, dV + \iiint_{V_P} \nabla \cdot (\underline{U}\underline{U}) \, dV \right] dt \\ & - \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \iiint_{V_P} \nabla \cdot [\nu_{eff} \nabla \underline{U} + \nu_{eff} (\nabla \underline{U})^T] \, dV \right\} dt \\ & = - \int_t^{t+\Delta t} \left[\iiint_{V_P} \nabla p \, dV \right] dt \end{aligned} \quad (4.80)$$

4.4.1 Дискретизација дифузионог члана

Приликом дискретизације дифузионог члана, један његов део, $\nabla \cdot (\nu_{eff} \nabla \underline{U})$ се третира на начин приказан у оквиру потпоглавља 4.2.1, док се други део додаје у изворски члан, из разлога ефикасности прорачуна, Villiers (2006). Наиме, у случају да се члан са транспонованим тензором градијента брзине третира као дифузиони флуks, вредност сваке компоненте брзине у произвољном временском тренутку би зависила од вредности остале две компоненте у том истом временском тренутку. Решавање таквог система једначина би захтевало велике рачунарске ресурсе, тако да се трансповани члан у временском тренутку $t + \Delta t$ се одређује на основу вредности брзина у тренутку t . Имајући то у виду, као и једначину (4.33), дискретизовани облик дифузионог члана у једначини (4.80) је

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \iiint_{V_P} \nabla \cdot (\nu_{eff} \nabla \underline{U}) + \iiint_{V_P} \nabla \cdot [\nu_{eff} (\nabla \underline{U})^T] \right\} dt \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \left\{ \oint_{A_P} \underline{n} \cdot (\nu_{eff} \nabla \underline{U}) \, dA + \iiint_{V_P} \nabla \cdot [\nu_{eff} (\nabla \underline{U})^T] \, dV \right\} dt \\ & = \sum_f \left(\nu_{eff}^{(n)} \right)_f \underline{n}_f \cdot (\nabla \underline{U})_f^{(n+1)} A_f + \left\{ \nabla \cdot [\nu_{eff}^{(n)} (\nabla \underline{U})^{(n)T}] \right\}_P V_P. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Горњи индекс (n) се односи на временски тренутак t , док се горњи индекс $(n+1)$ односи на временски тренутак $t + \Delta t$. Ефективна вискозност се одређује из посебних једначина, и решење за ν_{eff} у тренутку t се користи за одређивање \underline{U}

у тренутку $(t + \Delta t)$. Градијенти $(\nabla \underline{U})_f$ се одређује на основу њихових вредности у тежиштима ћелија за које је та површ заједничка, аналогно релацијама (4.40) и (4.41). Заменом тих израза дискретизовани дифузиони члан се може записати у облику (доњи индекс d се односи на „дифузију“)

$$a_{dP} \underline{U}_P^{(n+1)} + \sum_M a_{dM} \underline{U}_M^{(n+1)} = b_d^{(n)} \quad (4.82)$$

где су

$$a_{dP} = \sum_f \left(\nu_{eff}^{(n)} \right)_f A_f \frac{|\underline{d}_f|}{|\underline{d}_f|} \quad (4.83)$$

$$a_{dM} = - \left(\nu_{eff}^{(n)} \right)_{f,M} A_{f,M} \frac{|\underline{d}_{f,M}|}{|\underline{d}_{f,M}|} \quad (4.84)$$

$$b_{dM} = \sum_f \left(\nu_{eff}^{(n)} \right)_f A_f \underline{k}_f \cdot (\nabla \underline{U})_f^{(n)} + \left\{ \nabla \cdot \left[\nu_{eff}^{(n)} (\nabla \underline{U}^{(n)})^T \right] \right\}_P V_P. \quad (4.85)$$

У члану b_{dM} се налазе вредности физичких величина у временском тренутку t , у коме се оне сматрају познатим.

4.4.2 Дискретизација нелинеарног конвективног члана

Како је конвективни члан $\nabla \cdot (\underline{U}\underline{U})$ у Навије-Стоксовој једначини нелинеаран, он се у току процеса дискретизације мора линеаризовати. Та линеаризација се обавља тако што се вредност једног члана узима у претходној итерацији

$$\begin{aligned} \iiint_{V_P} \nabla \cdot (\underline{U}\underline{U}) &= \iint_{A_P} \underline{n} \cdot \underline{U}\underline{U} \, dA = \sum_f \underline{n}_f \cdot (\underline{U}_f \underline{U}_f) A_f \\ &\approx \sum_f (\underline{n}_f \cdot \underline{U}_f) \underline{U}_f A_f = \sum_f \left(\underline{n}_f \cdot \underline{U}_f^{(n)} \right) \underline{U}_f^{(n+1)} A_f = \sum_f \dot{V}_f^{(n)} \underline{U}_f^{(n+1)} \end{aligned} \quad (4.86)$$

Апроксимирајући последњу суму по површима контролне запремине која се јавља у једначини (4.86) са неком диференцом схемом (централна или узводна схема) добиће се израз облика (доњи индекс k се односи на конквекцију)

$$a_{kP} \underline{U}_P^{(n+1)} + \sum_M a_{kM} \underline{U}_M^{(n+1)} \quad (4.87)$$

у коме су коефицијенти a_{kP} и a_{kM} функције физичких величина у текућем временском кораку, тј. $\underline{U}_f^{(n)}$.

4.4.3 Алгебарска једначина притиска

У оквиру овог рада за повезивање поља притиска и поља брзине у НС једначини преко једначине континуитета су коришћени SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) алгоритам који су развили Patankar and Spalding (1972), за случајеве стационарних струјања и PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) алгоритам који је развио Issa (1986), за случајеве нестационарних струјања.

Полазна једначина у оба алгоритма је одговарајућа једначина притиска. Прво се на основу метода описаних у претходним поглављима и базирајући се на процедури Rhie and Chow (1983), долази до полу-дискретизоване форме једначине количине кретања (НС једначине)

$$a_P \underline{U}_P = \underline{H} - \nabla p. \quad (4.88)$$

Коефицијент a_P се може изразити као сума три коефицијента

$$a_P = a_{tP} + a_{kP} + a_{dP}, \quad (4.89)$$

у којој су: a_{tP} , a_{kP} и a_{dP} коефицијенти који потичу од дискретизације временског, конвективног и дифузионог члана.

Структура вектора \underline{H} је таква да се у њему налазе коефицијенти који одговарају суседним ћелијама, a_{kM} и a_{dM} помножени са брзинама у тежиштима тих ћелија, као и чланови b_t и b_d у коме се налазе физичке величине у текућем временском кораку, које се сматрају познатим.

$$\underline{H} = \sum_M (a_{kM} + a_{dM}) \underline{u}_M + b_t + b_d \quad (4.90)$$

Из једначине (4.88) следи да је

$$\underline{U}_P = \frac{1}{a_P} \underline{H}(\underline{U}) - \frac{1}{a_P} \nabla p. \quad (4.91)$$

Имајући у виду претпоставку да се физичке величине мењају линеарно унутар контролне запремине, интерполацијом једначине (4.91) следи да површима контролне запремине такође важи слична релација

$$\underline{U}_f = \left(\frac{\underline{H}}{a_P} \right)_f - \left(\frac{\nabla p}{a_P} \right)_f. \quad (4.92)$$

Полазећи од интегралног облика једначине континуитета (4.79), и користећи једначину (4.17) добија се њен дискретизовани облик

$$\oiint_{A_P} \underline{n} \cdot \underline{U} \, dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_f \underline{n}_f \cdot \underline{U}_f A_f = \sum_f \dot{V}_f = 0 \quad (4.93)$$

Заменом једначине (4.92) у једначину (4.93) следи да је

$$\sum_f \left(\frac{1}{a_P} \right)_f \underline{n}_f \cdot (\nabla p)_f A_f = \sum_f \underline{n}_f \cdot \left(\frac{\underline{H}}{a_P} \right)_f A_f. \quad (4.94)$$

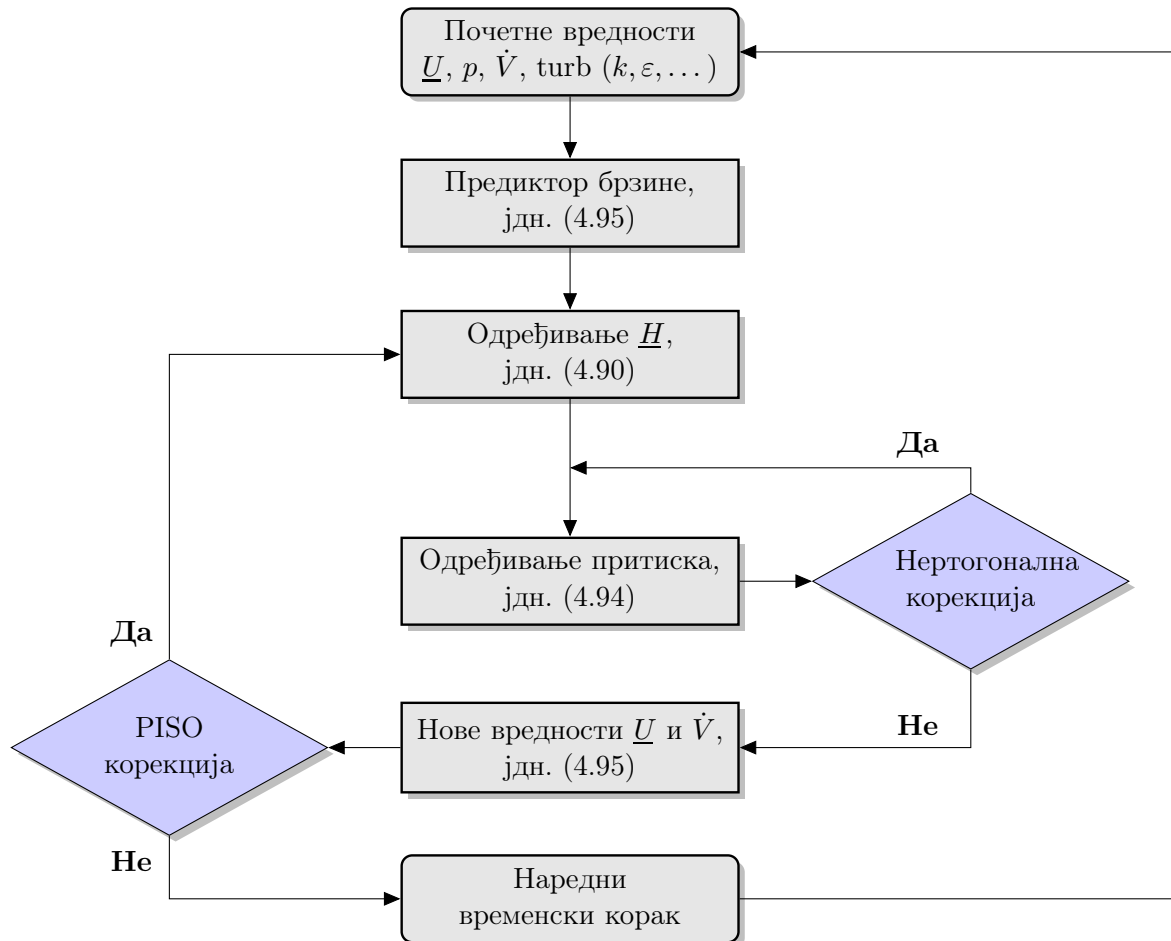
Последња једначина, заједно са дискретизованом формом једначине (4.88),

$$a_P \underline{U}_P = \underline{H} - \sum_f p_f \underline{n}_f A_f, \quad (4.95)$$

формира одговарајући систем једначина из којих се одређују непознате компоненте брзине и притисак у дефинисаној геометрији струјног простора. Тај алгоритам је приказан на слици 4.11, и он се састоји из следећих корака:

1. Прорачун почиње са почетним вредностима физичких величина, које су или почетни услови или пак резултат неке претходне нумеричке симулације.
2. На основу вредности p и \dot{V} из првог корака, одређује се привремени вектор брзине, на основу једначине (4.95). У ту сврху се обично користе итеративне методе конјугованих градијената са прекондиционерима. Добијено поље брзине не задовољава једначину континуитета.
3. На основу брзине одређене у претходном кораку, одређује се вектор \underline{H} , на основу једначине (4.90).

4. На основу вектора \underline{H} , одређеног у претходном кораку, из једначине (4.94) се одређује поље притиска, итеративним методама конјугованих градијената са прекондиционерима.



Слика 4.11. PISO алгоритам.

5. Како се неортогонална корекција приликом одређивања ∇p на површинама третира експлицитно, потребно је неколико итеративних корака да би неортогонални део достигао конвергенцију.
6. На основу одређеног поља притиска, из једначине (4.95) одређује се нове вредности вектора брзине \underline{U} и флуксева \dot{V} . Векторско поље брзине одређено у овом кораку задовољава једначину континуитета.
7. Кораци од 3-6 се понављају до тренутка када се вредности притиска и брзине више не мењају. Колико ће бити итерација у овом кораку, зависи

од вредности временског корака. Што је он мањи, и број итерација ће бити мањи.

8. Добијено решење представља почетно решење за следећи временски корак.

SIMPLE алгоритам се базира на сличном принципу, с тим што се у формирању одговарајућих система једначина користи под-релаксација. Детаљан опис овог алгоритма се може наћи у Ferziger & Peric, Ferziger and Perić (2002).

4.5 Основна структура OpenFOAM-а

За разлику од већине стандардних CFD програма, који имају тзв. функционални приступ у дизајнирању OpenFOAM је био први програмски пакет за нумеричку механику флуида који се базирао на објектно оријентисаном приступу. То омогућава да се комплексни проблеми разложе на једноставне модуле (класе), које се могу комбиновати.

4.5.1 Имплементација тензорских поља

Све физичке величине које фигуришу у једначинама механике флуида, презентованим у Глави 2 се могу представити као тензори, од нултог до другог реда, односно као скалари, вектори и тензори другог реда. С тога се у OpenFOAM-у дефинишу три основне класе: `scalarField`, `vectorField` и `tensorField`. Овим класама су у суштини описане уређене листе бројних података које представљају тензоре, али у њима није садржана информација која повезује ове бројне податке са одговарајућом позицијом у прорачунском домену, тако да се на овом нивоу могу спроводити само операције тензорске алгебре. Једна од предности C++ програмског језика је могућност коришћења истог оператора за суштински различите операције, па стога начин имплементације тензорске алгебре у великој мери подсећа на њену математичку нотацију. Тако се исти оператори могу примењивати на скаларним, векторским, и на тензорским пољима - најједноставији пример је оператор `+`, којим се сабирају одговарајућа поља. Неки оператори су карактеристични само за векторска и тензорска поља као што су скаларни, векторски или пак диадни производ, али је њихова синтакса

иста независно да ли се ради о вектору или тензору другог реда, и независно од објекта над којим се спроводе.

Следећи ниво у начину описивања тензорских поља је тзв. „геометријско тензорско поље“, у коме се, за разлику од претходне класе налази информација о позицији сваког тензора у прорачунском домену. Тако се дефинишу `volScalarField`, `volVectorField` и `volTensorField`. За дефиницију ових класа се користи енкапсулација, којом се поред информација везаних за позицију у прорачунском домену, налазе и информације о граничним условима, његове вредности у претходном временском кораку, као SI-јединице тог тензорског поља. Код свих алгебарских операције које су имплементирани изнад овог нивоа, проверава се принцип димензијске хомогености, тако да је немогуће извршити димензијски некоректне операције.

Одређивање извода тензора по просторним координата је урађено на два начина, као `finiteVolumeCalculus` или `fvc::`, где се одговарајући изводи рачунају експлицитно, и `finiteVolumeMethod` или `fvm::` где се изводи рачунају на имплицитни начин. Резултат експлицитног начина рачунања је ново „геометријско тензорско поље“, док је резултат имплицитног начина одговарајућа матрица. Класа `fvc::` нема своје приватне чланове и она само имплементира статичку функцију којом се повезују два тензорска поља. Такође, јасна разлика је направљена између самих података и операције која се над њима обавља. Тако се на пример тензор градијента брзине, срачунат експлицитно на основу познатог векторског поља брзине у коду описује као

```
volTensorField defRot = fvc::grad(U);
```

Из синтаксе се јасно види директна повезаност са математичким записом, и једноставност примене одговарајућих операција, над пољима физичких величина чије су вредности познате у простору.

У OpenFOAM-у су, поред временског извода $\partial/\partial t$ имплементирани сви просторни изводи тензора - градијент, дивергенција и ротор, односно ∇ , $\nabla \cdot$ и $\nabla \times$, респективно. Такође, Лапласов оператор је посебно имплементиран, што омогућује бољу контролу дискретизације над овим чланом. Избор методе дискретизације се налази на највишем нивоу кода. Захваљујући објектно-оријентисаном приступу, могуће је вршити тестирања и побољшања диференцијских шема независно од самог кода са којим ће евентуално бити коришћене.

4.5.2 Имплементација класа која описују парцијалне диференцијалне једначине

Као што је детаљно представљено у претходном делу ове главе, нумеричко решење проблема струјања се састоји од дискретизације полазних диференцијалних једначина (полазног математичког модела), затим њиховом трансформацијом у систем линеарних алгебарских једначина, и коначно решавањем тог система једначина, одговарајућом итеративном или директном методом.

У циљу коришћења стандардне математичке нотације и у случају матричног представљања диференцијалних једначина, дефинишу се класе `fvMatrixScalar`, `fvMatrixVector` и `fvMatrixTensor`. У оквиру ових класа се дефинишу алокација и адресирање меморије и избор солвера, и оне садрже одговарајуће матрице које представљају полазне парцијалне диференцијалне једначине. Стандардни математички оператори $+$ и $-$ се могу примењивати у оквиру ове класе, и они означавају сабирање, односно одузимање матрица. Чланови полазне диференцијалне једначине у којима фигуришу изводи тензора су обично имплементирани преко класе `fvm::`, тако да они дају директан допринос формирању матрице A . Начин третирања сваког члана је директно повезан са одговарајућим нумеричким разматрањима. Тако се на пример, као што је већ показано у оквиру потпоглавља 4.2, конвективни члан рачуна преко површинских интеграла по површи које ограничавају контролну запремину (ћелију). Стога се конвективни члан у коду означава са ознаком `div(phi, Q)`, где је `phi` флукс, поље чије се вредности дефинишу на површима које ограничавају контролну запремина, а `Q` тензорска величина која се конвективно преноси тим флуксом, чија се вредност дефинише у тежишту ћелије. Као што је већ речено, Лапласов оператор је имплементиран као посебан објекат, а не као `div(grad())`, јер је његово нумеричко третирање специфично, обзиром да он представља дифузиони члан. Изворски члан се може третирати експлицитно или имплицитно. У случају експлицитног третирања, његове вредности се смештају у матрицу \mathbf{b} једначине (4.73), док се у случају имплицитног третирања његове вредности смештају у матрицу \mathbf{A} исте једначине. При формирању изворског члана је поново искоришћено преоптерећивање оператора (енг. *operator overloading*) за операторе сабирања и множења, тако да је у случају имплицитног третирања изворског члана, могуће сабирати чланове `fvm + volTensorField`. Формирање имплицитног члана

је омогућено преко функције $\text{Sp}(\mathbf{a}, \mathbf{Q})$, где је \mathbf{Q} тензорска величина чије је решење тражи, а \mathbf{a} одговарајући коефицијент.

Имајући у виду претходно речено, могуће је формирати одговарајућу матричну једначину сумирањем одговарајућих чланова у полазној парцијалној диференцијалној једначини. На пример, формирање матрице које одговара векторском пољу брзине у Навије-Стоксова једначина (2.20) се представља као

```
fvVectorMatrix UEqn
(
    fvm::ddt(U) + fvm::div(phi, U) - fvm::laplacian(nu, U)
    == fvc::grad(p);
);
```

где је ϕ флуks сведен на јединицу површи.⁹ Тај флуks се одређује експлицитно, у претходном временског кораку. Притисак се одређује или из PISO или SIMPLE алгорита, у зависности од тога да ли се проблем третира као стационаран или нестационаран.

4.5.3 Топологија нумеричке мреже и гранични услови

Информације о прорачунском домену су повезане са одговарајућим тензорским пољима преко класе `fvMesh`, у којој су садржане листе темена, полигоналних страна, граничних зона и листа ћелија. Те листе су описане у потпоглављу 4.1. Темена ћелија одређују геометрију мреже, док је осталим листама описана топологија мреже. Листом граничних зона се дефинишу граничне површи прорачунског домена, и за сваку површ у тој листи је дефинисан примарни гранични услов (раван симетрије, зид, и сл.). Гранични услови су такође имплементирани као интегрални део сваког геометријског поља (поља тензорске величине нултог, првог или другог реда чије се решење тражи). Сви физички гранични услови се изводе из основне класе `fvPatchField`. Ова класа пружа исти тип информације, тј. има исти интерфејс, али имплементација те информације може бити различита. Ово је пример још једне важне особине програмског језика C++ - полиморфизма.

⁹Генерално, вектор флуksа $\underline{\varphi} = \rho \underline{U}$, али је у случају нестишљивог флуида, $\underline{\varphi} = \underline{U}$, јер се у том случају густина флуида може третирати као параметар.

4.5.4 Начин имплементације турбулентних модела

Како се сви турбулентни модели суштински могу представити као допунски члан $\nabla \cdot \underline{\underline{R}}$ у Навије-Стоксовој једначини, они су у структури OpenFOAM кода имплементирани као скуп различитих класа са истим интерфејсом. Све те класе се изводе, тј. наслеђују из основне виртуалне класе `turbulenceModel`. Избор модела се врши у посебној текстуалној датотеци, а на основу тога се методом показивача (`pointers`) се прави одговарајућа инстанца основне класе.

У делу кода OpenFOAM-а који је намењен за решавање стационарних или нестационарних проблема осредњеног турбулентног струјања, прво се дефинишу Рејнолдсове једначине, на начин дат у листингу 4.1.

Листинг 4.1. Представљање Рејнолдсових једначина у OpenFOAM коду.

```
fvVectorMatrix UEqn
(
    fvm::ddt(U) + fvm::div(phi, U) + turbulence->divDevReff(U)
);
solve (UEqn == -fvc::grad(p));
```

Функција `divDevReff()` је на неки начин универзална и она је садржана у свим турбулентним моделима базираним на принципу линеарне турбулентне вискозности. Она се у програмском коду дефинише на начин описан у листингу 4.2

Листинг 4.2. Представљање функције `divDevReff()` у OpenFOAM коду.

```
tmp<fvVectorMatrix> kEpsilon::divDevRef(volVectorField &U) const
{
    return
    (
        -fvm::laplacian(nuEff(), U)
        -fvc::div(nuEff()*dev(fvc::grad(U).T()))
    );
}
```

На основу синтакси датих у листингу 4.1 и 4.2 је једноставно написати и одговарајућу математичку нотацију, односно парцијалне диференцијалне једначине које су одређене тим линијама кода. Имајући у виду да је U временски осредњена

брзина, функција `divDevReff()` је дефинисана следећим математичким изразом

$$\nabla \cdot (\nu_{eff} \nabla \langle \underline{U} \rangle) + \text{div} \left\{ \nu_{eff} \text{dev} \left[(\text{grad} \langle \underline{U} \rangle)^T \right] \right\},$$

где је $\nu_{eff} = \nu_t + \nu$ ефективна вискозност, а са `dev()` је означен девијаторски део тензора градијента осредњене брзине, тј.

$$\nabla \cdot (\nu_{eff} \nabla \langle \underline{U} \rangle) + \nabla \cdot \left\{ \nu_{eff} \left[(\nabla \langle \underline{U} \rangle)^T - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \langle \underline{U} \rangle) \underline{I} \right] \right\}.$$

За случај нестишљивог флуида је $\nabla \cdot \underline{U} = 0$, па се израз своди на

$$\nabla \cdot (\nu_{eff} \nabla \langle \underline{U} \rangle) + \nabla \cdot \left[\nu_{eff} (\nabla \langle \underline{U} \rangle)^T \right] = \nabla \cdot \left[\nu_{eff} \left(\nabla \langle \underline{U} \rangle + (\nabla \langle \underline{U} \rangle)^T \right) \right]$$

Израз за `divDevReff()`, записан у индексној нотацији је облика

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{eff} \left(\frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \right) \right],$$

тако да је коначна једначина, на основу листинга 4.1 и 4.2,

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_j \rangle \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \right) \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (4.96)$$

која је идентична једначини (3.13), и при томе је $p \equiv \tilde{P}$. Дакле, листингом 4.1 је представљено формирање одговарајуће матричне једначине која одговара Рејнолдсовој једначини. Функцијом `solve` се та матрична једначина решава, позивањем изабраног итеративног метода. Као што је речено, притисак се повезује са брзинским пољем преко PISO или SIMPLE алгоритма, а детаљније објашњење имплементације PISO алгоритма у OpenFOAM коду се може наћи у Kärholm (2008).

Начин одређивања турбулентне вискозности је карактеристичан за сам турбулентни модел. На пример, у случају k - ϵ модела имплементација једначине кинетичке енергије турбуленције је дата листингом 4.3, док је имплементација моделске једначине дисипације кинетичке енергије приказана у листингу 4.4.

Листинг 4.3. Имплементација једначине кинетичке енергије турбуленције у k - ε моделу.

```

tmp<fvScalarMatrix> kEqn
(
    fvm::ddt(k_) + fvm::div(phi_, k_)
    + fvm::SuSp(-fvc::div(phi_), k_) - fvm::laplacian(DkEff(), k_)
    ==
    G - fvm::Sp(epsilon_/k_, k_)
);

kEqn().relax();
solve(kEqn);
bound(k_, k0_);

```

У оба листинга се појављују допунски чланови који одговарају дискретизацији конвективног члана, и који на изврстан начин врше корекцију при његовом одређивању. Наиме, физички и математички посматрано у случају струјања нестишљивог флуида, конвективни чланови у једначини преноса, било кинетичке енергије турбуленције, било дисипације се могу написати у „строгој форми“ одржања као

$$\underline{U} \cdot \nabla k = \nabla \cdot (k \underline{U}), \quad \underline{U} \cdot \nabla \varepsilon = \nabla \cdot (\varepsilon \underline{U}),$$

јер је $\nabla \cdot \underline{U} \equiv \text{div} \underline{U} = 0$ на основу једначине континуитета. Како у току нумеричког прорачуна дивергенција векторског поља брзине може бити и различита од нуле (али веома блиска нули), онда се одузимањем члана $k \nabla \cdot \underline{U}$, добија тачнија вредност конвективног члана у једначинама за k и ε . Записано математички,

$$\underline{U} \cdot \nabla k = \nabla \cdot (k \underline{U}) - k \nabla \cdot \underline{U} = \text{div}(k \underline{U}) - k \text{div} \underline{U},$$

а представљање у програмском коду одговара члановима

$$\text{fvm}::\text{div}(\text{phi}_, \text{k}_) + \text{fvm}::\text{SuSp}(-\text{fvc}::\text{div}(\text{phi}_), \text{k}_),$$

јер је вектор флукса $\text{phi} \equiv \underline{U}$ у случају нестишљивог флуида. Додатни члан се рачуна експлицитно на основу одређеног флукса у претходном итеративном кораку, и он представља изворски члан (види једначину (4.9)). Функцијом SuSp се описује начин третирања изворског члана, о чему ће бити више речи нешто касније. У оба листинга којима се дефинишу једначине преноса

Листинг 4.4. Имплементација једначине дисипације кинетичке енергије турбуленције у k - ϵ моделу.

```
tmp<fvScalarMatrix> epsEqn
(
    fvm::ddt(epsilon_)
  + fvm::div(phi_, epsilon_)
  + fvm::SuSp(-fvc::div(phi_), epsilon_)
  - fvm::laplacian(DepsilonEff(), epsilon_)
  ==
    C1_*G*epsilon_/k_
  - fvm::Sp(C2_*epsilon_/k_, epsilon_)
);

epsEqn().relax();
solve(epsEqn);
bound(epsilon_, epsilon0_);
```

кинетичке енергије турбуленције и дисипације, појављује се величина G . Она представља члан продукције кинетичке енергије турбуленције, док величине $DkEff()$ и $DepsilonEff()$ које представљају ефективне дифузионе коефицијенте у једначини кинетичке енергије турбуленције, односно дисипације. Дефиниција тих величина је дата у листингу 4.5.

Листинг 4.5. Имплементација продукције кинетичке енергије турбуленције и ефективних коефицијената дифузије у једначинима кинетичке енергије турбуленције и дисипације у k - ϵ моделу.

```
volScalarField G("RASModel::G",nut_*2*magSqr(symm(fvc::grad(U)))));
DkEff() = nut_ + nu();
DepsilonEff() = nut_/Sigma_eps + nu();
```

Из записа израза за одређивање продукције кинетичке енергије турбуленције у листингу 4.5 следи да је она дефинисана као производ турбулентне вискозности и двоструке вредности квадрата интензитета симетричног дела тензора градијента осредњене брзине. Аналогни математички запис би био следећи: прво, симетрични део тензора градијента осредњене брзине је дефинисан са

$$\text{symm} [\text{grad} \langle \underline{U} \rangle] = \frac{1}{2} \left[\nabla \langle \underline{U} \rangle + (\nabla \langle \underline{U} \rangle)^T \right] \equiv \langle \underline{\underline{S}} \rangle$$

и он представља осредњени тензор брзине деформисања. Квадрат интензитета

тог тензора је његова прва инваријанта, дефинисана са

$$\text{mag}(\langle \underline{\underline{S}} \rangle) \equiv \|\langle \underline{\underline{S}} \rangle\| = \sqrt{\langle \underline{\underline{S}} \rangle : \langle \underline{\underline{S}} \rangle} = \sqrt{\langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle} \Rightarrow \|\underline{\underline{S}}\|^2 = \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle.$$

Дакле, математички запис у индексној нотацији величине \mathbf{G} из листинга 4.5 је

$$\begin{aligned} G &= 2\nu_t \langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{2}\nu_t \left(\frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{2}\nu_t \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) \\ &= \nu_t \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (4.97)$$

што је еквивалентно са једначином (3.24).

Ефективни коефицијенти дифузије у имплементацији једначина кинетичке енергије турбуленције и дисипације су потпуно аналогни одговарајућим дифузионим коефицијентима у једначинама (3.35) и (3.36), имајући у виду да је $\sigma_k = 1$ у стандардном k - ϵ моделу (Табела 3.1).

Функцијама Sp и SuSp су дефинисани начини третирања изворског члана. Функција Sp означава имплицитни начин третирања изворског члана, тако да његове вредности се налазе унутар матрице \mathbf{A} у једначини (4.73), чиме се повећава њена дијагонална доминантност. Функцијом SuSp се изворски члан третира имплицитно, у случају да је он негативан, и експлицитно у случају да је он позитиван. У случају експлицитног третирања вредности изворског члана се смештају унутар вектора \mathbf{b} једначине (4.73).

Функцијама $\text{kEqn.relax}()$ и $\text{epsEqn.relax}()$ над решењима из претходног итеративног корака се врши подрелаксација, чиме се пригушују нагле осцилације решења у току итеративног поступка.

Функцијом $\text{bound}()$ се вредности кинетичке енергије турбуленције и дисипације ограничавају као увек позитивне.

И на крају турбулентна вискозност, аналогно једначини (3.31) је одређена изразом

$$\text{nut}_ = \text{Cmu}_ * \text{sqr}(k)/(\text{epsilon}_ + \text{epsilonSmall}_);$$

где је $\text{epsilonSmall}_$ константа чија је вредност 10^{-15} , и која је додата да би избегло дељење са нулом.

Имплементација зидних функција

Имплементација зидних функција на основу којих се дефинишу гранични услови за карактеристичне величине турбуленције директно следи из теоријске анализе презентоване у потпоглављу 3.3.2, једначине (3.40) и (3.41). Начин на који су те једначине имплементирани у OpenFOAM коду је дат у листингу 4.6. Константе $C_{\mu 25}$ и $C_{\mu 75}$ су у ствари једнаке $C_{\mu}^{0,25}$ и $C_{\mu}^{0,75}$ респективно, и оне

Листинг 4.6. Начин имплементације граничног услова за дисипацију кинетичке енергије турбуленције применом зидних функција у OpenFOAM коду.

```

forAll(nutw, faceI)
{
    label faceCellI = patch().faceCells()[faceI];

    scalar yPlus = Cmu25*y[faceI]*sqrt(k[faceCellI])/nuw[faceI];

    epsilon[faceCellI] = Cmu75*pow(k[faceCellI], 1.5)/(kappa_*y[faceI]);

    if (yPlus > yPlusLam)
    {
        G[faceCellI] =
            (nutw[faceI] + nuw[faceI])
            *magGradUw[faceI]
            *Cmu25*sqrt(k[faceCellI])
            /(kappa_*y[faceI]);
    }
    else
    {
        G[faceCellI] = 0.0;
    }
}

```

су дефинисане у претходним линијама кода. Константа C_{μ} је константна k - ε модела, и њена вредност је обично једнака 0,09. Величина G је продукција кинетичке енергије турбуленције ($G=P_k$), јер се у литератури често користи ознака G за ту величину (види нпр. Davidson (2004)). На основу претходних разматрања у оквиру овог поглавља, једноставно следи да карактеристични редови кода датог у листингу 4.6 на основу којих се одређује дисипација и продукција у зони зида

$$\varepsilon = \frac{C_{\mu}^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad \text{и} \quad G \equiv P_k = \frac{(\nu_w + \nu_{t,w}) C_{\mu}^{1/4} k^{1/2}}{\kappa y}. \quad (4.98)$$

Поређењем са једначинама (3.40) и (3.41), може се закључити да се у оригиналној имплементацији OpenFOAM-а, продукција рачуна преко ефективне вискозности. При турбулентним струјањима са великим вредностима Рејнолдсовог броја, турбулентна вискозност је неколико редова величина већа од кинематичке вискозности, тако да се у тим случајевима ефективна вискозност практично своди само на турбулентну вискозност.

4.5.5 Сопствена имплементација SSG модела у OpenFOAM коду

Имплементација SSG модела у OpenFOAM коду је урађена модификацијом постојећег LRR напонског модела, јер је једина разлика између та два модела у начину моделирања тензора редистрибуције. Како се у OpenFOAM-у физичке величине представљају као објекти, а не преко својих компоненти, пре саме имплементације биле је неопходно написати једначину (3.88) у инваријантном облику, у коме ће сви чланови бити представљени као објекти. Том приликом ће се подразумевати да је $\underline{U} \equiv \langle \underline{U} \rangle$ вектор осредњене брзине, $\underline{\underline{S}} \equiv \langle \underline{\underline{S}} \rangle$ и осредњени тензор брзине деформисања и $\underline{\underline{W}} \equiv \langle \underline{\underline{W}} \rangle$ тензор вртложности. Имајући то у виду, једначина (3.88) је облика

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & \underbrace{-(C_1\varepsilon + C_1^*P_k)b_{ij}}_{\Pi_{ij,1}} + \underbrace{C_2\varepsilon \left(b_{ik}b_{kj} - \frac{1}{3}b_{kl}b_{kl} \right)}_{\Pi_{ij,2}} \\ & + \underbrace{\left(C_3 - C_3^*\sqrt{\Pi_b^*} \right) kS_{ij}}_{\Pi_{ij,3}} + \underbrace{C_4k \left(b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{kl}S_{kl}\delta_{ij} \right)}_{\Pi_{ij,4}} \\ & + \underbrace{C_5k (b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik})}_{\Pi_{ij,5}}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

односно, написана у инваријантном облику

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\Pi}}_1 + \underline{\underline{\Pi}}_2 + \underline{\underline{\Pi}}_3 + \underline{\underline{\Pi}}_4 + \underline{\underline{\Pi}}_5. \quad (4.100)$$

Сада је неопходно на основу записа у индексној нотацији, и на основу израза за компоненте тензора $\Pi_{ij,1} - \Pi_{ij,5}$ датих у једначини (4.99) одредити изразе за

тензоре $\underline{\underline{\Pi}}_1 - \underline{\underline{\Pi}}_5$.

Тензор $\underline{\underline{\Pi}}_1$ је одређен изразом

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Pi}}_1 &= -(C_1\varepsilon + C_1^*P_k)\underline{\underline{b}} = -(C_1\varepsilon + C_1^*P_k) \left(\frac{1}{\text{tr}(\underline{\underline{R}})} \underline{\underline{R}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \right) \\ &= - \left(C_1 \frac{\varepsilon}{2k} + C_1^* \frac{P_k}{2k} \right) \underline{\underline{R}} + \frac{1}{3} (C_1\varepsilon + C_1^*P_k) \underline{\underline{I}}\end{aligned}\quad (4.101)$$

Тензор $\underline{\underline{\Pi}}_2$ је одређен изразом

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Pi}}_1 &= C_2\varepsilon \left(\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{b}} : \underline{\underline{b}} \right) = C_2\varepsilon \left[\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{b}}^T \cdot \underline{\underline{b}}) \right] \\ &= C_2\varepsilon \left[\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}) \right] \equiv C_2\varepsilon \text{dev}(\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}),\end{aligned}\quad (4.102)$$

где је са dev означен девијаторски део тензора.

Тензор $\underline{\underline{\Pi}}_3$ је одређен изразом

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Pi}}_3 &= \left(C_3 - C_3^* \sqrt{\Pi_b^*} \right) k \underline{\underline{S}} = \left(C_3 - C_3^* \sqrt{\underline{\underline{b}} : \underline{\underline{b}}} \right) k \underline{\underline{S}} \\ &= \left(C_3 - C_3^* \|\underline{\underline{b}}\| \right) k \underline{\underline{S}},\end{aligned}\quad (4.103)$$

где је $\|\underline{\underline{b}}\| \equiv \sqrt{\underline{\underline{b}} : \underline{\underline{b}}}$ норма тензора $\underline{\underline{b}}$, што је уједно и његова друга инваријанта, док осредњени тензор брзине деформисања представља симетрични део тензора градијента брзине, тј.

$$S = \text{symm}(\nabla \underline{U}) \equiv \frac{1}{2} \left[\nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \right]. \quad (4.104)$$

Имајући у виду да су осредњени тензор брзине деформисања и нормализовани тензор анизотропије симетрични тензори, односно $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^T$, тј. $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{b}}^T$, тензор $\underline{\underline{\Pi}}_4$ је одређен изразом

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Pi}}_4 &= C_4 k \left[\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{S}}^T + \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{b}}^T - \frac{2}{3} (\underline{\underline{b}} : \underline{\underline{S}}) \underline{\underline{I}} \right] = C_4 k \left[\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{S}}^T \cdot \underline{\underline{b}}^T - \frac{2}{3} (\underline{\underline{b}} : \underline{\underline{S}}) \underline{\underline{I}} \right] \\ &= C_4 k \left[\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{S}} + (\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{S}})^T - \frac{2}{3} (\underline{\underline{b}} : \underline{\underline{S}}) \underline{\underline{I}} \right] \\ &= 2C_4 k \left[\text{symm}(\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{S}}) - \frac{1}{3} (\underline{\underline{b}} : \underline{\underline{S}}) \underline{\underline{I}} \right]\end{aligned}\quad (4.105)$$

У последњем члану једначине (4.100), односно (4.99), фигурише тензор вртложности који представља асиметрични део транспонованог тензора градијента брзине, тј.

$$\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2} \left[(\nabla \underline{U})^T - \nabla \underline{U} \right]. \quad (4.106)$$

Како је $\underline{\underline{W}}$ асиметрични тензор, $\underline{\underline{W}} = -\underline{\underline{W}}^T$, тензор $\underline{\underline{\Pi}}_5$ је одређен изразом:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Pi}}_5 &= C_5 k (\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{W}}^T + \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{b}}^T) = C_5 k (-\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{W}} - \underline{\underline{W}}^T \cdot \underline{\underline{b}}^T) \\ &= -C_5 k \left[\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{W}} + (\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{W}})^T \right] = -2 C_5 k \text{symm} (\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{W}}) \end{aligned} \quad (4.107)$$

Заменом једначина (4.101)-(4.107) у једначину (4.100), добија се инваријантна форма моделске једначине тензора редистрибуције у случају SSG модела,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Pi}} &= - \left(C_1 \frac{\varepsilon}{2k} + C_1^* \frac{P_k}{2k} \right) \underline{\underline{R}} + \frac{1}{3} (C_1 \varepsilon + C_1^* P_k) \underline{\underline{I}} \\ &\quad + C_2 \varepsilon \left[\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}) \right] + (C_3 - C_3^* \|\underline{\underline{b}}\|) k \underline{\underline{S}} \\ &\quad + C_4 k \left[\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{S}} + (\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{S}})^T - \frac{2}{3} (\underline{\underline{b}} : \underline{\underline{S}}) \underline{\underline{I}} \right] + C_5 k (\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{W}}^T + \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{b}}^T) \end{aligned} \quad (4.108)$$

Инваријантне форме моделских једначина осталих чланова на десној страјни једначине преноса турбулентних напона,

$$\frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial t} + \nabla \cdot [\langle \underline{U} \rangle \otimes \underline{\underline{R}}] = \underline{\underline{P}} - \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\Pi}} + \underline{\underline{D}} + \nu \nabla^2 \underline{\underline{R}} \quad (4.109)$$

су:

- тензор продукције, јдн. (3.50)

$$\underline{\underline{P}} = - \left[\underline{\underline{R}} \cdot \nabla \underline{U} + (\underline{\underline{R}} \cdot \nabla \underline{U})^T \right] = -2 \text{symm} (\underline{\underline{R}} \cdot \nabla \underline{U}) \quad (4.110)$$

- тензор дисипације, јдн. (3.62)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{2}{3} \varepsilon \underline{\underline{I}} \quad (4.111)$$

- тензор дифузије

$$\underline{\underline{D}} = \nabla \cdot \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \underline{\underline{R}} \cdot \nabla \underline{\underline{R}} \right] \quad (4.112)$$

Тензор дисипације у једначини (4.109) одређује на основу свог изотропног дела, односно дисипације ε . Она се, као што је већ речено, одређује из своје једначине преноса, чији је запис у индексној нотацији једначином дат (3.63). Њен инваријантни облик је

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k + \nabla \cdot \left[\nu \nabla \varepsilon + C_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \underline{\underline{R}} \cdot \nabla \varepsilon \right] - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (4.113)$$

где је P_k продукција кинетичке енергије турбуленције дефинисана једначином (3.19), односно

$$P_k = -\underline{\underline{R}} : (\nabla \underline{U})^T = -\frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{P}}) \quad (4.114)$$

Листинг 4.7. Начин имплементација једначине дисипације у SSG моделу.

```
volSymmTensorField P = -twoSymm(R_ & fvc::grad(U_));
volScalarField Pk = 0.5*mag(tr(P));

tmp<fvScalarMatrix> epsEqn
(
    fvm::ddt(epsilon_)
  + fvm::div(phi_, epsilon_)
  + fvm::SuSp(-fvc::div(phi_), epsilon_)
  - fvm::laplacian(nu(), epsilon_)
  - fvm::laplacian(Ceps_*(k_/epsilon_)*R_, epsilon_)
  ==
    C1_*Pk*epsilon_/k_
  - fvm::Sp(C2_*epsilon_/k_, epsilon_)
);

epsEqn().relax();
solve(epsEqn);
bound(epsilon_, epsilon0_);
```

Једначина (4.113) се у коду имплементира пре једначине преноса турбулентних напона, јер вредности ε одређене у њој представљају изворски члан у једначини преноса турбулентних напона. Део програмског кода који се односи на

имплементацију моделске једначине дисипације је дат у листингу 4.7

Функцијом `twoSymm` се одређује двострука вредност симетричног дела тензора, па је први ред у листингу 4.7 аналоган једначини (4.110), односно њиме се представља одређивање тензора продукције на основу познатих поља брзине и турбулентних напона из претходног итеративног корака. Са Pk је означена продукција кинетичке енергије турбуленције. Последњи члан једначине (4.113), $-C_{\varepsilon 2}\varepsilon^2/k$, посматрано са аспекта генералне форме једначине преноса (4.9) у методи контролних запремина, представља изворски члан. Како је он увек негативан, јер су k и ε увек позитивни, он се третира имплицитно, јер ће његове негативне вредности директно утицати на повећање дијагоналне доминантности матрице која се добија дискретизацијом једначине преноса дисипације ε .

