

Validacija modela železničkog vozila sa trodelnim obrtnim postoljem

Nebojša Bogojević^{1,*} - Vojkan Lučanin²

¹ Fakultet za mašinstvo i građevinarstvo u Kraljevu

² Mašinski fakultet u Beogradu

Za analizu kvazistatičkog i dinamičkog ponašanja železničkih danas se sve više upotrebljavaju različiti matematički-numerički modeli. Jedno od osnovnih pitanja koje se postavlja prilikom modeliranja mehaničkih sistema je u kojoj meri razvijeni model može tačno opisati realni sistem. U ovom radu je prikazan model železničkog vozila za prevoz rude gvožđa sa povećanom osovinskom nosivošću i izvršena je validacija modela saglasno preporukama UIC-a. Za ocenu saglasnosti modela i realnog sistema poređena su ubrzanja u vertikalnoj i horizontalnoj ravni, vertikalne i bočne sile u kontaktu točak šina, za prazno i natovareno vozilo koje se kreće na pravcu i u krivini. Dobijeni rezultati pokazuju veliku saglasnost rezultata dobijenim eksperimentalnim ispitivanjem i simulacijom dinamičkog kretanja železničkog vozila

Ključne reči: železničko vozilo, model, validacija

0. UVOD

Eksperimentalna ispitivanja železničkih vozila predstavljaju najpouzdaniji način za utvrđivanje njihovih svojstava, i presudni kriterijum za odobrenje njihove eksploatacije. Međutim, eksperimentalna ispitivanja su obimna, dugotrajna i skupa, pa su alternativni metodi, koji se koriste tokom projektovanja vozila, su od najvećeg interesa. U tom cilju se razvijaju numeričke simulacije kretanja železničkih vozila, koje na osnovu matematičkog modela vozila i koloseka omogućavaju izračunavanja dinamičkih veličina u vremenskom i frekventnom domenu.

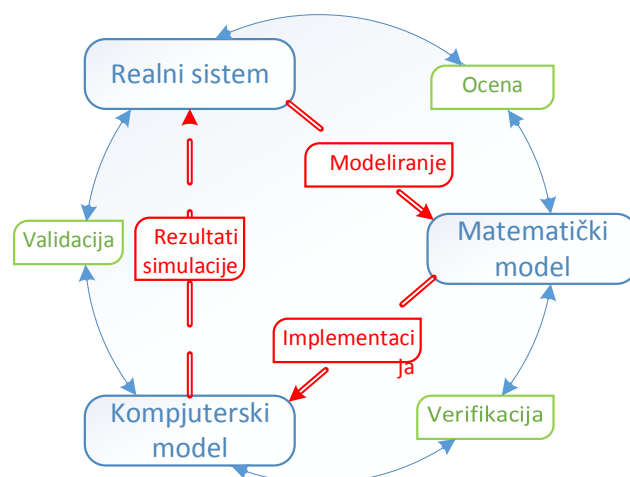
U oblasti dinamike železničkih vozila numerički modeli za predviđanje ponašanja vozila se koriste za [1]:

- Projektovanje i razvoj vozila u svim fazama razvoja,
- Predviđanje ponašanja vozila u različitim uslovima eksploatacije,
- Za utvrđivanje ispunjenosti uslova sigurnosti i bezbednosti kretanja vozila po koloseku,
- Uticaj modifikacija na dinamičko ponašanje vozila,
- Analiza ponašanja vozila u slučajevima kada nije moguće izvršiti eksperimentalno ispitivanje.

Obzirom da su modeli u sve većoj meri zastupljeni u procesu projektovanja, razvoja i predviđanja ponašanja realnih sistema potrebno je razviti metodologiju kojom je moguće ustanoviti u kojoj meri je moguće se osloniti na rezultate dobijene simulacijom. Proces u kome se određuje, daje ocena slaganja eksperimentalnih rezultata sa rezultatima dobijenih simulacijom numeričkih modela naziva se proces validacije i verifikacije modela. Proces verifikacije i validacije modela, predstavljen na Slici 1, razvijen je 1979 god. od strane Društva sa kompjuterske simulacije (Society for Computer Simulation) i može se predstaviti u obliku "Sargent Circle"[1].

Validacija modela predstavlja proces u kome se utvrđuje u kolikoj meri razvijeni model može tačno predstaviti posmatrani realni sistem [2], [3].

Proces verifikacije se u najvećoj meri fokusira na identifikaciju i uklanjanje grešaka prilikom formiranja matematičkog i računarskog modela [1].



Sl. 1. Grafički prikaz procesa validacije i verifikacije modela

Matematički model obuhvata konceptualni model, odgovarajući matematički zapis i druge potrebne podatke da bi se numerički opisao realni sistem [1],[2],[3].

Kompjuterski model predstavlja enkapsulaciju matematičkog modela u formi pogodnoj za izvršavanje na računaru [1].

U oblasti dinamike železničkih vozila ne postoji definisana metodologija za ocenu slaganja rezultata dobijenih simulacijom i eksperimentalnim ispitivanjem. Ocena slaganja modela i realnog železničkog vozila, primenjena od strane različitih autora domenu [4],[5],[6],[7], vrši se poređenjem karakterističnih veličina, ubrzanja u vertikalnom i poprečnom pravcu i sila na točkovima, u vremenskom i/ili frekventnom.

Prema preporukama UIC-a prilikom validacije modela potrebno je prikazati promenu izmerenih veličina i vrednosti istih dobijenih simulacijom u vremenskom ili

*Kontakt adresa autora: Fakultet za mašinstvo i građevinarstvo u Kraljevu, Kraljevo, Srbija, bogojevic.n@mfv.kg.ac.rs

prostornom domenu. Za posmatrane veličine otrebno je dati srednje vrednosti i vrednost standardnog odstupanja.

