

# DEFINISANJE EKVIVALENTNOG TORZIONOOSCILATORNOG SISTEMA

Trifković R. *Dragan*, Vojna akademija, Katedra vojnih mašinskih sistema, Beograd,  
Obradović M. *Aleksandar*, Mašinski fakultet, Katedra za mehaniku, Beograd

UDC: 621.3.029:629.03

## Sažetak:

*U radu je prikazan postupak zamene elemenata kompleksnog torzionooscilatornog sistema brodske dizelmotorne propulzije uprošćenim ekvivalentnim elementima istih dinamičkih karakteristika. Izloženi postupak sadrži metode za određivanje ekvivalentnih dužina, krutosti i momenta inercije na osnovu jednakosti kinetičkih i potencijalnih energija realnih i ekvivalentnih elemenata sistema. Osim toga, analizirani su pobudni momenti koji izazivaju prinudne torzione oscilacije razmatranog sistema.*

*Ključne reči: torzione vibracije, brodska dizelmotorna propulzija.*

## Uvod

Da bi se izbegla nedozvoljena naprezanja elemenata mehaničkog sistema koji torziono osciluje neophodno je, u fazi projektovanja takvog sistema, proračunom odrediti, pre svega, sopstvene frekvencije i frekvencije prinude, odnosno kritične brzine obrtanja. U inženjerskoj praksi obično se primenjuju dva principa za formiranje i rešavanje jednačina oscilovanja. Prvi, koji je i predmet ovog rada, podrazumeva uprošćavanje i idealizaciju posmatranog mehaničkog sistema za prenos snage sa broskog motora na propeler. Uprošćenje se svodi na to da se realan sistem zameni jednostavnijim sistemom, istih dinamičkih karakteristika, koji se naziva ekvivalentni torzionooscilatorni sistem. Ekvivalentan sistem sastoji se od odsečaka vratila konstantnog prečnika i zanemarljive mase, ali iste krutosti kao kod realnih delova vratila i koncentrisanih masa koje zamenjuju realne mase. Rezultat takve idealizacije je model sa konačnim brojem stepena slobode čije je kretanje opisano sistemom običnih diferencijalnih jednačina. Drugi princip zasniva se na razmatranju realnog sistema kao složenog elastičnog tela sa beskonačno mnogo stepena slobode, čije je torziono oscilovanje opisano sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina. Specijalizovani računarski programi pružaju mogućnosti za uspešno rešavanje i najsloženijih sistema dife-

rencijalnih jednačina matičnim metodama, kao i analizu oblika oscilovanja sistema. Za pravilno definisanje ekvivalentnog sistema važno je pravilno definisati sve njegove karakteristične veličine kao što su: dužine, momenti inercije, krutosti, prigušenja i poremećajni impulsi.

## Ekvivalentna dužina i krutost

Ekvivalentan torzionooscilatorni sistem predstavlja vratilo sa koncentrisanim masama pričvršćenim na određenom rastojanju od njega ili sa diskovima jednakih momenata inercije kao i odgovarajuće realne mase.

Ekvivalentne dužine određuju se iz uslova jednakosti potencijalnih energija realnog i ekvivalentnog dela vratila prema izrazu [1]:

$$\frac{1}{2}[M_t \cdot \theta]_E = \frac{1}{2}[M_t \cdot \theta]_R \quad (1)$$

gde je:  $M_t$  – moment torzije [Nm],  
 $\theta$  – ugao uvijanja [rad].

Indeksi E i R odnose se na ekvivalentan, odnosno realan deo vratila. Ugao uvijanja se proračunava prema formuli:

$$\theta = \frac{M_t l}{GI_0} = \frac{M_t}{c} = M_t e \quad (2)$$

gde je:  $G$  – modul klizanja [ $N/m^2$ ],  
 $I_0$  – polarni moment inercije poprečnog preseka vratila [ $m^4$ ],  
 $c$  – torziona krutost vratila  $c = GI_0/l$  [ $Nm/rad$ ],  
 $e$  – torziona elastičnost vratila [ $rad/Nm$ ],  
 $l$  – dužina vratila [m].