Листинг 4.8. Имплементација једначине преноса турбулентних напона у OpenFOAM код на основу SSG модела.

```

volTensorField nablaU = fvc::grad(U_);
volTensorField S = symm(nablaU);
volTensorField W = 0.5*(nablaU.T() - nablaU);
volSymmTensorField B = dev(R_)/(2*k_);
volScalarField IIb = B && B;
volScalarField IIIb = det(B);

tmp<fvSymmTensorMatrix> REqn
(
    fvm::ddt(R_)
  + fvm::div(phi_, R_)
  + fvm::SuSp(-fvc::div(phi_), R_)
  - fvm::laplacian(nu(), R_)
  - fvm::laplacian(Cs_*(k_/epsilon_)*R_, R_)
  ==
    P - 2.0/3.0*epsilon_*I
  - fvm::Sp(Cssg1_*epsilon_/(2*k_), R_)
  - fvm::Sp(Cssg1Ast_*Pk/(2*k_), R_)
  + 1.0/3.0*(Csg1_*epsilon_ + Csg1Ast_*Pk)*I
  + Csg2_*epsilon_*dev(B & B)
  + (Csg3_ - Csg3Ast_*mag(B))*k_*S
  + Csg4_*k_*(twoSymm(B & S.T()) - 2.0/3.0*(B && S)*I)
  + Csg5_*k_*twoSymm(B & W.T())
);

REqn().relax();
solve(REqn);

```

Имплементација једначине преноса турбулентних напона се директно базира на једначинама (4.100)-(4.112). Пре тога је потребно одредити остале величине

које се појављују у тензору редистрибуције, а то су осредњени тензор брзине деформисања и вртложности, као и тензор анизотропије. Први корак у том смеру је експлицитно израчунавање компоненти тензора брзине деформисања, у сваком временском (итеративном) кораку, у свакој ћелији мреже. То је дефинисано првим редом у листингу 4.8. Следећа два реда се односе на експлицитно израчунавање тензора брзине деформисања и тензора вртложности. Величина \mathbf{B} представља тензор анизотропије, а \mathbf{II}^b и \mathbf{III}^b су његова друга и трећа инваријанта. Трећа инваријанта не фигурише у изразу за SSG модел, али она је одређена да би се током прорачуна пратиле њихове вредности.

Део тензора $\underline{\underline{\Pi}}_1$, јдн. (4.99), у коме фигурише тензор турбулентних напона се третира имплицитно, тако да се вредности тог члана смештају у матрицу \mathbf{A} система линеарних једначина чијим се решавањем добијају расподеле турбулентних напона у ћелијама прорачунског домена.

All models are wrong, but some models are useful.

(Сви модели су погрешни, али су неки корисни.)

George E. P. Box (1919-2013)

5

Прорачун осносиметричног вихорног струјања у цеви

У овој глави се презентују резултати нумеричких прорачуна на случајевима вихорног струјања у цеви, коришћењем турбулентних модела из главе 3 и нумеричких метода датих у глави 4. Генератор вихора се у прорачунима у оквиру ове главе не моделира, већ се као улазни подаци задају измерене вредности физичких величина у првом мерном пресеку. Проблем се разматра као дводимензијски-осносиметричан и статистички стационаран, па се нумерички решава систем једначина (3.7), (3.8). Ради једноставности записа, временски осредњене пројекције брзина у аксијалном, радијалном и обимском правцу ће бити означене са U , V и W .

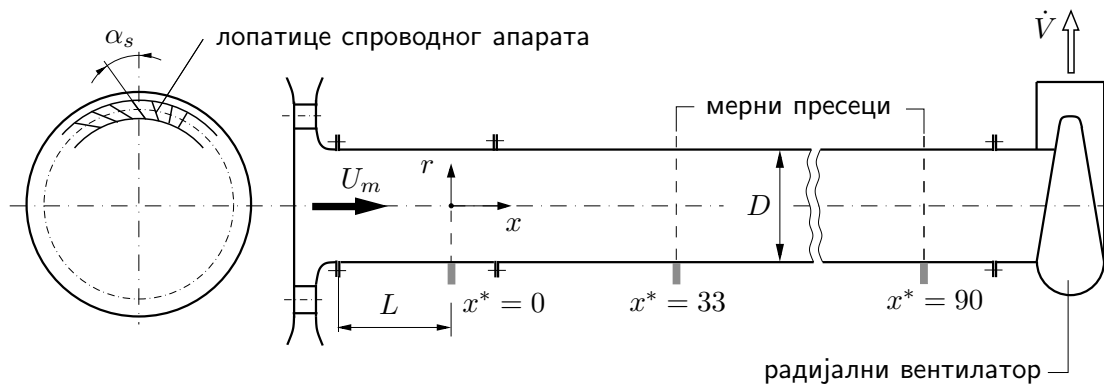
5.1 Осносиметрично вихорно струјање у цеви са профилом Ранкиновог вртлога

На слици 5.1 је приказана скица инсталације за експериментално истраживање вихорног струјања у цеви, Čantrak (1981).¹

Инсталација се састоји од радијалног спроводног апарата, мерне цевне деонице и радијалног вентилатора. Посредством радијалног спроводног апарата,

¹Љубазношћу проф. Светислава Чантрака били су ми доступни експериментални резултати коришћени у овој глави, на чему му искрено и од срца захваљујем

чије подешљиве лопатице граде угао α_s са радијалним правцем, аксијалном струјању се суперпонира компонента брзине у обимском правцу. На овај начин је било могуће произвести дефинисано струјно поље блиско моделу Ранкиновог вртлога. За $\alpha_s \neq 0$ настају све три компоненте брзине, дакле, како у аксијалном, тако и у радијалном и обимском правцу. Прелаз од мерне деонице ка вентилатору остварен је еластичном везом, а иза вентилатора је деоница за мерење и контролу запреминског протока. Калибрација пригушнице (излазног млазника) је извршено у експериментима помоћу улазног млазника. Пречник цеви је $D = 2R = 200 \text{ mm}$, средња брзина $U_m = 4\dot{V}/D^2\pi = 21,41 \text{ m/s}$ и Рејнолдсов број $Re = U_m D/\nu = 2,835 \cdot 10^5$. Мерења су обављена у седам пресека цеви, у 12 сврсисходно распоређених тачака дуж полупречика сваког попречног пресека и за три јачине вихора² $\theta_p = 0.229$, $\theta_p = 0.385$ и $\theta_p = 0.429$ које одговарају угловима $\alpha_s = 15^\circ$, $\alpha_s = 30^\circ$ и $\alpha_s = 45^\circ$ лопатица спроводног апарата.



Слика 5.1. Скица инсталације на којој је вршено експериментално истраживање вихорног струјања у правој цеви представљено у Čantrak (1981). Бездимензијско растојање x^* је дефинисано као $x^* = x/R$.

Комерцијалне тројичне DISA сонде са усијаним влакнима су коришћене за мерење тренутних вредности све три компоненте брзине. Истраживање турбулентних карактеристика је спроведено како аналитички, тако и у фреквентном домену, применом дигиталне статистичке анализе за обраду више стотина хиљада тренутних вредности. Сви остали детаљи о експерименталном штанду, мерним методама, статистичкој обради мерних података, конструктивним

²У оригиналном раду јачина вихора θ_p се дефинише као

$$\theta_p = \frac{\int_0^R rW^2U \, dr}{\int_0^R rU^3 \, dr},$$

где је U временски осредњена аксијална, а W временски осредњена обимска брзина.

карактеристикама сонде и грешкама при мерењу дати су у раду Čantrak (1981).

5.1.1 Дефинисање неопходних параметера за нумерички прорачун струјања

Поступак нумеричког решавања проблема струјања се састоји од неколико корака. То су:

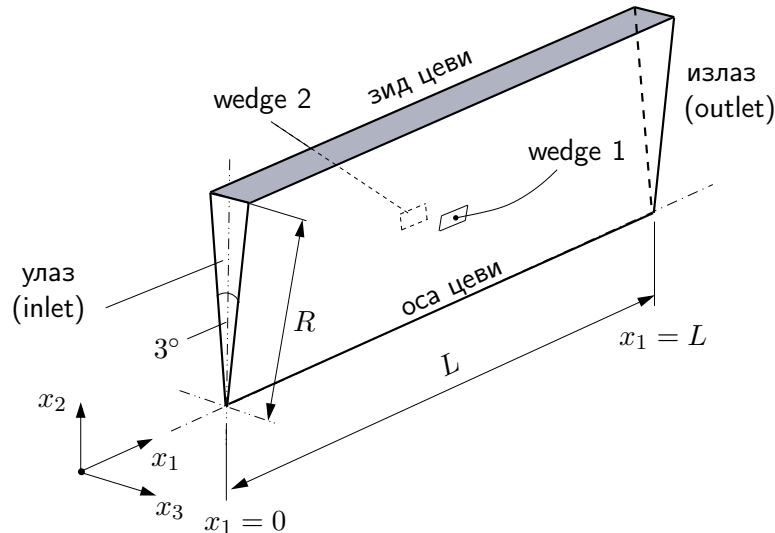
- генерисање геометрије или домена у коме се одвија струјање
- просторна дискретизација тог домена генерисањем нумеричке мреже
- дефинисање граничних и почетних услова физичких величина
- избор турбулентног модела, начина дискретизације чланова у једначинама које се решавају, као и избор вредности карактеристичних параметара (временски корак у случају нестационарних проблема, избор коефицијентата надрелаксације, итд.)
- избор итеративне методе за решавање система линеарних једначина које се добијају просторно-временском дискретизацијом
- решавање једначина, на основу свих предходно дефинисаних услова
- анализа и представљање резултата (ако је претходни корак довео до резултата; ако није онда се морају проверити сви претходни кораци)

Прорачунски домен и генерисање нумеричке мреже

Како се проблем третира као равански-осносиметричан, прорачунски домен представља исечак цеви, облика тростране призме. База те призме је једнакокраки троугао, чији су краци једнаки полупречнику R цеви, а његова висина једнала дужини цеви, тј. дужини прорачунског домена, слика 5.2. Угао између кракова једнакокраког троугла мора бити мањи од 5° , па је усвојена његова вредност од 3° . Како је последњи мерни пресек одређен координатом $x^* = 90$, а полупречник $R = 0.1 \text{ m}$ изабрана је дужина прорачунског домена од $L = 10 \text{ m}$.

Нумеричка мрежа је генерисана користећи апликације уграђене у OpenFOAM. Као прво, мрежа се дефинише као блок-структурирана, у одговарајућој ASCII

текстуалној датотеци (`blockMeshDict`). У тој датотеци темена, блокови и граничне површи се морају дефинисати следећи одговарајућа правила.³ Прорачунски домен је подељен на два блока, тачно на половини полупречника цеви.



Слика 5.2. Прорачунски домен код осносиметричног струјања

Расподела ћелија у мрежи је неуниформна, како у правцу x_1 , тако и x_2 правцу. У зони око зида и у зони око осе ширина ћелија се смањује, док се идући од улаза ка излазу ширина ћелија благо повећава, због очекиваних већих градијената физичких величина у тим зонама. У x_3 правцу мрежа има само једну ћелију, јер се проблем разматра као равански-осносиметрични. У том смислу, на бочним странама у истој ASCII датотеци латералне површи тростране призме се дефинишу као две одвојене површи типа `wedge`. Дефиниција тог типа површи је таква да су вредности физичких величина у одговарајућим тачкама које су симетричне у односу на осу x_2 , а које леже на површима типа `wedge`, једнаке. То је уједно и основни гранични услов за све физичке величине на тим површима. Са апликацијом `blockMesh` тако дефинисана блок-структурирана мрежа се трансформише у неструктурирану мрежу, односно листу датотека дефинисаних у потпоглављу 4.1. Коришћењем GNU M4 макро процесора⁴ дефинисани су одговарајући параметри мреже као што су димензије прорачунског домена, ширина прве ћелије која се налази непосредно уз зид, затим број ћелија у блоковима, и сл. На тај начин је омогућено да се нова нумеричка мрежа за геометрију приказану на слици 5.2 генерише само променом жељених параметара.

³Види OpenFOAM User Guide, <http://www.openfoam.org/docs/user>

⁴<http://www.gnu.org/software/m4>

Дефинисање граничних услова

Улазна површ (inlet). На улазу су задате вредности компоненти брзина и компоненти тензора турбулентних напона (за случај примене напонских модела). Те вредности нису константне по попречном пресеку, али су у датој тачки фиксне, и не мењају се у времену. Вредности величина у центрима површи које се налазе између мерних тачака су одређене интерполационом методом инверзне удаљености са тежинским коефицијентима (inverse distance weighting). У случају примене двоједначинских модела задате су измерене вредности кинетичке енергије турбуленције, док су вредности дисипације у мерним тачкама процењене на основу формуле

$$\varepsilon = C_{\mu}^{0,75} \frac{k^{1,5}}{l_0} = C_{\mu}^{0,75} \frac{k^{1,5}}{0,2 R}, \quad (5.1)$$

где је l_0 карактеристична размера макровртлога на улазној површи, за коју је претпостављено да је једнака 20% полупречника цеви.

За притисак на улазној површи задат је Фон Нојманов гранични услов, где је узето да је градијент притиска у правцу струјања једнак нули.

Зид цеви (wall). На зиду цеви је задато да су све компоненте вектора брзине једнаке нули, док је за притисак задат градијент притиска једнак нули у правцу нормале на зид.⁵ У случају двоједначинских модела су коришћене зидне функције као гранични услови за k , ε и ω , док су у случају формулације модела за мале вредности Рејнолдсових бројева задато да је $k = 0$, а градијент ε у правцу нормале на зид једнак нули.

Излаз (outlet). На излазу је задат градијент у правцу нормале на површ једнак нули за брзину, и све турбулентне величине. Како је код вихорног струјања промена притиска у радијалном правцу јако изражена и пропорционална квадрату обимске брзине, за притисак је коришћен гранични услов у коме је задата константна средња вредност притиска на површи. Како је расподела

⁵Тај гранични услов за притисак на зиду директно следи из анализе једначине (1.5), из које следи

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)_w = \left(\frac{W^2}{r} \right)_w \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)_w = 0$$

јер је на зиду $r = R$, а обимска брзина $W = 0$.

притиска директно одређена брзинским пољем, приликом рачунања притиска коришћењем SIMPLE алгоритма, добиће се јединствена расподела притиска која одговара израчунаој брзинском пољу на излазу, чија је средња вредност задата. Како се ради о струјању нестишљивог флуида, сама вредност притиска нема значаја, већ разлика притиска, тако да је усвојена средња вредност $P = 0$ на овој површи.

Дефинисање метода дискретизације

Изабране су методе дискретизације другог реда тачности за све конвективне чланове. Ради стабилности прорачуна, у почетку прорачуна је коришћена узводна схема за карактеристике турбуленције (кинетичка енергија и дисипација и тензор турбулентних напона), па је после одређеног броја итерација метод дискретизације промењен на други ред тачности.

У случају прорачуна са двоједначинским моделима, у свим случајевима струјање је разматрано као стационарно, па су коришћене методе надрелаксације. Код прорачуна коришћењем напонских модела, вредности коефицијената надрелаксације су имале велики утицај на стабилност и конвергенцију прорачуна, и њихове вредности за турбулентне карактеристике су биле мање у поређењу са вредностима код двоједначинских модела. У случају струјања са већим интензитетом вихора, стационарни прорачун са напонским моделима није конвергирао. У тим случајевима проблем је третиран и прорачунаван као нестационаран, са применом Ојлерове методе дискретизације временског члана. Разлог за то је чињеница да присуство временског члана повећава дијагоналну доминантност матрице, што директно утиче на побољшање стабилности нумеричког прорачуна. Током тог прорачуна, вредности физичких величина постепено теже вредностима које одговарају стационарном стању. Код прорачуна са SSG моделом, у свим случајевима је коришћен овај приступ, тј. струјање је разматрано као нестационарно.

Избор метода решавања система линеарних једначина

Како је решавање једначине за притисак најзахтевније по питању броја итерација, за њу је изабрана је геометријска мултигрид метода, или скраћено GAMG (Geometric Agglomerated Algebraic Multi Grid) метода. За пригушивање компоненти високих фреквенција вектора грешке у итеративном поступку GAMG методе, изабрана метода конјугованих градијената са прекондиционери-ма. За остале величине изабране су итеративне методе са пригушивање компоненти високих фреквенција вектора грешке, Гаус-Зајделовом методом. У избору метода за решавање система линеарних једначина не постоје стриктна правила, и она се могу разликовати од проблема до проблема. Правилан избор методе може да повећа стабилност и да смањи време прорачуна, али у сваком случају све методе би требале да дају исте резултате, са унапред прописаном грешком. Тако је изабрано да је критеријум за крај прорачуна да резидуали свих величина буду мањи од 10^{-6} . Више детаља о итеративним методама решавања система линеарних једначина које су јављају у нумеричкој механици флуида се може, између осталог, наћи у Saad (2003).

5.1.2 Нумерички резултати добијени применом двоједначинских модела

За случај модела који користе зидне функције, изабрана је вредност од 1,5 mm за ширину прве ћелије непосредно уз зид, што је одговарало вредности од $y^+ \sim 25$. Код прорачуна са двоједначинским моделима који прорачунавају вискозни подслој, изабрана је вредност од 0,01 mm за ширину прве ћелије непосредно уз зид, што је одговарало вредности од $y^+ \sim 0.4$.

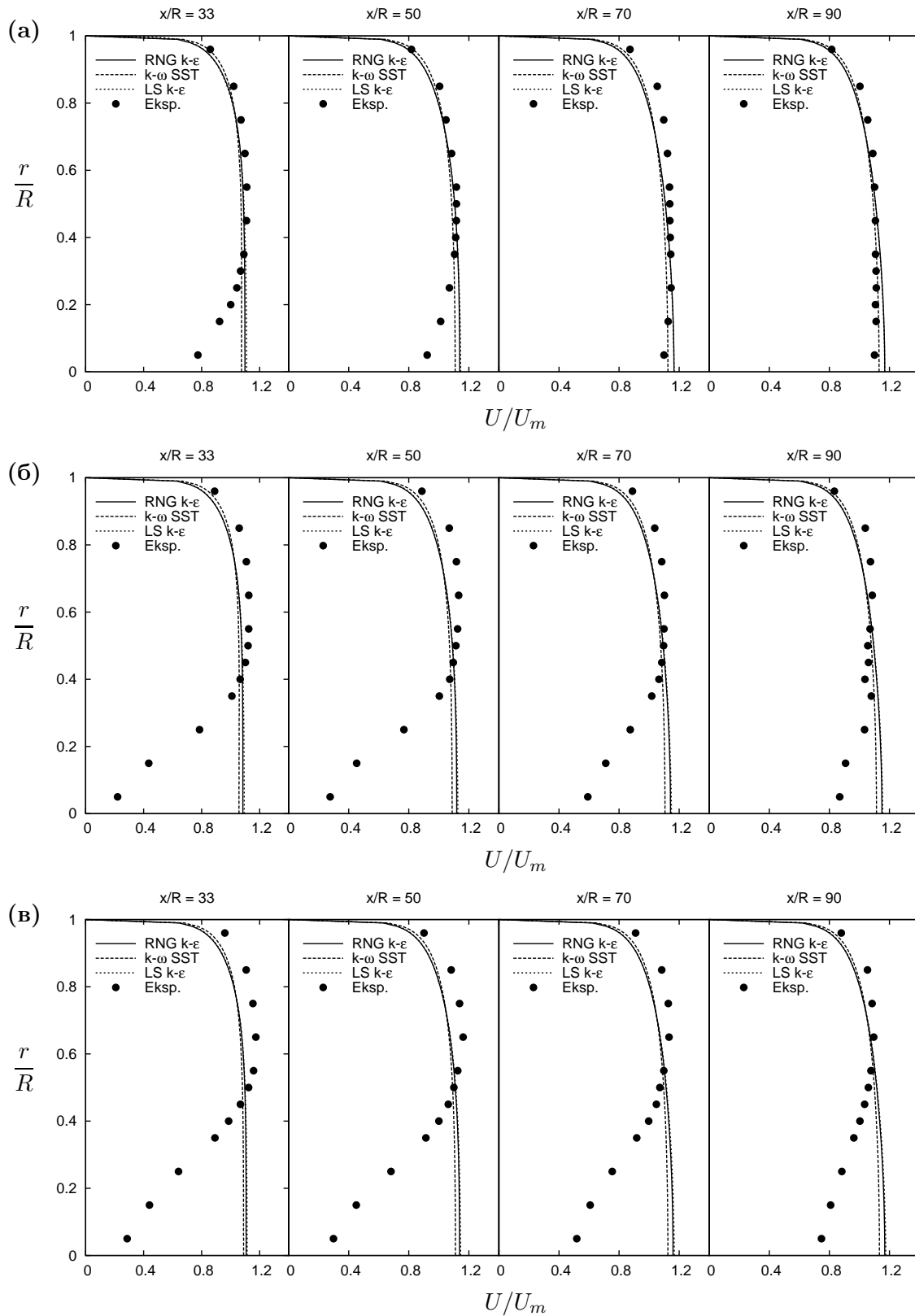
На сликама 5.3 и 5.4 су приказана поређења експерименталних резултата из Čantrak (1981) и резултата добијених нумеричким прорачуном за временски осредњену аксијалну и обимску брзину, коришћењем RNG $k-\varepsilon$ модела, затим Лаундер-Шарминог $k-\varepsilon$ (LS $k-\varepsilon$) модела за мале вредности Рејнолдсовог броја и $k-\omega$ SST модела, за три различита интензитета вихора. Може се приметити да сви модели дају приближно иста предвиђања профила брзина у свим мерним пресецима, и да су у готово свим случајевима присутна велика неслагања између експерименталних и нумеричких резултата како у случају аксијалне, тако

и у случају временски осредњене обимске брзине.

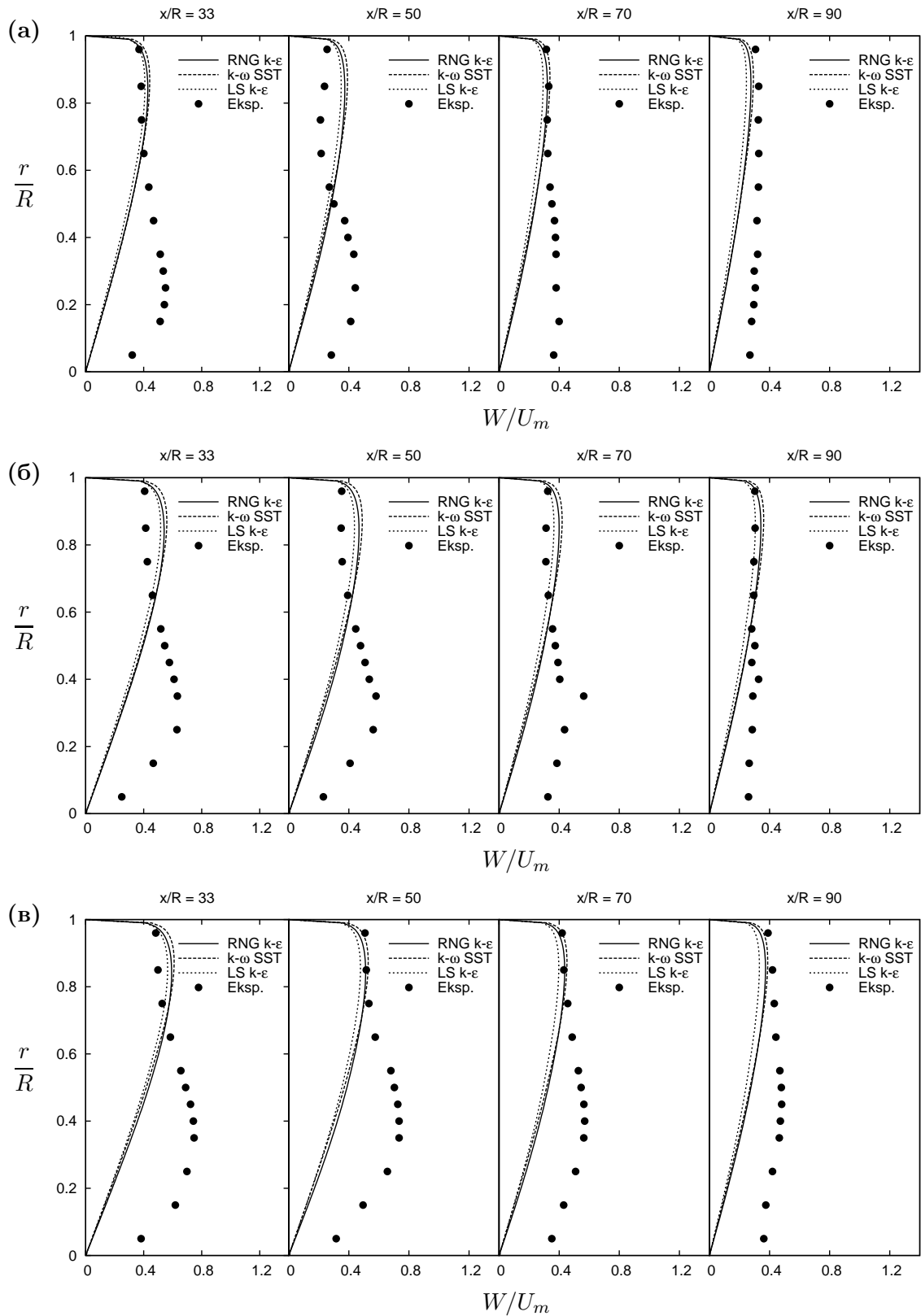
Неслагање између експерименталних и нумеричких резултата у случају аксијалне брзине је посебно изражено у зони око осе цеви и та одступања постају све израженија са повећањем јачине вихора. Сви двоједначински модели предвиђају готово идентичне профиле аксијалних брзина у свим мерним пресецима и за све јачине вихора - профиле који одговарају потпуно развијеном турбулентном струјању. Посматрајући резултате у случају струјања са најмањим интензитетом вихора ($\theta_p = 0,229$), неслагање између експерименталних и нумеричких резултата је најизраженије у пресеку најближем генератору вихора одређеним бездимензијским растојањем $x/R = 33$. У низструјним пресецима степен неслагања постаје све мањи, и у пресеку $x/R = 90$ неслагања практично и нема, и $k-\omega$ SST модел даје нешто боља предвиђања за профил аксијалне брзине у односу на RNG $k-\varepsilon$ и LS $k-\varepsilon$ модел. Са повећањем интензитета вихора, аксијална брзина се све више смањује у зони око осе цеви, и потребна је већа дужина цеви од $x/R = 90$ да би се успоставио профил потпуно развијеног турбулентног струјања.

Сви тестирани модели, изузев у зони зида, дају физички погрешно предвиђање профила обимске брзине. Иако је на улазу задат профил Ранкиновог вртлога сви двоједначински модели предвиђају профил ротације крутог тела. Вредности обимске брзине у зони $0,6 < r/R < 1$ добијене нумеричким прорачуном су у добром слагању са експерименталним вредностима, али у области од осе до половине полупречника присутно је велико неслагање, посебно у мерним пресецима ближим генератору вихора. Са повећањем интензитета вихора, неслагање је још израженије, слика 5.4.

Вредности кинетичке енергије турбуленције добијене нумеричким прорачуном су у области око осе цеви неколико редова величина мање од експерименталних вредности. У зони зида модели такође предвиђају мање вредности кинетичке енергије турбуленције него што то показују експерименти. На слици 5.5 су приказани профили кинетичке енергије у карактеристичним мерним пресецима за јачину вихора $\theta_p = 0,229$. Сви наведени трендови су такође присутни и веће јачине вихора, с тим што су у том случају одступања у зони око осе цеви још већа.

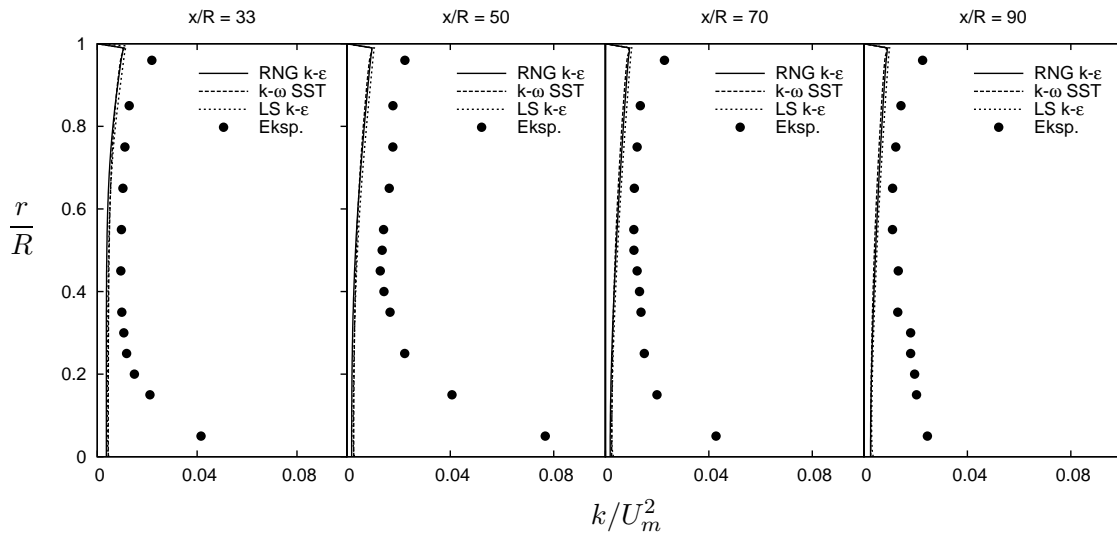


Слика 5.3. Поређење експерименталних резултата са резултатима нумеричког прорачуна коришћењем двоједначинских модела за профиле временски осредњених аксијалних брзина, за три различите јачине вихора. (а) $\theta_p = 0,229$; (б) $\theta_p = 0,385$ и (в) $\theta_p = 0,429$.



Слика 5.4. Поређење експерименталних резултата са резултатима нумеричког прорачуна коришћењем двоједначинских модела за профиле временски осредњених обимских брзина, за три различите јачине вихора. (а) $\theta_p = 0,229$; (б) $\theta_p = 0,385$ и (в) $\theta_p = 0,429$.

Спроведена истраживања су показала да сви двоједначински модели базирани на линеарном концепту турбулентне вискозности нису погодни за нумерички прорачун осносиметричног вихорног струјања са Ранкиновим профилем обимске брзине, посебно у случају струјања са великим интензитетом вихора. Свакако да је главни разлог за то основна претпоставка на којој се ти модели базирају, а то је да је тензор турбулентних напона преко скаларне турбулентне вискозности линеарно пропорционалан осредњеном тензору брзине деформисања. Такође, последица Бусинескове хипотезе је предвиђање да су нормални турбулентни напони приближно једнаки међусобно, док експерименти показују да је анизотропност турбулентних напона јако изражена у оваквом струјном пољу.



Слика 5.5. Поређење експерименталних резултата са резултатима нумеричког прорачуна коришћењем двоједначинских модела за профиле кинетичке енергије турбуленције за јачину вихора $\theta_p = 0,229$.

У оквиру овог дела истраживања, тестирани су нелинеарни, квадратни и кубни $k-\epsilon$ модел, презентовани у Shih et al. (1993). Ни ови модели нису показали предност у односу на остале моделе базирани на линеарном концепту турбулентне вискозности за овај случај вихорног струјања. Ови модели су показали као мање робустни, и било је потребно око четири пута више итерација у односу на моделе базирани на линеарном концепту. У истраживању датом у Huang et al. (2006) наводи се да се у случају цеви која ротира константном угаоном брзином око своје подужне осе једино нелинеарни модели са кубном зависношћу између турбулентних напона и осредњених тензора брзине деформисања

и тензора вртложности могу предвидети профил обимске брзине различит од профила који одговара ротацији крутог тела. Међутим, у овом случају вихорног струјања у цеви, чак и кубни k - ε модел предвиђа увек профил принудног вртлога за обимску брзину у читавом пресеку цеви.

5.1.3 Нумерички резултати добијени применом LG и SSG напонских модела

У оквиру овог потпоглавља дају се резултати нумеричких прорачуна коришћењем напонских модела. Спроведена су тестирања три напонска модела: LRR, LG и SSG. Модели LRR и LG дају сличне резултате, како за осредњене брзине тако и турбулентне напоне, с тим што се LG модел показао као робустнији, и генерално гледано његови резултати су у нешто бољем слагању са резултатима експеримента него резултати LRR модела. То се посебно односи на зону зида. Како је разлика у ова два модела у члану рефлексije притиска од зида који је присутан у LG моделу, док је он занемарен у LRR моделу (види потпоглавље 3.4.3), може се закључити да то утиче на нешто тачније резултате.

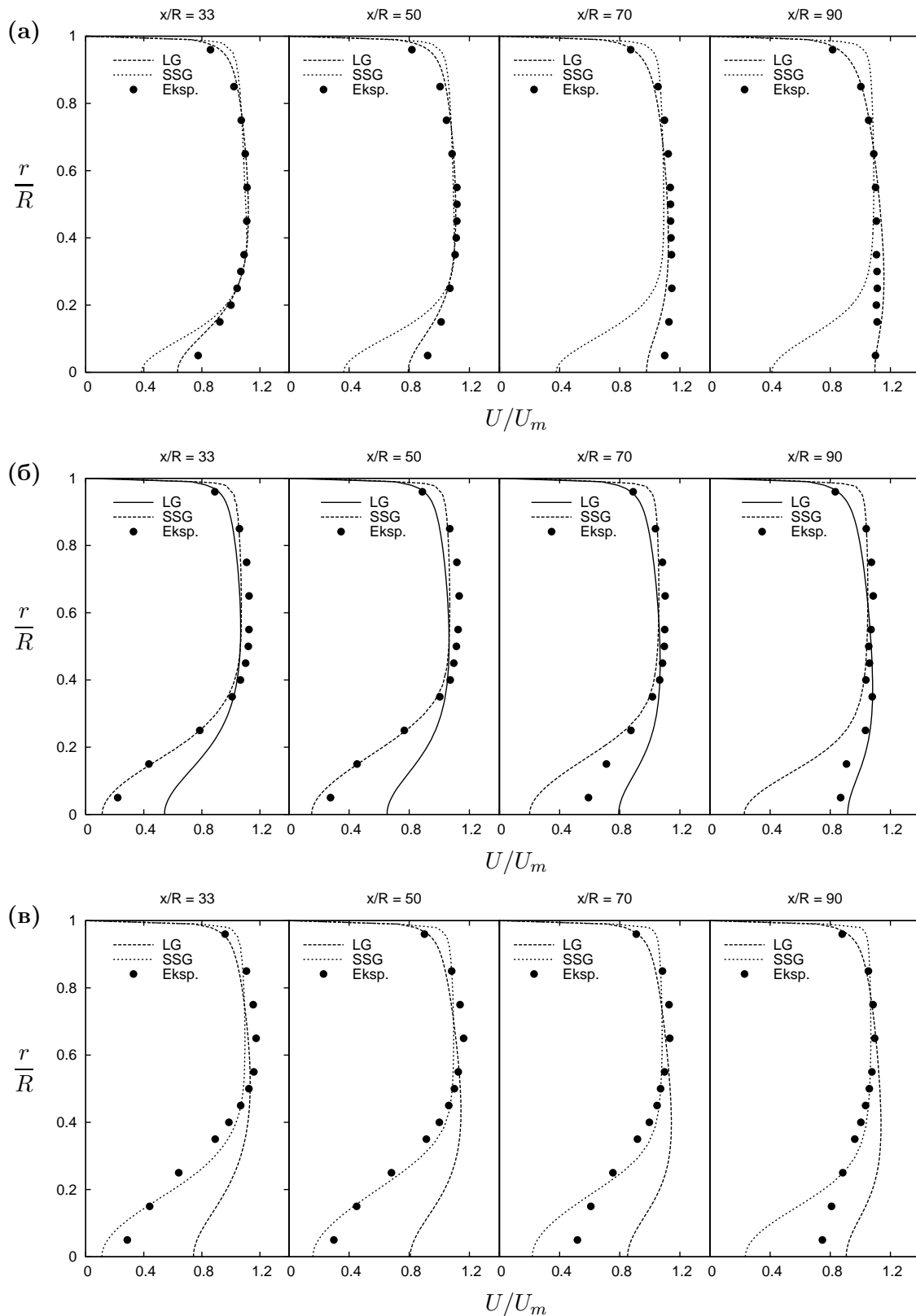
На сликама 5.6 и 5.7 је приказано поређење експерименталних и нумеричких резултата за профиле осредњених брзина добијених коришћењем напонских модела. Оно што се прво примећује је знатно боље, како квалитативно тако и квантитативно слагање са експерименталним резултатима у већини мерних пресека, него у случају резултата двоједначинских модела, приказаних на сликама 5.3 и 5.4.

На основу резултата за профиле временски осредњених брзина, може се констатовати да SSG модел предвиђа већи градијент аксијалне брзине у зони зида, односно већу вредност брзине у првој мерној тачки у поређењу са LG моделом. Могуће објашњење те појаве је у чињеници да LG модел обухвата утицај рефлексije притиска од зида, као и његово пригушење у тој области, док у формулацији SSG модела тог члана нема. Оба модела користе зидне функције, па то такође може имати утицаја на тачност прорачуна у зони зида. Међутим, експериментална истраживања презентована у Kitoh (1991), у коме је такође истраживано вихорно струјање у правој цеви су показала да се универзални логаритамски профил слаже у доброј мери са резултатима експеримента

све до вредности $y^+ = 200$, што наводи на закључак да је коришћење зидних функција као граничног услова на зиду цеви оправдано. С друге стране, Јакирлић et al. (2002) су нумеричким истраживањем дошли до закључака да НЈ (Напјалић-Јакирлић) напонски модел који прорачунава и вискозни подслој даје нешто боља слагања са експерименталним резултатима презентованим у Китох (1991). Међутим, таква формулација модела чини прорачун знатно компликованијим са аспекта стабилности прорачуна и конвергенције решења.