U ovom radu je predstavljen model teretnog železničkog vozila sa trodelnim obrtnim postoljem “Motion Control M976 Truck System” proizvodnje Amsted rail Co, izvršeno je poređenje ubrzanja na sanduku vagona i sila u kontaktut točak šina u prostornom domenu.

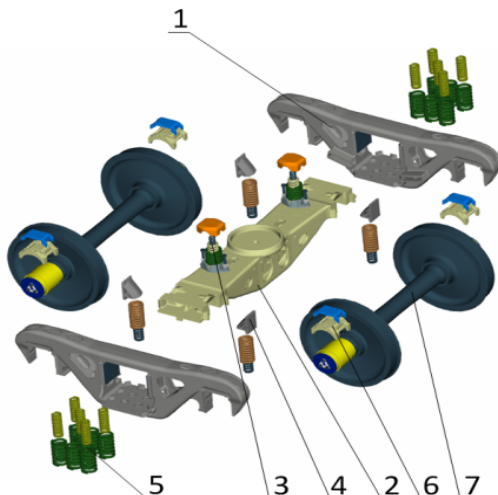
1. MODEL ŽELEZNIČKOG VOZILA SA TRODELNIM OBRNIM POSTOLJEM

Teretna železnička vozila sa trodelnim obrtnim potoljima se sastoje od sanduka vagona, namenjenog prenosu tereta i dva trodelna obrtna postolja. Karakteristike železničkog vozila za koje je razvijem model date su u Tabeli 1.

Tabela 1. osnovni podaci o železničkom vozilu

Rastojanje između obrtnih ploča	6,744 m
Dužina vozila preko odbojnika	10,3 m
Visina vagona	3,64 m
Nosivost	102 t
Težina praznog vagona	21,6 t
Težina obrtnog postolja	4650 kg
Rastojanje između osovinskih sklopova	1,778 m
Prečnik točkova	0,915 m
Maksimalna brzina	70 km/h

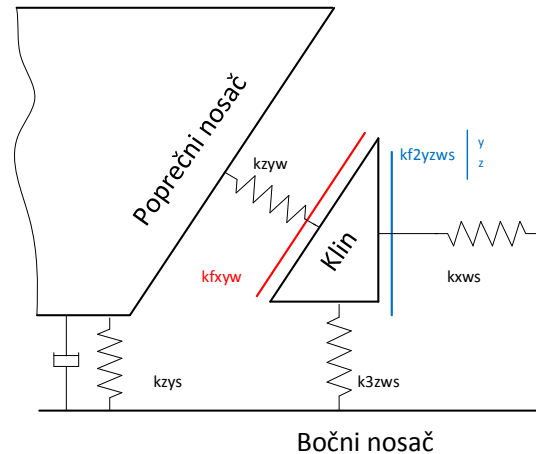
Trodelna obrtna postolja se odlikuje realtivno jednostavnom konstrukcijom. Osnovni delovi obrtnog postolja su dva bočna rama (1) koja su međusobno povezana poprečnim nosačem (2), slika 2. Preko centralne ploče i dva bočna nosača (3) ostvarena je veza između obrtnog postolja i sanduka vagona. Bočni ramovi su vezani sa osovonskim sklopovima (7) preko elastičnih adaptera (6).



Sl. 2. Trodelno obrtno postolje “Motion control M975”- Amsted rail, 1-bočni nosači, 2-poprečni nosač, 3-bočni nosači, 4-klin, 5-vešajni sistem, 6-elastični adapter, 7-osovinski sklop

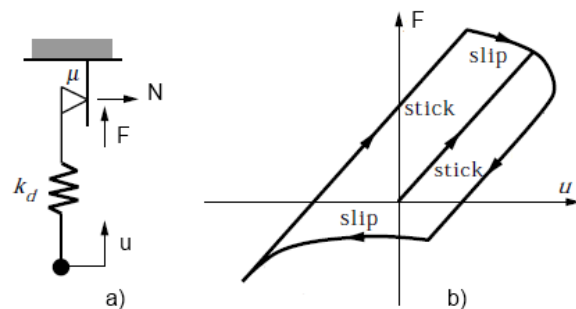
Elastična veza između osovinskih sklopova i bočnih ramova omogućava veća realtivna pomeranja osovinskih sklopova u odnosu na standardno trodelno obrtno postolje. Samim tim, poboljšane su karakteristike kretanja vozila kroz krivine sa mogućnošću povećanja brzine kretanja [6].

I pored toga što se trodelno obrtno postolje odlikuje jednostavnošću unutar njega se javljaju mnogi izvori nelinearnosti. Jedan od osnovnih je vešajni sistem obrtnog postolja koji se sastoji od seta cilindričnih opruga koje povezuju bočni i poprečni nosač (1) i seta opruga koji povezuje bočni nosač sa klinom. Klinovi u vešajnom sistemu klizaju, sa jedne strane, po bočnom nosaču i sa druge strane, po poprečnom nosaču, kao što je prikazano na slici 3.



Sl. 3. Model vešajnog sistema trodelnog obrtnog postolja

Veza između poprečnog nosača i klina je opisana sa jednodimenzionalnim Saint-Venant-ovim elementom, Slika 4 a), dok je veza između bočnog nosača i klina opisana sa dvodimenzionalnim Saint Venant-ovim elementom. Karakteristika SaintVenant-ovog elementa je da omogućava takozvano „stick-slip“ kretanje, što uvodi nelinearnost u model.