Iz jednačina (1) i (2) sledi da se jednakost potencijalnih energija svodi na jednakost torzionih krutosti ekvivalentnog i stvarnog dela vratila:

$$\left( \frac{GI_0}{l} \right)_E = \left( \frac{GI_0}{l} \right)_R \quad (3)$$

Ako se za ekvivalentno vratilo usvoji isti materijal, kao i kod realnog ( $G_E = G_R$ ), iz izraza (3) dobija se dužina ekvivalentnog vratila:

$$l_E = l_R \frac{I_{0E}}{I_{0R}} \quad (4)$$

gde je:  $l_E$  – dužina ekvivalentnog vratila [m],  
 $l_R$  – dužina realnog vratila [m],  
 $I_{0R}$  – polarni momenti inercije realnog vratila [ $m^4$ ],  
 $I_{0E}$  – polarni momenti inercije ekvivalentnog vratila [ $m^4$ ].

Pri aproksimaciji kolenastog vratila motora, za spoljni i unutrašnji prečnik ekvivalentnog vratila usvajaju se odgovarajuće vrednosti prečnika oslonačkog rukavca. Ukoliko na realnom vratilu postoje žlebovi ili stepenasti prelazi sa većeg na manji prečnik, njegova se krutost smanjuje zbog koncentracije napona. U tom slučaju, moraju se uvoditi popravni koeficijenti koji zavise od odnosa većeg i manjeg prečnika, kao i od veličine prelaznog prečnika. Složeni oblici vratila razlažu se na elementarne delove za koje se mogu sračunati ekvivalentne dužine. U tom slučaju je ugao uvijanja složenog dela jednak zbiru uglova uvijanja  $n$  elementarnih delova. Torziona elastičnost tako složenog dela jednaka je zbiru torzionih elastičnosti  $n$  elementarnih delova i predstavlja se izrazom:

$$\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i \Rightarrow \frac{1}{c} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \quad (5)$$

Ekvivalentna dužina vratila, ugrađenog iza reduktora (uporno, među-vratilo i propelersko vratilo), proračunava se, na osnovu jednakosti potencijalnih energija, po formuli:

$$l_E = l_R \frac{I_{OE}}{I_{OR}} \cdot \frac{1}{\xi \cdot i^2} \quad (6)$$

gde je:  $i$  – prenosni odnos reduktora,

$\xi$  – popravni koeficijent obzirom na elastičnost zuba, oboda i diskovala zupčanika ( $\xi = 0,9 - 1,0$ ).

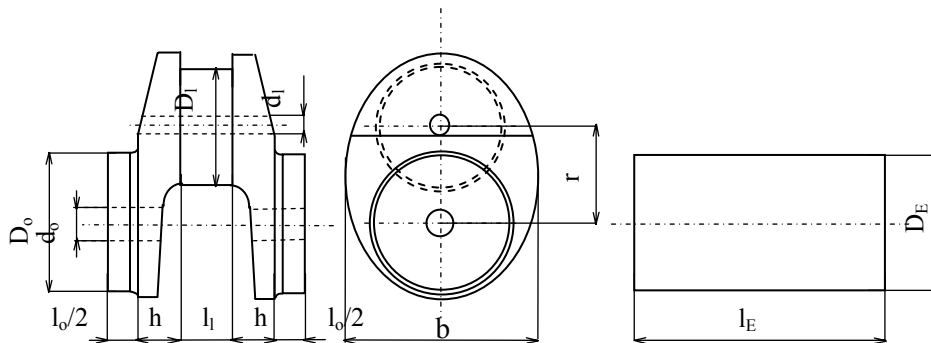
Ekvivalentne dužine i krutosti složenih oblika vratila i drugih delova realnog sistema mogu se određivati na tri načina: eksperimentom, numeričkom metodom (metodom konačnih elemenata) i empirijskim formulama [3], [4].

Eksperimentalni metod sastoji se u tome da se jedan kraj vratila fiksira, a na drugom kraju se deluje poznatim momentima uvijanja  $M$ . Za različite vrednosti momenta uvijanja dobijaju se odgovarajući uglovi uvijanja  $\theta$ . Zatim se pomoću formule (2) računa krutost vratila  $c$ . Zbog male vrednosti ugla uvijanja često se prave greške u očitavanju, pa je potrebno napraviti više merenja i kao konačnu vrednost uzeti srednju vrednost torzione krutosti. Zatim se za prečnik ekvivalentnog vratila uzima prečnik oslonačkog rukavca i računa ekvivalentna dužina po formuli [6]:

$$l_E = \frac{GI_{0E}}{c} \quad (7)$$

gde su sve veličine ranije definisane.