У зони слободног вртлога, у коме аксијална брзина има веома мали градијент у радијалном правцу, оба модела дају приближно исте резултате који су у веома добром слагању са резултатима експеримената. Најочљивија разлика између резултата LG и SSG модела за поље аксијалних брзина је у зони око осе цеви, посебно за веће интензитета вихора - слика 5.6(б) и (в). LG модел предвиђа већу брзину у осе него што то показују експерименти, док SSG модел у пресецима са мањом бездимензијском координатом x/R даје знатно боље резултате у тој зони. Међутим, са друге стране SSG модел предвиђа знатно спорији пораст аксијалне брзине у осе него што то показује експеримент, тако да је присутно релативно велико неслагање са експерименталним резултатима у последња два мерна пресека, $x/R = 70$ и $x/R = 90$. Тај спорији пораст аксијалне брзине у осе је такође примећен у Chen and Lin (1999), у коме је такође вршен нумерички прорачун вихорног струјања у цеви са профилем Ранкиновог вртлога коришћен SSG модела. Аутори су користили експерименталне резултате презентоване у Китох (1991). Резултати SSG модела су показали боље слагање са експерименталним резултатима за аксијалну брзину у зони осе цеви, али ако се упореде ти експериментални резултати са резултатима експеримената који се разматрају у оквиру овог поглавља, профили аксијалних брзина задржавају малу вредност у осе цеви на знатно већој бездимензијској дужини. Такође, у тим експериментима је било присутно и повратно струјање у зони језгра. Тај феномен није присутан у експериментима који се овде разматрају, чак и за највећу вредност интензитета вихора.

За разлику од двоједначинских модела који предвиђају профил принудног вртлога обимске брзине, оба напонска модела предвиђају профиле типа Ранкиновог вртлога, што је у квалитативном слагању са експериментом. Може се констатовати да LG модел даје нешто боља слагања са експерименталним резултатима за профиле обимских брзина. Модел SSG предвиђа знатно спорије



Слика 5.6. Поређење експерименталних резултата са резултатима нумеричког прорачуна коришћењем напонских модела за профиле временски осредњених аксијалних брзина, за три различите јачине вихора. (а) $\theta_p = 0,229$; (б) $\theta_p = 0,385$ и (в) $\theta_p = 0,429$.

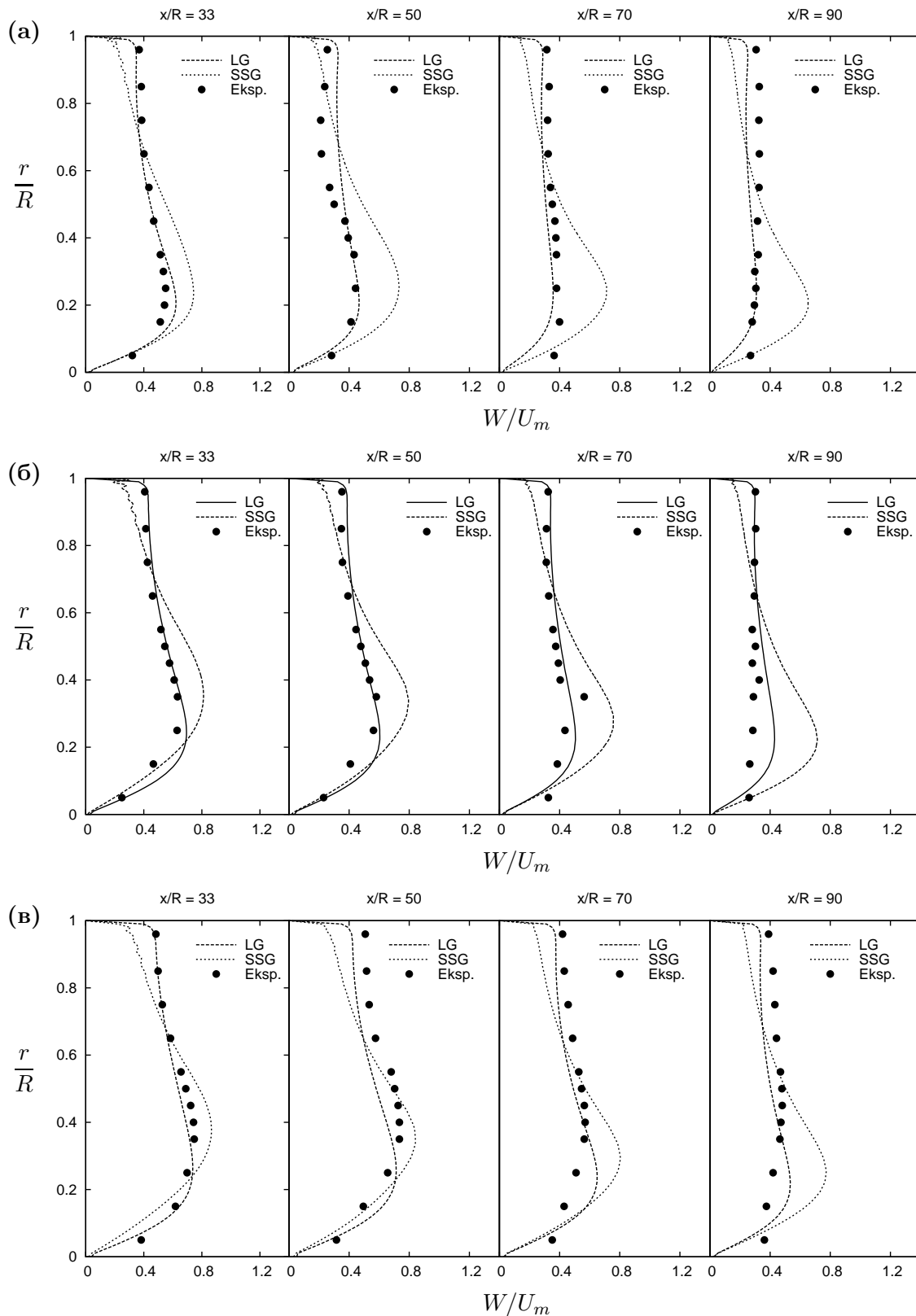
промене интензитета обимске брзине у аксијалном правцу, односно знатно спорије одумирање вихора. Такође, максимум профила обимске брзине се у низструјним пресецима помера ближе радијусу, тј. SSG модел предвиђа смањење зоне језгра у коме профил ротира као круто тело у низструјним пресецима, док LG модел предвиђа приближно константу дебљину зоне језгра. SSG модел предвиђа и нешто веће вредности обимске брзине у низструјним пресецима, са јасно израженим профилем Ранкиновог вртлога чак и последњем мерном пресеку. Модел LG, као и експеримент предвиђа да је у том мерном пресеку обимска брзина приближно константна. У области $0,7 < r/R < 1$ вредности обимске брзине које предвиђа SSG модел предвиђа су мање од измерених вредности, и у самој зони зида, тј. у првој мерној тачки тачки најближој зиду ($r/R = 0,96$) та одступања су највећа. Са друге стране, LG модел даје добра квантативна предвиђања обимске брзине у тој области.

У табели 5.1 су дата поређења вредности вихорних бројева срачунатих на основу формуле (1.3) у посматраним мерним пресецима. Може се закључити да у случају вихора средње јачине SSG модел даје прилично добра слагања вредности вихорног броја са његовим вредностима срачунатим на основу експерименталних података. За остале две јачине вихора LG модел даје вредности вихорног броја које су ближе вредностима срачунатим на основу експерименталних података.

Табела 5.1. Вредности вихорних бројева у посматраним мерним пресецима за разне јачине вихора.

		Мерни пресеци				
		0	33	50	70	90
Вихор 15	Експеримент	0,302	0,256	0,164	0,201	0,198
	LG модел	0,302	0,239	0,209	0,179	0,153
	SSG модел	0,302	0,229	0,201	0,172	0,147
Вихор 30	Експеримент	0,403	0,296	0,258	0,220	0,192
	LG модел	0,403	0,314	0,276	0,236	0,202
	SSG модел	0,403	0,300	0,262	0,223	0,190
Вихор 45	Експеримент	0,433	0,357	0,321	0,304	0,282
	LG модел	0,433	0,334	0,295	0,255	0,220
	SSG модел	0,433	0,324	0,282	0,246	0,225

Оно што се примећује на основу података у табели 5.1 је да се за јачину вихора $\theta_p = 0,229$ (вихор 15), у случају експерименталних података, вредност



Слика 5.7. Поређење експерименталних резултата са резултатима нумеричког прорачуна коришћењем напонских модела за профиле временски осредњених обимских брзина, за три различите јачине вихора. (а) $\theta_p = 0,229$; (б) $\theta_p = 0,385$ и (в) $\theta_p = 0,429$.

вихорног броја у пресеку $x^* = 50$ мања од вредности у низструном пресеку $x^* = 70$. Ово је показатељ да се експериментални резултати у том мерном пресеку требају узети са одређеном дозом резерве. Каснија анализа расподеле турбулентних напона у том пресеку ће показати физички немогућа стања турбуленције, тако да се релевантност експерименталних података у том пресеку може одбацити.

Овде још треба додати и следеће. Обично се код вихорних струјања у цеви осредњена радијална компонента брзине, како у мерењима, тако и при нумеричким симулацијама занемарује. Она је заиста, по правилу за ред величине мања од остале две компоненте брзине. Међутим, управо су градијенти радијалне брзине у радијалном правцу оно што одређује промене аксијалне брзине у аксијалном правцу. То директно следи из једначине континуитета за случај осносиметричног струјања, јдн. А.28. Из једначине континуитета следи да је

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - \left(\frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial r} \right).$$

У оси цеви, а и на зиду, временски осредњена радијална брзина је физички једнака нули,⁶ што значи да је први члан на десној страни једначине једнак нули, па је промена аксијалне брзине дуж осе цеви одређена изразом

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{r=0} = - \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=0}. \quad (5.2)$$

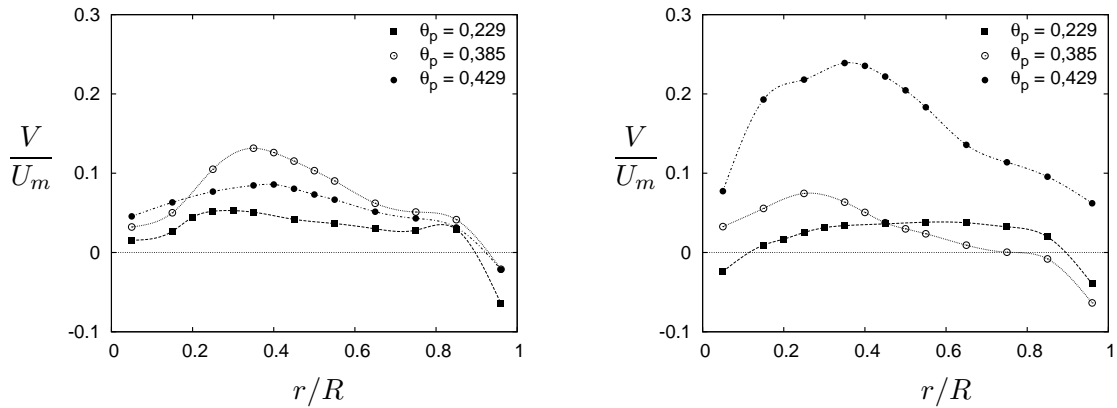
Са друге стране, како је на зиду $U = 0$, па је и $\partial_x U = 0$. Онда следи да је и

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=R} = 0 \quad (5.3)$$

Дакле, ако осредњена аксијална брзина у оси расте у низструјном правцу, што показују експерименти и резултати нумеричких прорачуна, онда, на основу једначине континуитета следи да градијенти радијалне брзине у радијалном

⁶Овде треба напоменути да је јако тешко генерисати вихор који ће бити осносиметричан, јер као што је познато и најмањи поремећаји итекако мењају структуру турбуленције. Тако да је у експериментима могуће добити да је радијална компонента брзине, а самим тим и обимска, различите од нуле у оси цеви. Генерално, методом анемометрије са усијаним влакнима је готово и немогуће мерити у самој оси цеви, јер ту долази до наглих промена правца, па и смера вектора брзине.

правцу морају бити негативни. У том случају, ако је у оси $V = 0$, онда следи да радијална брзина у непосредној близини осе мора бити негативна, да би градијент $\partial_r V$ био негативан у осе. Резултати нумеричких прорачуна напонским моделима показују да функција $U = U(x)$ у осе није константно растућа функција, за разлику од двоједначинским модела који предвиђају константан раст, до достизање константне вредности на релативно малом растојању од улаза.



Слика 5.8. Експериментални профили радијалне брзине у мерним пресецима $x/R = 0$ и $x/R = 33$ за све три јачине вихора.

На слици 5.8 су приказани експериментални резултати за профиле осредњених радијалних брзина у мерним пресецима $x/R = 0$ и $x/R = 33$. Профили радијалне брзине у пресеку $x/R = 0$ су задати на улазу. Подразумевајући да је у осе радијална брзина једнака нули, може се констатовати да је у пресеку $x/R = 0$ њен градијент у осе најмањи за најслабији вихор, и да он расте са порастом јачине вихора. Међутим, може се претпоставити да је тај градијент позитиван, што повлачи за собом да је у том пресеку у осе $\partial_x U < 0$. У пресеку $x/R = 33$ градијент радијалне брзина у случају најслабијег вихора мења знак и постаје негативан, док се за вихор највећег интензитета он драстично повећава, као и уосталом и сам интензитет брзине. У зони зида су присутне промене знака радијалне брзине. Имајући у виду да је $V = 0$ на зиду, а такође је $\partial_r V = 0$, у области $0,96 < r/R < 1$ су присутне нагле промене градијента радијалне брзине у радијалном правцу. Ове сложене промене радијалне брзине добијене експериментом се не рефлектују на толико изражене промене осредњене аксијалне брзине у аксијалном правцу, тако да резултате мерења осредњене радијалне

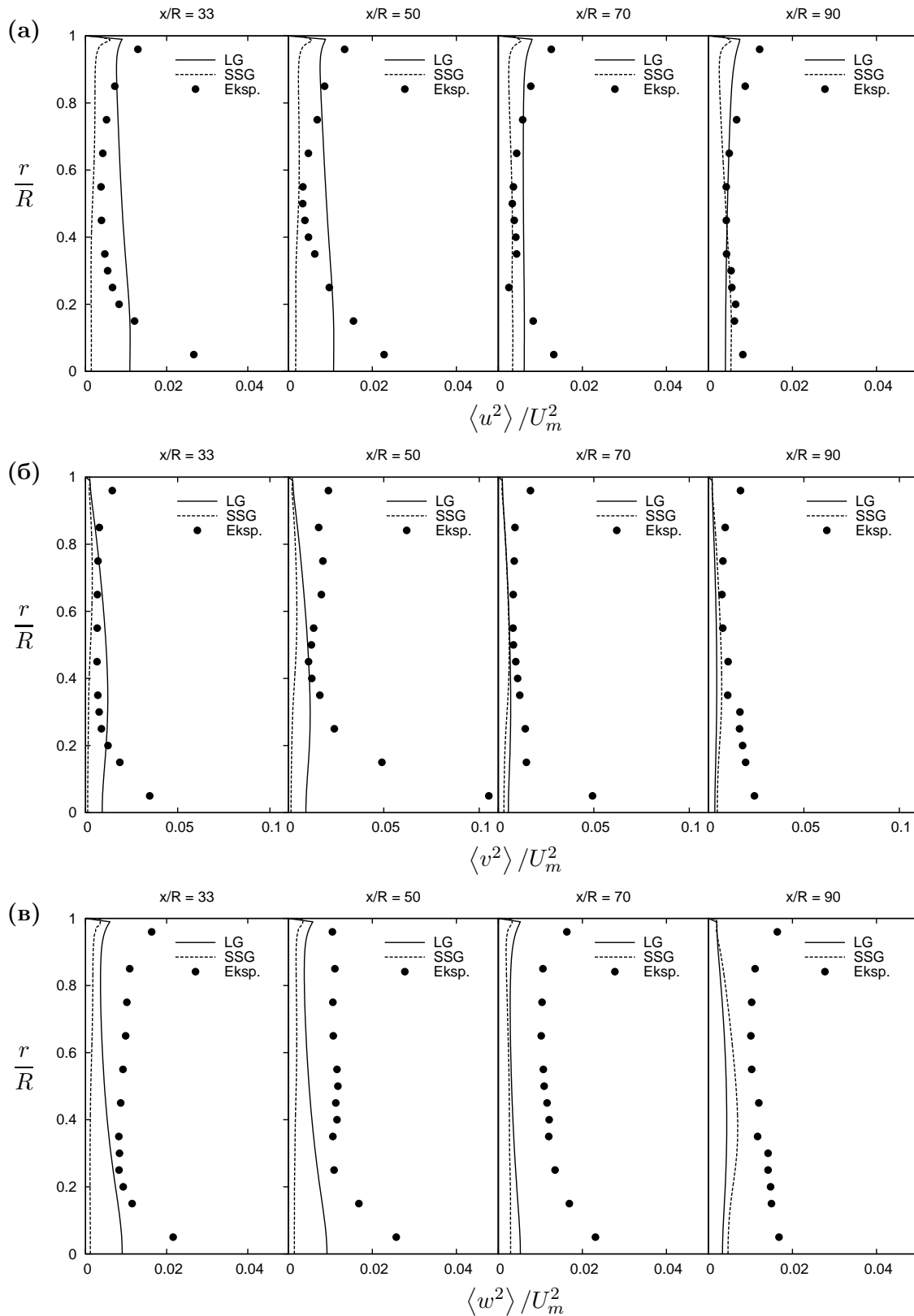
брзине треба узети са одређеном резервом. На основу измереног профила радијалне брзине на улазу, сви модели предвиђају радијалну брзину која је неколико редова величина мања од експерименталних вредности, као и веома изражене, „тестерасте“ осцилације у близини зида. Свакако да је основни разлог за то коришћење зидних функција као граничног услова на зиду, у комбинацији са задатим експерименталним профилем радијалне брзине на улазу.

На сликама 5.9 и 5.10 су приказана поређења профила нормалних турбулентних напона за вредности интензитета вихора $\theta_p = 0,229$ у карактеристичним мерним пресецима. Оба напонска модела не могу да предвиде велике вредности нормалних напона у зони осе цеви.⁷ То се посебно односи на нормални напон $\langle v^2 \rangle$, за који експерименти показују да има највећу вредност у осе. За разлику од анизотропне структуре турбуленције у осе цеви добијене експериментом, оба напонска модела предвиђају приближно изотропну структуру турбуленције у осе цеви, тј. $\langle u^2 \rangle = \langle w^2 \rangle \approx \langle v^2 \rangle$. До сличних закључака су дошли и Hogg and Leschziner (1989) при прорачуну вихорног струјања у комори за сагоревање, као и Jakirlić et al. (2002) при прорачуну вихорног струјања у цеви, коришћењем LRR-IP и LG модела. Аутори као разлог за то наводе линеарну формулацију „брзог“ дела редистрибутивног члана, јдн. (3.84). Међутим, резултати SSG модела у којој је та формулација нелинеарна, тачније квадратна, показују сличан тренд предвиђања изотропне турбуленције у осе.

При томе су вредности нормалних напона у осе у случају SSG модела чак и мање од вредности које даје LG модел. Потенцијално, модел са кубном зависношћу би могао дати боље резултате, и даља истраживања ће свакако обухватити имплементацију и тестирање модела који садрже кубну зависност у формулацији „брзог“ члана тензора редистрибуције. Такође, евентуална побољшања је

⁷Физички посматрано, у тој зони продукција нормалних напона је веома изражена због постојања градијената осредњених брзина, а такође и због самог постојања обимске брзине. Тако су на пример компоненте тензора продукције нормалних турбулентних напона, дефинисаног једначином (3.50), у случају осносиметричног вихорног струјања одређене једначинама

$$\begin{aligned}
 P_{11} = P_{\langle u^2 \rangle} &= -2 \left[\langle u^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial x} + \langle uv \rangle \frac{\partial U}{\partial r} \right] \\
 P_{22} = P_{\langle v^2 \rangle} &= -2 \left[\langle uv \rangle \frac{\partial V}{\partial x} + \langle v^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial r} \right] + 2 \frac{W}{r} \langle vw \rangle \\
 P_{33} = P_{\langle w^2 \rangle} &= -2 \left[\langle uw \rangle \frac{\partial W}{\partial x} + \langle vw \rangle \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{V}{r} \langle w^2 \rangle \right].
 \end{aligned}$$

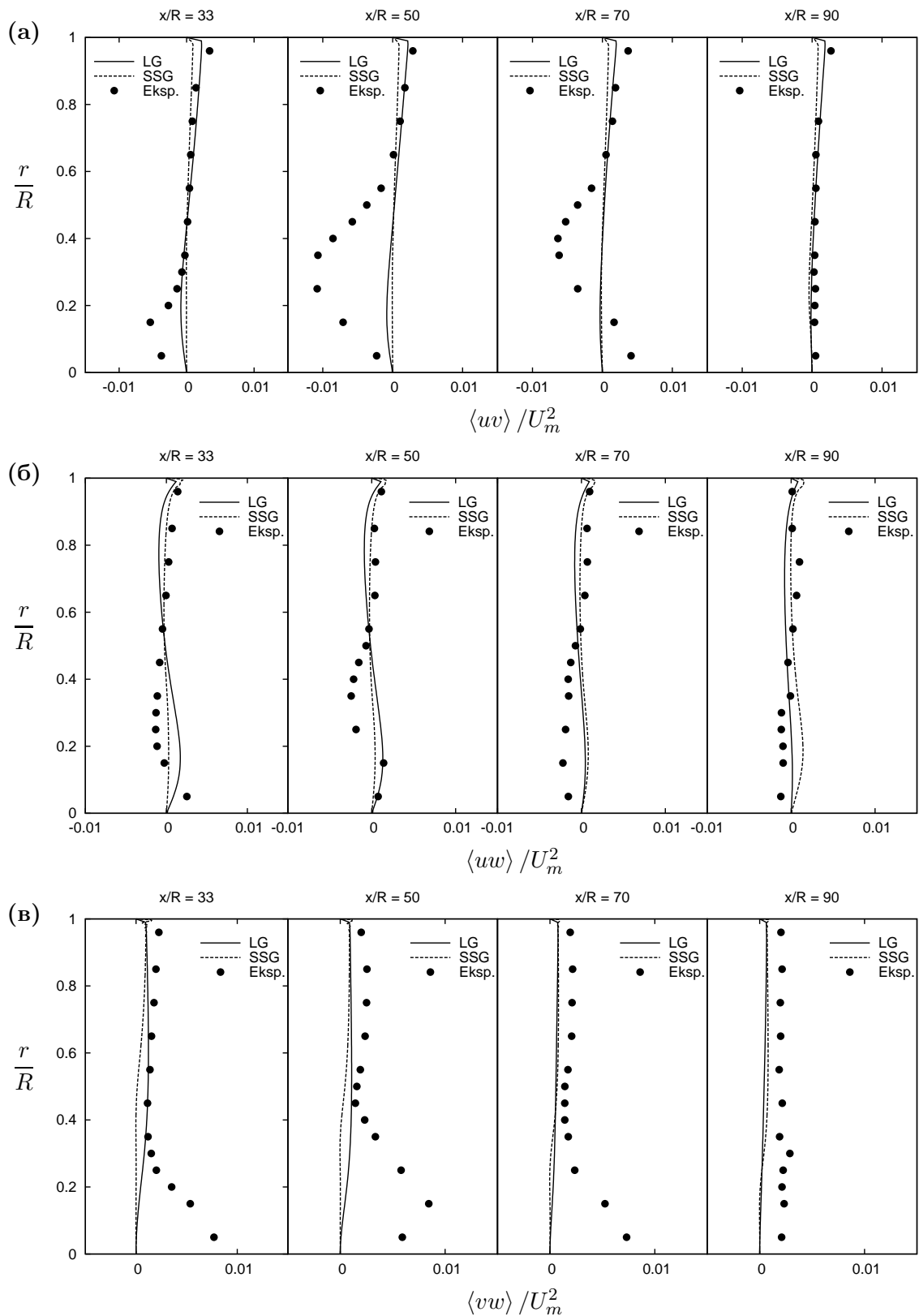


Слика 5.9. Поређење експерименталних резултата са резултатима нумеричког прорачуна коришћењем напонских модела за профиле нормалних турбулентних напона за јачину вихора $\theta_p = 0,229$. (а) нормални напон $\langle u^2 \rangle$; (б) нормални напон $\langle v^2 \rangle$ и (в) нормални напон $\langle w^2 \rangle$

вероватно могуће добити узимајући у обзир да је дисипација неизотропна, и на тај начин добити још шест додатних једначина преноса за компоненте тензора дисипације, као што је предложено у Lu and Semiao (2003). Аутори су такође тестирали модел на случајевима вихорног струјања. Тако су у случају вихорног струјања са релативно малим интензитетом вихора добили боља слагања са експерименталним резултатима, док су резултати у случају вихорног струјања у цеви прстенастог попречног пресека готово идентични као у случају претпоставке о изотропној дисипацији.

Предвиђање профила смицајних напона је такође у великој мери незадовољавајуће. Оба напонска модела у великој мери не могу да предвиде вредности максимума смицајних напона $\langle uv \rangle$ и $\langle vw \rangle$ у појединим мерним пресецима. Такође, модели углавном предвиђају погрешан знак напона $\langle uw \rangle$. Ова аномалија напонских модела први пут примећена при нумеричким прорачунима вихорних млазева коришћењем LRR-QI модела у Launder and Morse (1979). Она је касније уочена и на другим проблемима, као што је случају ротирајућих цеви у канала, Jakirlić et al. (2002). Разлог те аномалије је самом моделском изразу за компоненту Π_{13} тензора редистрибуције, где оба напонска модела у случају ротирајућих струјања предвиђају његове знатно мање вредности него што то показују директне нумеричке симулације. Међутим, иако је ова аномалија често присутна у прорачуну ротирајућих и вихорних струјања, она није универзална. Наиме, у неким случајевима вихорних струјања знак напона $\langle uw \rangle$ добијен нумеричким прорачуном се слаже са знаком добијеним експериментима, као што су показали Jakirlić et al. (2002) и потврђено сопственим прорачунима, која нису представљена у оквиру ове дисертације, користећи исту експерименталну базу - истраживања презентована у Steenberg (1995), чији су резултати доступни у ERCOFTAC⁸ бази. Коришћени су резултати мерења који одговарају профилу Ранкиновог вртлога за обимску брзину. У експериментима Steenberg-а, мерења су вршена дуж вертикалног радијуса, и експериментима су добијени асиметрични профили временских осредњених брзина и турбулентних напона у односу на осу цеви. Сви ти профили су осредњени по радијусу, и тако добијене вредности задате на улазу - у оси цеви је $V = W = 0$, док је за претпостављена вредност блиска вредности у прорачунској тачки најближој оси.

⁸European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion. Интернет адреса: <http://cfd.mace.manchester.ac.uk/ercoftac/>



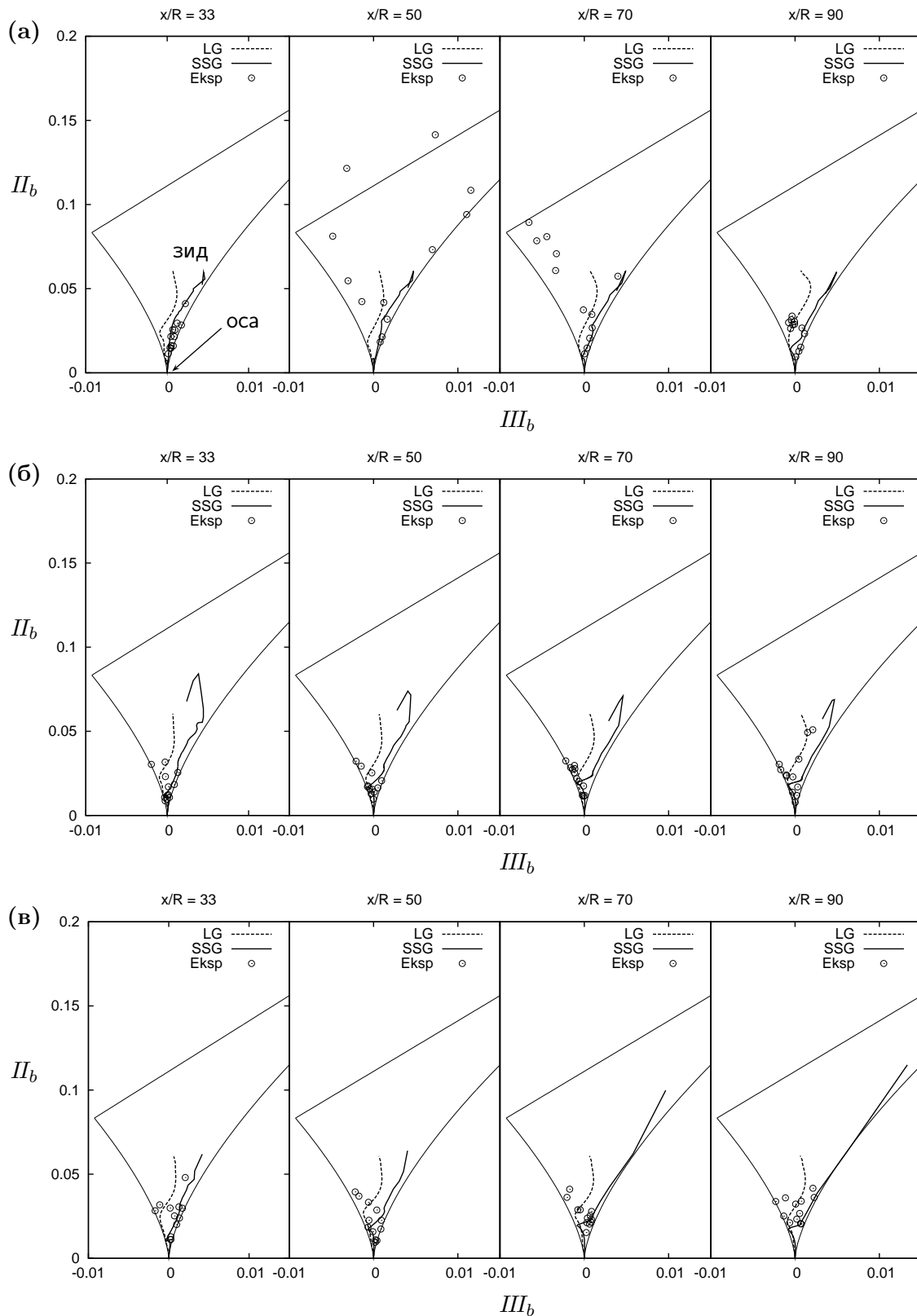
Слика 5.10. Поређење експерименталних резултата са резултатима нумеричког прорачуна коришћењем напонских модела за профиле смицајних турбулентних напона за јачину вихора $\theta_p = 0,229$. (а) смицајни напон $\langle uw \rangle$; (б) смицајни напон $\langle uw \rangle$ и (в) смицајни напон $\langle vw \rangle$

Наведени трендови везани за предвиђање турбулентних напона су још израженији за остала два интензитета вихора, тако да се овде не приказују ти дијаграми.

Приликом формирања одговарајућих релација у моделирању турбуленције, мора се водити рачуна да оне дају увек физички смислене резултате (нпр. нормални турбулентни напон мора увек бити позитиван, већ спомињана Коши-Шварцова релација, и сл.). Један од начина провере, како експерименталних, тако и нумеричких резултата при прорачуну турбуленције је коришћење инваријанте мапе анизотропности, или Лумлијевог троугла, Lumley and Newman (1977), Choi and Lumley (2001). Разматрајући вредности друге и треће инваријанте II_b и III_b тензора анизотропије дефинисаног једначином (3.74) у граничним случајевима турбуленције, аутори су формирали одговарајућу област у равни $III_b - II_b$ унутар које се морају налазити сва физички могућа стања турбуленције.⁹ Овде треба напоменути да је за одређивање инваријантни III_b и II_b написан програм који је имплементиран у OpenFOAM. Апликацијом која се добија компајлирањем тог програма се одређују инваријанте тензора анизотропије у свакој прорачунској тачки унутар домена, и њихове вредности записују у одговарајућу датотеку.

На слици 5.11 су приказане расподеле друге и треће инваријанте тензора анизотропности у инваријантној мапи добијене LG и SSG напонским моделом, а такође и вредности које одговарају експерименталним подацима. Детаљнија анализа структуре овог вихорног струјања на основу расподеле вредности инваријантни II_b и III_b у мерним пресецима $x/R = 0, 33$ и 90 може се наћи у Ћоћић (2007). Као прво, примећује се да се у пресеку $x/R = 50$, за јачину вихора $\theta_p = 0,229$, поједине експерименталне тачке налазе изван инваријантне мапе. То је још једна потврда да су експериментални подаци у том пресеку нерелевантни. Овде је главни циљ коришћења инваријантне мапе један вид провере резултата турбулентних модела, са посебним акцентом на SSG модел који је у току истраживања имплементиран у код OpenFOAM-а. Може се констатовати да се у свим пресецима вредности инваријантни II_b и III_b срачунати на основу нумеричких резултата налазе унутар инваријантне мапе, што је један од добрих показатеља успешне имплементације SSG модела. Као што је показано и на случајевима

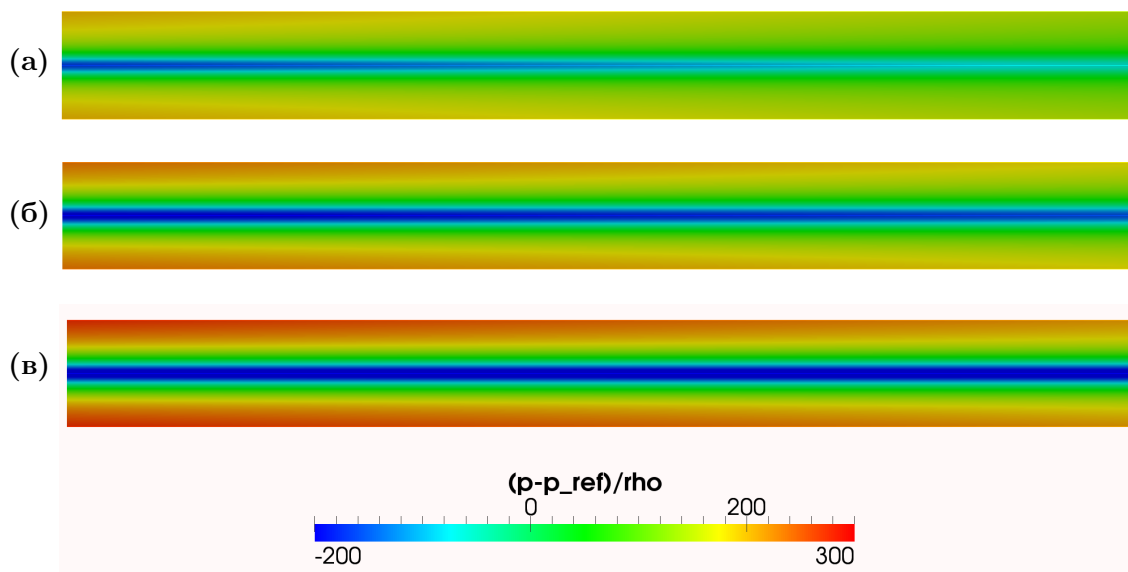
⁹Детаљнија анализа граничних случајева турбуленције и начина формирања инваријантне мапе анизотропности се може наћи у Прилогу В.



Слика 5.11. Приказ експерименталних и нумеричких резултата добијених примењеном напонских модела у инваријантној мапи анизотропности за различите вредности интензитета вихора. (а) $\theta_p = 0,229$; (б) $\theta_p = 0,385$ и (в) $\theta_p = 0,429$.

поређења SSG и LG модела за профиле осредњених брзина и напона, и овом случају модели предвиђају различите расподеле вредности инваријанти унутар инваријантне мапе. Одговарајуће трајекторије у инваријантној мапи које даје LG модел за све интензитете вихора имају исти карактер у свим анализираним пресецима. Карактеристика тих трајекторија је да оне идући од тачке најближе зиду до приближно изотропног стања турбуленције које се достиже у оси, пролазе веома близу граничне линије која одговара осносиметричној контракцији.

Са друге стране, трајекторије које даје SSG модел показују различит карактер у зависности од интензитета вихора. Оно што је карактеристично је њено померање ка десној граничној линији која одговара осносиметричној експанзији у једном централном попречног пресека ($0,7 < r/R < 0,2$). У зони око осе цеви трајекторија SSG модела се помера ка линији која одговара осносиметричној контракцији, и том делу трајекторије оба модела се практично поклапају. Ови закључци не могу дати неки дубљи увид у структуру турбуленције, већ су као што је речено, начин провере ваљаности модела, са посебним акцентом на ваљаност начина имплементације SSG модела.



Слика 5.12. Расподела притиска на делу цеви од $30 < x/R < 50$, за три различите јачине вихора, LG модел: (а) $\theta_p = 0,229$; (б) $\theta_p = 0,385$ и (в) $\theta_p = 0,429$.

На слици 5.12 су приказане изобарске површи у осносиметричном пресеку цеви за три јачине вихора, на делу цеви дужине два метра, одређеном бездимензијском координатом $30 < x/R < 50$. За приказ ових слика прорачунски

домен је пресликан у односу на осу $x_1 = 0$, тј. у односу на осу цеви. Како у оквиру експерименталних истраживања нису вршена мерења притиска унутар цеви, овде се дају квалитативни резултати. За све три слике је изабрана иста размера, и може се видети да се са повећањем интензитета вихора, повећава и зона ниског притиска унутар цеви, као и зона високог притиска у околини зида цеви. Референтни притисак, означен са p_{ref} на скали је једнак средњем притиску на излазу, тј. $p_{\text{ref}} = 0$.

Theoria sine praxi, sicut rota sine axi.

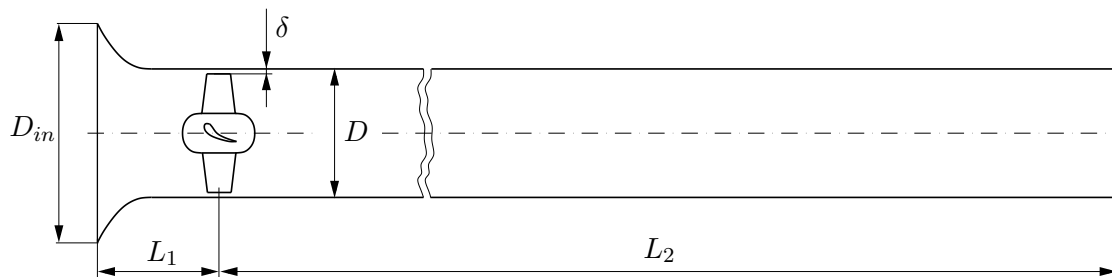
(Знање без праксе, као кола без осовине.)

Латинска пословица

6

Прорачун вихорног струјања у цеви иза кола аксијалног вентилатора

У оквиру ове главе се разматра вихорно струјање у цеви, на чијем се улазу налази аксијални вентилатор који ротира константном угаоном брзином, слика 6.1.



Слика 6.1. Скица разматраног проблема.

Главни аспект истраживања која се презентују у оквиру ове главе није био на детаљном проучавању оптималних параметара вентилатора, као што су нагиб лопатица, његови услови рада и сл. главни акценат је био на валидацији ОренFOAM модула који се могу користити у прорачуну турбомашина. Ти модули су развијени последњих година, и веома је значајно за њиховој даљој развој урадити што више карактеристичних примера.

Више детаља везаних за конструктивне карактеристике самог вентилатора

могу се наћи у Чантрак (2012). Вентилатор има 7 лопатица, његов спољашњи пречник је $D_a = 397 \text{ mm}$, и он је постављен у цеви пречника $D = 400 \text{ mm}$, на растојању $L_1 = 60 \text{ mm}$ од улазног пресека, док је дужина $L_2 = 5 \text{ m}$. Улазни пречник уводника је $D_{in} = 659,6 \text{ mm}$. У Чантрак (2012) су спроведена бројна експериментална истраживањима вихорног струјања у цеви савременим мерним техникама, и испитивана су струјна поља за три различита вентилатора. Из те серије многобројних експеримената једна конфигурација је одговарала скици приказаној на слици 6.1, где су у једном мерном пресеку, на растојању $1,066 \text{ m}$ иза вентилатора, мерени профили брзина LDA техником. При томе је угао нагиба лопатица вентилатора био $\alpha = 26^\circ$, а број обртаја $n = 1000 \text{ ob/min}$. Ти мерни резултати су послужили као вид валидације нумеричких прорачуна.

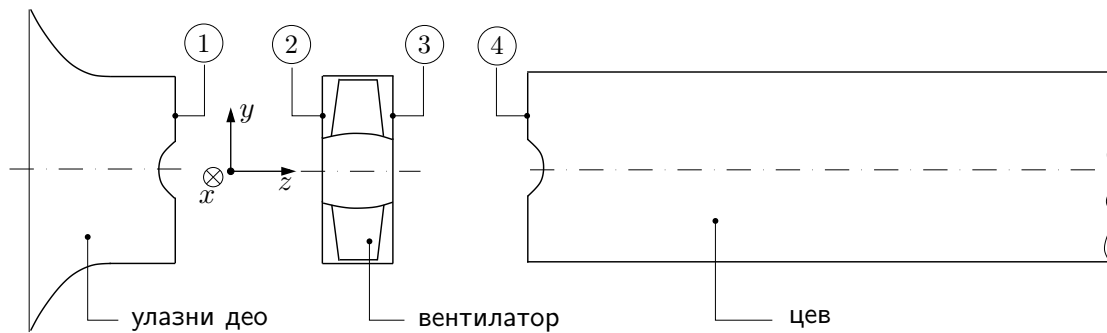
Пре самог прорачуна, посебна пажња је посвећена генерисању што боље нумеричке мреже, блок-структурираног типа. Прорачун је обављен у два прорачунска домена, користећи два различита приступа. У првом случају коришћен је приступ „замрзнутог ротора“ у коме је нумеричка мрежа фиксна у времену и у коме се у одређеном делу прорачунског домена решавају једначине кретања у ротирајућем координатном систему. У другом приступу, део нумеричке мреже у коме се налази вентилатор мења свој положај у времену, тј. ротира угаоном брзином којом ротира вентилатор. Временски корак у овом прорачуну је веома мали, и у сваком кораку прво се врши закретање дела нумеричке мреже, па потом нумерички прорачун одговарајућих физичких величина. Како је почетни корак у нумеричким прорачунима струјања дефинисање геометрије, односно простора у којем се одвија струјање и потом генерисање нумеричке мреже, детаљи тих приступа се дају нешто касније, након појашњења начина генерисања геометрије и нумеричке мреже.