Sl. 4. a) model jednodimenzionog frikcionog blok–Saint Venant element, b) Dijagram sila - pomeraj

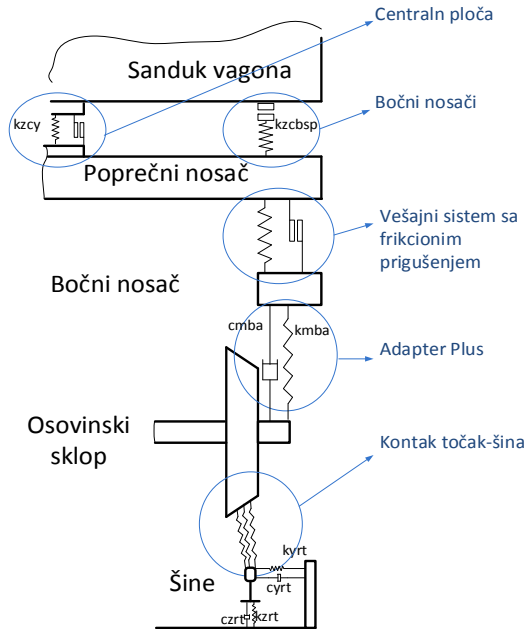
Kako pobuda u frikcionom bloku (na slici 4 označeno sa u) i normalna sila (na slici 4 označeno sa N) generalno gledajući imaju harmonijski karakter, što proizilazi iz modela vešajnog sistema prikazanog na slici 3:

$$\begin{Bmatrix} u \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \cos(\omega_1 t + \phi) \\ N_0 \cos(\omega_2 t + \phi) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

histerezisna petlja ima karakterističan oblik, kao što je prikazano na slici 4 b [9].

Uzimajući u obzir masu poprečnog i bočnog nosača, masu klinova prilikom modeliranja možemo zanemariti.

Normalna kontaktna sila u kontaktu poprečnog nosača-klina-bočnog nosača se koristi za određivanje sile trenja u Sain-Venantov-om elemetu. Koeficijent trenja, na stranicama klina, nije moguće tačno odrediti. Obzirom da su elementi vešajnog sistema izloženi vibracijama, veličina koeficijenta trenja ni je grubo procenjena uzimajući u obzir radne uslove klinova [10] i materijal elemenata u kontaktu.



Sl. 5. Model teretnog železničkog vozila sa trodelnim obrtnim postoljem

Veza između poprečnog nosača obrtnog postolja i sanduka vagona ostvarena je preko centralne ploče i dva bočna nosača, kao što je prikazano na slici 5.

Bočni nosači su u stalnom kontaktu sa sandukom vagona, usled čega obezbeđuju stalnu silu klizanja u podužnom pravcu. Centralna ploča obezbeđuje vezu između sanduka vagona i poprečnog nosača obrtnog postolja ali pored toga omogućava zakretanje obrtnog postolja oko vertikalne, podužne i poprečne ose vozila. Usled zakretanja sanduka vagona u odnosu na poprečni nosač dolazi do otpora usled trenja, što je predstavljeno frikcionim blokom, što dovodi do povećanja stabilnosti kretanja železničkog vozila. U slučaju natovarenog vozila, centralna ploča prima 90% vertikalnog opterećenja dok su bočni nosači opterećeni sa 10% opterećenja. U slučaju praznog vozila 80% ukupne težine sanduka vagona prenosi se na bočne nosače, dok se preostalih 20% prenosi preko centralne ploče na obrtno postolje.

Ostale pretpostavke koje su usvojene prilikom modeliranja vagona:

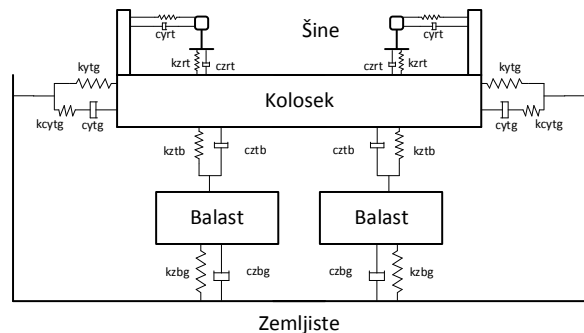
- Svi elementi vozila su kruta tela,
- Bočni nosači su u stalnom kontaktu sa sandukom vagona,
- Zanimarena je masa klinova u vešajnom sistemu vozila,
- Adapter između bočnog nosača i osovinskog sklopa ima karakteristiku gumenog elementa, što dovodi do toga da su bočni nosač i osovinski sklop spregnuti elastičnom vezom u sva tri pravca,

- Svi zazor i slobodan prostor koji omogućava pomeranja kao i ograničenja relativnih kretanja između elemenata su implementirana u model.

Model železničkog vozila je implementiran u softverskom paketu „Gensys“.

1.1 Kolosek

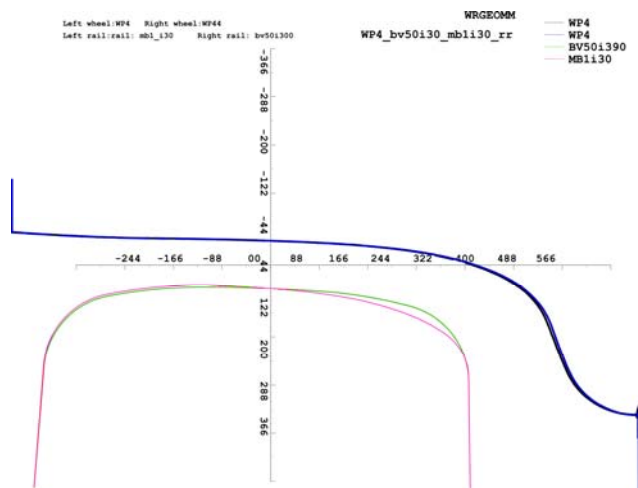
Model koloseka, prikazana na slici 7, uzima u obzir kako vertikalnu tako i horizontalnu elastičnost koloseka. Varijacijom karakteristika elastičnih elemenata koje povezuju mogu se uzeti u obzir različite vrste koloseka, kao što je kolosek sa drvenim, kolosek sa betonskim pragovima. Pored različitih vrsta kolosek, pomoću razvijenog modela, može se razmatrati i ponašanje koloseku u različitim godišnjim dobima, kao na primer u toku letnjeg ili zimskog perioda [11].