Empirijske jednačine za određivanje ekvivalentne dužine i krutosti kolenastog vratila dobijene su kombinacijom eksperimentalnih i računskih metoda, a treba ih koristiti prema preporukama autora [3]. Za upotrebu ovih formula potrebno je poznavati dimenzije kolenastog vratila i osobine materijala (modul klizanja  $G$ ). Na sl. 1 prikazana je skica jednog realnog i ekvivalentnog kolena kolenastog vratila.



Slika 1 – Skica realnog i ekvivalentnog kolena kolenastog vratila

Najčešće se u literaturi sreću sledeće aproksimirane jednačine za izračunavanje ekvivalentne dužine jednog kolena kolenastog vratila (prema oznakama na sl. 1) [3], [6]:

Wilsonova jednačina:

$$l_E = D_o^4 \left( \frac{l_o + 0.4D_o}{D_o^4 - d_o^4} + \frac{l_l + 0.4D_l}{D_l^4 - d_l^4} + \frac{r - 0.2(D_l + D_o)}{hb^3} \right) \quad (8)$$

Tuplinova jednačina:

$$l_E = D_o^4 \left\{ \frac{l_o + 0.15D_o}{D_o^4 \left[ 1 - \left( \frac{d_o}{D_o} \right)^4 \right]^2} + \frac{l_l + 0.15D_l}{D_l^4 \left[ 1 - \left( \frac{d_l}{D_l} \right)^4 \right]^2} \right\} + \frac{2h - 0.15(D_o + d_l)}{b^4 - d_o^4} + \frac{r}{hb^3} \left( 0.58 + \frac{0.065D_o}{h} \right) + \frac{0.016}{bh^2} \quad (9)$$

Zimanjenkova jednačina:

$$l_E = D_o^4 \left( \frac{l_o + 0.6 \frac{D_o h}{l_o}}{D_o^4 - d_o^4} + \frac{0.8 l_l + 0.2 \frac{b D_o}{r}}{D_l^4 - d_l^4} + \frac{r}{h b^3} \sqrt{\frac{r}{D_l}} \right) \quad (10)$$

Timošenkova jednačina:

$$l_E = D_o^4 \left( \frac{l_o + 0.9 h}{D_o^4 - d_o^4} + \frac{l_l + 0.9 h}{D_l^4 - d_l^4} + \frac{0.93 r}{h b^3} \right) \quad (11)$$

Jackobsonova jednačina:

$$l_E = D_o^4 \left( \frac{l_o + 0.27 D_o}{D_o^4 - d_o^4} + \frac{l_l + 0.27 D_l}{D_l^4 - d_l^4} + \frac{0.07 (l_l + 0.27 D_l)^3}{D_l^4 - d_l^4} + \frac{0.7 r}{h b^3} \right) \quad (12)$$

Southwellova jednačina:

$$l_E = D_o^4 \left( \frac{l_o}{D_o^4 - d_o^4} + \frac{l_l}{D_l^4 - d_l^4} + \frac{0.93 r}{h b^3} + \frac{r l_l}{(D_l^4 - d_l^4) \frac{0.588 + l_l (D_l^4 - d_l^4)}{h b (h^2 + b^2)} + r} \right) \quad (13)$$

Heldtova jednačina:

$$l_E = D_o^4 \left( \frac{l_o + 0.4 h}{D_o^4 - d_o^4} + \frac{1.096 l_l}{D_l^4 - d_l^4} + \frac{1.28 r}{h b^3} \right) \quad (14)$$

Carterova jednačina:

$$l_E = D_o^4 \left( \frac{l_o + 0.8 h}{D_o^4 - d_o^4} + \frac{0.75 l_l}{D_l^4 - d_l^4} + \frac{1.5 r}{h b^3} \right) \quad (15)$$

Jednačine (8–15) dobijene su tako što su realni oblici ramena zame-njeni paralelopipedima, pri čemu je ukupan ugao uvijanja kolena zbir uglo-va uvijanja letećeg i oslonačkog rukavca i uglova savijanja ramena. Iz tog uslova određena je ekvivalentna krutost prema obrascu (5). Torzione kru-tosti letećeg i oslonačkog rukavca računaju se iz poznatog izraza za torzio-nu krutost vratila kružnog poprečnog preseka [8]. Krutost ramena određuje se na osnovu savojne deformacije ramena. Na ovaj način dobijena je pola-zna jednačina za određivanje ekvivalentne krutosti i dužine jednog kolena kolenastog vratila [6]. Zbog uprošćavanja oblika ramena ta jednačina je davala veće vrednosti krutosti. Uvođenjem različitih korekcija dobijene su i različite jednačine za ekvivalentnu dužinu kolena kolenastog vratila.