За разлику од случаја разматраног у глави 5, овде се разматра и генератор вихора, односно аксијални вентилатор. Како је постављени циљ био да нумеричка мрежа буде што је могуће квалитетнија, природни избор је био да нумеричка мрежа буде блок-структурираног типа. Како је врло тешко (готово немогуће) имати пресликавање „један на један“ структуре блокова у обртном колу вентилатора и осталом делу домена, извршена је подела укупног домена \mathcal{D} на три поддомена \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 и \mathcal{D}_3 названих и означених као:

- улазни део (STATOR-1)

- вентилатор (ROTOR)
- цев (STATOR-2)

Подела је извршена са две вертикалне равни које пресецају главчину вентилатора и које се налазе испред и иза радног кола вентилатора, као што је приказано на слици 6.2. За сваки од домена је посебно генерисана геометрија и одговарајућа блок-структурирана мрежа.



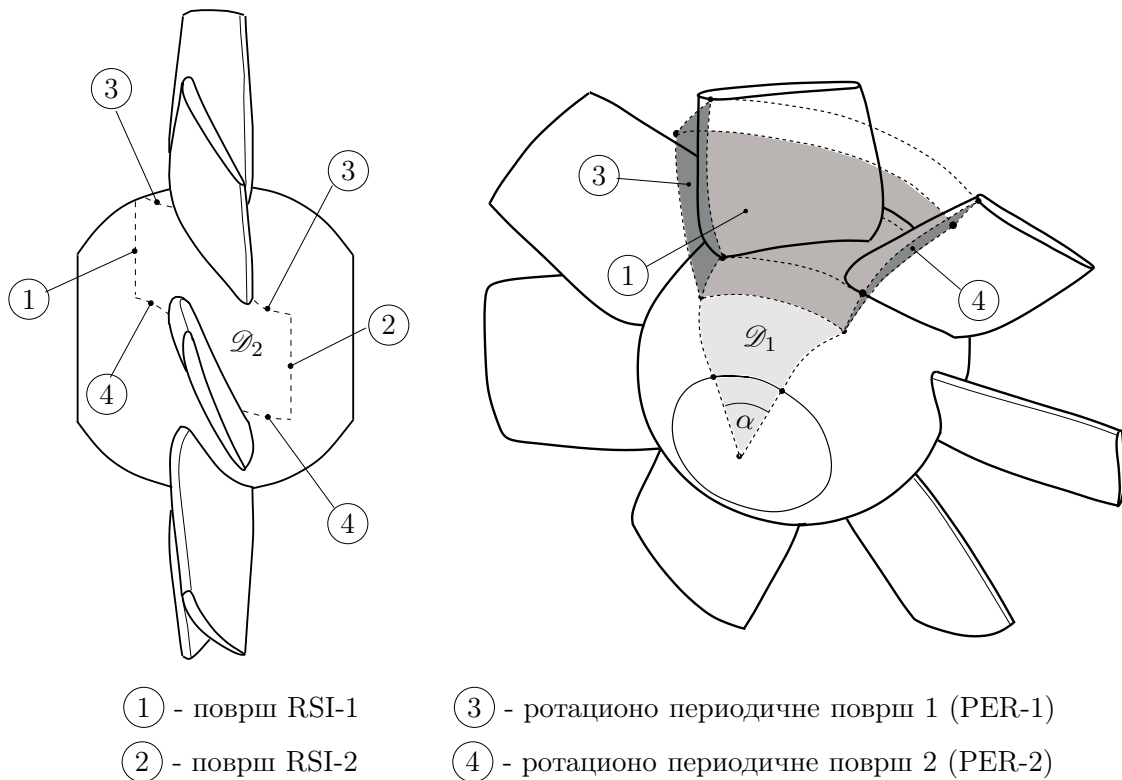
1 - површ SRI1 2 - површ RSI1 3 - површ RSI2 4 - површ SRI2

Слика 6.2. Начин поделе просторног домена у коме се одвија струјање.

Разлог за овакав начин поделе домена је да генерисање нумеричке мреже буде што једноставније по питању топологије блокова, а уједно и што квалитетније, посебно у делу домена у коме се налази вентилатор. Граничне површи или интерфејси између новодобијених просторних домена су геометријски идентичне, али се граничне површи прорачунских ћелија које се на њима налазе не поклапају, јер је топологија блокова различита. Те површи су означене са SRI и RSI, као скраћенице за статор-ротор и ротор-статор интерфејс. На тим површима се дефинише специјални тип граничног услова који мора да обезбеди правилну комуникацију између граничних ћелија два домена. О том граничном услову биће више речи у поглављу 6.1.2.

Нумерички прорачун овог струјања је, са становишта прорачунског домена, разматран у две различите геометрије - то се односи како на укупни прорачунски домен, тако и на његове појединачне делове добијене већ описаном поделом. Први тип је комплетна 3D геометрија, док је други тип део те 3D геометрије, облика цилиндричног исечка са ротационо периодичним површима, угла $\alpha = 360^\circ/n = 360^\circ/7 = 51,43^\circ$. Та геометрија или прорачунски домен са

ротационо периодичним површима се дефинише полазећи од геометрије вентилатора и она одговара једном међулопатичном простору, као што је приказано на слици 6.3. Изводнице латералних страна те геометрије прате изводницу на лопатици вентилатора, тако да су те стране закривљене. Оне су идентичког геометријског облика, и ротацијом за угао α у одговарајућем смеру, оне би се поклопиле. Такве површи се називају ротационо периодичне или цикличне површи, и на њима се дефинише тзв. периодични гранични услов (cyclic), описан у оквиру поглавља 4.2.3. Те површи су на слици 6.3 означене са PER-1 и PER-2.



Слика 6.3. Изводнице прорачунског домена на главчини вентилатора (лево) и тродимензионални приказ карактеристичних површи (десно).

Како је за разлику од геометрије разматране у глави 5, ове геометрија, неупоредиво комплекснија, коришћење OpenFOAM апликације blockMesh за генерисање прорачунског домена и адекватне нумеричке мреже је практично немогуће. У ту сврху је коришћен комерцијални софтвер ICEM CFD, у коме је нумеричка мрежа генерисана као блок-структурирана. Треба напоменути да је генерисање блок-структуриране мреже у комплексним геометријама, што је овде случај, веома захтеван и дуготрајан процес. Међутим, како је добра нумеричка мрежа основни предуслов за добар нумерички прорачун, тај корак је

свакако неопходан. То се посебно односи на струјање у турбомашинама, где је готово неопходно да нумеричка мрежа прати облик лопатица. Тако генерисана блок-структурирана мрежа је у оквиру ICEM CFD-а она преведена у неструктурирану, и на крају као таква преведена у формат који подржава OpenFOAM, коришћењем одговарајућих апликација за конверзију мреже које су уграђене у OpenFOAM-у.

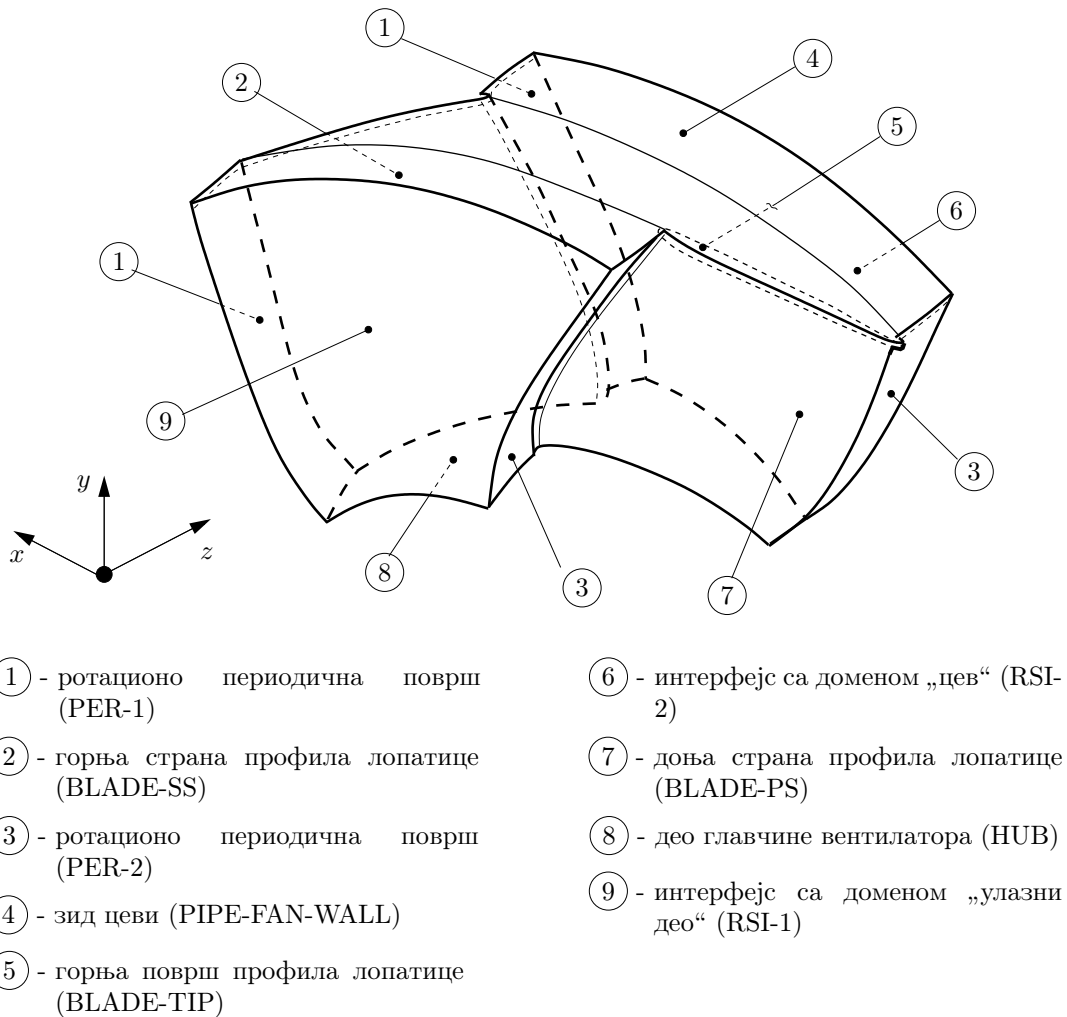
Резултати који се презентују у оквиру ове главе су добијени коришћењем $k-\omega$ SST модела, који се показао као најоптималнији у прорачуну струјања у турбомашинама, Bardina et al. (1997). Са једне стране тачност прорачуна је теоријски мања него при прорачуну коришћењем пуних напонских модела, али знатно израженија стабилност и конвергенција при прорачуну са $k-\omega$ SST моделом у сложенијим геометрија га чине оптималним избором начина на који се моделира турбуленција.

Избор координатног система у овом случају је такав да се оса z поклапа са осом цеви, а да раван xy одређује раван попречног пресека цеви. Брзина усмерена у правцу осе z је аксијална брзина U , док радијална и обимска брзина леже у равни xy . Са аспекта нумеричког прорачуна, проблем се увек решава у Декартовом правоуглом координатном систему, првенствено зато што једначине преноса у њему имају најједноставнији облик. Као резултат прорачуна добијају се компоненте брзине U_x , U_y и U_z , на основу којих се након тога одговарајућом трансформацијом могу наћи и компоненте U_r , U_φ и U_z , односно пројекције у радијалном, обимском и аксијалном правцу.

6.1 Прорачун струјања у домену са периодичним површима

6.1.1 Генерисање геометрије и нумеричке мреже

Детаљнији приказ прорачунског домена чији је део приказан на слици 6.3, са свим карактеристичним површима је дат на слици 6.4. На основу тако изабране



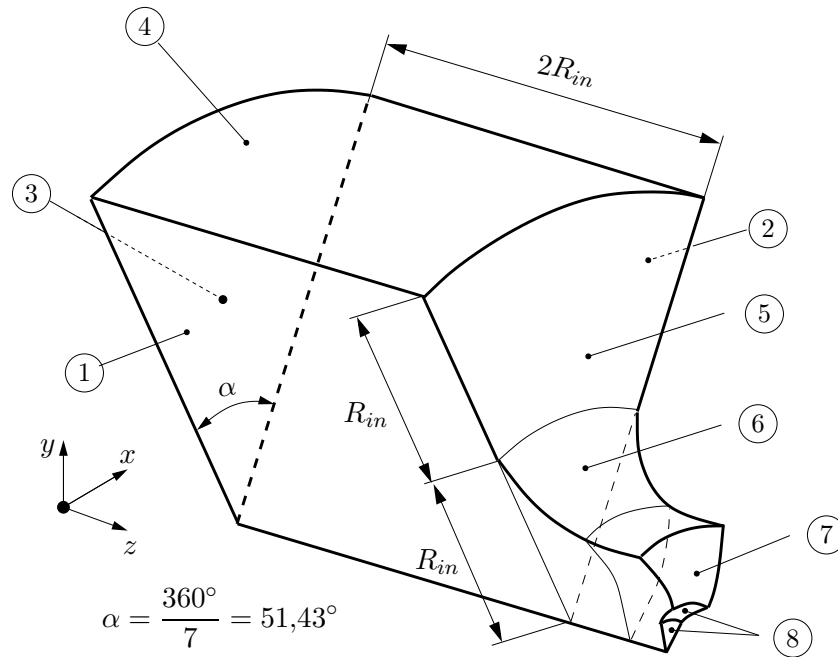
Слика 6.4. Геометрија прорачунског домена „вентилатор“ за случај прорачуна струјања у једном међулопатичном простору и карактеристичне површи домена.

геометрије у прорачунском поддомену \mathcal{D}_2 , дефинишу се и геометрије у улазном делу и цеви, полазећи прво од услова да површи SRI и RSI буду геометријски идентичке, као и да се у тим геометријским доменима, налазе делови главчине вентилатора. У улазном делу геометрија уводника је такође задата и позната.

Како би се што реалније описало струјање на улазу у цев, тачније на улазу у уводник, прорачунски домен \mathcal{D}_1 се додатно проширује, и у аксијалном и у радијалном правцу. Другим речима, њему се додаје један цилиндрични исечак полупречника и висине $2R_{in}$, као што је приказано на слици 6.5.

На сличан начин се добија и геометрија трећег прорачунског поддомена и у њој се аналогно домену \mathcal{D}_1 дефинишу следеће карактеристичне површи: део главчине (HUB-2), интерфејс са доменом „вентилатор“ (SRI-2), зид цеви (PIPE-WALL), ротационо периодичне површи (PIPE-PER-1 и PIPE-PER-2) и излазна површ кроз коју флуид напушта прорачунски домен (OUTLET).

На основу тако дефинисаних геометрија, односно поддомена, следећи корак је генерисање нумеричке мреже. Као што је већ речено, за сваки од поддомена је генерисана блок-структурирана мрежа за различитог топологијом блокова.

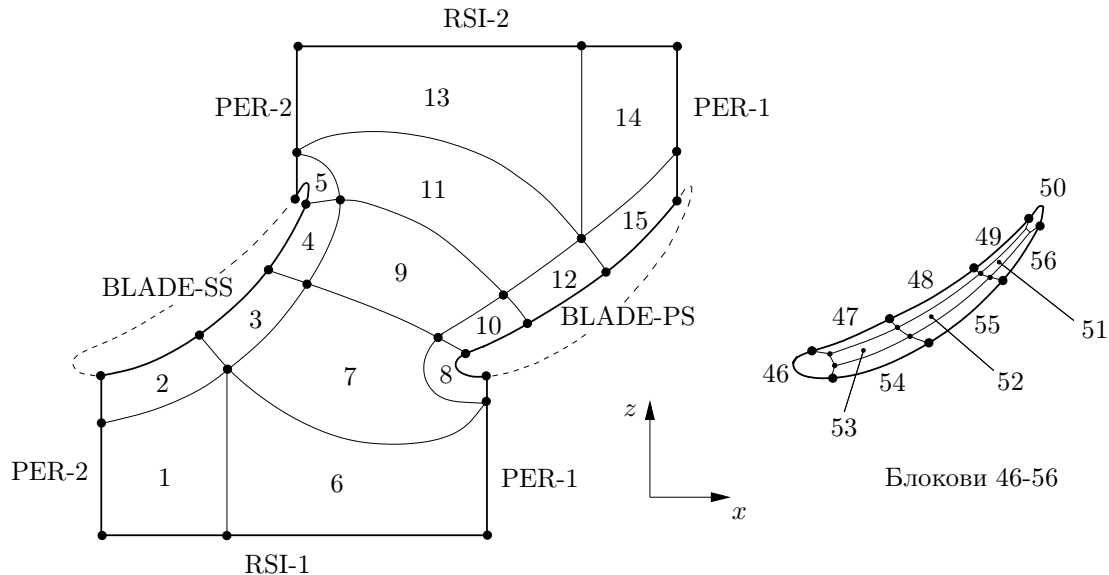


- | | |
|--|--|
| ① - периодично ротациона површ (IN-PER-1) | ⑤ - површ на којој је $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$ (SYMM-2) |
| ② - периодично ротациона површ (IN-PER-2) | ⑥ - уводник (NOZZLE-WALL) |
| ③ - површ кроз коју флуид улази у прорачунски домен (INLET) | ⑦ - интерфејс са доменом ROTOR (SRI-1) |
| ④ - површ на којој је $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$ (SYMM-1) | ⑧ - део главчине вентилатора (HUB-1) |

Слика 6.5. Геометрија прорачунског домена STATOR-1, у случају прорачуна струјања у једном међулопатичном простору.

Временски најзахтевније, али са друге стране најбитније за тачност и конвергенцију нумеричког прорачуна, је генерисање добре блок-структуриране мреже у поддомену \mathcal{D}_2 , односно у међулопатичном простору вентилатора. Код генерисања нумеричке мреже при струјању у турбомашинама, врло је важно да она прати облик лопатица, због што тачнијег прорачуна.

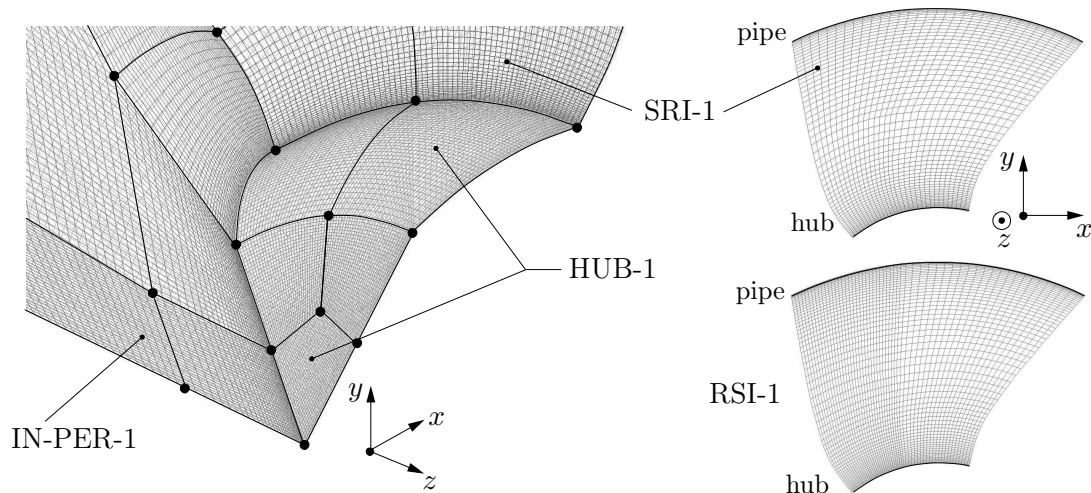
Основна тополошка структура блокова у поддомену вентилатор је приказана на слици 6.6. Како између горње стране лопатице и зида цеви постоји зазор, онда се у том делу дефинишу и додатних једанаест блокова којима се покрива тај део поддомена. Ради боље контроле густине мреже у радијалном правцу, на половини међулопатичног простора је извршена подела блокова, тако да је њихов укупни број $15 + 15 + 15 + 11 = 56$. Овакав начин дефинисања топологије блокова омогућава веома добру контролу квалитета нумеричке мреже.



Слика 6.6. Основна топологија блокова унутар домена означеног са „вентилатор“. Блокови означени са 1-15 започињу на главчини вентилатора а завршавају се на половини међулопатичног простора, блокови 15-30 се простиру од половине до крајњег горњег међулопатичног простора, блокови 31-45 се настављају од крајњег горњег међулопатичног простора до зида цеви, док се блокови 46-56 простиру од горње стране лопатице до зида цеви.

У поддоменима \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_3 тополошка структура блокова је релативно једноставна. Оно што је карактеристично су површи облика троугла на којима се такође дефинишу блокови облика хексаедра, којим се такође обезбеђује бољи квалитет мреже него у случају блока облика призме, посебно у области око осе цеви. Та топологија, као и сама нумеричка мрежа је приказана на слици 6.7.

Приликом избора броја ћелија у сваком од блокова посебно се водило рачуна да нема наглих прелаза у величини ћелије како у самим блоковима, тако и суседним ћелијама између блокова. Нумеричка мрежа је неуниформна у свим блоковима и њена густина је највећа у зонама где су очекивани велики градијенти физичких величина (уз чврсте контуре, посебно у простору око лопатица вентилатора). Такође, при генерисању нумеричке мреже, водило се рачуна да на интерфејсима између домена број ћелија у радијалном правцу буде једнак, и да се, колико год је то могуће стране површи ћелија које припадају интерфејсима, а које се простиру у обимском правцу поклапају. Разлог за то је да се грешка интерполације између интерфејса са страна ротора и статора сведе на минимум.



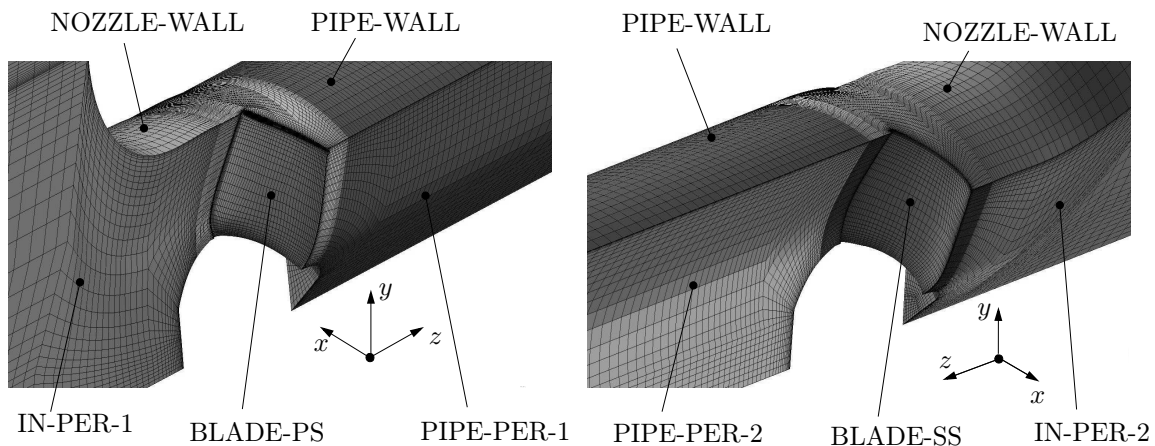
Слика 6.7. Основна топологија блокова са нумеричком мрежом на излазном делу домена \mathcal{D}_1 и приказ нумеричке мреже на површима SRI-1 и RSI-1.

Након генерисања нумеричких мрежа за сваки од домена, извршено је њихово спајање у једну јединствену нумеричку мрежу. Део те мреже приказан на слици 6.8, на којој се виде сва три поддомена: STATOR-1, ROTOR и STATOR-2, и на којој су означене карактеристичне граничне површи.

Комплетна нумеричка мрежа је прво сачувана у неструктурираном формату који одговара комерцијалном софтверу Fluent, па је потом OpenFOAM апликацијом `fluent3DMeshToFoam` конвертована у формат погодан за OpenFOAM. Овде је важно напоменути да се у OpenFOAM-у са нумеричког становишта пар периодичних површи (нпр. PER-1 и PER-2) третирају као једна површ, па је било неопходно извршити одређене манипулације нумеричке мреже, тачније њених граничних површи - оних које су дефинисане као ротационе периодичне

површи у претходном тексту. У ту сврху је коришћена апликација `createPatch` којом је могуће генерисати једну површ од две идентичне, ротационо периодичне површи. Тако су генерисане следеће површи:

- IN-PER, од површи IN-PER-1 и IN-PER-2
- FAN-PER, од површи PER-1 и PER-2
- PIPE-PER, од површи PIPE-PER-1 и PIPE-PER-2



Слика 6.8. Нумеричка мрежа комплетног прорачунског домена за случај прорачуна са називима карактеристичних површи дефинисаним у ICEM CFD-у.

У нумеричком приступу „замрзнутог ротора“ потребно је дефинисати у којим ћелијама или контролним запреминама прорачунског домена ће једначине бити решаване у ротирајућем координатном систему¹. Такође, потребно је дефинисати и одговарајуће листе контролних површи на границама тог домена. Дефинисање ћелија док домена је једноставно, јер се конверзијом нумеричке мреже из ICEM CFD-а задржавају имена поддомена, тако да се конверзијом аутоматски дефинише `cellZone ROTOR` у оквиру дефиниције нумеричке мреже. Оно што остаје је да се у одговарајућем фајлу (`MRFZones`) дефинише убаци назив `ROTOR`.

```
ROTOR
{
    patches (BLADE-PS BLADE-SS BLADE-TIP HUB);
    nonRotatingPatches (PIPE-FAN-WALL);
```

¹Види прилог С

```

origin    origin [0 1 0 0 0 0 0] (0 0 0);
axis      axis   [0 0 0 0 0 0 0] (0 0 1);
omega     omega  [0 0 -1 0 0 0 0] -104.719755;
}

```

Унутар тог домена се дефинише положај ротирајућег координатног система и његова оса ротације, затим угаона брзина његовог обртања, као и које чврсте контуре унутар њега ротирају, а које не. Како је у разматраном проблему број обртаја вентилатора $n = 1000 \text{ ob/min}$, и како он ротира у позитивном математичком смеру посматрано са улаза у цев, вектор угаоне брзине је усмерен супротно позитивном смеру z -осе. Зато се за њену вредност уноси $-104,719755 \text{ rad/s}$. Унутар великих заграда су дефинисани експоненти димензијске ознаке одговарајућих величина у SI систему мерних јединица, где седам бројева означава седам основних јединица SI система. Прва четири одговарају маси (kg), дужини (m), времену (s) и температури (K). Тако се положај координатног почетка ротирајућем координатног система изражава у метрима, а угаона брзина у s^{-1} (радијан је бездимензијска величина). За случај паралелног прорачуна, потребно је из скупа свих површи које ограничавају ћелије издвојити скуп површи које се налазе на свим интерфејсима, односно површима SRI-1, RSI-1, RSI-2 и SRI-2. У ту сврху се користе OpenFOAM апликације `setSet` и `setsToZones`.

Направљене су четири нумеричке мреже, означена са NM-1, NM-2, NM-3 и NM-4, са различитим бројем ћелија, на којима је испитивана независност решења од броја ћелија. Број ћелија у тим мрежама је дат у Табели 6.1.

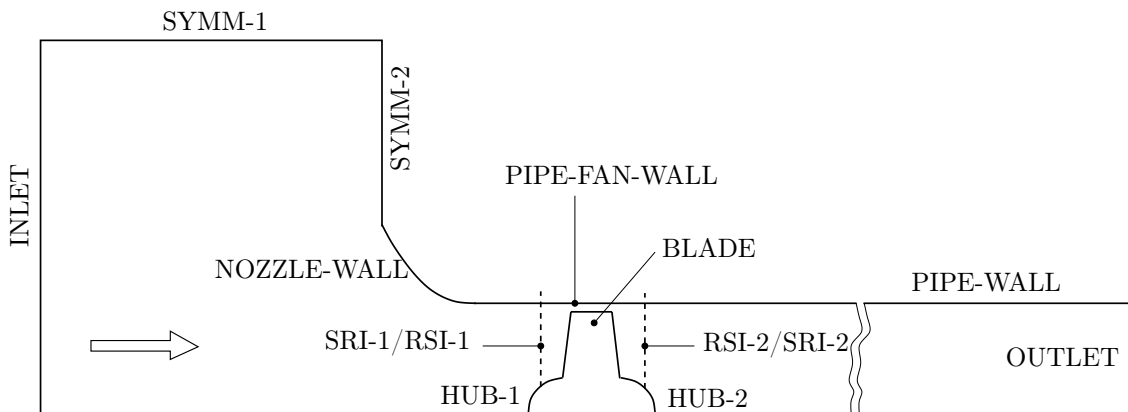
Табела 6.1. Број ћелија у нумеричким мрежама које су коришћене у прорачуну.

Нумеричка мрежа	NM-1	NM-2	NM-3	NM-4
Број ћелија	214784	633311	1288192	1718272

Поређењем добијених резултата, резултати са мреже NM-1 су одбачени као неадекватни. Између резултата на нумеричким мрежама NM-2 и NM-3 су присутна извесна одступања, али не у некој већој мери, док су резултати на мрежама NM-3 и NM-4 готово идентични. Резултати који ће бити презентовани се односе на нумеричку мрежу NM-3.

6.1.2 Гранични услови, методе дискретизације и избор метода за решавање система линеарних једначина

Један од постављених циљева прорачуна на нумеричкој мрежи са ротирајућим периодичним површима је био и за одређивање карактеристичне криве вентилатора $\Delta p - \dot{V}$. У ту сврху, прво је одређен максимални запремински проток кроз вентилатор, односно случај када вентилатор ради са минималним напором, за задати број обртаја ($n = 1000 \text{ ob/min}$). Тај максимални проток је за дате радне услове одређен тако што су задате једнаке вредности тоталног притиска на улазној површи (INLET) и статичког притиска на излазној површи (OUTLET). На основу тако процењене максималне вредности запреминског протока кроз вентилатор, следећа серија прорачуна је обављена тако што је на улазу задаван запремински проток и градијент притиска у правцу нормале једнак нули, док је на излазу задата константна вредност осредњеног притиска једнака нули ($p_{ref} = p_{out} - p_{atm} = 0$), и градијент брзине у правцу нормале једнак нули. За кинетичку енергију турбуленције и френквенцију дисипације ω коришћени исти гранични услови.



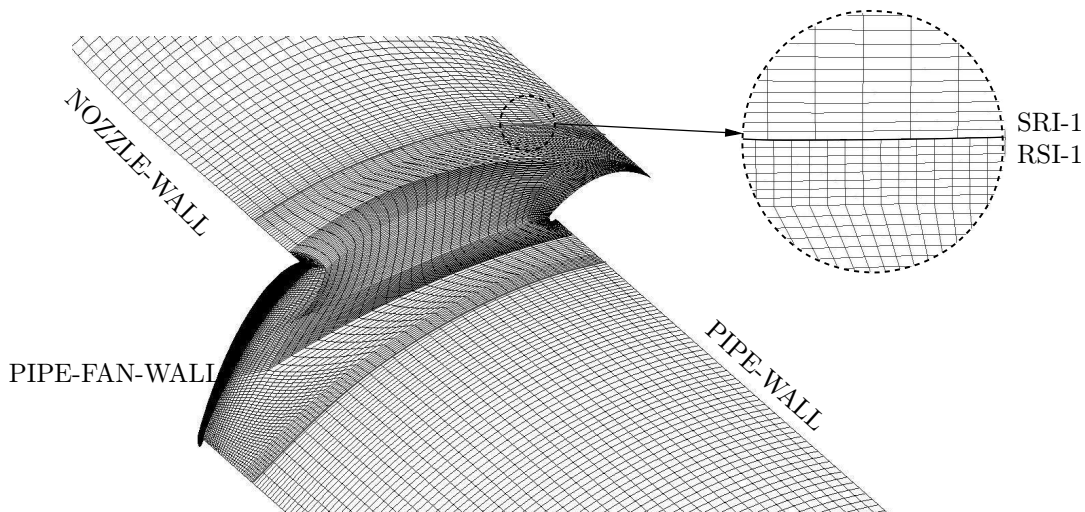
Слика 6.9. Скица прорачунског домена са карактеристичним граничним површима.

У оба начина прорачуна је претпостављено да је на улазној површи степен турбуленције мали, тако да је изабрано да су флукуације брзине 0,2% од вредности брзине на улазној површи, док је за процену фреквенцију дисипације на улазу коришћен израз

$$\omega = \frac{C_{\mu} k}{\beta \nu},$$

где је $C_\mu = 0,09$, $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ кинематичка вискозност ваздуха, док је $\beta = \nu_t/\nu$ однос турбулентне и кинематичке вискозности на улазу. Како је на улазној површи ниво турбуленције мали, усвојено је да је $\beta = 0,1$.

На непокретним зидовима задата је вредност брзине једнака нули, градијент притиска у правцу нормале такође једнак нули, док су за одређивање карактеристика турбуленције коришћене зидне функције. У домену ROTOR, осим ако се то експлицитно не наведе, све чврсте контуре ротирају задатом угаоном брзином, тако да се њима аутоматски додељује Дириклеов гранични услов по коме брзина у тежиштима површи рачуна као $\underline{\Omega} \times \underline{r}$, где је \underline{r} вектор положај тежишта. Ван домена ROTOR, се такође налазе површи које ротирају, а то су HUB-1 у поддомену STATOR-1, и HUB-2 у поддомену STATOR-2. На њима је за брзину брзину задат гранични услов `rotatingWallVelocity`, у коме се дефинише оса ротације, и вредност угаоне брзине. Брзина у тежиштима тих површи се онда задаје као ΩR , где је R нормално растојање од осе до тежишта површи, а Ω интензитет угаоне брзине обртања.



Слика 6.10. Приказ нумеричке мреже на површима NOZZLE-WALL, PIPE-FAN-WALL, PIPE-WALL. На увећаној слици је приказан део нумеричке мреже на интерфејсу SRI-1/RSI-1.

Као што је већ речено у уводу ове главе, на интерфејсима између подмена се дефинише специјални гранични услов који мора да обезбеди правилну комуникацију између подмена. Тај гранични услов се назива уопштени мрежни интерфејс, и он се означава са GGI (General Grid Interface). Он је дефинисан и имплементиран у код OpenFOAM-а од стране Beaudoin and Jasak (2008).

Табела 6.2. Гранични услови за случај процене максималног запреминског протока кроз прорачунски домен.

Гранична површ	\underline{U}	p	k	ω
INLET	$U_f(n)^a$	$p_0 = 0 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	$1,5 \cdot (0.2\% \underline{U})$	$C_\mu k / (\beta \nu)$
OUTLET	$\partial_n \underline{U} = 0$	$p = 0 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	$\partial_n k = 0$	$\partial_n \omega = 0$
NOZZLE-WALL	$\underline{U} = 0$	$\partial_n p = 0$	wallFunctions	wallFunctions
PIPE-FAN-WALL				
PIPE-WALL				
HUB	$\underline{U} = \underline{\Omega} \times \underline{r}$	$\partial_n p = 0$	wallFunctions	wallFunctions
HUB-1				
HUB-2				
BLADE-SS				
BLADE-PS				
BLADE-TIP				
SYMM-1	$\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$	$\nabla p \cdot \underline{n} = 0$	$\nabla k \cdot \underline{n} = 0$	$\nabla \omega \cdot \underline{n} = 0$
SYMM-2				
IN-PER	cyclic	cyclic	cyclic	cyclic
FAN-PER				
PIPE-PER				
SRI-1/RSI-1	GGI	GGI	GGI	GGI
RSI-2/SRI-2				

^aУ сваком итеративном кораку вредност брзине се одређује на основу срачунатог укупног флуksа (запреминског протока); n - итеративни корак.

Табела 6.3. Гранични услови за случај задавања вредности запреминског протока на улазној површи домена. Гранични услови на осталим карактеристичним површима су исти као у табели 6.2.

Гранична површ	\underline{U}	p	k	ω
INLET	$\dot{V} = const$	$\partial_n p = 0$	$1,5 \cdot (0.2\% \underline{U})$	$C_\mu k / (\beta \nu)$
OUTLET	$\partial_n \underline{U} = 0$	$p_{sr} = 0 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	$\partial_n k = 0$	$\partial_n \omega = 0$

Полазећи од основног закона одржања масе, односно једнакости флуксева на површима које чине интерфејс, за сваку елементарну површ сваког интерфејса се одређују одговарајући тежински коефицијенти. За сваку елементарну површ једног интерфејса, они се одређују на основу односа дела површине те елементарне површи, која представља пресек са одговарајућим површима које се налазе на другом интерфејсу, и површине саме елементарне површи. Пресечне површи се одређују помоћу Сатерленд-Хоџмановог алгоритма, Sutherland and Hodgman (1974). Одређивање елементарних површи са другог интерфејса које се преклапају са датом елементарном површи на првом интерфејсу се одређује коришћењем два алгоритма: прво помоћу AABB (Axis Aligned Bounding Box), Verth and Bishop (2008), а потом помоћу SAT (Separating Axis Algorithm), Gottschalk (1996). Оно што је такође јако важно, је чињеница да се гранични услов може користити и са паралелним начином рачунања, чиме се у знатној мери скраћује време прорачуна.

Изабране су методе дискретизације другог реда тачности за све конвективне чланове. Због стабилности и конвергенције прорачуна, он је започет са узводна схемама дискретизације за све конвективне чланове, па је након одређеног броја итерација тај метод дискретизације промењен на други ред тачности, коришћењем гама диференцне схеме са вредношћу параметра $\beta_m = 0,15$.

Како је струјање разматрано као стационарно, коришћене су методе надрелаксације. За решавање једначине притиска, као и у прорачунима разматраним у претходној глави изабрана је GAMG метода. За пригушивање компоненти високих фреквенција вектора грешке у итеративном поступку GAMG методе, изабрана је метода конјугованих градијената са прекондиционерима. За остале величине изабране су итеративне методе са пригушивање компоненти високих фреквенција вектора грешке, Гаус-Зајделовом методом. Како је нумеричка мрежа у појединим доменима неортогонална, изабрана је да број коректора неортогоналности буде једнак два. Као критеријум за крај итеративног прорачуна, изабрано је да да резидуали свих величина буду мањи од 10^{-6} .

6.1.3 Резултати и дискусија

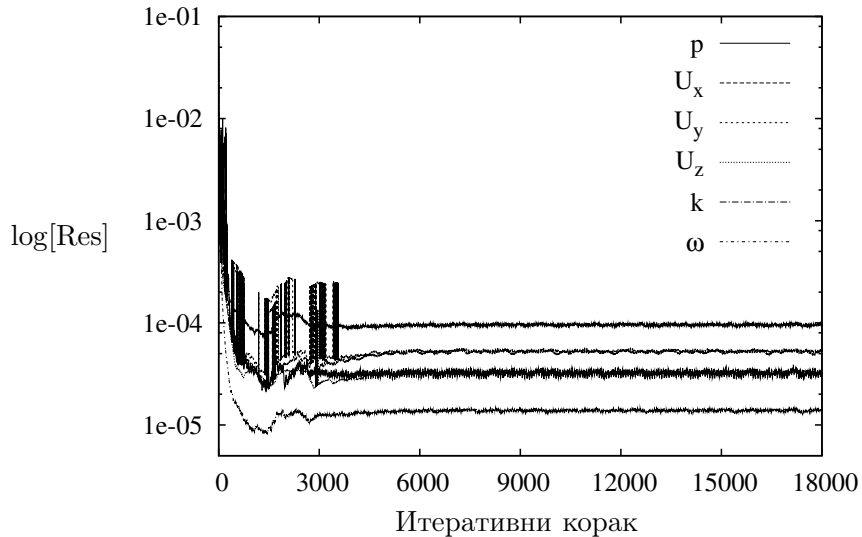
При одређивању максималног запреминског протока, на улазу је задат константан тотални притисак, док је на излазу задат константни притисак, исте вредности као тоталног на улазу. На овај начин се моделира усисавање ваздуха из околне атмосфере кроз улазну површ (INLET), његово струјање кроз вентилатор и цев и коначно, његов излазак кроз излазну површ (OUTLET), такође у атмосферу. Како је струјање разматрано као нестишљиво, задате су вредности притисака једнаке нули, тј.

$$p_{0,\text{in}} = p_{\text{out}} = 0$$

Прорачун се одвија на следећи начин: на основу граничних услова и иницијализације физичких величина унутар прорачунског домена, обично константним вредностима, формирају се, на основу дискретизованих форми једначина преноса, системи линеарних једначина за сваку физичку величину. Ти системи једначина се онда решавају задатим методама, који се готово увек итеративне, и те итерације се називају унутрашње. Са тако добијеним, новим решењем се прелази у следећи спољашњи итеративни корак и поступак се понавља. Након сваког спољашњег корака одређују се нормирани резидуали за сваку физичку величину, који представљају разлику те величине у текућем и претходном (спољашњем) итеративном кораку, подељени са вредношћу те величине из претходног корака. Ако се ти резидуали током итеративног поступка смањују, може се рећи да поступак решавања конвергира, и он се прекида ако вредности резидуала буду мањи од неке унапред прописане вредности.