Sl. 6. Model koloseka

1.2 Kontakt točak-šina

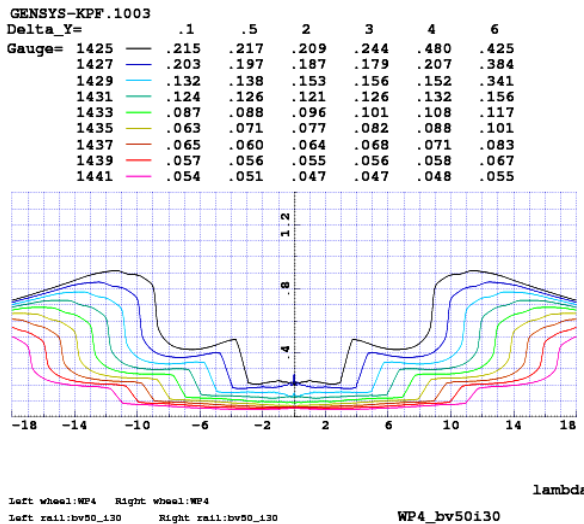
Obzirom da je osovinski sklop izložen povišenom osvinskom pritisku od 32t, za posmatrano železničko vozilo razvijeni su profili točkova WP4, posebno optimizovani za visoko opterećenje i za smanjeno trošenje. Kako se prilikom kretanja železničkog vozila u krivini, usled pojave centrifugalnih sila, na spoljnjem točku javljaju povišena opterećenja u vertikalnom i poprečnom pravcu, to se u krivinama koriste optimizovani profili MBI na spoljnoj šini. Na pravim deonicama koloseka i na unutrašnjoj šini u krivinama koriste se profili BV50 sa nagibom 1:30.



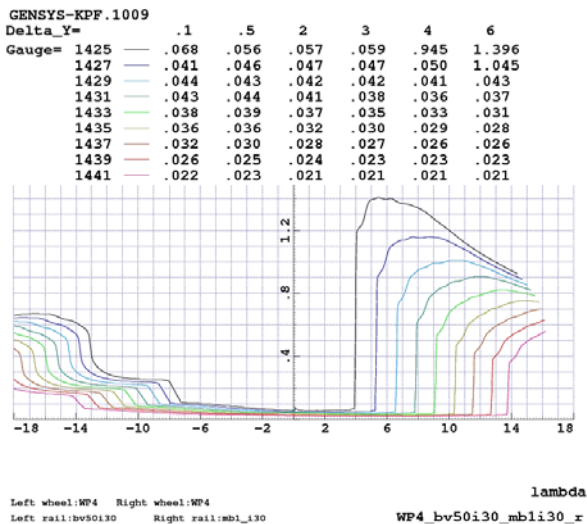
Sl. 7. Profil točka i šine

Upotreba optimizovanog profila MB1 na spoljašnjoj šini prilikom kretanja vozila kroz krivinu, u znatnoj meri smanjuje klizanje točka po šini, smanjuje vrednosti sila u kontaktu točak šina a samim tim smanjuje i trošenje spoljnjih točkova obrtnih postolja.

Kontakt između točka i šine opisan je pomoću Kalkerove nelinearne teorije [11] korišćenjem kpfr funkcija u programskom paketu Gensys. Za izmerene profile točkova i šina moguće je odrediti ekvivalentnu koničnost, što je prikazano na slikama 8 i 9.



Sl. 8. Ekvivalentna koničnost za kombinaciju profila točka i šine WP4BV50i30



Sl. 9. Ekvivalentna koničnost za kombinaciju profila točka i šine WP4BV50-MB1i30

Prilikom simulacije dinamičkog ponašanja vozila ulazni podaci za pobudu sistema uzeti su stvarna odstupanja profila koloseka koja su izmerena mernim kolima, kao što su nepravilnosti koloseka u vertikalnom i bočnom pravcu, nadvišenje koloseka, itd..

Vertikalna i horizontalna ubrzanja filtrirana su Butterworth-ovim pojasnim filtrom 4 reda propusnog opsega od 0,4Hz do 10Hz. Vertikalne i bočne sile u kontaktu točkova i šine filtrirane su niskopropusnim filtrom

2 reda sa propusnim opsegom do 20 Hz, prema preporukama UIC-a [8].

2. EKSPERIMENTALNO ISPITIVANJE DINAMIČKOG PONAŠANJA VOZILA

Eksperimentalna ispitivanja železničkog vozila izvršena su na komercijalnom koloseku između Kirune i luke Luleå u severnom delu Švedske.

Ispitivanja su izvršena u letnjem periodu, u danu bez padavina, pri čemu je kolosek bio potpuno suv. Na osnovu vremenskih uslova pretpostavljena je vrednost koeficijenta trenja u kontaktu točka i šine $\mu = 0,4$. Pretpostavljena vrednost koeficijenta trenja u velikoj meri može imati uticaj na veličinu sila u kontaktu točak šina.