Ekvivalentne krutosti složenih geometrijskih oblika, kakvo je kolenasto vratilo motora, mogu se određivati i metodom konačnih elemenata (MKE). U tu svrhu se projektuje solid model jednog kolena, ukoliko je kolenasto vratilo izvedeno sa jednakim kolenima. Međutim, i ova metoda zahteva određena pojednostavljena koja neće bitno uticati na rezultat, a odnose se na pojedine radijuse zaobljenja i otvore. Programski paket CAD (Computer Aided Design) omogućava određivanje ekvivalentne krutosti metodom konačnih elemenata.

## Ekvivalentni moment inercije

Da bi se sve mase realnog sistema zamenile koncentrisanim masa-ma (ili diskovima) mora se ispuniti uslov jednakosti kinetičkih energija re-alnog i ekvivalentnog sistema [1], [6], [12]:

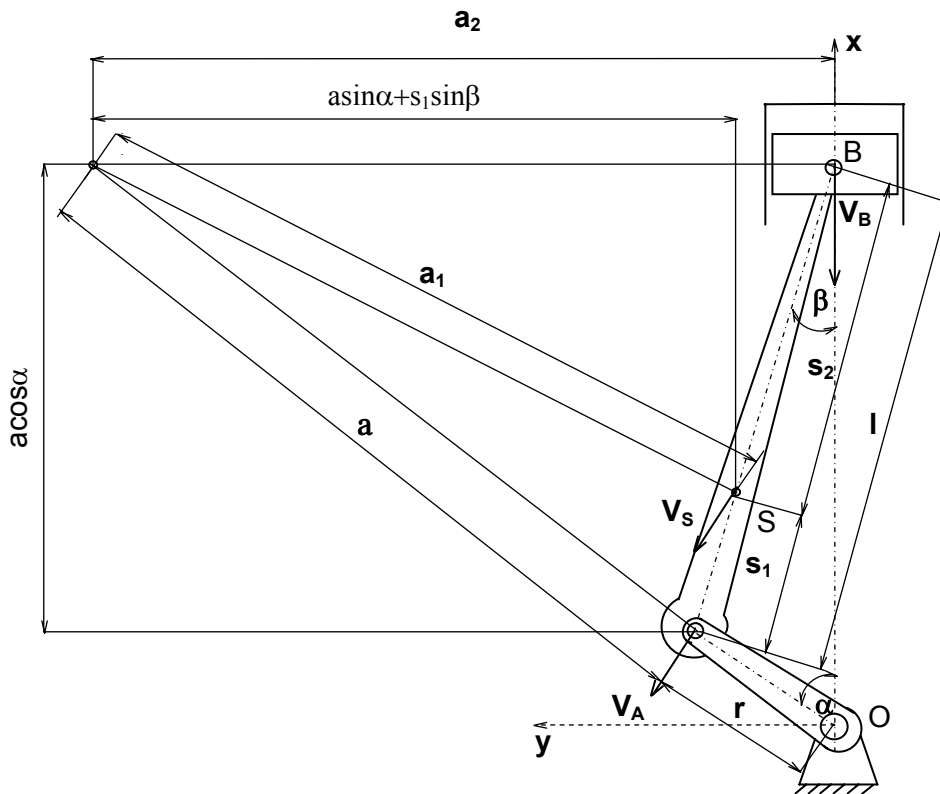
$$\frac{1}{2}[I\omega^2]_E = \frac{1}{2}[I\omega^2]_R \quad (16)$$

gde je:  $I$  – moment inercije [ $\text{kgm}^2$ ],  
 $\omega$  – ugaona brzina vratila [ $\text{rad/s}$ ].

Indeksi E i R se odnose na ekvivalentan, odnosno realan sistem.