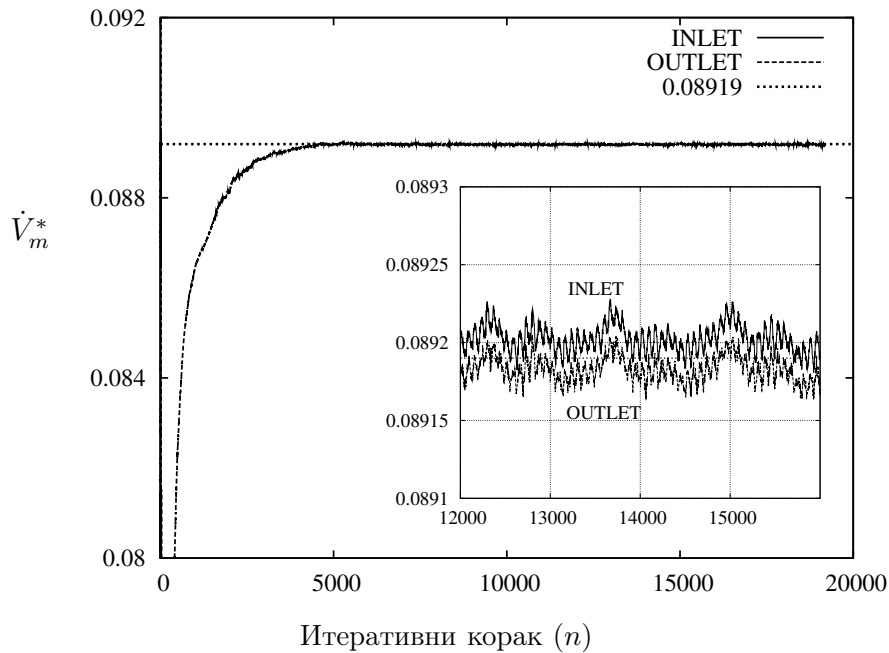
Посматрано је више критеријума као услов за тачност и конвергенцију решења. Као прво, посматране су промене резидуала током итерација, промене масеног протока на улазној и излазној површи, као и промене самих величина у појединим тачкама струјног поља. Како је проблем разматран као стационаран, односно решавање су једначине које одговарају стационарном струјању (нема временског члана), решење се, након достизања конвергенције не би требало мењати у времену. Међутим, у овом прорачуну то није био случај. Као прво нису достигнуте вредности резидуала мање од 10^{-6} , што се може видети на слици 6.11. Резидуали свих физичких величина након приближно 6000

спољашњих корака почињу да осцилују око неке константне вредности. Како њихове вредности нису мање од 10^{-6} , осцилаторни карактер ће бити присутан и у самом решењу поља физичких величина.



Слика 6.11. Промена резидуала током итерација.

То се може видети и праћењем промене запреминског протока током итеративног поступка. Како се тај запремински проток одређује на основу разлике притисака на улазној и излазној површи, и како је задат почетни услов (иницијализација) задато $\underline{U} = (0; 0; 0,2) \text{ m/s}$, запремински проток ће током итеративног поступка да расте, све до неке константне вредности, која одговара задатој разлици притисака. На слици 6.12 је приказана промена запреминског протока кроз површи INLET и OUTLET током прорачуна. Може се закључити да се приближно константна вредност запреминског протока достиже након 8000 спољашњих итеративних корака, као и да се запремински протоци на површима INLET и OUTLET поклапају. Међутим, ако се те промене прикажу у мањем опсегу на ординати може се видети, као прво, да се протоци на површима INLET и OUTLET разликују, и да имају идентичан осцилаторни карактер. Међутим, та разлика у протоцима на улазу и излазу је мања од 0,02% и главни разлог за то, поред саме чињенице да се ради о нумеричком прорачуну, лежи у постојању интерфејса између карактеристичних поддомена. Могући узрок појаве осцилација високих фреквенција је сама нумеричка мрежа, мада су на случају запреминског протока њихове амплитуде веома мале.



Слика 6.12. Промена масеног протока у току прорачуна у случају задавања једнаког тоталног притиска на улазној површи (INLET) и статичког притиска на излазној површи (OUTLET).

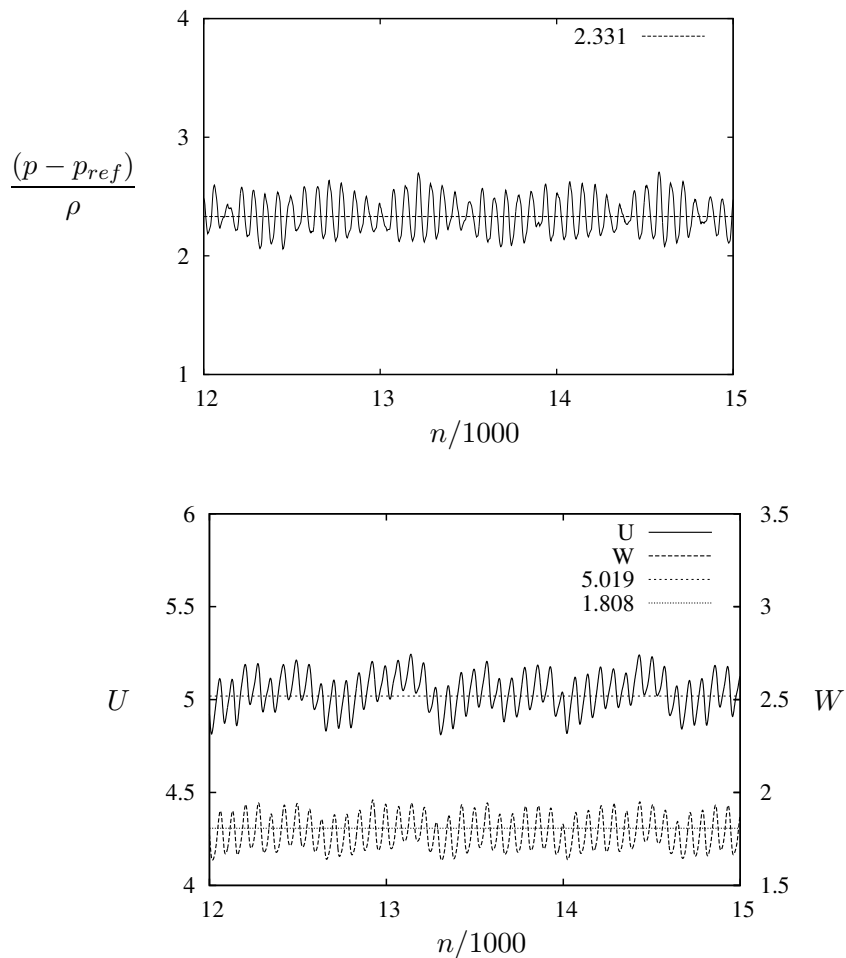
Генерисању нумеричке мреже у свим случајевима који су разматрани у оквиру ове дисертације је посвећена посебна пажња, али теоријски говорећи, она сигурно може бити и бољег квалитета по питању ортогоналности, затим асиметрије њених ћелија, и сл. У овако сложеним геометријама је јако компликовано генерисати „савршену“ нумеричку мрежу. Пре самог прорачуна проверени су параметри који описују неортогоналност мреже, као и њену асиметрију и сви ти параметри су били у дозвољеним границама, чак ближе вредностима које карактеришу одличну мрежу. Потенцијално побољшање тих параметара неће у некој значајној мери утицати на тачност резултата добијених нумеричких прорачуном, ако се у оба случаја користе диферендне метода истог реда тачност, већ само на брзину и начин конвергенције. Такође, тестиране су у и узводне диферендне схеме првог реда тачности, као и увођење додатних неортогоналних коректора, али је осцилаторни карактер промене запреминског протока остао исти, са нешто пригушенијим осцилацијама и незнатно мањом средњом вредношћу. Поред осцилација високих фреквенција, присутне су и осцилације са знатно мањом фреквенцијом, и претпоставља се да су оне на неки начин повезане са режимом рада вентилатора који је овде разматран. Наиме, вентилатор

у овом случају ради далеко од оптималне радне тачке, на крају цеви нема пригушења, већ ваздух слободно излази у атмосферу. Такви режими струјања су изразито нестационарни, што су показали експерименти у Чантрак (2012). Та нестационарност је такође била присутна и оквиру нумеричког прорачуна, у виду псеудо-стационарног решења, при коме физичке величине осцилују око неке средње вредности у току итерација. То нумеричко решење указује да је у бити струјање нестационарно. Међутим, осредњавањем вредности физичких величина након достизања квази-стационарног стања, могу се добити њихове вредности које би одговарале (фиктивном) стационарном стању. Тако се за запремински проток у овом случају добија да је он једнак $\dot{V}_m^* = 8,919 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$. Како је прорачунски домен $1/7$ од целокупног домена, онда је стварни максимални проток једнак $\dot{V}_m = 7\dot{V}_m^* = 0.6244 \text{ m}^3/\text{s}$.

На слици 6.13 су приказане промене притиска и брзине у тачки цеви која се налази на радијусу $r = 0,12 \text{ m}$, у попречном пресеку на растојању 1 m иза вентилатора. Амплитуде притиска² су јако мале и оне износе око $0,3 \text{ m}^2/\text{s}^2$, тако да се оне практично могу и занемарити. Слична је ствар и са брзинама. Све три компоненте брзине, аксијална, радијална и обимска, имају исти ред величине амплитуда (флуктуација) оне око $0,18 \text{ m/s}$. Осредњена вредност радијалне брзине након достизања осциловања око константне средње вредности добијена нумеричким прорачуном је неколико пута мања од аксијалне и обимске (за прорачунску тачку приказану на слици 6.13 она износи $-0,51 \text{ m/s}$). Карактер турбуленције који се може видети на дијаграмима није физичка турбуленција, већ је њен узрок лежи у самом нумеричком поступку.

Као и код праве турбуленције, у овом нумеричком поступку је извршено осредњавање, овога пута по итерацијама, и добијене осредњене вредности свих физичких величина у свакој прорачунској тачки. Осредњавање је обављено новим прорачуном, са додатних 4000 итеративних корака у току кога је истовремено вршено и осредњавање, почев од вредности добијених у последњем итеративном кораку ($n = 18 \cdot 10^3$). Осредњавање се обавља тако што се након

²Још једном: мисли се на релативни кинематички притисак, $(p - p_{ref})\rho$, у односу на референтни, атмосферски притисак, означен $p = 0 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Како се ради о струјању нестишљивог флуида, могуће је било коју вредност усвојити за референтну. Тако у овом случају средња вредност од $2,331 \text{ m}^2/\text{s}^2$ одговара стварној вредности натпритиска од $2,331\rho = 2,331 \cdot 1,25 = 2,914 \text{ Pa}$.



Слика 6.13. Промене притиска и аксијалне брзине у попреч ном пресеку цеви који се налази на растојању 1 m иза вентилатора, на радијусу $r = 0,12$ m. Са n је означен број спољашњег итеративног корака.

сваког итеративног корака у свакој прорачунској тачки врши сумирање вредности притиска и сваке компоненте брзине понаособ добијених у том итеративном кораку, и суме тих вредности из претходних итеративних корака. Дељењем тих сума са бројем текуће итерација дефинишу се нове величине U_{mean} и p_{Mean} у свакој ћелији. Осредњавањем на овај начин се врши немерљива уштеда у величини информација које се складиште на хард-диску рачунара, јер ће вредности тих величина бити записане само након претходно дефинисаног броја итерација. Осредњавање је могуће и обавити тако што би се вредности физичких величина записивале након сваког итеративног корака на хард-диск рачунара, па се онда, након завршеног прорачуна, над тим подацима применило осредњавање. Међутим, примера ради, у овом прорачуну величина директоријума који

садржи информације о вредностима физичких величина у прорачунским тачкама је око 200MB. Ако би се чувале вредности након сваког итеративног корака, након 3000 итерација, хард-диск рачунара би био „богатији“ за 600GB информација, над којима онда треба вршити осредњавање. Јасно је да је такав поступак неекономичан, а у већини случајева у нумеричкој механици флуида и немогућ (нумеричка мрежа са већим бројем ћелија, више физичких величина, велико време прорачуна које је неопходно у LES прорачунима, и сл.).

За приказивање резултата, односно постпроцесирање, коришћен је софтвер Paraview³. Као и OpenFOAM, у питању је софтвер отвореног типа (open-source), па корисник може додавати нове модуле који се користе за постпроцесирање резултата. У разматраном проблему се природно наметнула потреба за приказивањем струјања у међулопатичном пресеку, односно генерисањем меридијанског пресека. Постоје три опције у софтверу за облик површи којима се „сече“ прорачунски домен. То су раван, сфера и омотач квадра. За генерисање пресечне површи облика омотача цилиндра, неопходно је написати одворајући код у програмском језику Python⁴, који је такође open-source. У њему се генеришу додатни модули за постпроцесирање. Python код којим се генерише пресечна површ цилиндричног облика је дат у табели 6.4. Коришћењем тог модула су добијене све слике које показују струјање у разним меридијанским пресецима.

Табела 6.4. Python код који генерише површ облика омотача цилиндра унутар прорачунског домена.

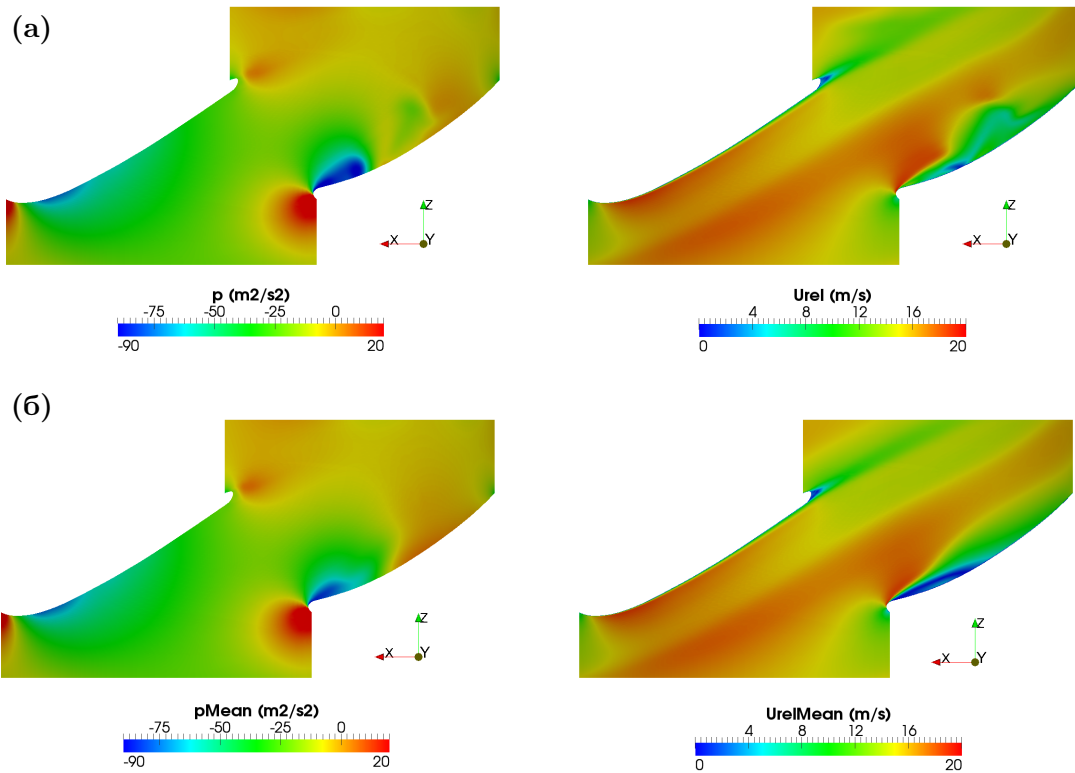
```
inp_copy.ShallowCopy(input)
inp_copy.UnRegister(None)
cutter = vtk.vtkCutter()
transf = vtk.vtkTransform()
transf.RotateX(90)
cyl = vtk.vtkCylinder()
cyl.SetCenter(0,0,0)
cyl.SetRadius(0.14)
cyl.SetTransform(transf)
cutter.SetCutFunction(cyl)
cutter.SetInput(inp_copy)
cutter.Update()
self.GetOutputDataObject(0).ShallowCopy(cutter.GetOutputDataObject(0))
```

На слици 6.14 су приказане расподеле притиска и интензитета релативне брзине, као и њихових осредњених вредности, у меридијанском пресеку одређеног

³<http://www.paraview.org>

⁴<http://www.python.org>

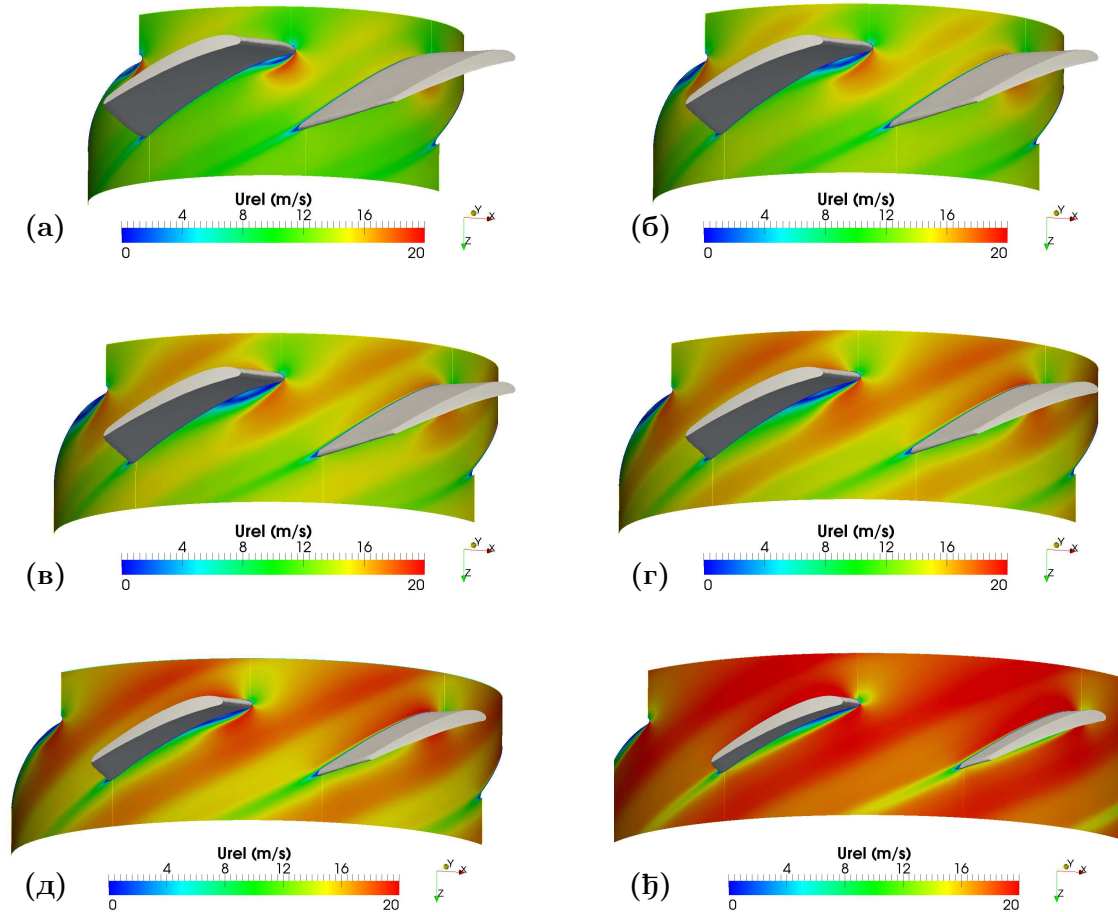
радијусом $r = 140 \text{ mm}$. Може се видети да прорачун показује да се на почетку доњаке формира зона ниског притиска у коме се формира повратно струјање. То је карактеристичан феномен са случај када је радна тачка вентилатора на његовој карактеристичној кривој јако померена удесно, тј. када је пораст притиска који он ствара јако мали.



Слика 6.14. Расподеле притиска и релативне брзине у меридијанском пресеку одређеном координатом $r = 0,14 \text{ m}$ за случај прорачуна са задатим Дириклеовим граничним условима за притисак на улазној (INLET) и излазној површи (OUTLET) прорачунског домена. (а) Расподеле у итеративном кораку $n = 22000$; (б) Расподеле осредњених вредности добијених осредњавањем током прорачуна од 18000 до 22000 спољашњих итерација.

Као што је већ речено, ти режими рада вентилатора су изразито нестабилни, тако да приступ „замрзнутог ротора“ није погодан за детаљнију квантитативну анализу струјања у радном колу вентилатора, већ више за квалитативну анализу. Такође, за тачније предвиђање тачке одвајања, неопходно је користи турбулентне моделе у формулацији за мале вредности Рејнолдсових бројева у којима се врши и прорачун струјања у вискозном подслоју. То свакако може бити нова тема истраживања, коју у оквиру ове дисертације није разматрана, али се свакако она намеће у блиској будућности. Такође, у овим режимима, прорачуни

симулацијом великих вртлога (LES) на комплетној геометрији, са ротирајућом нумеричком мрежом су свакако један од праваца даљих истраживања.



Слика 6.15. Распореде релативне брзине у меридијанским пресецима: (а) $r = 0,11$ m; (б) $r = 0,12$ m; (в) $r = 0,13$ m; (г) $r = 0,14$ m; (д) $r = 0,15$ m; (ђ) $r = 0,17$ m

Зона повратног струјања у овом режиму рада је највећа на радијусу $r = 0,135$ m. На слици 6.15 су приказане распореде релативних брзина у разним меридијанским пресецима. За генерисање тих слика су, поред Листинга 6.4, унутар софтвера `paraview` коришћене су опције трансформације и пресликавања дела прорачунског домена. Може се уочити да се са повећањем радијуса смањује и зона повратног струјања на доњаци лопатике и да је само струјање знатно хомогеније.

У даљем току прорачуна, одређена је и карактеристична крива вентилатора, на основу дефиниција датих стандардом ISO 5801. Тај стандард је везан за препоруке при експерименталном одређивање криве вентилатора. У зависности

од тога у којим је условима рада предвиђено да вентилатор ради, препоручују се и начини експерименталног одређивања криве вентилатора. Тако се за случај аксијалног вентилатора који је постављен у цеви, пораст статичког притиска који он производи једноставно одређује као разлика статичког притиска у мерном пресеку иза вентилатора и тоталног притиска испред вентилатора. Позиција мерног пресека у цеви у коме се мери притисак иза вентилатора је такође предмет дебате у инжењерским и научним круговима управо због вихора и неравномерне расподеле притиска у попречном пресеку цеви. У сваком случају, губици механичке енергије се занемарују, јер их је немогуће мерити, а са друге стране, они су и јако мали у овом случају. Те губитке је свакако могуће одредити нумеричким поступком, на основу примене једначине преноса кинетичке енергије у интегралном облику. Интеграцијом сваког члана те једначине по контролној запремини V која се поклапа са прорачунским доменом, могуће је теоремом Гаус-Остроградског сваки члан, осим једног, трансформисати у површинске интеграле који описује флуксе механичке енергије кроз контролне површи. Ти површински интегрални ће бити различити од нуле једино на површима кроз које протиче флуид, као и на лопатицама струјне машине, пошто оне, заједно са флуидом на њиховој површи ротирају константном угаоном брзином. Решења тих површинских интеграла на лопатицама струјних машина представљају њену снагу. Једини интеграл који ће бити интеграл по запремини потиче од члана вискозне дисипације, и он представља укупни губитак механичке енергије који се неповратно трансформише у унутрашњу. У овом случају он ће бити облика

$$\Phi_V = \eta \iiint_V (\underline{\underline{\tau}}_{\text{uk}} : \nabla \underline{U}) \, dV \quad (6.1)$$

где је $\underline{\underline{\tau}}_{\text{uk}}$ тензор укупних напона, одређен изразом

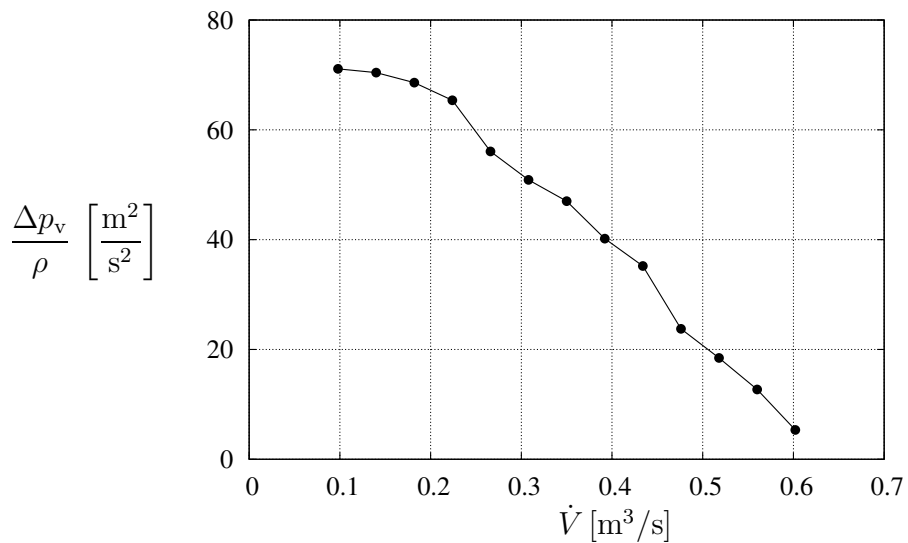
$$\underline{\underline{\tau}}_{\text{uk}} = \eta \left[\nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T \right] + \underline{\underline{R}} \quad (6.2)$$

Једначину (6.1) је једноставно имплементирати у код OpenFOAM-а, и након обављеног прорачуна и познатог брзинског поља и поља турбулентних напона (срачунатих на основу Бусинескове хипотезе у овом случају и вредности k и ω) одредити укупну дисипацију. Израчунавање тог интеграла је показало да је он

заиста мали у поређењу са осталим члановима, па се са правом може занемарити, тако да је крива вентилатора одређена у складу са препорукама датим у ISO 5801, одређивањем разлике статичког притиска на излазу и тоталног притиска на улазу.

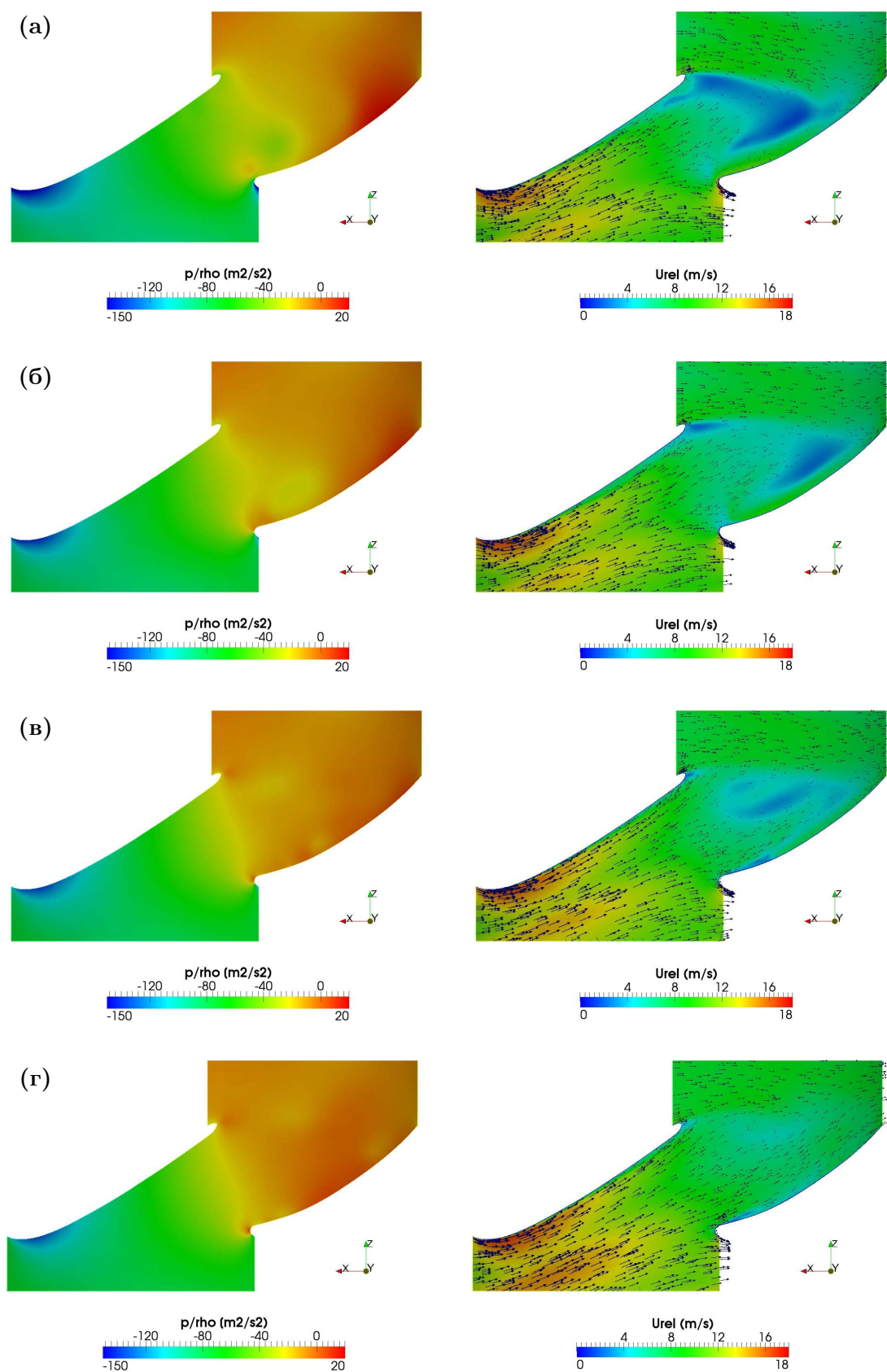
Табела 6.5. Вредности запреминских протока које су задаване на улазној површи домена, означене са \dot{V}' , стварне вредности протока, означене са \dot{V} , и израчунати пораст статичког притиска вентилатора, рачунат на основу стандарда ISO 9801.

\dot{V}' [m ³ /s]	0,014	0,020	0,026	0,032	0,038	0,044	0,050
\dot{V} [m ³ /s]	0,098	0,14	0,182	0,224	0,266	0,308	0,350
$\Delta p_v/\rho$ [m ² /s ²]	71,021	70,419	68,591	65,381	56,071	50,891	46,998
\dot{V}' [m ³ /s]	0,056	0,062	0,068	0,074	0,080	0,086	
\dot{V} [m ³ /s]	0,392	0,434	0,476	0,518	0,56	0,602	
$\Delta p_v/\rho$ [m ² /s ²]	40,194	35,194	23,753	18,458	12,719	5,3373	



Слика 6.16. Карактеристична крива вентилатора добијена нумеричким путем.

Обављена је серија прорачуна са различитим вредностима запреминских протока који се задају на улазној површи, док је на излазној површи вредност притиска била константна и једнака нули. Вредности кинетичке енергије турбуленције и специфичне дисипације ω су мењане сходно промени запреминског протока на улазу, односно брзине, а на основу израза датих у Табели 6.2.



Слика 6.17. Распореда притиска и релативне брзине у радном колу вентилатора у меридијанској равни $r = 0,14 \text{ m}$ за разне вредности запреминског протока. (а) $\dot{V} = 0,098 \text{ m}^3/\text{s}$, (б) $\dot{V} = 0,14 \text{ m}^3/\text{s}$, (в) $\dot{V} = 0,182 \text{ m}^3/\text{s}$ и (г) $\dot{V} = 0,224 \text{ m}^3/\text{s}$.

Крива вентилатора је приказана на слици 6.16. Може се приметити да је нагиб криве у њеном почетном делу веома мали и да су веома мале промене у порасту пристиска праћене знатнијим промена запреминског протока. У литератури тај режим рада је познат као stall, Liu et al. (2010), и оно се карактерише одвајањем струјања од горњаке лопатице вентилатора и постојања макровртлога у међулопатичном простору. На слици 6.17 су приказане расподеле притиска и релативне брзине у меридијанском пресеку на радијалној координати $r = 0,14 \text{ m}$. На дијаграмима који се односе на расподелу радијалне брзине јасно се може уочити вртложна зона, у којој су вредности релативне брзине веома мале, блиске нули, и како се та зона смањује са повећањем запреминског протока. Након вредности протока $\dot{V} = 0,224 \text{ m}^3/\text{s}$ долази до нагле промене нагиба криве. Нагиб криве се потом устаљује, да би поново имао нагли скок око вредности протока $\dot{V} = 0,434 \text{ m}^3/\text{s}$. Око тих вредности протока вентилатор такође ради ван оптималног режима, и тада почињу да јављају одвајања са доњак његових лопатица, што значајно смањује његову ефикасност. Међутим, за тачнији нумерички прорачун рада вентилатора у областима његовог неоптималног рада, неопходно је извршити нестационарни прорачун, у коме ће ефекат ротације вентилатора бити обухваћен стварном ротацијом нумеричке мреже, тако да ће положај лопатица мењати током времена.

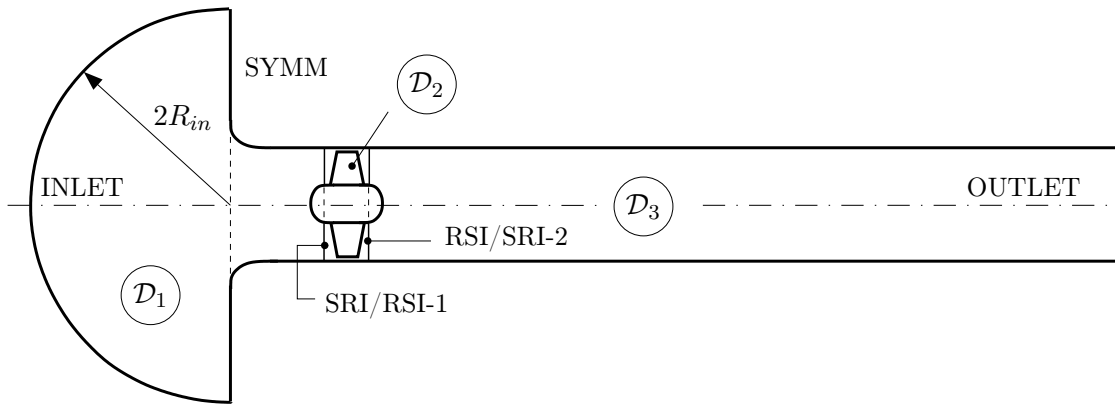
6.2 Прорачун струјања у комплетном 3D домену

Да би што боље и тачније описао утицај вентилатора на структуру струјног поља у цеви која је постављена иза њега неопходно је разматрати стварно померање његових лопатица у реалном времену. У приступу „замрзнутог ротора“ утицај обртања је обухваћен додатним чланом у једначини преноса, док се овде тај утицај обухвата стварним померањем нумеричке мреже, и решавањем нестационарног облика једначина преноса - Рејнолдсових једначина осредњених по ансамблу, (3.10).

6.2.1 Генерисање геометрије и нумеричке мреже

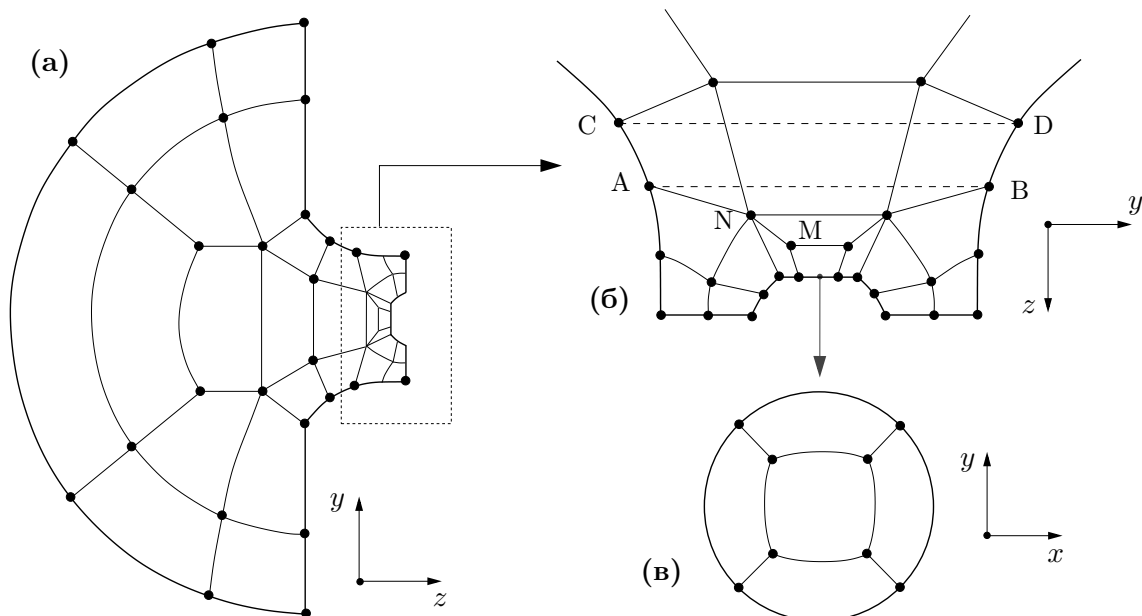
Геометријски посматрано, прорачунски домен се у овом случају добија седмоструким ротационим пресликавањем домена описаног у потпоглављу 6.1.1.

На тај начин је добијена топологија блокова у домену \mathcal{D}_2 , у коме се налази вентилатор.



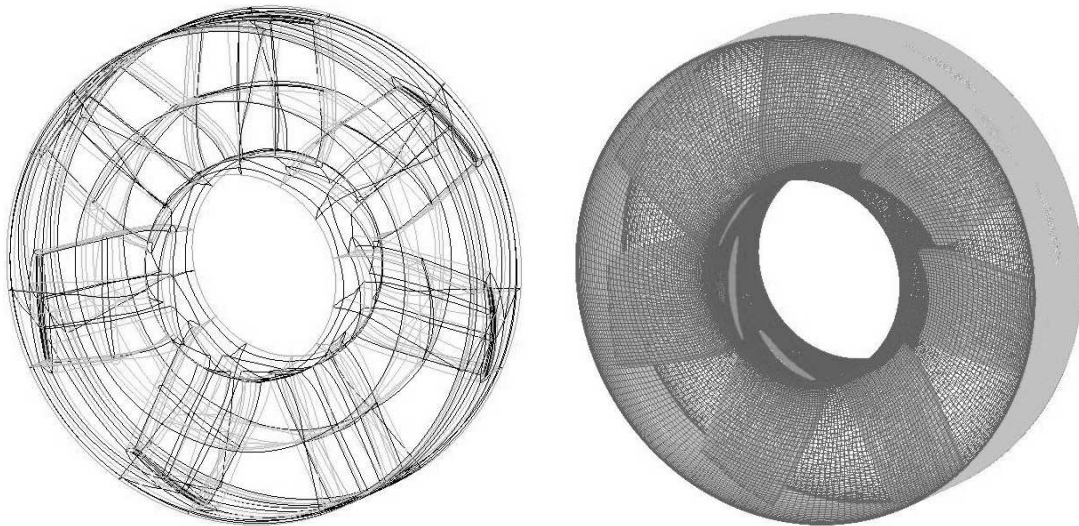
Слика 6.18. Скица прорачунског домена

Геометрија домена \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_3 , као и топологија блокова у њима није добијена на тај начин, већ је њихова геометрија изнова дефинисана, као и топологија блокова у њима. Домену \mathcal{D}_1 је, уместо цилиндричног дела као у случају описаном у 6.1.1, придодат сферни део истог полупречника. На тај начин се реалније описује струјање из околне атмосфере ка вентилатору. На слици 6.18 је приказана скица прорачунског домена у овом случају.



Слика 6.19. Тополошка структура блокова унутар поддомена \mathcal{D}_1 . На слици је приказане пројекције тополошке структуре блокова (тачке M и N не леже у истој равни). (а) Целокупни поддомен, (б) Део поддомена у близини интерфејса SRI-1 и дела главчине вентилатора HUB-1. (в) „О“ топологија блокова.

Тополошка структура блокова у домену \mathcal{D}_1 је приказана на слици 6.19. Како се ради о цилиндричној и сферној геометрији, приказана је пројекција те структуре. Неки од блокова имају суседне блокове који се налазе изнад и испод равни цртежа, док се стране појединих блокова поклапају са граничним поршима домена \mathcal{D}_1 (сферна површ или зид уводника). Тако тачке А и В, односно С и D дефинишу странице облика дела кружнице које припадају спољашњим блоковима. Та просторна структура блокова одговара такозваној О-топологији (O-grid). Укупан број блокова у поддомену \mathcal{D}_1 је 51. На основу тако дефинисане структуре блокова, генерисана је неуниформна нумеричка мрежа са већом густином ћелија у близини чврстих контура, као и у близини интерфејса.