Na odobranim deonicama za validaciju modela železničkog vozila, izmerena vrednost širine koloseka je varirala u granicama ± 3 mm. U simulacijama kretanja kako praznog, tako i natovarenog vagona, za širinu koloseka je uzeta standardna vrednost od 1435 mm.

U simulacijama je pretpostavljeno da se vozilo na odabranim deonicama kreće konstantnom brzinom koja je određena urednjavanjem stvarne brzine kretanja vozila na posmatranim deonicama. Odstupanja stvarne brzine kretanja vagona od pretpostavljene su u granicama $\pm 0,4$ km/h.

Za merenje ubrzanja na sanduku vagona i na bočnom nosaču na obrtnom postolju korišteni su davači ubrzanja B12/200. Za merenje sila u kontaktu točak šina korišteni su merni osovinski sklopovi. Sve merne veličine su simultano zapisivane na internu memoriju mernog sistema MGC Plus.

Prilikom eksperimentalnog ispitivanja merena su:

- Ubrzanja iznad vodećeg obrtnog postolja, na sanduku vagona, u vertikalnom i horizontalnom pravcu,
- Ubrzanja na sredini vagona, na sanduku vagona, u vertikalnom i horizontalnom pravcu,
- Ubrzanja na vodećem obrtnom postolju, na bočnom nosaču, u vertikalnom pravcu,
- Na vodećem obrtnom postolju instalirani su merni osovinski sklopovi, proizvođača Interfleet, Stockholm, Sweden.

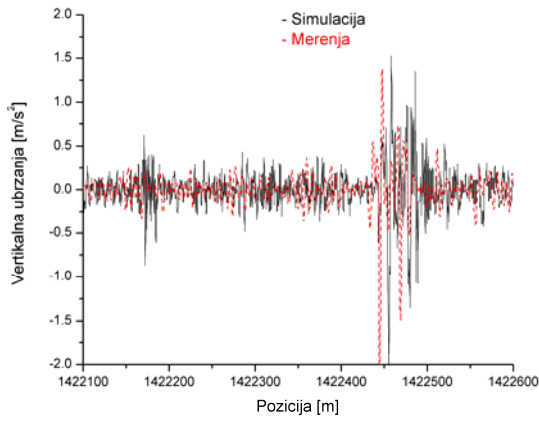
U ovom radu, za ocenu slaganja rezultata simulacije dinamičkog ponašanja vozila i rezultata eksperimentalnih ispitivanja upoređivaće se:

- ubrzanja sanduka vagona iznad vodećeg obrtnog postolja u vertikalnom i horizontalnom pravcu,
- sile na točkovima na vodećoj osovine vodećeg obrtnog postolja u vertikalnom i horizontalnom pravcu

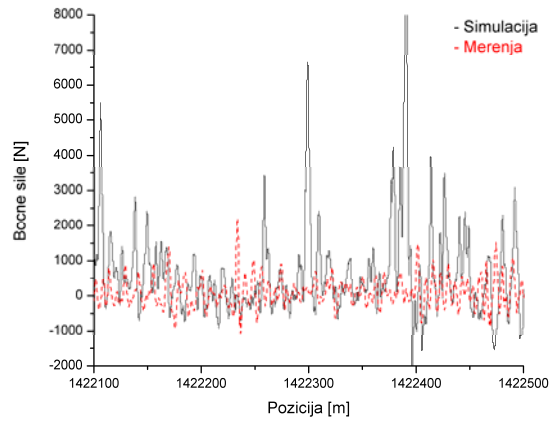
3. VALIDACIJA MODELA

3.1 Prazan vagon na pravom koloseku

Za simulaciju kretanja železničkog vozila po pravom koloseku usvojeno je da se vozilo kreće konstantnom brzinom od 70,6 km/h. Kombinacija profila točka i šine je WP4BV50I30, koeficijent trenja između točka i šine 0,4.



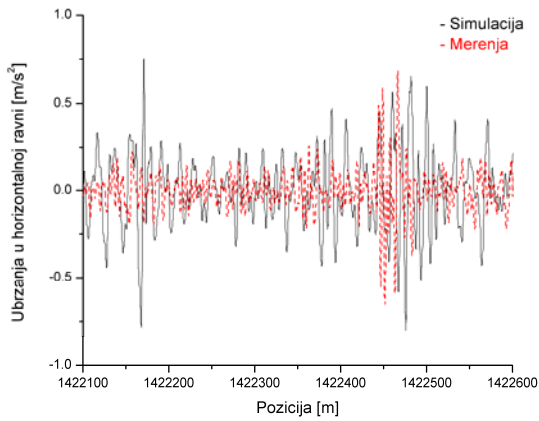
Sl. 10. Ubrzanja u vertikalnom pravcu na sanduku vagona



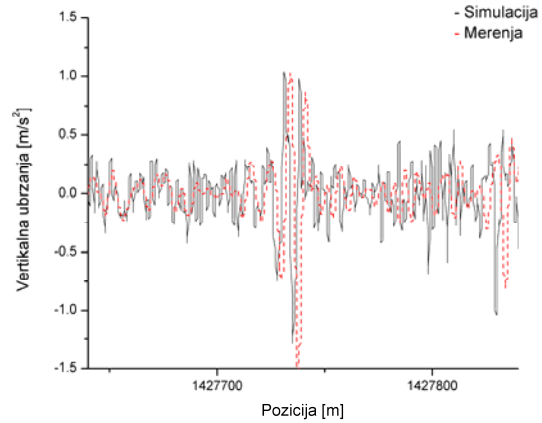
Sl. 13. Bočna sile na u kontaktu točka i šine