Za linijske (nerazgranate) sisteme ovaj uslov se svodi na jednakost mo-menata inercije ekvivalentnog i realnog sistema. Pod linijskim sistemima podrazumevaju se sistemi sa jednim ili više vratila, koji nemaju prenosnike snage. Za elemente sistema koji imaju pravilne geometrijske oblike lako se određuju momenti inercije. U suprotnom, element složenog geometrijskog oblika se rastavlja na prostije oblike čiji se momenti inercije mogu lako odre-diti. Suma pojedinačnih momenata inercije predstavlja moment inercije ele-menta složenog geometrijskog oblika. Momenti inercije mogu se određivati i pomoću crteža, a u nekim slučajevima i eksperimentalno. Moment inercije propelera najčešće se određuje eksperimentalnom metodom pomoću klatna [1], [9]. Posebna poteškoća javlja se pri određivanju ukupnog momenta iner-

cije kolena kolenastog vratila, koje je posredstvom klipnjače povezano sa klipnom grupom. Zbog toga će se analizirati prost klipni mehanizam motora (sl. 2), sastavljen od kolena (AO), klipnjače (AB) i klipa (B).



Slika 2 – Prost klipni motorni mehanizam

Koleno vrši rotaciono kretanje oko ose kroz tačku (O) i ima konstantan moment inercije za tu osu. Moment inercije sistema klipnjača–klip zavisi od ugla kolena kolenastog vratila  $\alpha$ . Ukupan moment inercije za jedno koleno kolenastog vratila je zbir momenta inercije kolena i momenta inercije sistema klipnjača–klip. Moment inercije kolena dobija se kao zbir momenta inercije njegovih delova (rame, oslonaci i leteći rukavac). Zbog pravolinijski oscilatornog kretanja klipne grupe i dela klipnjače na koleno kolenastog vratila se prenosi inercijalna sila ovih elemenata, kao inercijalni moment. Uz pretpostavku da su ovi elementi kruti, njihovi momenti inercije mogli bi se odrediti korišćenjem poznatih izraza iz dinamike. Međutim, zbog ravnanskog kretanja klipnjače, određivanje njenog momenta inercije je složeno, pa se u praksi pribegava određenim uprošćenjima. U tom smislu

se masa klipnjače najčešće zamenjuje sa dve koncentrisane mase u tačkama (A) i (B). Deo mase klipnjače redukovano u tačku (A), na osi velike pesnice, vrši rotaciono kretanje, a deo mase klipnjače redukovano u tačku (B), na osi male pesnice, vrši pravolinijski oscilatorno kretanje.

Redukovani moment inercije sistema klipnjača–klip, u odnosu na osu kolenastog vratila, može se dobiti iz izraza za kinetičku energiju. Ova energija sastoji se od kinetičkih energija klipnjače (17) i klipne grupe (18), koje su date izrazima:

$$E_{k\check{c}} = \frac{1}{2} m_{k\check{c}} V_S^2 + \frac{1}{2} m_{k\check{c}} \rho_{k\check{c}}^2 \dot{\beta}^2 \quad (17)$$

$$E_{kg} = \frac{1}{2} m_{kg} V_B^2 \quad (18)$$

gde je:  $E_{k\check{c}}$  – kinetička energija klipnjače [J],  
 $E_{kg}$  – kinetička energija klipne grupe [J],  
 $m_{k\check{c}}$  – masa klipnjače [kg],  
 $m_{kg}$  – masa klipne grupe [kg],  
 $\rho_{k\check{c}}$  – poluprečnik inercije klipnjače u odnosu na težište [m],  
 $V_S$  – brzina težišta klipnjače [m/s],  
 $V_B$  – brzina klipne grupe [m/s],  
 $\beta$  – ugaona brzina klipnjače [rad/s].

Ako se tačka (P) izabere za centar obrtanja klipnjače, čije je težište u tački (S), onda se brzine tačaka (A), (S) i (B) prikazuju izrazima:

$$V_1 = a \cdot \beta = r \cdot \alpha \quad (19)$$

$$V_S = a_1 \cdot \beta \quad (20)$$

$$V_B = a_2 \cdot \beta \quad (21)$$

gde je:  $r$  – dužina ramena kolena kolenastog vratila [m],  
 $\alpha$  – ugaona brzina kolena kolenastog vratila [rad/s].