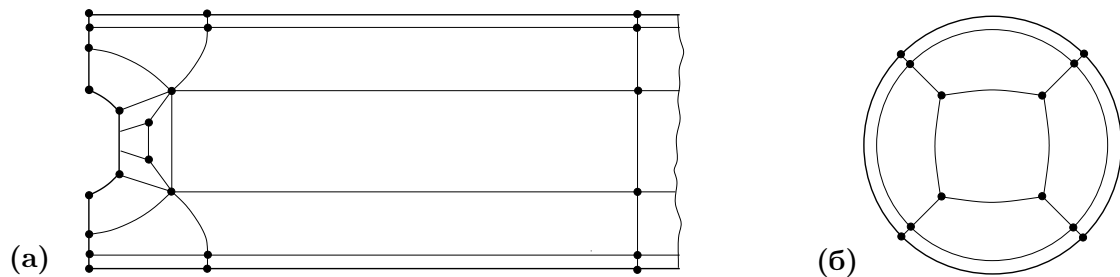


Слика 6.20. Структура блокова унутар поддомена \mathcal{D}_2 и одговарајућа нумеричка мрежа која има 3028977 хексаедарних прорачунских ћелија.

Као што је већ речено, топологија блокова у поддомену \mathcal{D}_2 , у коме се налази вентилатор добијена је ротационим пресликавањем топологије описане у потпоглављу 6.1.1. Пре тога је извршена подела блокова са две вертикалне равни, које се налазе непосредно иза интерфејса RSI-1 и непосредно испред интерфејса RSI-2. Разлог за то је обезбеђивање да линије нумеричке мреже у z правцу буду ортогоналне на површи интерфејса. То је значајно јер се тако обезбеђује угао између линија нумеричке мреже у z -правцу буде исти у сваком временском тренутку. Наиме, како нумеричка мрежа у овом домену ротира у времену, ако је тај угао различит од 90° , онда ће се и тај угао мењати у времену. На овај начин, избором да те линије буду ортогоналне, се елиминише утицај те неортогоналности на тачност прорачуна. Број блокова у поддомену \mathcal{D}_2 је 476. На слици 6.20

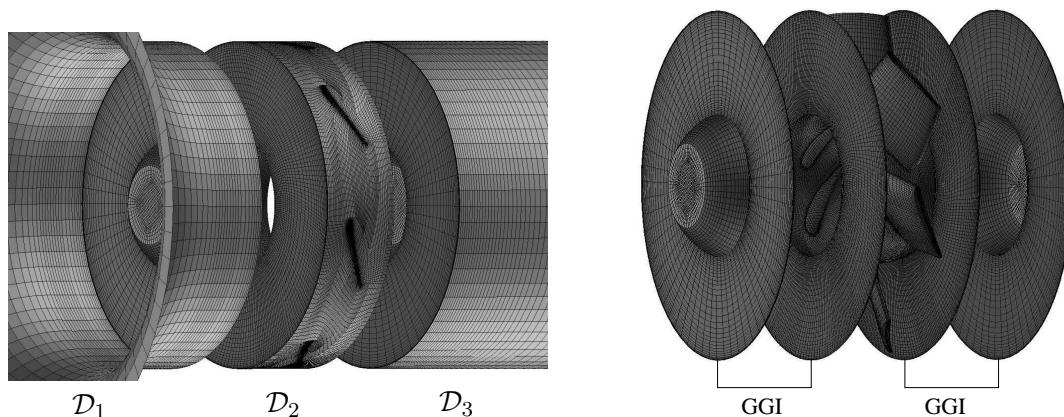
је приказана тополошка структура блокова и одговарајућа нумеричка мрежа.

У поддомену \mathcal{D}_3 (цев) структура блокова је слична структури приказаној на слици 6.19(б), с тим што су додати блокови непосредно уз зид цеви, чија се почетна темена поклапају са местима где се завршавају лопатице вентилатора у поддомену \mathcal{D}_2 . Разлог за то је да се, као прво добије исти подела страница блокова у радијалном правцу (исти број ћелија), као и да се линије мреже на интерфејсима RSI-2 и SRI-2 и које се протежу у обимском правцу (кружнице) што је могуће више поклапају. На слици 6.21 је приказана тополошка структура у поддомену \mathcal{D}_3 .



Слика 6.21. Тополошка структура блокова у поддомену \mathcal{D}_3 (цев). (а) Улазни део, интерфејс SRI-2, и део главчине HUB-2; (б) Тополошка структура на излазној површи (OUTLET).

Како је, као у претходном случају, топологија блокова у сваком од поддомена је била различита, број и распоред површи на интерфејсима SRI-1/RSI-1 и RSI-2/SRI-2 је различит. На слици 6.22 су приказани делови нумеричке мреже, са главним акцентом на интерфејсима.



Слика 6.22. Део нумеричке мреже са раздвојених поддоменима. На слици је приказана нумеричка мрежа са мањим бројем ћелија (913408) да би јасније училе разлике у нумеричкој мрежи на интерфејсима.

Након генерисања нумеричких мрежа за сваки од домена понаособ, извршено је њихово спајање у једну јединствену мрежу. Генерисано је неколико нумеричких мрежа, са различитим бројем ћелија. Прва нумеричка мрежа има 509728 ћелија, друга 913408 ћелија и коначно, мрежа са највећим бројем ћелија има 8265989 хексаедарних прорачунских ћелија.

6.2.2 Гранични услови, начин решавања и методе дискретизације

Као гранични услов је задата константна вредност запреминског протока на улазној површи сферног облика. Та вредност је одговарала вредности запреминског протока одређеног на основу експерименталног профила аксијалне брзине, измереног на растојању $z = 1,067$ m иза вентилатора. Тако израчунати запремински проток је $\dot{V} = 0,663$ m³/s. Та вредност запреминског протока је већа од максималне вредности протока добијене нумеричким прорачуном описаним у потпоглављу 6.1.3, која одговара једнаком тоталном притиску на улазу (INLET) и статичком притиску на излазу (OUTLET). Како крива вентилатора није експериментално одређивана, није било могуће извршити поређење експерименталних и нумеричких резултата криве вентилатора. Са овако задатим запреминским протоком, добија се да је притисак на улазној површи нешто већи од притиска на излазној површи, што значи да вентилатор ради са веома далеко од оптималне радне тачке. Али како су то били једини расположиви експериментални подаци са овим типом вентилатора, та вредност запреминског протока је задата на улазној површи, и извршена су поређења профила аксијалне и обимске брзине.

Остали гранични услови су исти као гранични услови дати у Табели 6.3. Такође, како је и овом случају на интерфејсима између поддомена нумеричка мрежа различита, и овде је коришћен гранични услов GGI, о коме је било речи у потпоглављу 6.1.1. Како прорачунски домен \mathcal{D}_2 ротира, његов релативни положај у односу на домене \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_3 се мења током времена, тако да се одговарајући интерполациони коефицијенти на интерфејсима мењају у току прорачуна, и они се рачунају у сваком временском кораку. То у знатној мери повећава време

прорачуна.⁵

Изабрана је Гама схема дискретизације за конвективни члан у Рејнолдсовој једначини, док су за конвективне чланове у једначини преноса кинетичке енергије турбуленције и специфичне дисипације ω изабране узводне схеме.

Начин третирања померање (ротације) дела нумеричке мреже се може наћи у Jasak (2009). Део који ротира (домен \mathcal{D}_2) се дефинише у одговарајућој датотеци, `dynamicMeshDict`. Главни део те датотеке је приказан у Табели 6.6. Угаона брзина ротације се у овом случају задаје у обртајима у минути, а како је смер ротације такав да је вектор угаоне брзине супротан позитивном смеру z -осе, задаје -1000 ob/min. Такође, треба додати да се у датотеци `cellZones` у којој су дефинисане зоне прорачунских ћелија (поддомени), домен који ротира мора означити са `movingCells`. За поступак нумеричког решавања коришћен је

Табела 6.6. Дефинисање ротације нумеричке мреже у датотеци `dynamicMeshDict`.

```
dynamicFvMeshLib  "libtopoChangerFvMesh.so";
dynamicFvMesh     mixerGgiFvMesh;

mixerGgiFvMeshCoeffs
{
    coordinateSystem
    {
        type          cylindrical;
        origin        (0 0 0);
        axis          (0 0 1);
        direction     (1 0 0);
    }

    rpm              -1000;

    slider
    {
        moving       ( RSI-1 RSI-2 );
        static       ( SRI-1 SRI-2 );
    }
}
```

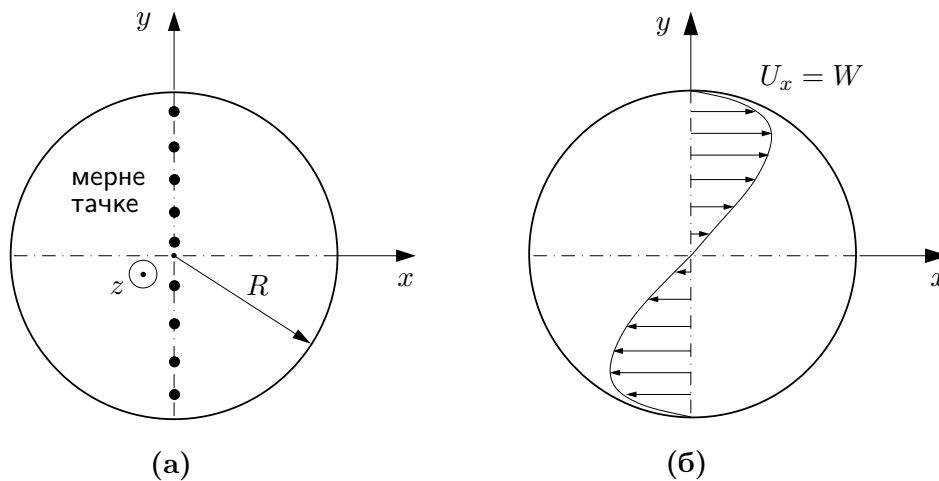
солвер `transientSimpleDyMFoam`. Он је намењен за решавање нестационарних проблема са ротирајућом мрежом. Повезивање поља притиска и брзине у оквиру овог солвера базира се SIMPLE алгоритму. Истраживања су показала да је овај начин стабилнији и робустнији у односу на PISO алгоритам, Petit et al. (2009), Petit et al. (2011), и вредности Курантовог броја могу бити и веће од

⁵У питању су месеци непрекидног рада током паралелног прорачуна на 32 процесора.

1, а да то не утиче на стабилност прорачуна. Изабран је адаптивни временски корак, тако да се обезбеди да максимална вредност Курантовог броја не буде већа од 5. Ред величине тог временског корака током итеративног поступка је био $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ s. Фреквенција обртања вентилатора која одговара задатој угаоној брзини, тј. броју обртаја је $f = 1000/60 = 16,667$ Hz, односно он направи један обртај за 0,06 s. На основу вредности временског корака, следи да се након сваког временског корака мрежа у домену \mathcal{D}_2 приближно заротира за $0,12^\circ$.

6.2.3 Резултати и дискусија

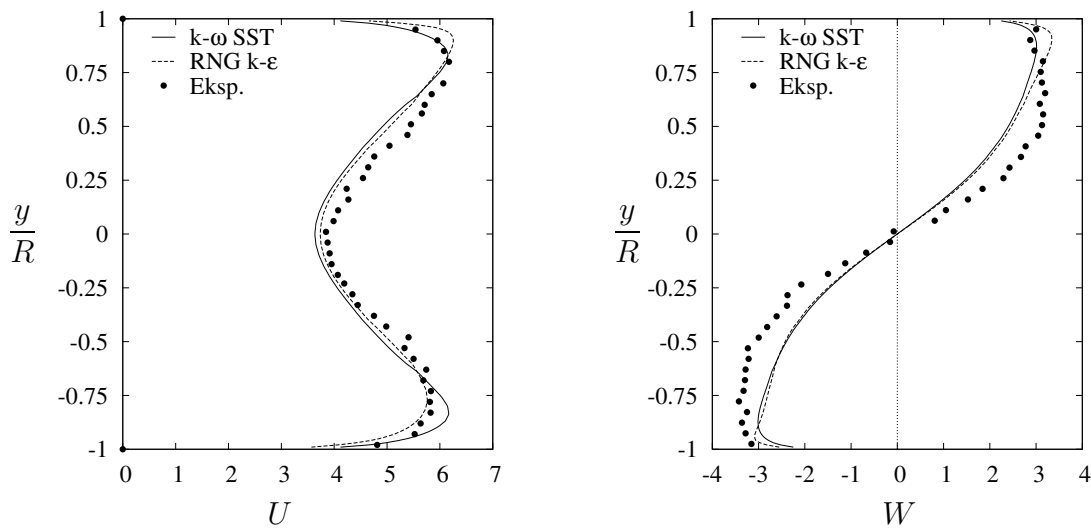
Пре самог прорачуна са ротирајућом мрежом у поддомену \mathcal{D}_2 , извршен је прелиминарни прорачун на мрежи са 913408 ћелија са приступом „замрзнутог ротора“. Коришћена су два турбулентна модела која су се показала као најпогоднија при прорачуну струјања у турбомашинама, а то су RNG $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ SST модел, Vardina et al. (1997). За задати запремински проток извршена су поређења профила временски осредњене аксијалне и обимске брзине. У експерименту су вршена мерења у вертикалној равни, од једног до другог зида, као што је приказано на слици 6.23.



Слика 6.23. (а) Скица појединих мерних тачака у експерименталним истраживањима, Чантрак (2012); (б) Скица стварног профила брзине у правцу x , управном на мерну раван - обимска брзина у мерном пресеку

При томе се брзина у обимском правцу поклапа са брзином у x -правцу, и стварни смер брзине U_x је скициран на слици 6.23(б). Она је за позитивне вредности y позитивна, а за негативне вредности координате y , она је негативна.

Поређење експерименталних резултата и резултата добијених нумеричким прорачуном је приказано на слици 6.24. Уочава се одлично слагање за профиле аксијалне брзине са експерименталним резултатима, за оба модела. Оба модела добро предвиђају смањење аксијалне брзине у зони вртложног језгра, у области око осе цеви, где $k-\omega$ SST предвиђа нешто мање вредности аксијалне брзине у поређењу са RNG $k-\epsilon$ моделом. Оба модела дају веома слична предвиђања за профил обимске брзине (брзине U_x , слика 6.23), у којима је квалитативни карактер њене промене дуж радијуса веома добро предвиђен. Вредности обимске брзине добијене нумеричким прорачуном су нешто мање него експерименталне вредности. Оно што је карактеристично за резултате оба модела, као и за сам експеримент, је присуство одређена асиметрија профила брзина у односу на x -осу. Та асиметрија је најизраженија у близини зида. Такође, у поређењу са $k-\omega$ SST моделом, RNG $k-\epsilon$ модел предвиђа нешто већи градијент у близини зида за обе брзине.



Слика 6.24. Поређење профила осредњене аксијалне (U) и осредњене обимске брзине (W) добијених нумеричким прорачуном са експерименталним резултатима из Чантрак (2012).

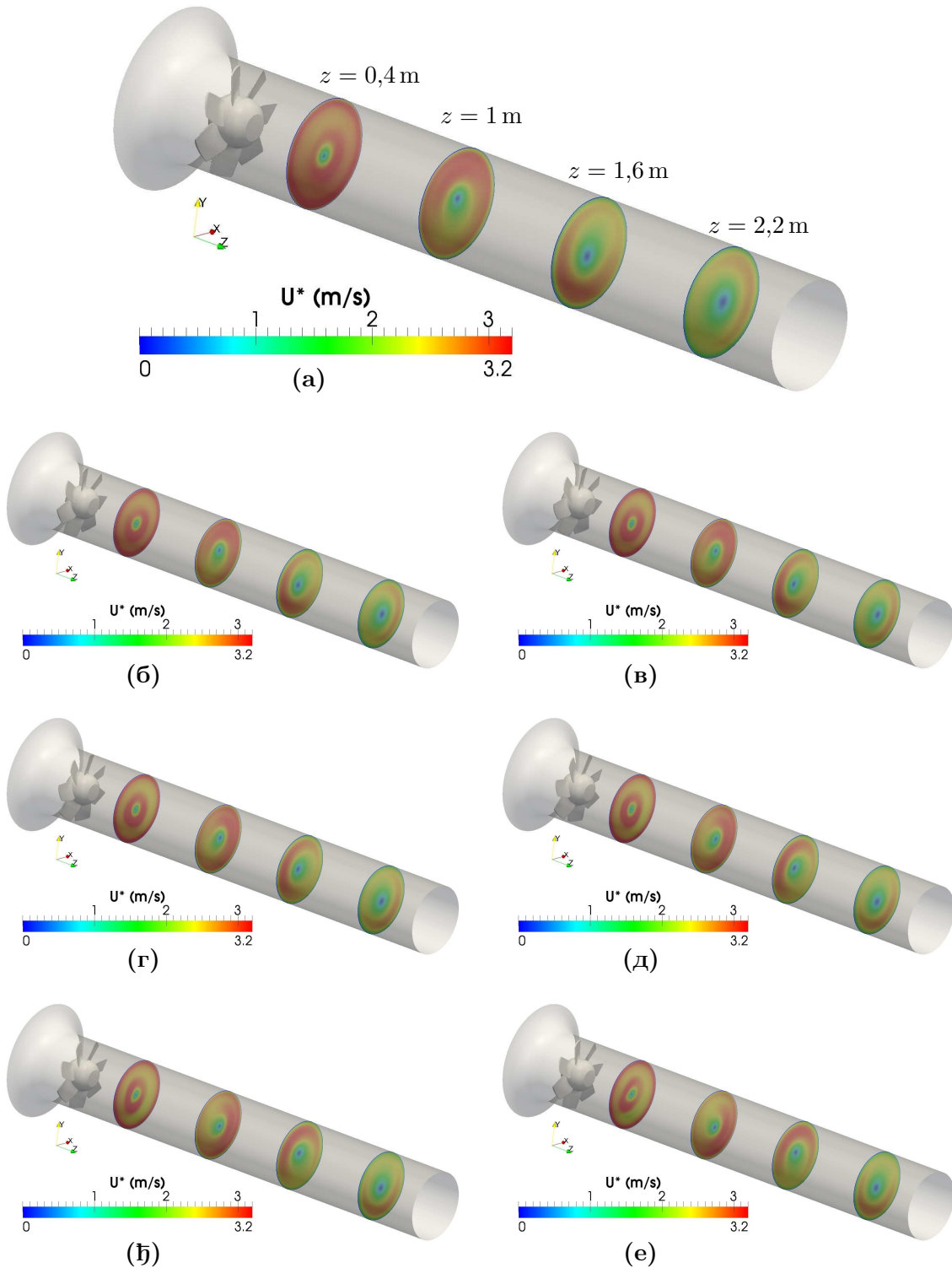
Такође на истој нумеричкој мрежи извршен је и прорачун са LG напонским моделом. За разлику од $k-\omega$ SST и RNG $k-\epsilon$, није добијено конвергентно решење, а асиметрија свих физичких величина је била јако изражена у попречним пресецима. То поново указује на изразиту нестационарност оваквог струјања, и такође, на комплексност прорачуна са напонским моделима у сложеним геометријама.

Добра слагања експерименталних резултата и резултата нумеричких прорачуна приказана на слици 6.24 су вид потврде исправности прорачуна, као и модула и алата који су имплементирани у OpenFOAM за прорачун струјања у турбомашинама. Ради бољег разумевања динамике струјања, и нестационарног кретања великих вртложних структура, као што је већ речено, извршен је прорачун са ротирајућом мрежом чији се резултати презентују у даљем тексту. За тај прорачун коришћена је нешто мања вредност запреминског протока који се задавао на улазу, тако да радна тачка вентилатора буде нешто ближа оптималној радној тачки. Вредност протока која је задата је $\dot{V} = 0,610 \text{ m}^3/\text{s}$.

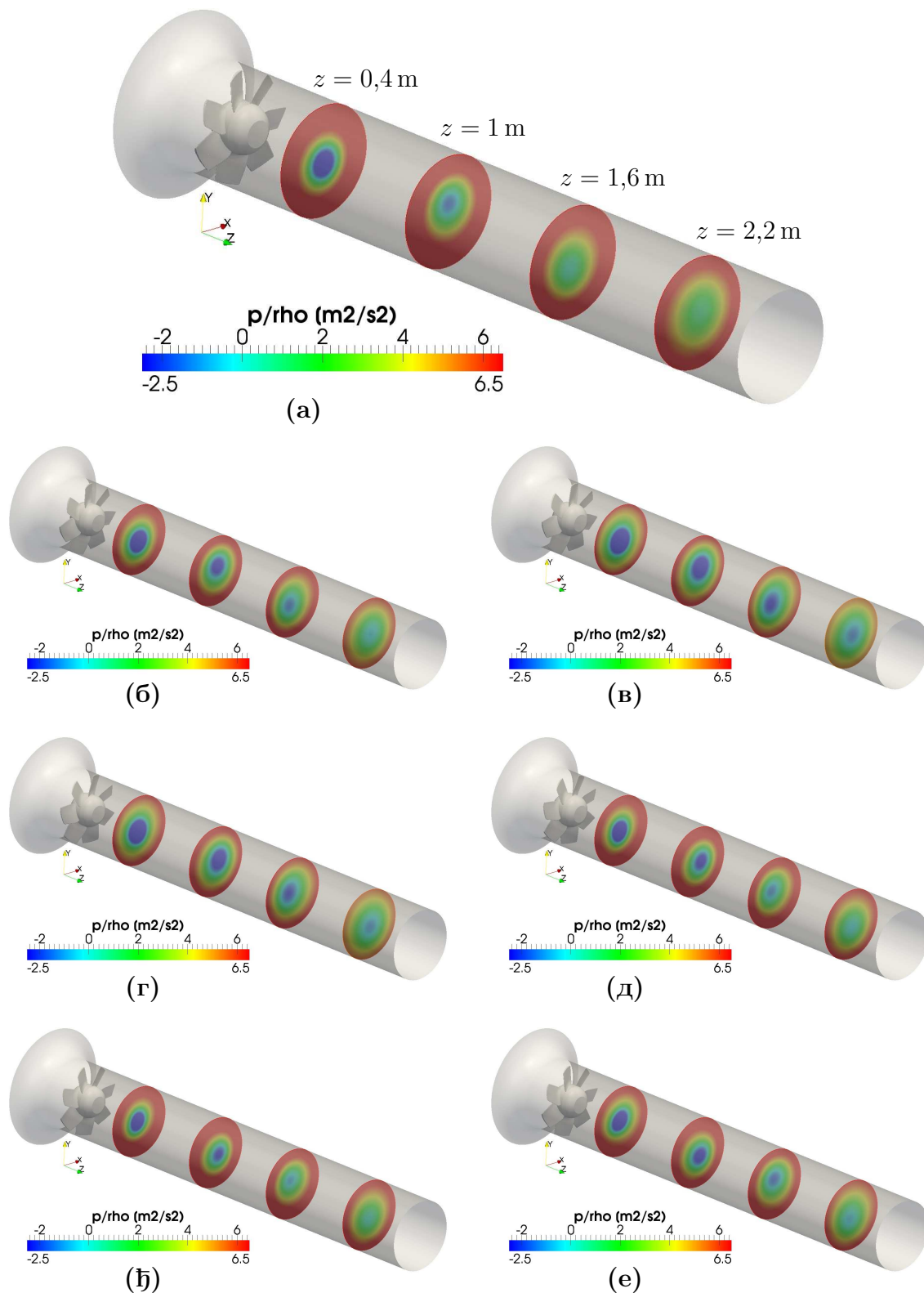
Приликом нумеричких прорачуна са ротирајућом мрежом, на нумеричкој мрежи са 913408 ћелија добијени резултатаи су имали јако изражене нефизикалне осцилације са великим фреквенцијама и релативно великим амплитудама. То је указало да је било неопходно извршити прорачун на нумеричкој мрежи са већим бројем ћелија. У ту сврху је коришћена мрежа са 8265989 ћелија. Као почетни услов за прорачун на тој мрежи, коришћено је решење нестационарног прорачуна добијено на мрежи са 913408 ћелија. То решење је, коришћењем апликације `mapFields`, пресликано на мрежу са 8265989 ћелија.

На слици 6.25 су приказана расподела интензитета брзине $U^* = \sqrt{V^2 + W^2}$ у појединим попречним пресецима (вектор брзине \underline{U}^* лежи у равни пресека). Уочава се како интензитет те брзине низструјно слаби, и како се центар ротације вртложног језгра не поклапа са осом цеви ни у једном пресеку, као и да се његов положај мења током времена. Приказане су промене у временским тренуцима између којих је временска разлика $\Delta t = 0,01 \text{ s}$, тако да прикази на сликама 6.25(а)-(е) одговарају једном обртају вентилатора. Слична је ситуација и са расподелом притиска у истим временским тренуцима приказаним на слици 6.26. И на тим сликама је јасно уочљиво нестационарно, прецесионо кретање вртложног језгра, као и несиметрична расподела притиска у попречном пресеку у разним временским тренуцима.

Да би се та несиметричност јасније приказала дају се профили физичких величина у дуж А-А и В-В, тј. у хоризонталној и вертикалној равни које пролазе кроз осу цеви, слика 6.27. За приказе карактеристичних пројекција брзине код вихорног струјања, аксијалне, радијалне и обимске брзине користиће се локални координатни систем (x, y) који лежи у равни пресека.

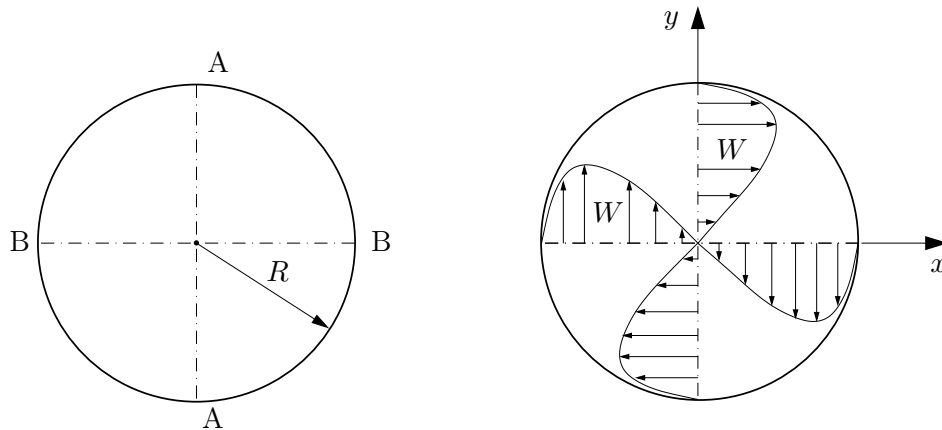


Слика 6.25. Распореде интензитета брзине $U^* = \sqrt{V^2 + W^2}$, (V - осредњена радијална и W - осредњена обимска брзина) у појединим попречним пресецима, у различитим тренуцима времена. (а) $t = 0,1 \text{ s}$; (б) $t = 0,11 \text{ s}$; (в) $t = 0,12 \text{ s}$; (г) $t = 0,13 \text{ s}$; (д) $t = 0,14 \text{ s}$; (ђ) $t = 0,15 \text{ s}$; (е) $t = 0,16 \text{ s}$

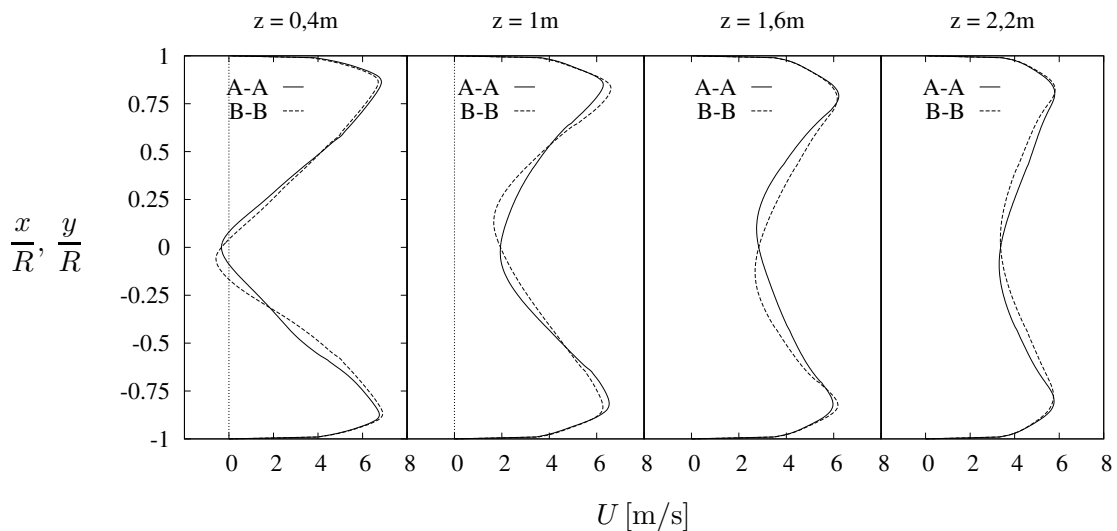


Слика 6.26. Распреде притиска у појединим попречним пресецима у различитим тренуцима времена. (а) $t = 0,1 \text{ s}$; (б) $t = 0,11 \text{ s}$; (в) $t = 0,12 \text{ s}$; (г) $t = 0,13 \text{ s}$; (д) $t = 0,14 \text{ s}$; (ђ) $t = 0,15 \text{ s}$; (е) $t = 0,16 \text{ s}$

Тако се, на пример, дуж А-А обимска брзина поклапа са брзином у правцу x осе, док се у пресеку В-В поклапа са брзином у правцу y -осе, као што је приказано на слици 6.27. Радијална брзина се дуж А-А поклапа са брзином у правцу x -осе, док се дуж В-В она поклапа са брзином у правцу y -осе. Аксијална брзина је правца осе z која се поклапа са осом цеви.



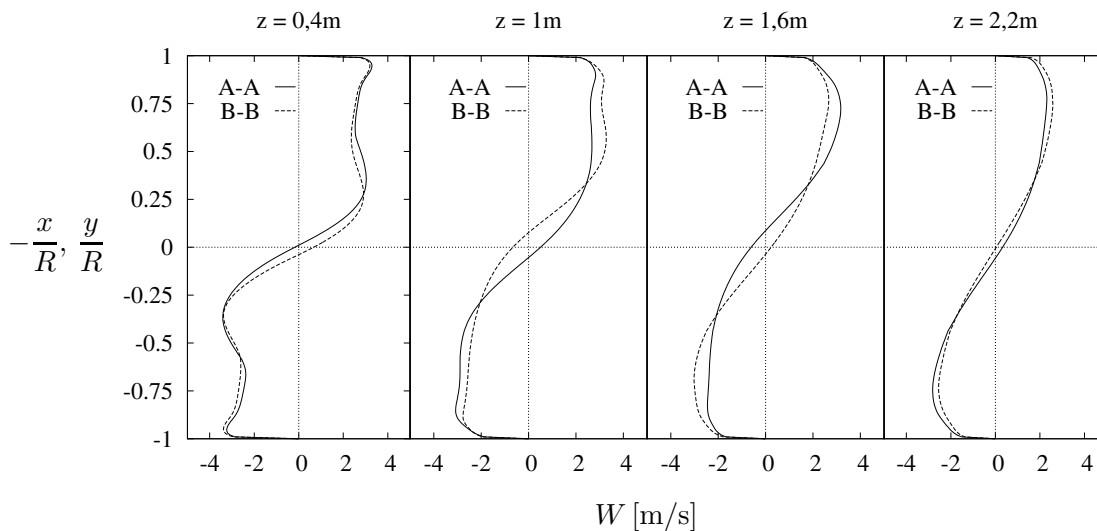
Слика 6.27. Хоризонтални и вертикални пресеци, А-А и В-В дуж којих су приказани профили брзина и кинетичке енергије турбуленције у мерним пресецима.



Слика 6.28. Профили аксијалне брзине у појединим пресецима цеви, дуж А-А и В-В (види слику 6.27) у временском тренутку $t = 0,15$ s.

На слици 6.28 су приказане профили аксијалне брзине у временском тренутку $t = 0,15$ s. Уочава се да у овом временском тренутку, у пресеку одређеном координатом $z = 0.4$ m, постоји зона повратног струјања у области око осе цеви. Такође, уочава се, да су профили асиметрични како у односу на вертикалну,

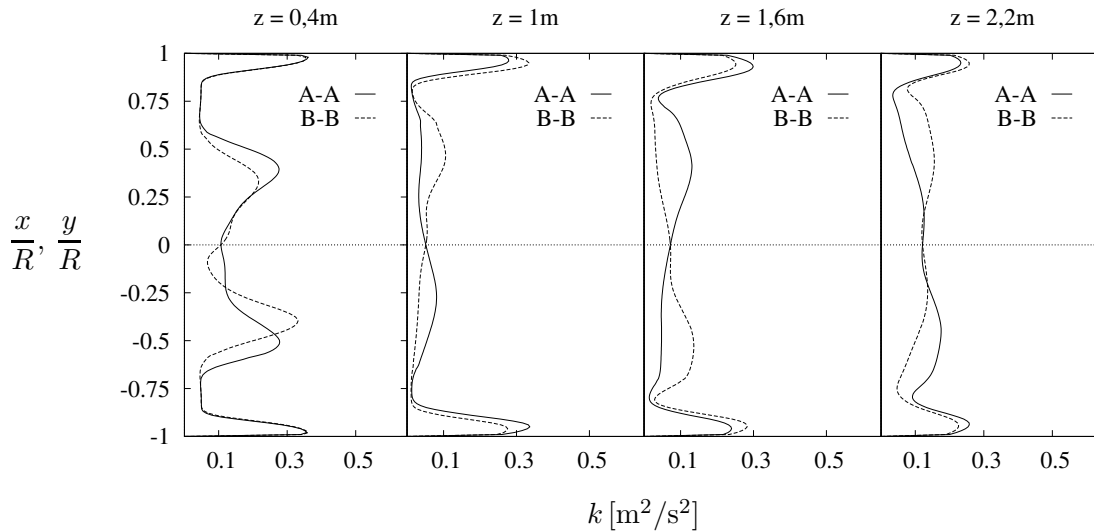
тако и у односу на хоризонталну раван која пролази кроз осу цеви. Профили обимске брзине у истом тренутку времена у истим мерним пресецима приказани су на слици 6.29. Као и код профила аксијалних брзина и овде је јасно уочљива асиметрија у односу на обе равни. У пресецима најближим вентилатору, на профилима обимске брзине се јављају два максимума, а такође се оса ротације не поклапа са осом цеви. Сличан карактер профила обимске брзине, по питању појаве два максимума, такође је добијен у експерименталним истраживањима датим у Лечић (2003). Максималне вредности радијалне брзине су $0,5 \text{ m/s}$, и то у пресецима непосредно иза вентилатора. У осталим пресецима њена вредност је мања од $0,1 \text{ m/s}$, тако да је у овом случају она такође за ред величине мања од остале две компоненте брзине.



Слика 6.29. Профили обимске брзине у појединим пресецима цеви, дуж А-А и В-В (види слику 6.27) у временском тренутку $t = 0,15 \text{ s}$.

На слици 6.30 су приказани профили кинетичке енергије турбуленције у изабраним мерним пресецима. У пресецима блиским вентилатору, јављају се два максимума профила кинетичке енергије турбуленције. Први максимум се јавља у зони смицајног слоја у којој градијент $\partial_r W$ мења знак, док је други максимум у зони зида, где су присутни велики градијенти свих компоненти брзине. У даљим низструјним пресецима, нестаје максимум обимске брзине у зони смицајног слоја, што директно утиче на смањење вредности кинетичке енергије турбуленције у тој области. Као и код профила брзина, у свим пресецима је јасно изражена асиметрија профила кинетичке енергије турбуленције у односу на

осу цеви, дуж оба правца А-А и В-В. Такође, приметан је пад кинетичке енергије у оси цеви у пресеку $z = 1\text{ m}$, па потом њен пораст у следећа два пресека ($z = 1,6\text{ m}$ и $z = 2,2\text{ m}$). Тај тренд је такође примећен и у експерименталним истраживањима датим у Kitoh (1991).



Слика 6.30. Профили кинетичке енергије турбуленције у појединим пресецима цеви, дуж А-А и В-В (види слику 6.27) у временском тренутку $t = 0,15\text{ s}$.

На сликама 6.28-6.30 су приказане расподеле физичких величина у изабраним мерним пресецима у једном одређеном временском тренутку. Оне се мењају у времену, и тај карактер промене је осцилаторан у свакој тачки у цеви. За одређивање карактеристичних фреквенција неопходно је да време прорачуна буде знатно дуже, да би се добили статистички потпунији скуп података. Та анализа је свакако предмет будућих истраживања.

Идентификација вртложних структура

Како се у вихорном струјању јављају велике вртложне структуре, од којих је свакако најрепрезентативније вртложно језгро око осе цеви, природно се намеће потреба за идентификацијом тих структура. У литератури се може наћи више критеријума који се користе за идентификовање вртложних структура, као Hunt et al. (1988) Chong et al. (1990), Jeong and F. (1995), Dubief and Delcayre (2000). Сви начини се базирају на анализи градијента брзине $\nabla \underline{U}$, односно на анализи знака његових сопствених вредности, или на основу знака његових инваријанти. У оба случаја се полази од карактеристичне једначине тензора

(матрице) $\nabla \underline{U}$,

$$\lambda^3 - \mathbb{P}\lambda^2 + \mathbb{Q}\lambda - \mathbb{R} = 0 \quad (6.3)$$

где су са λ означене сопствене вредности тензора $\nabla \underline{U}$, а са \mathbb{P} , \mathbb{Q} и \mathbb{R} његова прва, друга и трећа инваријанта, дефинисане следећим изразима

$$\mathbb{P} = \text{tr}(\nabla \underline{U}) = \nabla \cdot \underline{U}, \quad (6.4)$$

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{2} (\|\underline{W}\|^2 - \|\underline{S}\|^2), \quad (6.5)$$

$$\mathbb{R} = \det(\nabla \underline{U}). \quad (6.6)$$

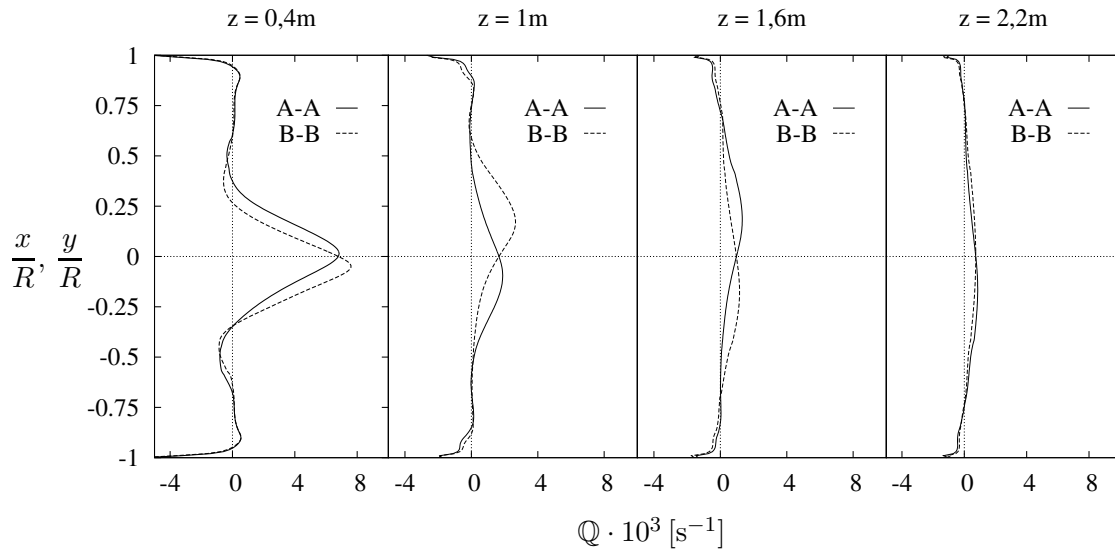
Тензори \underline{S} и \underline{W} представљају тензор вртложности и тензор брзине деформисања, дефинисани једначинама (4.104) и (4.106), док су

$$\|\underline{S}\| = \sqrt{\underline{S} : \underline{S}} \quad \text{и} \quad \|\underline{W}\| = \sqrt{\underline{W} : \underline{W}} \quad (6.7)$$

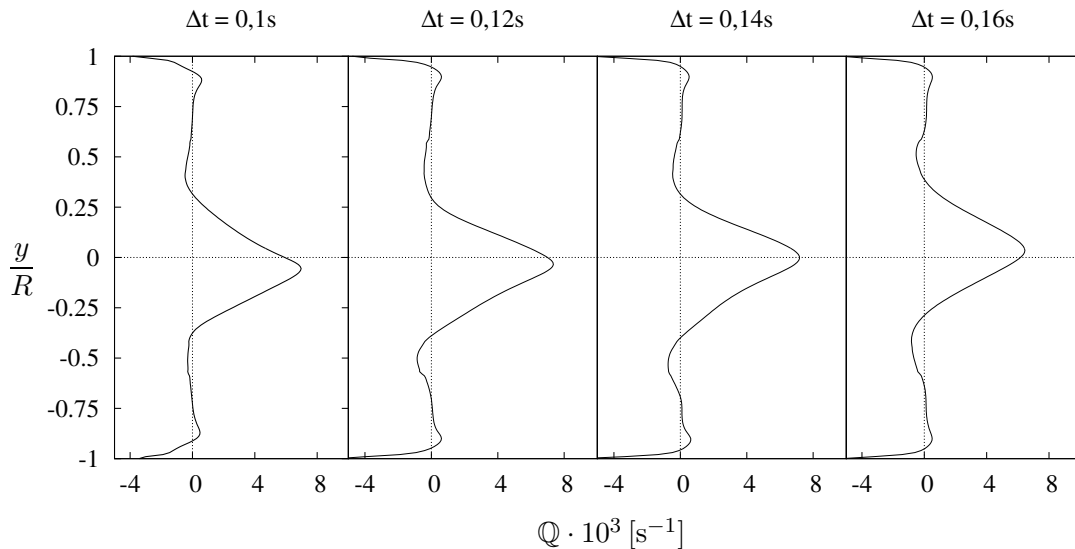
њихове норме. На основу критеријума предложеног у Hunt et al. (1988) и Dubief and Delcauge (2000) за вртложне структуре важи да је $\mathbb{Q} > 0$, јер је у том случају ротација израженија у односу на деформацију. Hunt et al. (1988), поред услова да друга инваријанта буде позитивна, такође намећу и додатни услов да је уједно локални притисак на тим местима мањи од неког референтног амбијенталног притиска. Услов $\mathbb{Q} > 0$ то експлицитно не обезбеђује, али се показало да је у већини случајева и тај додатни услов за притисак задовољен у оним деловима струјног поља у којима је друга инваријанта \mathbb{Q} позитивна, Villiers (2006).