3.2 Prazan vagon koji se kreće u krivini

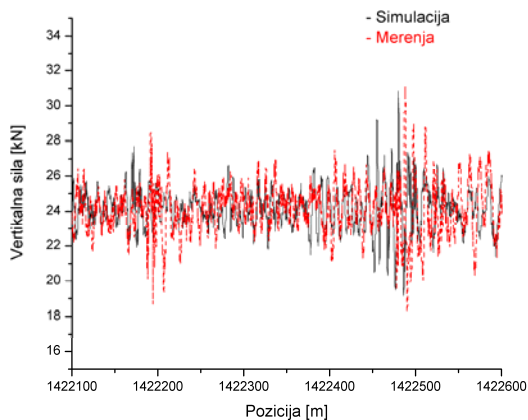
Za simulaciju kretanja železničkog vozila u krivini usvojeno je da se vozilo kreće konstantnom brzinom od 80 km/h. Kombinacija profila točka i šine je WP4BV50MB1130, pri čemu je profil MB1 dodeljen spoljašnjoj šini. Koefficient trenja između točka i šine 0,4.



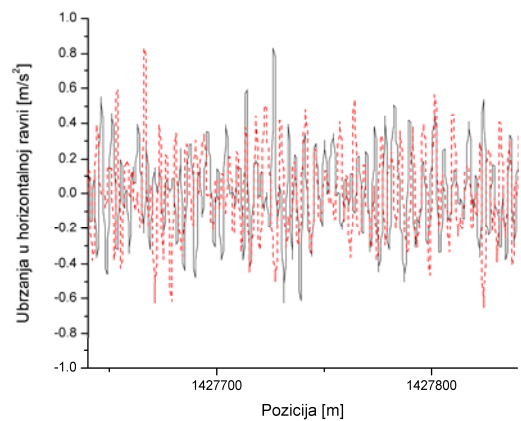
Sl. 11. Ubrzanja u horizontalnom pravcu na sanduku vagona



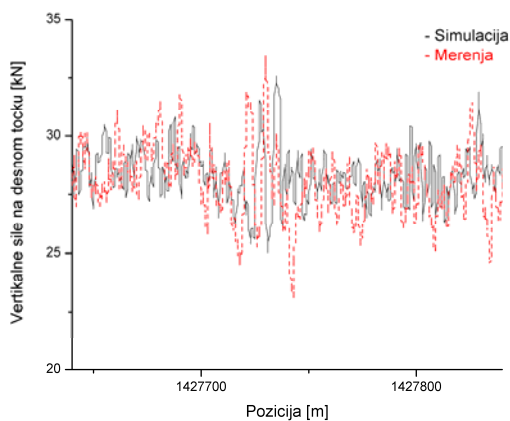
Sl. 14. Ubrzanja u vertikalnom pravcu na sanduku vagona



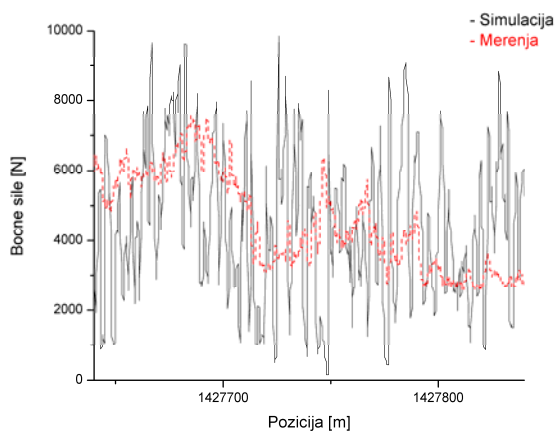
Sl. 12. Vertikalna sile na u kontaktu točka i šine



Sl. 15. Ubrzanja u horizontalnom pravcu na sanduku vagona



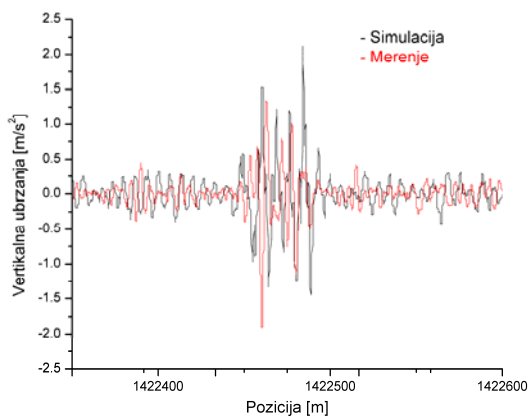
Sl. 16. Vertikalna sile na u kontaktu točka i šine



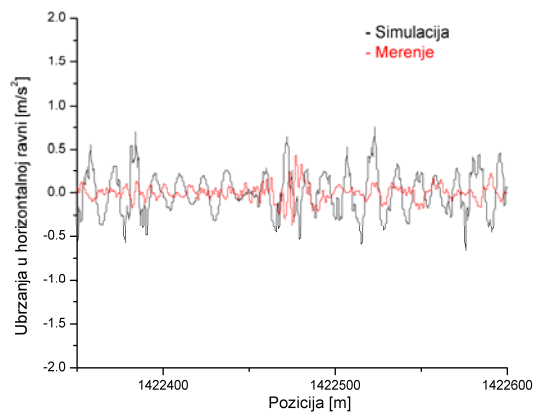
Sl. 17. Bočne sile na u kontaktu točka i šine

3.3 Natovaren vagon na pravcu

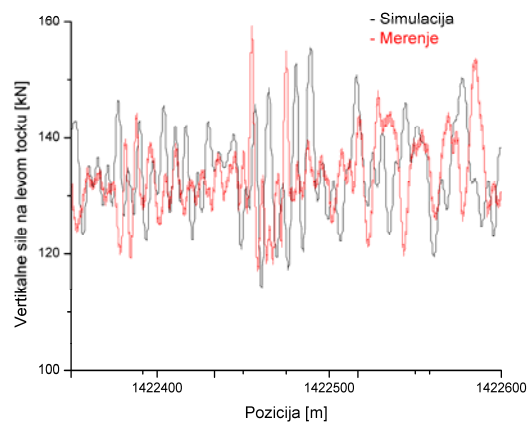
Za simulaciju kretanja železničkog vozila po pravom koloseku usvojeno je da se vozilo kreće konstantnom brzinom od 59,6 km/h. Kombinacija profila točka i šine je WP4BV50I30, koeficijent trenja između točka i šine 0,4.



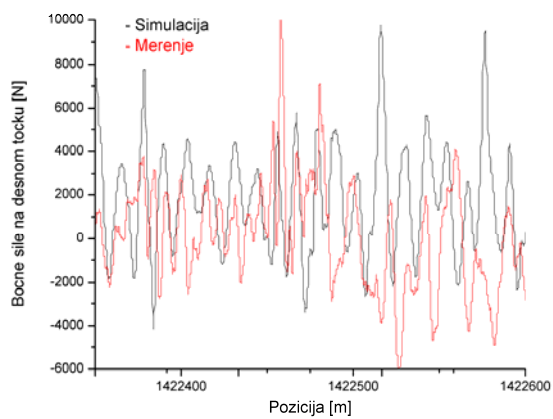
Sl. 18. Ubrzanja u vertikalnom pravcu na sanduku vagona



Sl. 19. Ubrzanja u horizontalnom pravcu na sanduku vagona



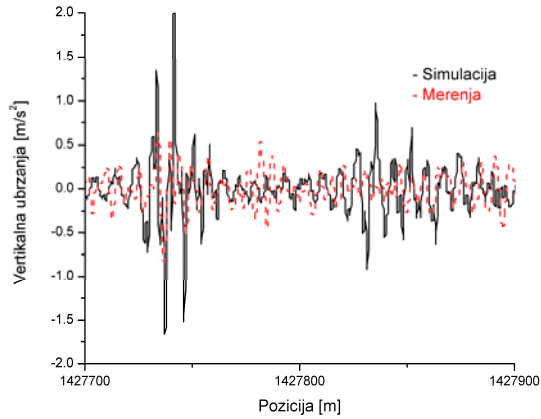
Sl. 20. Vertikalne sile na levom točku na vodećoj osovini vodećeg obrtnog postolja



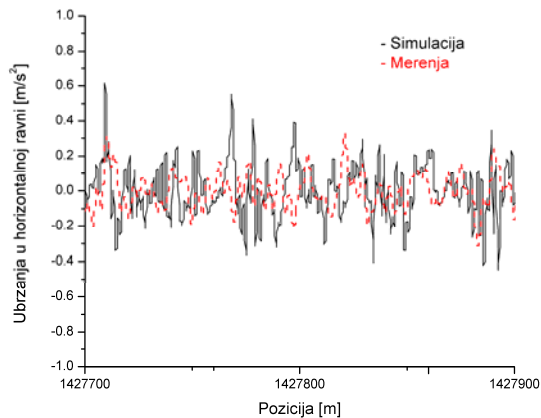
Sl. 21. Bočna sile na u kontaktu točka i šine

3.4 Natovaren vagon u krivini

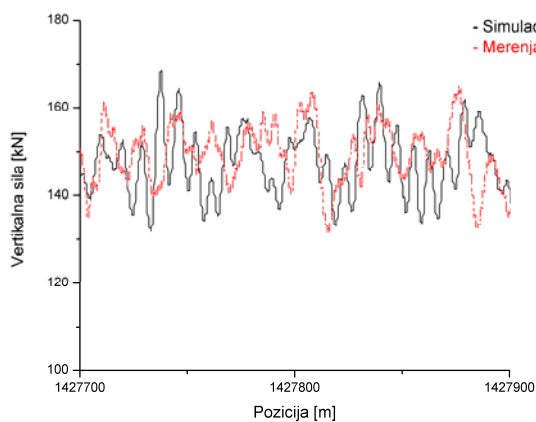
Za simulaciju kretanja železničkog vozila u krivini usvojeno je da se vozilo kreće konstantnom brzinom od 69 km/h. Kombinacija profila točka i šine je WP4BV50MB1I30, pri čemu je profil MB1 dodeljen spoljašnjoj šini. Koeficijent trenja između točka i šine 0,4.



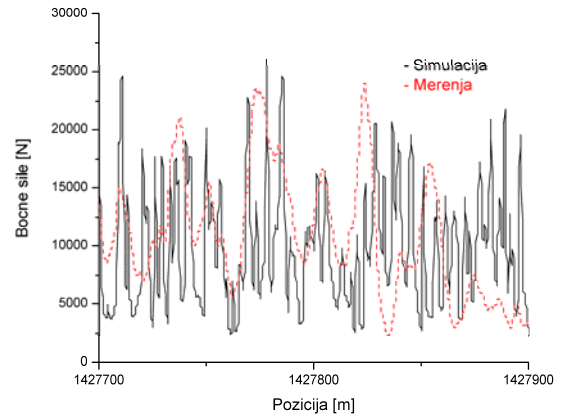
Sl. 22. Ubrzanja u vertikalnom pravcu na sanduku vagona



Sl. 23. Ubrzanja u horizontalnom pravcu na sanduku vagona



Sl. 24. Vertikalna sile na u kontaktu točka i šine



Sl. 25. Bočna sile na u kontaktu točka i šine

Za izabrane deonice u Tabeli 2 prikazane su srednje vrednosti sila i standardna devijacija.