На слици 6.31 су приказани расподеле друге инваријанте тензора градијента брзине у изабраним пресецима. Уочава се да она достиже свој максимум у зони око осе цеви. Вредност тог максимума се смањује у правцу струјања, а такође је у низструјним пресецима присутно његово релативно померање са једне на другу страну у односу на раван симетрије, дуж оба правца А-А и В-В. Померање максимума на профилу је присутно и током времена, у једном фиксном пресеку. То је приказано на слици 6.32, где су дате расподеле друге инваријанте \mathbb{Q} дуж

правца В-В у разним тренуцима времена. Јасно се уочава да се максимум помера из горње у доњу полураван, и да се том приликом и његова вредност мења. То значи да вртложне структуре у оси цеви врше како кретање у вертикалном, тако и кретање у аксијалном правцу.



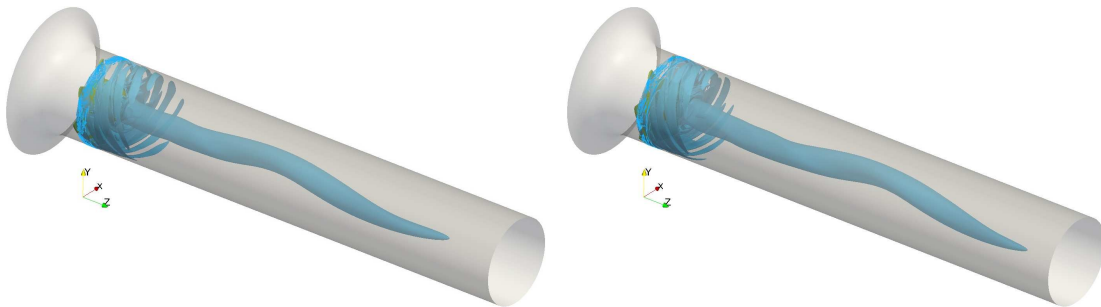
Слика 6.31. Профили друге инваријанте градијента брзине у изабраним пресецима цеви, дуж А-А и В-В (види слику 6.27) у временском тренутку $t = 0,15\text{ s}$.



Слика 6.32. Профили друге инваријанте градијента брзине у пресеку $z = 0.4\text{ m}$, дуж А-А (види слику 6.27) у разним временским тренуцима.

То нестационарно аксијално и радијално кретање вртложног језгра се може видети и на слици 6.33, где је приказана евискарна површ $Q = 10^3$ у два

различита временска тренутка. Може се приметити да вртложно језгро врши кретање и у радијалном правцу и у аксијалном правцу. Такође, у пресецима непосредно иза вентилатора, у зонама уз зид цеви такође се формирају вртложне структуре којима одговара велика вредност друге инваријанте тензора градијента брзине.



Слика 6.33. Контуре $Q = 10^3$ које одговарају делу вртложног језгра око осе цеви, као и вртложним структурама које се формирају непосредно иза вентилатора уз зид цеви, у различитим временским тренуцима: (а) $\Delta t = 0,1 \text{ s}$, (б) $\Delta t = 0,15 \text{ s}$

План будућих истраживања је обављање нумеричких прорачуна коришћењем симулација великих вртлога (LES) на истој нумеричкој мрежи. Ти резултати ће дати дубљи увид у саму структуру струјања. У тим прорачунима ће бити обухваћени ефекти стишљивости, тако да ће бити анализирани и акустични феномени. Такође, нумерички прорачуни са другим типовима аксијалних вентилатора који се планирају у скоријој будућности ће омогућити и упоредну анализу њихових карактеристика, као и разлике у структури струјања које они генеришу.

And we see how we have come from seeking meaning to finding meaning in the seeking.

Заправо, увиђамо да смо од трагања за смислом дошли до тога да смисао налазимо у трагању.

Daniel J. Boorstin (1914-2004)

7

Закључак

Предмет истраживања у овој дисертацији су начини моделирања и нумерички прорачуни турбулентних вихорних струјања. Нумерички прорачун турбулентних вихорних струјања представља један трајни истраживачки изазов у механици флуида. Ова дисертација представља један мали допринос тој проблематици.

У уводној глави докторске дисертације дате су основне карактеристике турбулентних вихорних струјања. На првом месту ту је постојање обимске брзине која се суперпонира са аксијалном брзином, као и сложена, изразито неизотропна структура турбуленције. Дат је и приказ релеватне литературе из области теоријских и експерименталног истраживања турбулентних вихорних струјања и указано на тешкоће нумеричког прорачуна таквих струјања. Представљени су и циљеви истраживања, који се базирају на теоријској анализи турбулентних вихорних струјања и савремених нумеричких поступака.

У другој глави, основне једначине механике флуида (континуума) се разматрају на савремен начин, где се све физичке величине приказују као објекти - тензори нултог, првог и другог реда. Наводе се основни постулати који се користе при извођењу тих једначина, и дефинишу додатне конститутивне релације које затварају систем основних једначина кретања. Како су у оквиру дисертације разматрана изотермска струјања нестишљивог њутновског флуида, дата је и детаљнија анализа Навије-Стоксових једначина, и наглашени проблеми њеног решавања нумеричким путем.

У уводном делу треће главе дате су основне физичке карактеристике турбулентних струјања, као и начини њиховог математичког описа. Увођењем Рејнолдсове статистике, и полазећи од инваријантног облика основних једначина, изводи се инваријантни облик Рејнолдсових једначина које описују статистички осредњено турбулентно струјање. Проблем затварања Рејнолдсових једначина се анализира кроз приказ савремених турбулентних модела. главни акценат је на анализи двоједначинских модела као што су $k - \varepsilon$, $k - \omega$, $k - \omega$ SST, Lander-Sharma $k - \varepsilon$ и пуних напонских модела, Launder Reece Rodi (LRR), Launder-Gibson (LG) и Speziale-Sarkar-Gatski (SSG). Код анализе напонских модела, дати су и начини моделирања карактеристичних чланова у једначини преноса турбулентних напона. Прегледом научних радова у којима су примењиване разне класе турбулентних модела у прорачуну турбулентних вихорних струјања указано је да двоједначински модели дају добре резултате само у одређеним класама вихорних струјања, док напонски модели дају тачније резултате јер могу да предвиде феномене карактеристичне за турбулентна вихорна струјања.

Четврта глава се односи на методологију нумеричког прорачуна применом методе коначних запремина (FVM - finite volume method), на којој је базиран софверски пакет OpenFOAM. Дат је приказ основних принципа дискретизације прорачунског домена као и дискретизације карактеристичних чланова у једначинама кретања. Указано је и на карактеристичне параметре о којима се мора водити рачуна приликом дискретизације просторног домена. У карактеристичној једначини преноса, анализирана су начини дискретизације свих њених чланова, са посебном пажњом на анализи дискретизације конвективног члана. Дат је приказ савремених диференцијалних метода којима се врши његова дискретизација, са посебним акцентом на схемама базираним на NVA (Normalized Variable Approach) приступу. Даље је дата анализа основних граничних услова и анализу карактеристичне матрице које се добија дискретизацијом просторног домена и једначина кретања. Указано је који чланови утичу на повећање дијагоналне доминантности карактеристичне матрице, која је директно повезана са стабилношћу прорачуна и конвергенцијом решења. У оквиру дела који се тиче дискретизације Навије-Стоксове и Рејнолдсове једначине, указано је на основне начине повезивања притиска и поља брзине у току прорачуна, преко PISO и SIMPLE алгорита. Након теоријских разматрања, дата су објашњења начина имплементације претходно наведених метода у OpenFOAM-у. Наводе се

основне класе унутар самог кода OpenFOAM, као и начини и принципи наслеђивања изведених класа. Објашњен је и основни принцип имплементације једначина кретања као и турбулентних модела. У последњем делу ове главе детаљно је објашњена сопствена имплементација SSG напонског модела у OpenFOAM код.

У петој глави се нумерички анализира вихорно струјање у дугачкој, правој цеви, уз претпоставку да се ради о осносиметричном струјању. Анализирано је вихорно струјање са профилем осредњене обимске брзине типа Ранкиновог вртлога, за три различита интензитета вихорног броја. Начин валидације нумеричких резултата је обављен коришћењем постојећих експерименталних резултата других аутора. У експериментима су вршена мерења тренутних брзина, коришћењем сонди са загрејаним влакнима, у седам мерних пресека дуж цеви. Генератор вихора није разматран, већ је поставка нумеричког прорачуна таква да се улазни пресек прорачунског домена поклапа са првим мерним пресеком на коме су задате измерене вредности брзина и турбулентних напона. Након објашњења начина генерисања прорачунског домена, избора одговарајућих схема дискретизације и начина решавања добијеног система линеарних једначина, презентовани су резултати нумеричких прорачуна. Показано је да двоједначински модели не дају резултате задовољавајуће тачности код предвиђања овог типа вихорног струјања, поготово за веће вредности вихорног броја. Нумерички резултати добијени LG и SSG моделом су показали значајне предности у односу на двоједначинске моделе. Показано је да SSG модел даје боља предвиђања осредњене аксијалне брзине у односу на LG модел, док је LG модел дао нешто боље резултате у случају предвиђања обимске брзине. Као начин валидације, како LG модела тако и сопствене имплементације SSG модела, извршена је инваријантна анализа добијених нумеричких резултата. Показано је да се у свим карактеристичним пресецима вредности друге и треће инваријанте тензора анизотропности налазе унутар Ламлијевог троугла, што је један од показатеља да је SSG модел правилно имплементиран у код OpenFOAM-а.

У шестој глави је разматрано вихорно струјање у коме се моделира и генератор вихора, а то је аксијални вентилатор. Прорачун је обављен коришћењем два различита приступа и два различита прорачунска домена. У првом приступу, разматран је приступ тзв. „замрзнутог ротора“ на прорачунском домену са

ротационо периодичним површима, док је у другом случају разматрана комплетна геометрија, са делом нумеричке мрежом која ротира у времену. У оба приступа, прорачун је извршен коришћењем $k - \omega$ SST модела. У уводном делу ове главе дато је детаљно објашњење начина генерисање блок-структуриране мреже, као и начини спрезања карактеристичних прорачунских поддомена. На прорачунском домену са ротационо периодичним површима извршено је нумеричко одређивање карактеристичне криве вентилатора, варирањем вредности запреминског протока кроз прорачунски домен. У случају прорачуна са ротирајућом нумеричком мрежом, у делу прорачунског домена у коме се налази вентилатор, добијено је нестационарно кретање вртложног језгра у цеви иза вентилатора, које је идентификовано коришћењем Q критеријума. Резултати нумеричких симулација су показали јако добро слагање са постојећим резултатима мерења профила брзина других аутора који су користили тај вентилатор у својим експерименталним истраживањима вихорних струјања.

Прве четири главе ове дисертације недвосмислено говоре о широком дијапазону научних дисциплина које је требало проучити. У првом реду је то механика флуида, њене основне једначине и њихово физичко тумачење. Посебно се издваја турбулентно струјање, и у вези са њим, разни турбулентни модели. Прегледом обимне литературе требало је уочити који турбулентни модели са задовољавајућом тачношћу могу описати турбулентна вихорна струјања. Практични прорачун вихорних турбулентних струјања је једино могућ применом одговарајућих нумеричких метода. Из ове широке научне области, посебно се издваја метода коначних запремина, као најподеснија за примену у механици флуида. Разлог за то је сама њена формулација која обезбеђује испуњеност закона одржања. На овој методи се заснивају готово сви софтвери намењени за нумеричке прорачуне у механици флуида. Данас у свету постоји доста специјализованих програмских пакета намењених за нумеричке прорачуне у механици флуида. Већина тих програма је комерцијалног типа у којима корисник обично нема никакав увид у сам код програма, већ само може да бира између великог броја понуђених опција. Могућности тих комерцијалних програма су неоспорно велике, али за нека суштинска истраживања на пољу нумеричке механике флуида они нису погодни. За права истраживања неопходно је да код, односно начин како су одговарајући нумерички алгоритми у њега имплементирани буде доступан кориснику. Тако је за све нумеричке прорачуне у овој дисертацији

коришћен софтвер отвореног кода (open-source) под називом OpenFOAM. Као софтвер отвореног кода је реализован 2004. године и од тада се он константно унапређује од стране научника и истраживача широм света. Данас, OpenFOAM представља поуздан софтвер за нумеричке прорачуне проблема механике флуида. За разлику од комерцијалних софтвера, само коришћење OpenFOAM-а изискује знатно више знања из механике флуида, нумеричких метода, као и одлично познавање GNU/Linux оперативног система. То су били предуслови за даљу анализу самог програмског кода. На основу ове анализе, у оквиру ове дисертације, извршена је уградња SSG напонског модела у код OpenFOAM.

У овој дисертацији је извршен нумерички прорачуни и анализа добијених резултата за два карактеристична случаја вихорног струјања. Први случај се односи на осносиметрично вихорно струјање у правој цеви. Како се овде радило 2D геометрији, главни циљ обављених прорачуна је било тестирање постојећих турбулентних модела који постоје у OpenFOAM-у, као и тестирање новоуграђеног SSG модела. У досадашњој литератури прорачуни осносиметричних вихорног струјања су једино обављени коришћењем комерцијалних софтвера.

Други карактеристични случај струјања је, са прорачунске тачке гледишта, знатно компликованији. Овај прорачун је просторно свеобухватнији, јер у себи садржи и прорачун генератора вихора - аксијалног вентилатора, уграђеног на улазу у цев. Генерисање нумеричке мреже у овом случају је веома захтеван и дуготрајан процес. Сам прорачун захтева коришћење напредних, нових структурних елемената OpenFOAM, који се у свету још увек тестирају. Добијени резултати су својеврстан допринос исправности, односно валидација тих нових елемената, превасходно намењених за прорачун струјања у турбомашинама.

Резултати представљени у овој дисертацији су плод дугогодишњег рада на пољу нумеричке механике флуида, и коришћења OpenFOAM-а као софтверског алата. Тај рад је свакако константно доносио нова сазнања, али и у исто време и отварао многа нова питања и рађао нове идеје и правце будућих истраживања. Оно што ће засигурно бити правац даљих истраживања је коришћење симулација великих вртлога за нумерички прорачун вихорног струјања у цеви иза кола аксијалног вентилатора. У тим прорачунима ће се обухватити и ефекти стишљивости, са циљем анализе буке и акустичних феномена.

Литература

- Algifri, A. H., Bhardwaj, R. K., and Rao, Y. V. N. (1988). „Turbulence measurements in decaying swirl flow in a pipe“. *Applied Scientific Research*, 45(3):233–250.
- Baldwin, B. and Lomax, H. (1978). Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper, Huntsville, AL*, pages 78–257.
- Bardina, J., Huang, P., and Coakley, T. (1997). Turbulence modeling validation, testing, and development. Technical report, NASA, Ames Research Center.
- Bayly, B., Orszag, S., and Herbert, T. (1988). Instability mechanism in shear-flow transition. *Annual Review in Fluid Mechanics*, 20:359–391.
- Beaudoin, M. and Jasak, H. (2008). Development of a generalized grid interface for turbomachinery simulations with OpenFOAM. In *Open Source CFD International Conference*. Berlin, Germany.
- Behrens, T. (2009). „OpenFOAM’s basic solvers for linear systems of equations - solvers, preconditioners, smoothers“. Technical report, Chalmers University of Technology.
- Benišek, M. (1979). *Istraživanja vihornih strujanja u cevima*. Doktorska disertacija, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu.
- Cazan, R. and Aidun, C. (2009). „Experimental investigation of the swirling flow and the helical vortices induced by a twisted tape inside a circular pipe“. *Physics of Fluids*, 21(3):102–109.
- Chen, J. and Lin, C. (1999). Computations of strongly swirling flows with second moment closures. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 30:493–508.
- Chien, K.-Y. (1982). Prediction of channel and boundary layer flows with a low-reynolds number turbulence model. *AIAA Journal*, 20:33–38.

- Choi, K.-S. and Lumley, J. (2001). The return to isotropy of homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 59–84.
- Chong, M., Perry, A., and Cantwell, B. (1990). A general classification of three-dimensional flow field. *Physics of Fluids*, 2:765.
- Craft, T., B.E., L., and Suga, K. (1993). Extending the applicability of eddy viscosity models through the use of deformation invariants and non-linear elements. In *Proc. 5th International Symposium on Refined Flow Modeling and Turbulence Measurements*, pages 125–132. Presses Ponts et Chaussées, Paris.
- Daly, B. and Harlow, F. (1970). Transport equations in turbulence. *Physics of Fluids*, 13:2634–2649.
- Darwish, M. (1993). „A new high-resolution scheme based on the normalized variable formulation“. *Numerical heat transfer, Part B*, 24:253–371.
- Davidson, L. (2012). *Fluid Mechanics, Turbulent Flow and Turbulence Modeling*. Handout. Chalmers University of Technology.
- Davidson, P. (2004). *Turbulence-an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press.
- Dubief, Y. and Delcayre, F. (2000). On coherent-vortex identification in turbulence. *Journal of Turbulence*, 1:011.
- Escue, A. and Cui, J. (2010). Comparison of turbulence models in simulating pipe flows. *Applied Mathematical Modeling*, 34:2840–2849.
- Ferziger, J. and Perić, M. (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer.
- Gaskell, P. and Lau, A. (1988). „Curvature-compensated convective transport: Smart, a new boundedness-preserving transport algorithm“. *International journal for numerical methods in fluids*, 8:617–641.
- Gibson, M. and Launder, B. (1978). Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 86(03):491–511.

- Golub, G. and Van Loan, C. (1996). *Matrix computations*. John Hopkins University Press, Baltimore.
- Gottschalk, S. (1996). Separating axis theorem. Technical Report TR96-024, Dept. of Computer Science, UNC Chapel Hill.
- Gropp, W., Lusk, E., Doss, N., and Skjellum, A. (1996). „A high performance, portable implementation of the MPI message passing interface standard“. *Parallel computing*, 22:789–828.
- Gupta, A. K., Lilley, D. G., and Syred, N. (1984). *Swirl flows*. Abacus Press, Tunbridge Wells, England.
- Gyllernam, W. (2008). *Analytical and Numerical Studies of Internal Swirling Flows*. PhD thesis, Chalmers University of Technology.
- Hanjalić, K. and Jakirlić, S. (2002). *Second-Moment Turbulence Closure Modelling*, In: *Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows*, chapter 2, pages 47–102. Cambridge University Press.
- Hanjalic, K. and Launder, B. (1972). A reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 52:609–638.
- Harten, A. (1983). „High resolution schemes for hyperbolic conservation laws“. *Journal of computational physics*, 49:357–393.
- Hestens, H. and Steifel, E. (1952). „Method of conjugate gradients for solving linear systems“. *Journal of research*, 29:409–436.
- Hinze, J. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill, New York.
- Hirsh, C. (2007). *Numerical computations of internal and external flows*. Butterworth-Heinemann, imprint of Elsevier, 2nd Edition.
- Hogg, S. and Leschziner, M. (1989). Computation of highly swirling confined flows with a reynolds stress turbulence model. *AIAA Journal*, 27(1):57–63.
- Huang, Y., Ma, H., and Chu, H.-J. (2006). Modelling turbulent swirling flows based on algebraic two-equation ($k-\varepsilon$) approach. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 51:285–304.

- Hunt, J. C. R., Wray, A. A., and Moin, P. (1988). Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. Technical report, Stanford, Center for turbulence research.
- Issa, R. (1986). „Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator splitting“. *Journal of Computational Physics*, 62:40–65.
- Ito, S., Ogawa, K., and Kuroda, S. (1980). „Turbulent swirling flow in circular pipe“. *Journal of Chemical Engineering Japan*, 13:6–10.
- Jakirlić, S., Hanjalić, K., and Tropea, C. (2002). Modeling rotating and swirling turbulent flows: a perpetual challenge. *AIAA Journal*, 40(10):1984–1996.
- Jameson, A., Schimdt, W., and Turkel, E. (1981). „Numerical simulations of the Euler equations by finite volume method using Runge-Kutta time-stepping“. *AIAA paper*. 81-1259, Palo Alto.
- Jasak, H. (1996). *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*. PhD thesis, Imperial College London.
- Jasak, H. (2009). Dynamic mesh handling in OpenFOAM. In *Workshop of Flow Modelling in OpenFOAM, Darmstadt*.
- Jasak, H., Weller, H., and Gosman, A. (1999). „High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured mesh“. *International journal for numerical methods in fluids*, 31:431–449.
- Jawarneh, A. and Vatistas, G. (2006). Reynolds stress model in the prediction of confined turbulent swirling flows. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 128:1377–1382.
- Jeong, J. and F., H. (1995). On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 285:69–94.
- Jones, W. P. and Launder, B. E. (1972). The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:301–314.

- Kärrholm, F. P. (2008). *Numerical Modeling of Diesel Spray Injection and Turbulence interaction*. PhD thesis, Department of Applied Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden.
- Kitoh, O. (1991). „Experimental study of turbulent swirling flow in a straight pipe“. *Journal of Fluid Mechanics*, 225:445–479.
- Kolmogorov, A. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk.*, 30:301–305. Reprinted Proc. Royal Soc. London, 434, 9, 1991.
- Kolmogorov, A. (1942). The equations of motion in an incompressible fluid. *Izvestia Acad. Sci. USSR Physics*, 6:56–58.
- Kreith, F. and Sonju, O. (1965). „The decay of turbulent swirl in a pipe“. *Journal of Fluid Mechanics*, 22:257–271.
- Launder, B. (1975). On the effect of gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum. *Journal of Fluid Mechanics*, 67:569.
- Launder, B. and Morse, A. (1979). Numerical prediction of axisymmetric free shear flows with reynolds stress closure. In Bradbury, L., Durst, F., Launder, B., Schmidt, F., and Whitelaw, J., editors, *Turbulent Shear Flows*, pages 279–294. Springer.
- Launder, B., Reece, G., and Rodi, W. (1975). Progress in the development of a reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics*, 68(3):537–566.
- Launder, B. E. and Sharma, B. I. (1974). Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1:131–138.
- Leonard, B. (1979). „A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation“. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 19:59–98.
- Leonard, B. (1988). „Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities“. *International journal for numerical Methods in Fluids*, 8:1291–1318.

- Leonard, B. (1991). „The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection“. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 88:17–74.
- Li, H. and Tomita, Y. (1994). „Characteristics of swirling flow in circular pipe“. *ASME: Journal of Fluid Engineering*, 116:370–373.
- Liu, S., Huang, R., and Chuang, A. (2010). Computational and experimental investigations of performance curve of an axial flow fan using downstream flow resistance method. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 34:827–837.
- Liu, Y., Schmidli, J., and Smith, B. (1998). Numerical and experimental study of swirling flow in a model combustor. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(11):1485–1497.
- Lu, P. and Semiao, V. (2003). A new second moment closure approach for turbulent swirling confined flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41:133–150.
- Lumley, J. (1978). Computational modeling of turbulent flows. *Advanced Applied Mechanics*, 18:123–176.
- Lumley, J. and Newman, G. (1977). The return to isotropy of homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 82(1):161–178.
- Mellor, G. and Herring, H. (1973). A survey of mean turbulent field closure models. *AIAA Journal*, 11:590–599.
- Menter, F. (1994). Eddy viscosity transport models and their relation to k - ϵ model. Technical Report TM-108854, NASA.
- Meyer, C. D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear algebra*. Siam.
- Muntean, S., Nilsson, H., and Susan-Resiga, R. (2009). 3d numerical analysis of the unsteady turbulent swirling flow in a conical diffuser using fluent and openfoam. In 3rd IAHR International Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems, Brno, pages C4:155–164.
- Nilsson, H. (2006). Evaluation of openfoam for cfd of turbulent flow in water turbines. In 23th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems,.

- Parchen, R. and Steenberg, W. (1998). An experimental and numerical study of turbulent swirling pipe flows. *Journal of Fluids Engineering*, 120:54–61.
- Pashtrapanska, M., Jovanović, J., Lienhart, H., and Durst, F. (2006). Turbulence measurements in a swirling pipe flows. *Experiments in Fluids*, 120:54–61.
- Patankar, S. and Spalding, D. (1972). „A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows“. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:1787–1806.
- Perić, M. (1996). *A Finite Volume method for the prediction of three-dimensional flow in complex ducts*. PhD thesis, Imperial College, University of London.
- Petit, O. (2012). *Towards Full Predictions of the Unsteady Incompressible Flow in Rotating Machines, Using OpenFOAM*. PhD thesis, Chalmers University of Technology.
- Petit, O., Bosioc, A., Nilsson, H., Muntean, S., and Susan-Resiga, R. (2011). Unsteady simulation of the flow in a swirl generator using openfoam. *International Journal of Fluid Machinery and Systems*, 4(1).
- Petit, O., Nilsson, H., Vu, T., Manole, O., and Leonsson, S. (2008). The flow in the u9 kaplan turbine - preliminary and planned simulations using cfx and openfoam. In 24th *Symposium on Hydraulic Machinery and Systems, 2008*.
- Petit, O., Page, M., Beaudoin, M., and Nilsson, H. (2009). The ercoftac centrifugal pump OpenFOAM case-study. In *3rd IAHR Int. Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems, Brno*.
- Pope, S. (2006). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- Prandtl, L. (1925). Über die ausgebildete turbulenz. *ZAMM*, 5:136–139.
- Pulliam, T. (1986). „Artificial dissipation models for the Euler equations“. *AIAA Journal*, 24:1931–1940.
- Rhie, C. and Chow, W. (1983). „A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation“. *AIAA Journal*, 21:1525–1532.

- Richardson, L. F. (1922). *Weather prediction by numerical processes*. Cambridge University Press.
- Rocklage-Marliani, G., Schmidts, M., and Ram, V. (2003). Three-dimensional laser-doppler velocimeter measurements in swirling turbulent pipe flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, 70:43–67.
- Rodi, W. (1976). A new algebraic relation for calculating reynolds stresses. *ZAMM (Mech.Fluid)*, 56:219.
- Rodi, W. (1988). Recent development in turbulence modeling. In *Proc. 3rd International Symposium on Refined Flow Modeling and Turbulence Measurements*.
- Rotta, J. (1951). Statistische theorie nichthomogener turbulenz. *Z. Phys.*, 129:547–572.
- Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM.
- Saffman, P. (1970). A model for inhomogeneous turbulent flow. *Proc. Roy. Soc. London A*, 317:417–433.
- Schliting, H. (1959). *Boundary Layer Theory*. McGraw Hill.
- Sharif, M. and Wong, Y. (1995). Evaluation of the performance of three turbulence closure models in the prediction of confined swirl flows. *Computers and Fluids*, 24(1):81–100.
- Shih, T.-H., Zhu, J., Liou, W., Chen, K.-H., Liu, N.-S., and Lumley, J. (1997). Modeling of turbulent swirling flows. Technical report, NASA Glenn Research Center.
- Shih, T.-H., Zhu, J., and Lumley, J. (1993). A realizable reynolds-stress algebraic equation model. Technical report, NASA TM 105993.
- Smith, A. and Cebeci, T. (1967). Numerical solution of the turbulent boundary layer equations. Technical report, Douglas aircraft division report DAC 33735.
- So, R., Zhao, C., and Gatski, T. (1999). Predicting buoyant shear flows using anisotropic dissipation rate models. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63:193–221.

- Spalart, P. and Allmaras, S. (1992). A one equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Paper*, 92:439.
- Speziale, C. (1987). On nonlinear $k-l$ and $k-\varepsilon$ models of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 178:459–475.
- Speziale, C. (1996). *Modeling of turbulent transport equations*, In: Gatski, T.B., Hussaini, M.Y., and Lumley J.L. (editors), *Simulation and modeling of turbulent flows*, chapter 5, pages 185–242. Oxford University Press.
- Speziale, C., Sarkar, S., and Gatski, T. (1991). Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 227:245–272.
- Stallman, R. (2010). *Free Software, Free Society*. GNU Press, 2nd edition.
- Stanišić, M. and Groves, R. (1965). On the eddy viscosity of incompressible flow. *Z. Angew. Math. Phys.*, 16:709–712.
- Steenberg, W. (1995). *Turbulent Pipe Flow With Swirl*. PhD thesis, Eindhoven University of Technology.
- Stevanović, Ž. (2008). *Numerički aspekti turbulentnog prenošenja impulsa i toplote*. Univerzitet u Nišu, Mašinski fakultet.
- Sukhovich, E. P. (1978). Experimental investigation of local properties of swirled turbulent flow in cylindrical channels. *Fluid Mechanics-Soviet Research*, 7:74–84.
- Sutherland, I. and Hodgman, G. (1974). Reentrant polygon clipping. *Communications of the ACM*, 17(1):32–42.
- Tavoularis, S. and Corssin, S. (1981). Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient. *Journal of Fluid Mechanics*, 104:311–347.
- Tennekes, H. & Lumley, J. (1972). *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Tuković, Ž. (2005). *Metoda kontrolnih volumena na domenama promjenjivog oblika*. PhD thesis, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu.

- Uberoi, M. (1956). Effect of wind tunnel contraction on free-stream turbulence. *Journal of Aeronautical Science*, 23.
- Veersteg, H. K. and Malalasekera, W. (2007). *An introduction to Computational Fluid Mechanics - The Finite Volume Method*. Pearson.
- Verth, J. and Bishop, L. (2008). *Essential Mathematics for Games and Interactive Applications - A Programmer's Guide*. Elsevier, Morgan Kaufmann Publishers.
- Villiers, E. (2006). *The Potential of Large Eddy Simulation for the Modeling of Wall Bounded Flows*. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, UK.
- Vukašinić, B. (1996). Turbulentni prenos i problemi njegovog modeliranja u vihornom strujanju. Magistarska teza, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu.
- Wall, K. and Taulbee, D. (1995). Application of a nonlinear stress-strain model to axisymmetric turbulent swirling flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 17:116–123.
- Warming, R. and Beam, R. (1976). „Upwind second order differencing schemes and applications in aerodynamic flows“. *AIAA Journal*, 14:1241–1249.
- Weller, H., G., T., Jasak, H., and C., F. (1998). A tensorial approach to cfd using object orientated techniques. *Computers in Physics*, 12:620–631.
- Wilcox, D. (1994). *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, 2nd Edition.
- Yajnik, K. and Subbaiah, M. (1973). Experiments on swirling turbulent flows, part 1: similarity in swirling flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 60:665–687.
- Yaras, M. and Grosvenor, A. (2003). Evaluation of one and two equation low-re turbulence models. part i - axisymmetric and swirling flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 42:1293–1319.
- Younis, B., Gatski, T., and Speziale, C. (1996). Assesment of the ssg pressure-strain model in free turbulent jets with and without swirl. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 116:800–809.

Čantrak, S. (1981). *Experimentelle Untersuchungen statistischer Eigenschaften turbulenter drallbehafteter Rohr- und Diffusorströmungen*. Dr.-ing. dissertation, Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe.

Čantrak, S. (2012). *Hidrodinamika*. Mašinski Fakultet Univerziteta u Beogradu.

Тоћић, А. (2007). Истраживање структуре нехомогене турбуленције применом инваријантне теорије. Магистарска теза, Машински факултет, Универзитет у Београду.

Лечић, М. (2003). *Теоријска и експериментална истраживања турбулентних вихорних струјања*. Докторска дисертација, Машински факултет, Универзитет у Београду.

Чантрак, Ђ. (2012). *Анализа вртложног језгра и структуре турбуленције у правој цеви кружног попречног пресека иза кола аксијалних вентилатора применом PIV, LDA и HWA метода*. Докторска дисертација, Машински факултет, Универзитет у Београду.

A

Рејнолдсове једначине у поларно-цилиндричним координатама

Како се у оквиру овог додатка разматрају временски осредњене Рејнолдсове једначине, ради једноставнијег означавања, временски осредњене брзине и притисак се означавају без коришћења ознака $\langle \dots \rangle$.

Инваријантни облици једначине континуитета и Рејнолдсове једначине која важи за турбулентна струјања нестишљивог флуида су:

$$\nabla \cdot \underline{U} = 0 \tag{A.1}$$

$$\underline{U} \cdot \nabla \underline{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \tag{A.2}$$

где су $\underline{\underline{T}} = \nu [\nabla \underline{U} + (\nabla \underline{U})^T] - \langle \underline{u} \otimes \underline{u} \rangle$ тензор укупног напона, \underline{U} вектор временски осредњене брзине, \underline{u} вектор флукуација брзине, P временски осредњени притисак и $\underline{\underline{T}}$ тензор укупног напона.

Сада се поставља задатак записа, односно пројекција једначина (A.1) и (A.2) на осе координатног система (x, r, φ) приказаног на слици A.1. Његов базис чине ортогонални јединични вектори $(\underline{e}_x, \underline{e}_r, \underline{e}_\varphi)$, те је у њему вектор брзине \underline{U}

дефинисан као

$$\underline{U} = U_x \underline{e}_x + U_r \underline{e}_r + U_\varphi \underline{e}_\varphi \equiv U \underline{e}_x + V \underline{e}_r + W \underline{e}_\varphi, \quad (\text{A.3})$$

док је симетрични тензор \underline{T} дефинисан својим скаларним компонентама

$$\|\underline{T}\| = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xr} & \tau_{x\varphi} \\ \tau_{rx} & \sigma_{rr} & \tau_{r\varphi} \\ \tau_{\varphi x} & \tau_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Да би се добили изрази за компоненте тензора \underline{T} , потребно је одредити компоненте тензор градијента брзине у овом координатном систему. У том циљу је потребно успоставити везе између координата (x, r, φ) и Декартових правоуглих координата (x, y, z) . Та веза је очигледна (види слику А.1):

$$x = x, \quad r = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \arctg \frac{y}{z}, \quad (\text{A.5})$$

односно

$$x = x, \quad y = r \sin \varphi \quad \text{и} \quad z = r \cos \varphi. \quad (\text{A.6})$$

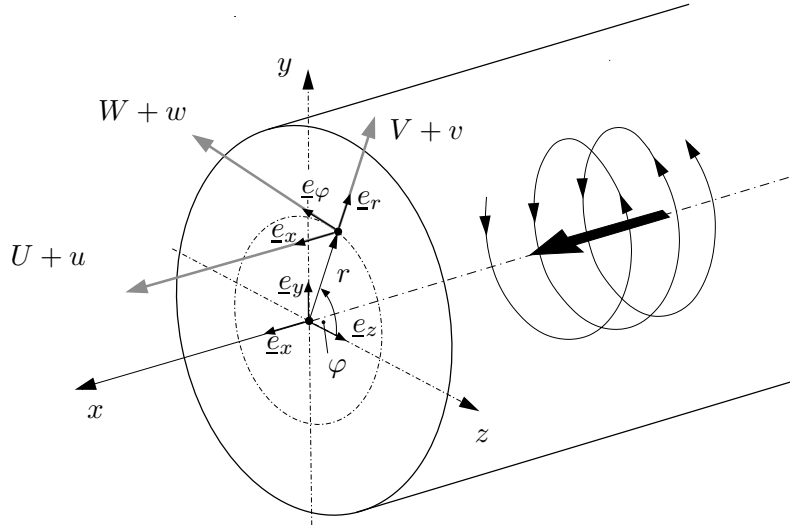
Јединични вектори \underline{e}_r и \underline{e}_φ су одређени изразима

$$\underline{e}_r = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \sin \varphi \underline{e}_y + \cos \varphi \underline{e}_z, \quad \underline{e}_\varphi = \underline{e}_x \times \underline{e}_r = \cos \varphi \underline{e}_y - \sin \varphi \underline{e}_z \quad (\text{A.7})$$

Јединични вектор \underline{e}_x је вектор константног правца и он се не мења са променом координата. То није случај са јединичним векторима \underline{e}_r и \underline{e}_φ , те ће и поједини изводи тих вектора по координатама бити различити од нуле. Тако је

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \varphi} &= \underline{e}_\varphi \\ \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\underline{e}_r \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Векторско-диференцијални оператор „набла“ је у овом координатном систему



Слика А.1. Компоненте $U + u$, $V + v$ и $W + w$ тренутне брзине у аксијалном, радијалном и обимском правцу при вихорном струјању у цеви.

дефинисан изразом:

$$\nabla = \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{A.9})$$

Имајући у виду једначине (А.8) и дефиницију (А.9), сада је могуће одредити градијент вектора \underline{U} . Пре тога, полазећи од инваријантног облика једначине континуитета, добиће се њен запис у координатном систему (x, r, φ) . Имајући у виду да је оператор „набла“ векторско-диференцијални оператор, прво се примењује операција диференцирања, па скаларног множења. Тако је

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{U} &= \left(\underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (U \underline{e}_x + V \underline{e}_r + W \underline{e}_\varphi) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (V \underline{e}_r + W \underline{e}_\varphi) \right] \cdot \underline{e}_\varphi \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \underline{e}_r + V \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi + W \frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right) \cdot \underline{e}_\varphi \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \underline{e}_r + V \underline{e}_\varphi + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi - W \underline{e}_r \right) \cdot \underline{e}_\varphi \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

па је једначина континуитета

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Аналогно за тензор градијента брзине добија се

$$\begin{aligned} \nabla \underline{U} &= \left(\underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \otimes (U \underline{e}_x + V \underline{e}_r + W \underline{e}_\varphi) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \underline{e}_x \underline{e}_x + \frac{\partial V}{\partial x} \underline{e}_x \underline{e}_r + \frac{\partial W}{\partial x} \underline{e}_x \underline{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_x + \frac{\partial V}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_r + \frac{\partial W}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi \underline{e}_x + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V \underline{e}_r) + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (W \underline{e}_\varphi) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \underline{e}_x \underline{e}_x + \frac{\partial V}{\partial x} \underline{e}_x \underline{e}_r + \frac{\partial W}{\partial x} \underline{e}_x \underline{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_x + \frac{\partial V}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_r + \frac{\partial W}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi \underline{e}_x + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi \underline{e}_r + \frac{V}{r} \underline{e}_\varphi \underline{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi \underline{e}_\varphi - \frac{W}{r} \underline{e}_\varphi \underline{e}_r \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

односно записано преко компоненти, у облику матрице

$$\|\nabla U\| = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial r} & \frac{\partial V}{\partial r} & \frac{\partial W}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} & \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{W}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{V}{r} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

На основу једначине (А.2) следи да су компоненте тензора \underline{T} , односно укупни нормални и смицајни напони одређени изразима

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\eta \frac{\partial U}{\partial x} - \rho \langle u^2 \rangle & \tau_{rx} &= \eta \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \rho \langle uv \rangle \\ \sigma_{rr} &= 2\eta \frac{\partial V}{\partial r} - \rho \langle v^2 \rangle & \tau_{x\varphi} &= \eta \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) - \rho \langle uw \rangle \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{V}{r} \right) - \rho \langle w^2 \rangle & \tau_{r\varphi} &= \eta \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] - \rho \langle vw \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Пројекције конвективног члана су:

$$\begin{pmatrix} (\underline{U} \cdot \nabla \underline{U})_x \\ (\underline{U} \cdot \nabla \underline{U})_r \\ (\underline{U} \cdot \nabla \underline{U})_\varphi \end{pmatrix}^T = (U \quad V \quad W) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial r} & \frac{\partial V}{\partial r} & \frac{\partial W}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} & \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{W}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{V}{r} \end{bmatrix},$$

$$(\underline{U} \cdot \nabla \underline{U})_x = U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad (\text{A.15})$$

$$(\underline{U} \cdot \nabla \underline{U})_r = U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{W^2}{r}, \quad (\text{A.16})$$

$$(\underline{U} \cdot \nabla \underline{U})_\varphi = U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{VW}{r}. \quad (\text{A.17})$$

Сада је потребно одредити дивергенцију тензора \underline{T} , односно пројекције вектора $\nabla \cdot \underline{T}$ на осе координатног система (x, r, φ) . Тако је

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{T} = & \left(\underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (\sigma_{xx} \underline{e}_x \underline{e}_x + \tau_{xr} \underline{e}_x \underline{e}_r + \tau_{x\varphi} \underline{e}_x \underline{e}_\varphi \\ & + \tau_{rx} \underline{e}_r \underline{e}_x + \sigma_{rr} \underline{e}_r \underline{e}_r + \tau_{r\varphi} \underline{e}_r \underline{e}_\varphi + \tau_{\varphi x} \underline{e}_\varphi \underline{e}_x + \tau_{\varphi r} \underline{e}_\varphi \underline{e}_r + \sigma_{\varphi\varphi} \underline{e}_\varphi \underline{e}_\varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Као и у претходним случајевима, и овде се прво примењује операција диференцирања, па тек онда операција скаларног множења вектора и диаде. Имајући у виду изразе (А.8), као и особину скаларног производа вектора и диаде, $\underline{a} \cdot \underline{bc} = (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$, добија се да су пројекције дивергенције тензора напона на осе координатног система (x, r, φ) одређене изразима:

$$(\nabla \cdot \underline{T})_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\tau_{rx}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi x}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{xr}) + \frac{\partial \tau_{\varphi x}}{\partial \varphi} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \underline{T})_r = & \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \\ = & \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \underline{T})_\varphi &= \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\tau_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Имајући у виду претходну анализу, пројекције векторске једначине количине кретања, јдн. (А.2), на осе координатног система (x, r, φ) су:

пројекција на аксијални, x -правац

$$\rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\tau_{x\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{xr}), \quad (\text{A.22})$$

пројекција на радијални, r -правац

$$\begin{aligned} \rho \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{W^2}{r} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

и пројекција на обимски, φ -правац

$$\begin{aligned} \rho \left(U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{VW}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Вихорна струјања се често, са великом тачношћу, могу разматрати као основно симетрична. Једначине (А.11) и (А.22)-(А.24) се у том случају поједностављују увођењем следећих претпоставки: сви изводи по обимској координати φ су једнаки нули, $\partial/\partial\varphi = 0$, и у осе цеви, тј. за $r = 0$ величине V , W , $\langle uv \rangle$, $\langle uw \rangle$ и $\langle vw \rangle$ једнаке нули. Уз ове претпоставке, једначине (А.22)-(А.24) се, уз замену израза за напоне (А.14) своде на следеће једначине:

пројекција на аксијални, x -правац

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \\ &- \left[\frac{\partial}{\partial x} (\langle u^2 \rangle) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle uv \rangle) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

пројекција на радијални, r -правац

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{W^2}{r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V}{r} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\langle uv \rangle) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle v^2 \rangle) - \frac{\langle w^2 \rangle}{r} \right], \quad (\text{A.26})$$

пројекција на обимски, φ правац

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{VW}{r} = \nu \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\langle uw \rangle) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle vw \rangle) + \frac{\langle vw \rangle}{r} \right] \quad (\text{A.27})$$

и једначина континуитета

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) = 0 \quad (\text{A.28})$$

У случају вихорног струјања у дугачким цевима ($L \gg R$), једначине (A.25)-(A.27) се могу и додатно поједноставити разматрањем реда величине појединих чланова у њима, аналогно анализи приликом извођења једначина граничног слоја, види Schliting (1959). Тако се у циљу добијања бездимензијских облика једначина (A.25)-(A.27) дефинишу бездимензијске брзине, бездимензијски притисак и бездимензијске координате на следећи начин:

$$U^* = \frac{U}{U_m}, \quad W^* = \frac{W}{W_m}, \quad P^* = \frac{P}{\rho U_m^2} \\ x^* = x/L, \quad r^* = r/R \quad (\text{A.29})$$

референтне брзине U_m за аксијални правац и $W_m = \alpha U_m$, $0 \leq \alpha \leq 1$ за обимски правац. Размера дужине у аксијалном правцу је L , док је у радијалном R . Бездимензијски притисак P^* дефинише као $P^* = P/(\rho U_{ref}^2)$. Претпоставка за флукуације брзине u_i су да су оне за ред величине мање од вредности временски осредњених брзина U_i , тј. $u_i^* = \varepsilon U_m$, $\varepsilon \sim 0.1$.

Заменом ових бездимензијских величина у једначину континуитета, (A.28), добија се да је размера за радијалну брзина $V_m = \frac{R}{L} U_m$, одакле се закључује да да је уз уведено претпоставку $R \ll L$ радијална брзина много мања од

аксијалне брзине.

Заменом у једначине (А.26)-(А.27), добијају се бездимензијски облици једначина количине кретања:

- аксијални, x -правац

$$\begin{aligned} \frac{U_m^2}{L} U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{U_m^2}{L} V^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} = - \frac{U_m^2}{L} \frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{U_m}{L^2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial x^{*2}} + \frac{U_m}{R^2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial r^{*2}} + \frac{U_m}{R^2} \frac{1}{r^*} \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right) \\ - \left[\frac{\varepsilon^2 U_m^2}{L} \frac{\partial}{\partial x} (\langle u^{*2} \rangle) + \frac{\varepsilon^2 U_m^2}{R} \frac{1}{r} (r \langle u^* v^* \rangle) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

- радијални, r -правац

$$\begin{aligned} \frac{RU_m^2}{L^2} V^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{RU_m^2}{L^2} V^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} - \frac{U_m^2}{R} \frac{W^{*2}}{r^*} = - \frac{U_m^2}{R} \frac{\partial P^*}{\partial r^*} \\ + \nu \left[\frac{RU_m^2}{L} \frac{\partial^2 V^*}{\partial x^{*2}} + \frac{U_m}{RL} \frac{\partial^2 V^*}{\partial r^{*2}} + \frac{U_m}{RL} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{V^*}{r^*} \right) \right] \\ - \left[\frac{\varepsilon^2 U_m^2}{L} \frac{\partial}{\partial x^*} (\langle u^* v^* \rangle) + \frac{\varepsilon^2 U_m^2}{L} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \langle v^{*2} \rangle) - \frac{\varepsilon^2 U_m^2}{R} \frac{\langle w^{*2} \rangle}{r^*} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

- обимски, φ -правац

$$\begin{aligned} \frac{U_m W_m}{L} U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \frac{U_m W_m}{L} V^* \frac{\partial W^*}{\partial r^*} - \frac{U_m W_m}{L} \frac{V^* W^*}{r^*} \\ = \nu \left[\frac{W_m}{L^2} \frac{\partial^2 W^*}{\partial x^{*2}} + \frac{W_m}{R^2} \frac{\partial^2 W^*}{\partial r^{*2}} + \frac{W_m}{R^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{W^*}{r} \right) \right] \\ - \left[\frac{\varepsilon^2 U_m^2}{L} \frac{\partial}{\partial x^*} (\langle u^* w^* \rangle) + \frac{\varepsilon^2 U_m^2}{R} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \langle v^* w^* \rangle) + \frac{\varepsilon^2 U_m^2}{R} \frac{\langle v^* w^* \rangle}{r} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Међусобним поређењем чланова у једначинама (А.30)-(А.32), може се закључити да ред величине свих чланова није исти. Тако је на пример, код вискозног члана у једначини (А.30) други извод брзине U у аксијалном правцу много мањи од другог извода у радијалном правцу, па се он може занемарити. Слично је и у случају турбулентних напона. У једначини (А.31) најутицајни чланови су промена притиска у радијалном правцу, и део конквективног члана W^2/r .

На основу анализе бездимензијског облика једначина, и занемаривањем мање утицајних чланова, добија се коначни облик упрошћених једначина количине

кретања

- аксијални, x -правац

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle uv \rangle), \quad (\text{A.33})$$

- радијални, r -правац

$$\frac{W^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (\text{A.34})$$

- обимски, φ -правац

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{VW}{r} = \nu \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \right] - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle vw \rangle) + \frac{\langle vw \rangle}{r} \right]. \quad (\text{A.35})$$

Једначина континуитета задржава свој првобитни облик

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) = 0. \quad (\text{A.36})$$

У поређењу са полазним системом једначина, који је био претежно елиптичког типа, систем једначина (A.33)-(A.35) је претежно параболичког типа (тзв. конвективно-дифузиони проблем). Број непознатих је редукован са десет на шест, и нумеричко решавање проблема се своди на секвенцијално решавање серије једнодимензијских проблема у радијалном правцу, уместо решавања целог система истовремено. Тај нумерички поступак је познат као „марширање“.

В

Основи инваријантне теорије у турбуленцији

Проучавање модела који се баве проблемом повратка хомогене анизотропне турбуленције у стање изотропности, а такође и утицај анизотропности на динамику нехомогене турбуленције је могуће анализирати на једноставнији и ефектнији начин, него анализом шест компоненти b_{ij} тензора анизотропности. Тај једноставнији начин је коришћење инваријантне теорије, која омогућује да се на основу само два независна параметра добије квантитативни опис анизотропије турбуленције. Та два независна параметра су **инваријанте тензора анизотропности**. Инваријанта неког тензора је скаларна величина чија се вредност не мења приликом ротације система у коме је представљен тај тензор, односно има исту вредност која је независна од избора координатног система у коме се тензор представља. Тако су за тензор анизотропности његове главне инваријанте одређене изразима

$$\begin{aligned} I_b &= \text{tr}(\underline{b}), & II_b &= \frac{1}{2} \left\{ [\text{tr}(\underline{b})]^2 - \text{tr}(\underline{b}^2) \right\}, \\ III_b &= \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{b}^3) - \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{b}) \cdot \text{tr}(\underline{b}^2) + \frac{1}{6} [\text{tr}(\underline{b})]^3 = \det(\underline{b}) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

где је са \underline{b} означен матрични запис тензора \underline{b} . Како инваријанте имају исту вредност у сваком координатном систему, представљање тензора \underline{b} у координатном

систему одређеном његовим главним осама, доводи до израза за вредности инваријанти преко сопствених вредности λ_1 , λ_2 и λ_3 тензора \underline{b} :

$$I_b = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad II_b = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, \quad III_b = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \quad (B.2)$$

Ако су b_{ij} компоненте тензора \underline{b} , односно чланови матрице \underline{b} , изрази за његове инваријанте се могу написати у облику

$$\begin{aligned} I_b &= b_{ii}, & II_b &= \frac{1}{2}(b_{ii}b_{jj} - b_{ij}b_{ji}), \\ III_b &= \frac{1}{3}(b_{ii}b_{jj}b_{kk} - 3b_{ii}b_{jj}^2 + b_{ii}^3). \end{aligned} \quad (B.3)$$

На основу дефиниције тензора анизотропности следи да је његов траг једнак нули. Та чињеница доводи тога да је његова прва инваријанта једнака нули, и до једноставнијих израза за другу и трећу инваријанту.

$$I_b = 0, \quad II_b = -\frac{1}{2}\text{tr}(\underline{b}^2) = -\frac{1}{2}b_{ij}b_{ji}, \quad III_b = \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{b}^3) = \frac{1}{3}b_{ij}b_{jk}b_{ki} \quad (B.4)$$

Сада ће бити приказане зависности између инваријанти III_b у II_b у случају граничних стања турбуленције, као што су осносиметрична контракција и експанзија, дво- и једнокомпонентна турбуленција. Ти гранични случајеви су одређени само компонентама на главној дијагонали тензора турбулентних напона, односно нормалним турбулентним напонима.

Изотропна турбуленција

- **Једнокомпонентна изотропна турбуленција.**

У овом случају само један од нормалних напона је различит од нуле. Наравно, такво стање турбуленције је физички немогуће, али се може свакако десити да један нормални напон буде знатно већи од осталих.

$$\langle u_1^2 \rangle = 2k, \quad \langle u_2^2 \rangle = \langle u_3^2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2} \langle u_1^2 \rangle$$

$$b_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Rightarrow [\underline{b}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$II_b = -\frac{1}{2} b_{ij} b_{ji} = -\frac{1}{3}, \quad III_b = \frac{1}{3} b_{ij} b_{jk} b_{ki} = \frac{2}{27}$$

Једнокомпонентна изотропна турбуленција: $(-II_b, III_b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$

(B.5)

• **Двокомпонентна изотропна турбуленција.**

У овом случају два нормална турбулентна напона су међусобно једнака, док је трећи једнак нули:

$$\langle u_1^2 \rangle = \langle u_3^2 \rangle = k, \quad \langle u_2^2 \rangle = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2} (\langle u_1^2 \rangle + \langle u_3^2 \rangle)$$

$$b_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Rightarrow [\underline{b}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$II_b = -\frac{1}{2} b_{ij} b_{ji} = -\frac{1}{12}, \quad III_b = \frac{1}{3} b_{ij} b_{jk} b_{ki} = -\frac{1}{108}$$

Двокомпонентна изотропна турбуленција: $(-II_b, III_b) = \left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{108}\right)$

(B.6)

• **Трокомпонентна изотропна турбуленција.**

У овом случају су сви нормални напони међусобно једнаки:

$$\langle u_1^2 \rangle = \langle u_2^2 \rangle = \langle u_3^2 \rangle = \frac{2}{3} k \Rightarrow k = \frac{1}{2} (\langle u_1^2 \rangle + \langle u_2^2 \rangle + \langle u_3^2 \rangle)$$

$$b_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad [\underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$II_b = 0, \quad III_b = 0$$

$$\boxed{\text{Трокомпонентна изотропна турбуленција: } (-II_b, III_b) = (0, 0)} \quad (\text{В.7})$$

Двокомпонентна неизотропна турбуленција

Двокомпонентна неизотропна турбуленција се јавља у областима у непосредној близини зида. Наиме, за мале вредности координате y управне на зид, нормални турбулентни напони $\langle u^2 \rangle$ и $\langle w^2 \rangle$ су пропорционални y^2 , док је нормални турбулентни напон $\langle v^2 \rangle$ пропорционалан y^4 , Роге (2006).

Матрични облик тензора турбулентних напона се у овом случају може приказати у координатном систему дефинисаном његовим главним осама као

$$[\underline{R}] = \begin{bmatrix} \langle u_1^2 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle u_2^2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где је } \langle u_1^2 \rangle > \langle u_2^2 \rangle; \quad k = \frac{1}{2} (\langle u_1^2 \rangle + \langle u_2^2 \rangle)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= \frac{\langle u_1^2 \rangle}{\langle u_1^2 \rangle + \langle u_2^2 \rangle} - \frac{1}{3} \\ b_{22} &= \frac{\langle u_2^2 \rangle}{\langle u_1^2 \rangle + \langle u_2^2 \rangle} - \frac{1}{3} \\ b_{33} &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\underline{b}] = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & -b + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{где је } b \equiv b_{11}$$

$$\Rightarrow -II_b = b^2 - \frac{1}{3}b + \frac{1}{9}, \quad III_b = \frac{1}{3}b^2 - \frac{1}{9}b$$

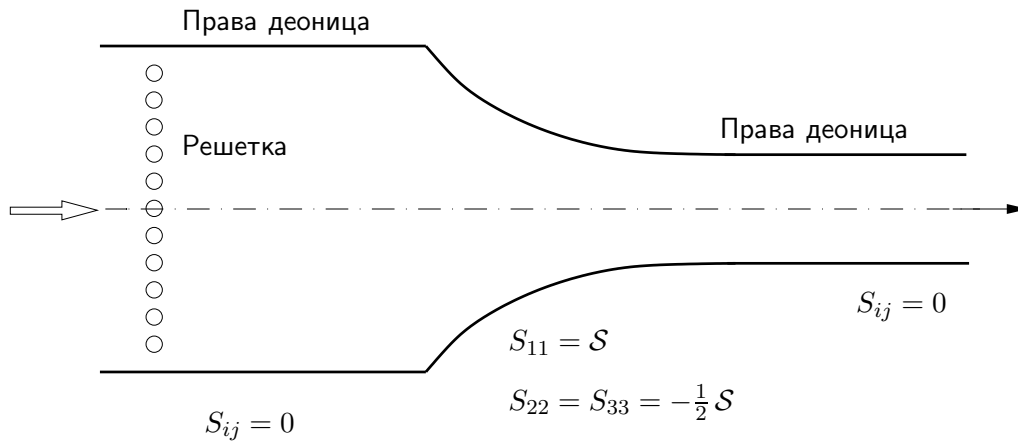
Из израза за инваријанте II_b и III_b могуће је елиминисати величину b и добити функционалну зависност између инваријанти тензора анизотропије у случају

двокомпонентне неизотропне турбуленције:

$$\boxed{\text{Двокомпонентна турбуленција: } -\Pi_b = 3\Pi_b + \frac{1}{9}} \quad (\text{В.8})$$

Осносиметрична контракција и осносиметрична експанзија

Утицај осносиметричне контракције попречног пресека на структуру турбуленције први је експериментално анализирао Uberoi (1956). На слици В.1 је приказана скица дела експерименталне инсталације на којој су извршени експерименти. У експерименту Убероија турбуленција је генерисана проласком уни-



Слика В.1. Скица експерименталне инсталације у експериментима Убероија приликом проучавања утицаја осносиметричне контракције попречног пресека на структуру турбуленције.

формне струје ваздуха кроз решетку. Даљим струјањем кроз праву деоницу осредњена брзина U_1 је приближно униформна, тако да у тој деоници нема градијената осредњених брзина, односно $S_{ij} = 0$. Даља контракција попречног пресека производи додатно униформно аксијално деформисање осредњеног тока $S_{11} = \mathcal{S}$, и сходно једначини континуитета, униформне латералне деформације $S_{22} = S_{33} = -\frac{1}{2} \mathcal{S}$. Након контракције попречног пресека у другој правој деоници је такође $S_{ij} \approx 0$, што сходно Бусинеској хипотези повлачи да је тензор турбулентних напона изотропан. Међутим, експерименти су показали да анизотропност генерисана контракцијом попречног пресека готово трајно присутна. Разлог за то је што стање турбуленције није у потпуности одређено локалним карактеристика, већ и „историјом“ деформације осредњеног тока.

Утицај осносиметричне експанзије попречног пресека на структуру хомогене

турбуленције је тешко експериментално анализирати, због одвајања граничног слоја, који се јавља у дивергентном делу (дифузору), Поре (2006). Те анализе је могуће спровести коришћењем директних нумеричких симулација или теорије брзих деформација.

Осредњени тензор брзине деформисања, у случају осносиметричне контракције или експанзије попречног пресека, може се представити у матричном запису као

$$[\underline{S}] = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} S_{11} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

где је

$$S_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \begin{cases} > 0, & \text{осносиметрична контракција} \\ < 0, & \text{осносиметрична експанзија} \end{cases}, \quad (\text{B.10})$$

где је оса x_1 усмерена у правцу главног струјања (дуж канала).

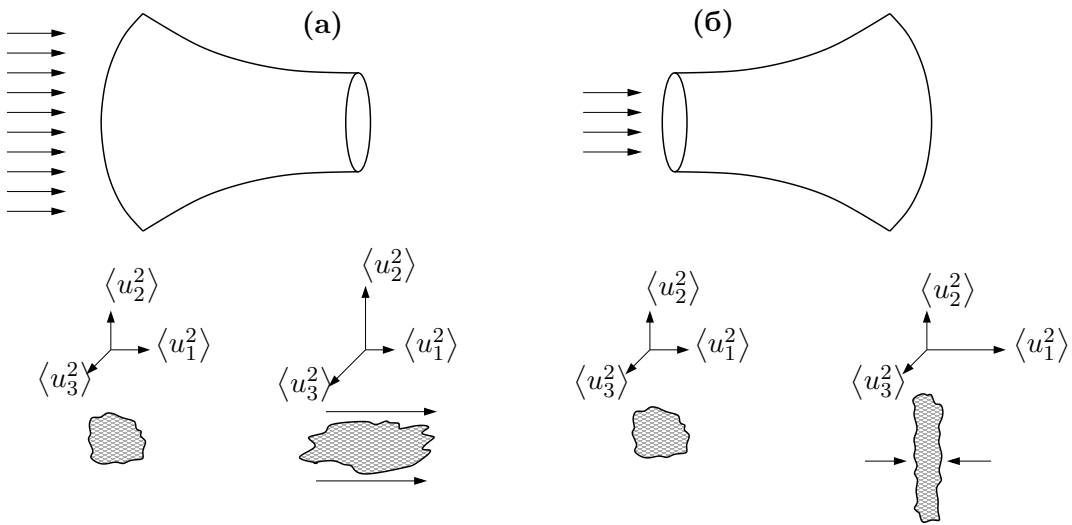
Овакав облик осредњеног деформационог поља ће довести до тога да се код осносиметричне контракције јавља „истезање“ вртложних влакана и повећања вртложности, док ће се код осносиметричне експанзије вртложна влакна сабијати и вртложност ће се смањивати. Ово непосредно следи из Хелмхолчеве једначине која описује еволуцију вртложности

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{U} + \nu \nabla^2 \underline{\omega}, \quad (\text{B.11})$$

у којој је члан $\underline{\omega} \cdot \nabla \underline{U}$ одговоран за промену облика вртложних влакана.

С друге стране, тензор турбулентних напона у случају осносиметричне контракције тежи облику коју он има у случају двокомпонентне изотропне турбуленције. Наиме, нормални турбулентни напон у правцу струјања ће се смањивати јер је његов продукциони члан $P_{11} = -\langle u_1^2 \rangle \frac{\partial U_1}{\partial x_1}$ негативан (оба члана на десној страни израза су позитивна). Флуктуацијама притиска, доћи ће до пределе кинетичке енергије између нормалних турбулентних напона. Тако су

после осносиметричне контракције, два нормална напона већа од трећег, и у граничном случају та два нормална напона ће бити међусобно једнака, док ће трећи бити једнак нули. У случају осносиметричне експанзије тензор турбулентних напона тежи форми коју он има у случају једнокомпонентне изотропне турбуленције. Такође, и овде долази до прерасподеле кинетичке енергије флукуацијама притиска, тако да после осносиметричне експанзије један нормални турбулентни напон је већи од остала два.



Слика В.2. (а) Осносиметрична контракција; (б) Осносиметрична експанзија.

Имајући у виду претходно речено, тензор турбулентних напона у случају осносиметричне контракције или експанзије ће бити следећег облика:

$$[\underline{R}] = \begin{bmatrix} \langle u_1^2 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle u_2^2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle u_3^2 \rangle \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \langle u_1^2 \rangle \ll \langle u_2^2 \rangle \text{ — осносиметрична контракција} \\ \langle u_1^2 \rangle \gg \langle u_2^2 \rangle \text{ — осносиметрична експанзија} \end{array}$$

Тензор анизотропије се своди на:

$$[\underline{b}] = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{где је } b \equiv b_{11}.$$

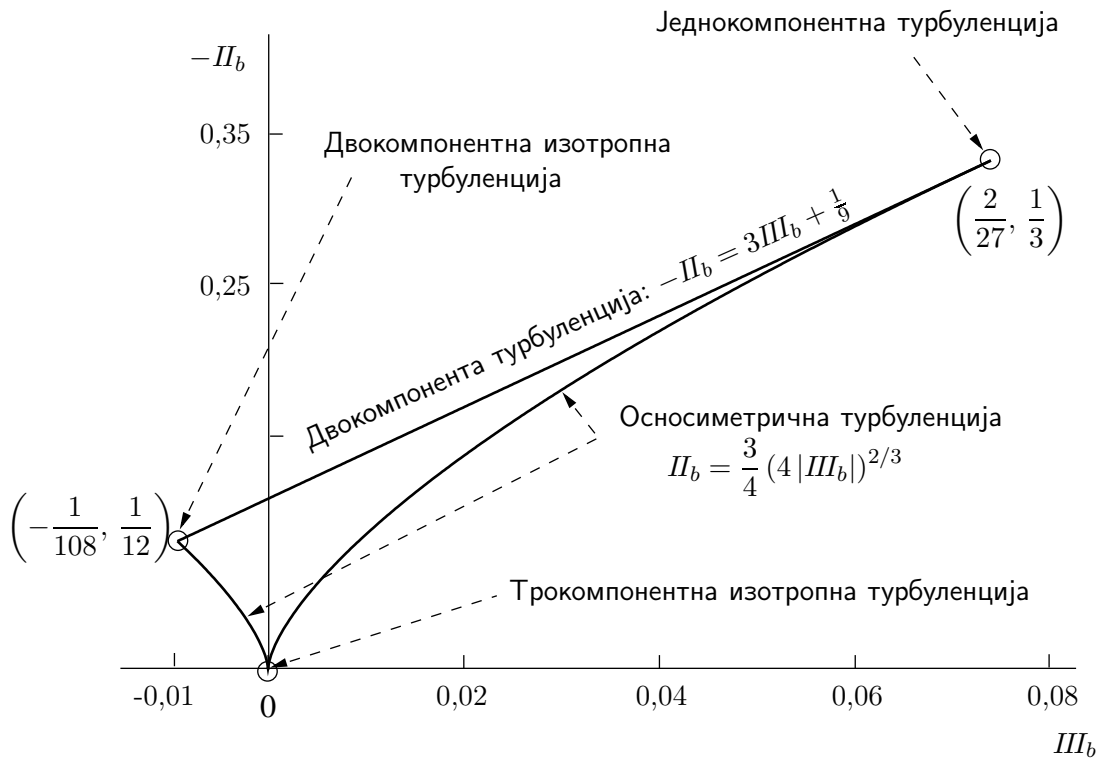
Инваријанте тензора анизотропије су одређене изразима

$$-II_b = \frac{3}{4}b^2, \quad III_b = \frac{1}{4}b^3.$$

Даље је, из израза за инваријантне II_b и III_b могуће елиминисати величину b и добити функционалну зависност $II_b = f(III_b)$:

$$\boxed{\text{Осносиметрична турбуленција: } -II_b = \frac{3}{4}(4|III_b|)^{2/3}} \quad (\text{В.12})$$

У случају осносиметричне експанзије је $III_b > 0$, док је у случају осносиметричне контракције $III_b < 0$.



Слика В.3. Инваријантна мапа у равни $III_b - II_b$.

Инваријантна мапа анизотропности и класификација турбуленције

Сада се зависности $II_b - III_b$ које су претходно разматране могу приказати у координатном систему чија је апсциса III_b , а ордината $-II_b$. Добиће се домен

ограничен кривама дефинисаним једначинама (В.8) и (В.12), који се назива **инваријантна мапа анизотропности** или **Ламлијев троугао**, слика В.3. Пресечне тачке тих кривих одговарају граничним стањима турбуленције

Дводимензионално изотропно стање (2D) турбуленције, у коме једна компонента кинетичке енергије турбуленције ишчежава, а остале две су међусобно једнаке дефинише лево теме инваријантне мапе. Једнодимензионално стање (1D) турбуленције дефинише десно теме инваријантне мапе. Координатни почетак дефинише тродимензионалну изотропну турбуленцију. Турбуленција дуж праве која повезује 2D изотропну и 1D турбуленцију, одговара дводимензионалној турбуленцији.

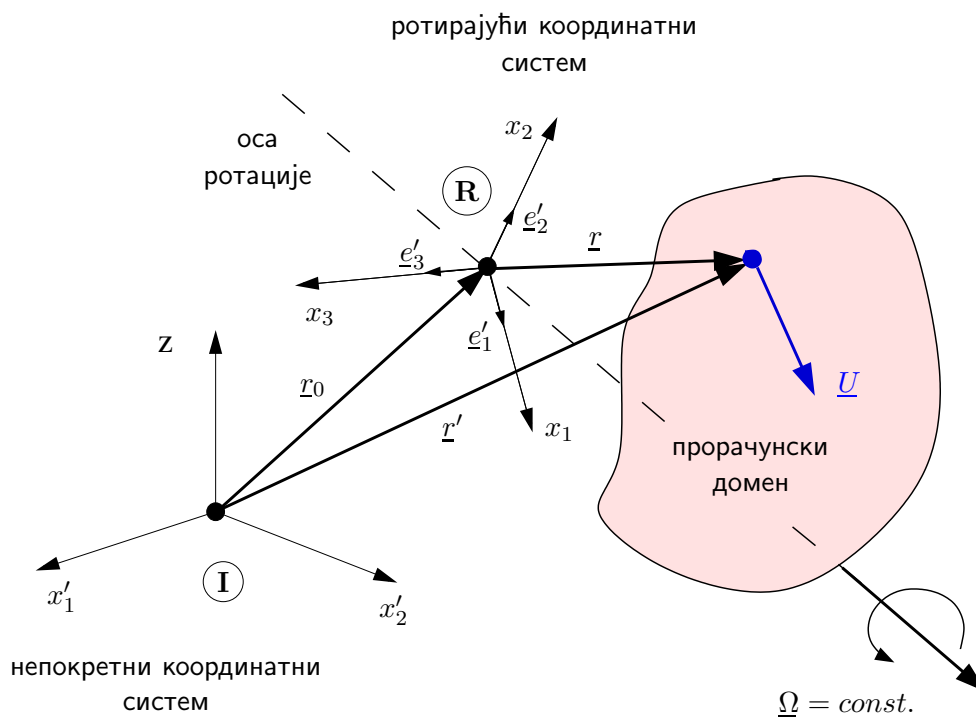
Друга инваријанта ($-II_b$), која може бити или позитивна или једнака нули, репрезентује степен анизотропности, док инваријанта III_b показује природу анизотропије. Сва физички могућа стања турбуленције, односно вредности инваријанти II_b и III_b које им одговарају, морају се налазити унутар инваријантне мапе анизотропности. То је врло значајна чињеница која може послужити и за контролу експерименталних резултата. Ако се неке од тачака налазе изван инваријантне мапе, то значи да је такво стање турбуленције немогуће, односно да су турбулентни напони погрешно измерени! Такође, инваријантна мапа може послужити и за анализу реализабилности¹ неког модела.

¹Да ли турбулентни модел даје физички прихватљиве резултате или не.

С

Навије-Стоксове једначине у ротирајућем координатном систему

Како се код турбомашина струјање обавља у геометријама које ротирају око неке осе, онда је у неким случајевима погодно анализирати такво струјање у координатном систему који ротира заједно са ротирајућим делом турбомашине.



Слика С.1. Стационарни и ротирајући координатни систем.

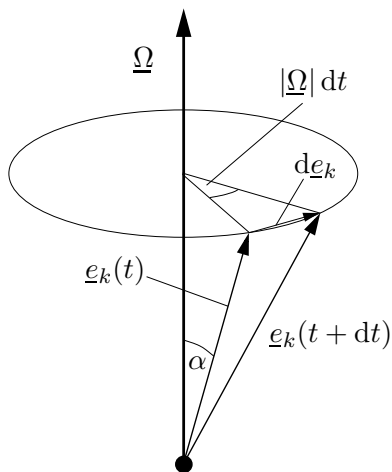
На слици С.1 су приказана два координатна система - непокретни или инерцијални координатни систем, означен са I , и координатни систем, означен са R , који ротира константном угаоном брзином $\underline{\Omega}$ око неког осе. Положај флуидног делића у простору се може описати његовим вектором положаја у непокретном координатном систему и/или ротирајућем координатном систему. Са слике је очигледно да је

$$\underline{r}' = \underline{r}_0 + \underline{r} \quad (C.1)$$

Брзина флуидног делића се добија диференцирањем једначине (C.1) по времену (у питању је Лагранжев приступ). Имајући у виду да координатни систем врши само ротационо кретање, онда је $\underline{r}_0 = const$, па је брзина флуидног делића

$$\begin{aligned} \frac{D\underline{r}'}{Dt} &= \frac{D\underline{r}}{Dt} = \frac{D}{Dt} (x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3) = \frac{D}{Dt} (x_k \underline{e}_k) \\ &= \frac{Dx_k}{Dt} \underline{e}_k + x_k \frac{D\underline{e}_k}{Dt} \Rightarrow \underline{U}_I = \underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{r}, \end{aligned} \quad (C.2)$$

што представља разлагање кретања на апсолутно (брзина \underline{U}_I се назива апсолутна брзина), релативно (\underline{U}_R је релативна брзина) и преносно ($\underline{\Omega} \times \underline{r}$ је преносна брзина). До израза за преносну брзину долази се геометријском анализом временског прираштаја k -тог јединичног вектора координатног система R , слика С.2.



Слика С.2. Веза између вектора угаоне брзине ротације $\underline{\Omega}$ и временског прираштаја k -тог јединичног вектора координатног система R . Са слике је очигледно да је интензитет приштаја вектора $|d\underline{e}_k| = |\underline{\Omega}| \sin \alpha dt$, па је $d\underline{e}_k = (\underline{\Omega} \times \underline{e}_k) dt$, односно

$$\frac{d\underline{e}_k}{dt} = \underline{\Omega} \times \underline{e}_k.$$

Даље следи да је

$$x_k \frac{d\underline{e}_k}{dt} = x_k (\underline{\Omega} \times \underline{e}_k) = \underline{\Omega} \times (x_k \underline{e}_k) = \underline{\Omega} \times \underline{r}$$

Аналогно се може доказати и следећа уопштена релација која важи за било

који вектор \underline{A} , који се односи на флуидни делић

$$\left[\frac{D\underline{A}}{Dt} \right]_I = \left[\frac{D\underline{A}}{Dt} \right]_R + \underline{\Omega} \times \underline{A}. \quad (\text{C.3})$$

Из једначина (C.2) и (C.3) следи израз који повезује убрзање флуидног делића у инерцијалном и ротирајућем координатном систему:

$$\begin{aligned} \left[\frac{D\underline{U}_I}{Dt} \right]_I &= \left[\frac{D\underline{U}_I}{Dt} \right]_R + \underline{\Omega} \times \underline{U}_I \\ \left[\frac{D\underline{U}_I}{Dt} \right]_I &= \left[\frac{D(\underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{r})}{Dt} \right]_R + \underline{\Omega} \times (\underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{r}) \\ \left[\frac{D\underline{U}_I}{Dt} \right]_I &= \left[\frac{D\underline{U}_R}{Dt} \right]_R + \underline{\Omega} \times \left[\frac{D\underline{r}}{Dt} \right]_R + \underline{\Omega} \times \underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \times \underline{r} \\ \left[\frac{D\underline{U}_I}{Dt} \right]_I &= \left[\frac{D\underline{U}_R}{Dt} \right]_R + 2\underline{\Omega} \times \underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \times \underline{r} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Део убрзања одређен изразом $2\underline{\Omega} \times \underline{U}_R$ се назива Кориолисово убрзање, док је $\underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \times \underline{r}$ преносно убрзање. Посматрано са становишта поделе сила у механици флуида, те две величине се могу дефинисати као јединична Кориолисова сила, и јединична (фиктивна)¹ центрифугална сила.

Сада ће се размотрити два начина записа Навије-Стоксове једначине у ротирајућем координатном систему, у зависности од форме њеног конвективног члана. Пре тога се даје њена форма у инерцијалном, непокретном координатном систему, аналогна једначини (2.20), заједно са једначином континуитета,

$$\nabla \cdot \underline{U}_I = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{D\underline{U}_I}{Dt} = \frac{\partial \underline{U}_I}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{U}_I \otimes \underline{U}_I) = -\nabla p + \nu \nabla \cdot \nabla \underline{U}_I. \quad (\text{C.6})$$

¹Она је последица избора координатног система у коме се прати кретање флуидног делића.

Навије-Стоксова једначина у ротирајућем координатном систему са релативном брзином у конвективном члану

На основу једначина (С.2) и (С.5), добија се једначина континуитета за релативну брзину

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \underline{U}_I &= \nabla \cdot [\underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{r}] = 0 \\
 \nabla \cdot \underline{U}_R + \nabla \cdot [\underline{\Omega} \times \underline{r}] &= 0 \\
 \nabla \cdot \underline{U}_R + \underbrace{\underline{r} \cdot (\nabla \times \underline{\Omega})}_{=0} - \underbrace{\underline{\Omega} \cdot (\nabla \times \underline{r})}_{=0} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underline{U}_R = 0
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Даље је на основу једначина (С.4) убрзање флуидног делића

$$\begin{aligned}
 \frac{D\underline{U}_I}{Dt} &= \frac{\partial \underline{U}_R}{\partial t} + \underline{U}_R \cdot \nabla \underline{U}_R + 2 \underline{\Omega} \times \underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \times \underline{r} \\
 &= \frac{\partial \underline{U}_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_R) + 2 \underline{\Omega} \times \underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \times \underline{r}.
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Дифузиони члан у Навије-Стоксовој једначини (С.6) је

$$\begin{aligned}
 \nu \nabla \cdot \nabla \underline{U}_I &= \nu \nabla \cdot \nabla [\underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{r}] \\
 &= \nu \left[\nabla \cdot \nabla \underline{U}_R + \underbrace{\nabla \cdot \nabla [\underline{\Omega} \times \underline{r}]}_{=0} \right] = \nu \nabla \cdot \nabla \underline{U}_R,
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

па је коначна форма Навије-Стоксове једначине у овом случају

$$\frac{\partial \underline{U}_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_R) + 2 \underline{\Omega} \times \underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \times \underline{r} = -\nabla p + \nu \nabla \cdot \nabla \underline{U}_R \tag{C.10}$$

Навије-Стоксова једначина у ротирајућем координатном систему са апсолутном брзином у конвективном члану

Конвективни члан у једначини (C.10) се, на основу једначине (C.2), може написати и у следећем облику

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_R) &= \nabla \cdot [\underline{U}_R \otimes (\underline{U}_I - \underline{\Omega} \times \underline{r})] \\
 &= \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_I) - \nabla \cdot [\underline{U}_R \otimes (\underline{\Omega} \times \underline{r})] \\
 &= \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_I) - (\underline{\Omega} \times \underline{r}) \underbrace{(\nabla \cdot \underline{U}_R)}_{=0} - \underbrace{\underline{U}_R \cdot \nabla (\underline{\Omega} \times \underline{r})}_{\underline{\Omega} \times \underline{U}_R} \\
 &= \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_I) - \underline{\Omega} \times \underline{U}_R
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

На основу једначине (C.11) део леве стране једначине C.10, означен са \mathbb{K} ,

$$\mathbb{K} = \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_R) + 2 \underline{\Omega} \times \underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \times \underline{r} \tag{C.12}$$

има следећи облик

$$\begin{aligned}
 \mathbb{K} &= \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_I) - \underline{\Omega} \times \underline{U}_R + 2 \underline{\Omega} \times \underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \times \underline{r} \\
 &= \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_I) + \underline{\Omega} \times \underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{\Omega} \times \underline{r} \\
 &= \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_I) + \underline{\Omega} \times \underbrace{(\underline{U}_R + \underline{\Omega} \times \underline{r})}_{\underline{U}_I} = \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_I) + \underline{\Omega} \times \underline{U}_I
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

Коначни облик Навије-Стоксове једначине у овом случају је облика

$$\frac{\partial \underline{U}_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{U}_R \otimes \underline{U}_I) + \underline{\Omega} \times \underline{U}_I = -\nabla p + \nabla \cdot \nabla \underline{U}_I \tag{C.14}$$

Биографски подаци

Александар Тоћић је рођен 23. августа 1975. године у Александровцу, општина Александровац, Република Србија. Завршио је основну школу „Аца Алексић“ у Александровцу са одличним успехом у свим разредима. Гимназију у Крушевцу, истурено одељење у Александровцу завршио је 1994. године, такође са одличним успехом у свим разредима. Након завршетка школе, уписује Машински факултет у Краљеву, Универзитета у Крагујевцу. Након свих положених испита на првој години студија, другу годину студија уписује 1995. године на Машинском факултету Универзитета у Београду. Дипломирао је октобра 2000. године на Машинском факултету у Београду, на смеру Аутоматско управљање. У току студија је имао просечну оцену 8,71 и оцену 10 на дипломском раду. Након дипломирања, исте године уписује последипломске, магистарске студије у научној области Примењена механика флуида. На магистарским студијама је положио све испите предвиђене програмом студија, укупно дванаест, са просечном оценом 10. У периоду од марта 2001. године до марта 2002. године радио је као сарадник-истраживач, стипендиран од стране Министарства науке Републике Србије. У наставном звању асистент-приправник на Катедри за механику флуида запослен је јула 2002. године. Након успешне одбране магистарског рада под насловом „Истраживање структуре нехомогене турбуленције применом инваријантне теорије“, у јуну 2007. године, у децембру исте године изабран је у звање асистента. У свом наставном раду радио је као асистент на свим предметима Катедре за механику флуида.

Кандидат је до сада аутор или коаутор 14 радова, био је учесник 4 научна пројекта финансирана од стране Министарства науке Републике Србије, и једног међународног билатералног пројекта између Министарства науке Републике Србије и Немачке службе за академску размену (DAAD).

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а мр Александар Ђоћић

број индекса _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

МОДЕЛИРАЊЕ И НУМЕРИЧКЕ СИМУЛАЦИЈЕ ВИХОРНИХ СТРУЈАЊА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 18.06.2013.



Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Александар Ћоћић

Број индекса _____

Студијски програм _____

Наслов рада МОДЕЛИРАЊЕ И НУМЕРИЧКЕ СИМУЛАЦИЈЕ ВИХОРНИХ СТРУЈАЊА

Ментор др Милан Лечић, в.проф.

Потписани/а Александар Ћоћић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 18.06.2013.



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

МОДЕЛИРАЊЕ И НУМЕРИЧКЕ СИМУЛАЦИЈЕ ВИХОРНИХ СТРУЈАЊА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду, 18.06.2013.

Потпис докторанда



1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.