Table 1. Srednje vrednosti i standardna devijacija sila

		Y [N]		Q [kN]	
		srednja vred.	dev	srednja vred.	Dev.
Prazan pravac	sim	420	488	26.546	1.29
	exp	3184	651	25.91	1.55
Prazan krivina	sim	4146	2069	27.759	1.58
	exp	5758	1424	28.226	1.65
Natovaren pravac	sim	2228	2671	133.274	13.76
	exp	4616	2192	133.64	13.39
Natovaren krivina	sim	7602	5832	143.319	16.21
	exp	7927	5437	144.213	9.98

4. ZAKLJUČAK

U radu je prikazan model železničkog vozila i izvršena su poređenja ubrzanja na podu sanduka vagona i sila u kontaktu točka i šine za prazan i natovaren vagon, pri kretanju vozila na pravcu i u krivini. Sa prikazanih dijagrama se može videti da postoji dobro slaganje posmatranih parametara dobijenih simulacijom kretanja železničkog vozila i eksperimentalnim ispitivanjem istog.

Sa dijagramom ubrzanja se može videti da u svim slučajevima postoji dobro slaganje srednje vrednosti kao i poklapanje karakterističnih pojava - pikova.

Vertikalne sile u kontaktu točka i šine imaju realtivno dobro poklapanje srednjih vrednosti i standardnog odstupanja. Bočne sile u kontaktu točka i šine kod natovarenog vagona imaju dobro slaganje sa izmerenim vrednostima. Vrednosti bočnih sila kod kretanja praznog vagona kod simulacije su značajno veće od izmerenih vrednosti bočnih sila. Ovako dobijene vrednosti mogu biti uzrokovane loše procenjenim koeficijentom trenja u kontaktu točka i šine, loše procenjenom širinom koloseka na posmatranoj deonici ili

previše visokim koeficijentom trenja u vešajnom sistemu vozila.

Ulazni podaci za simulaciju dinamičkog ponašanja železničkog vozila predstavljaju i nepravilnosti na koloseku koje su snimljene mernim kolima Banverketa. Obzirom da su eksperimentalna ispitivanja izvršena na komercijalnom koloseku, može se pretpostaviti da su nakon mernih kola trasom prošle nekoliko kompozicija koje su mogle da izazovu drugačije nepravilnosti na koloseku, tako da je pobuda železničkog vozila prilikom ispitivanja nije odgovarala snimljenom stanju koloseka.

Da bi se u potpunosti izvršila validacija modela prema UIC preoprakama potrebno je izvršiti i proveru rezultata dobijenih simulacijom i eksperimentalnim putem u frekventnom domenu.

Nedostatak ovakvog postupka validacije modela ogleda se u tome što je ovakav postupak ocene u potpunosti subjektivan i zasniva se na iskustvu i mišljenju samog ocenjivača. Trenutno ne postoji jedinstvena kvantitativna ocena o tome u kojoj meri model je saglasan sa realnim sistemom.

5. REFERENCE

- [1] Oberkampf, W. L., Trucano, T. G., and Hirsch, C., 2004, "Verification, Validation, and Predictive Capability in Computational Engineering and Physics," *Appl. Mech. Rev.*, 57(3), pp. 345–384.
- [2] Sornette, D., Davis, A. B., Ide, K., Vixie, K. R., Pisarenko, V., and Kamm, J. R., 2007, "Algorithm for Model Validation: Theory and Applications," *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 104(16), pp. 6562–6567.
- [3] Ben H. Thacker, Scott W. Doebing, Francois M. Hemez, Mark C. Anderson, Jason E. Pepin, Edward A. Rodrigez, „Concepts of model verification and validation“, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, October 2004
- [4] S.D. Iwnicki, A.H. Wickens, Validation of a MATLAB Railway Vehicle Simulation Using a Scale Roller Rig, *Vehicle System Dynamics* (1998), Volume: 30, Issue: 3, Publisher: Citeseer, Pages: 257–270, ISSN: 00423114, DOI:10.1080/00423119808969451
- [5] Pelle Carlbom, Carbody and Passengers in Rail Vehicle Dynamics, Doctoral Thesys, TRITA - FKT 2000:48, ISSN 1103 - 470X, ISRN KTH/FKT/D--00/48--SE
- [6] J.R. Evans & P.J. Rogers (1998): Validation of dynamic simulations of rail vehicles with friction damped y25 bogies, *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 29:S1, 219-233, <http://dx.doi.org/10.1080/00423119808969561>
- [7] Jönsson P-A, Persson I and Stichel S: New Simulation Model for Freight Wagons with UIC Link Suspension. *Vehicle System Dynamics*, Volume 46, Supplement, pp 695- 704, 2008.
- [8] UIC testing and approval of railway vehicles from the point of view of their dynamic behaviour –safety-Track fatigue – Ride quality, Code 518 OR, 4th edition, Paris, October 2009.
- [9] B. D. Yang, M. L. Chu And C. H. Menq, Stick–slip–separation analysis and non-linear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load, *Journal of Sound and Vibration* (1998) 210 (4), 461-481.
- [10] A. Orlova & Yu. Roman (2008): Refining the wedge friction damper of threepiece freight bogies, *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 46:S1, 445-455
- [11] J.J. Kalker, Wheel-rail rolling contact theory, *Wear*, Volume 144, Issues 1–2, 20 April 1991, Pages 243-261, ISSN 0043-1648, [http://dx.doi.org/10.1016/0043-1648\(91\)90018-P](http://dx.doi.org/10.1016/0043-1648(91)90018-P).