Rastojanja  $a$ ,  $a_1$  i  $a_2$ , u izrazima (19-21), prikazana su na sl. 2. Iz jednačina (19) i (20) dobija se brzina težišta klipnjače:

$$V_S^2 = \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 r^2 \dot{\alpha}^2 \quad (22)$$

Rastojanja  $a$  i  $a_1$  mogu se izraziti pomoću sledećih jednačina:

$$a = l \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad (23)$$

$$a_1^2 = s_2^2 \cos^2 \beta + (a \sin \alpha + s_1 \sin \beta)^2 \quad (24)$$

gde je:  $l$  – dužina klipnjače [m].



Ako se kinetička energija sistema klipnjača–klip izrazi preko redukovanog momenta inercije  $I_{kk}$ , sledi:

$$E = E_{k\dot{\alpha}} + E_{kg} = \frac{1}{2} I_{kk} \dot{\alpha}^2 \quad (25)$$

gde je:  $E_{kk}$  – kinetička energija sistema klipnjača–klip [J],

$I_{kk}$  – redukovani moment inercije sistema klipnjača–klip [ $\text{kgm}^2$ ].

Ako se izraz (25) izjednači sa sumom jednačina (17) i (18), uz korišćenje jednačina (22), (23) i (24) dobija se izraz za redukovani moment inercije sistema klipnjača–klip:

$$I = m_{k\dot{\alpha}} r^2 \left[ \left( \frac{s_2}{l} \right)^2 \cos^2 \alpha + \left( \sin \alpha + \frac{s_1}{l} \cos \alpha \operatorname{tg} \beta \right)^2 \right] + m_{k\dot{\alpha}} \rho_{k\dot{\alpha}}^2 \delta^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} + m_{kg} r^2 (\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta)^2 \quad (26)$$

$$\text{gde je: } \cos \beta = \sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\delta \sin \alpha}{\sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \alpha}},$$

$\delta$  – kinematska karakteristika motora ( $\delta = \frac{r}{l}$ , sl. 2),

$s_1$  – rastojanje između ose letećeg rukavca i težišta klipnjače (sl. 2) [m],

$s_2$  – rastojanje između ose osovinice klipa i težišta klipnjače (sl. 2) [m].

Iz formule (26) zaključuje se da je redukovani moment inercije funkcija ugla kolenastog vratila koja se može i nacrtati. Ova funkcija je parna i periodična sa periodom  $2\pi$  i može se razviti u red [6]. Za tačno određivanje redukovanog momenta inercije sistema klipnjača–klip mora se poznavati poluprečnik inercije klipnjače, a njegovo tačno određivanje predstavlja poteškoću zbog složenog oblika klipnjače.

Neki autori predlažu da se masa klipnjače zameni sa tri koncentrisane mase, raspoređene u tačkama (A), (B) i (S) (sl. 2.). Hafner je utvrdio da se pravi maksimalna greška od 5% ako se klipnjača zameni sa dve umesto sa tri mase [3].

U praksi se češće primenjuju približne formule za određivanje redukovanog momenta inercije sistema klipnjača–klip [7]:

$$I = I_k + (m_{k\dot{\alpha}}^A + 0.5m_B) r^2 \quad (27)$$

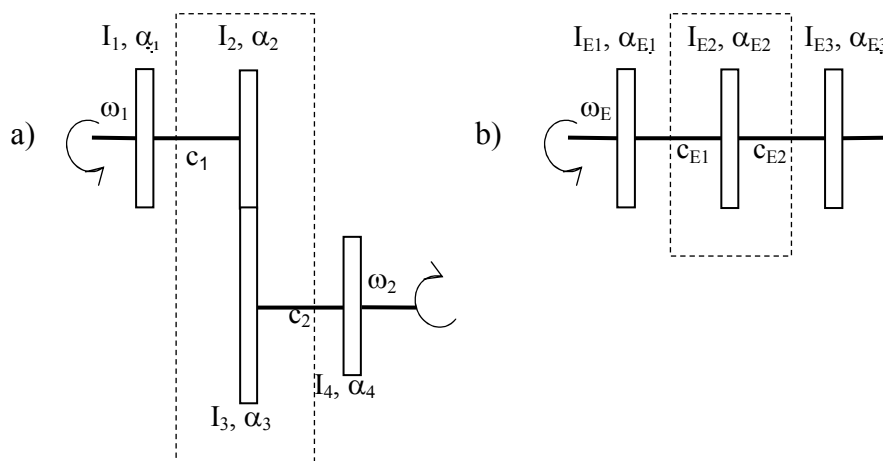
gde je:  $m_{k\dot{\alpha}}^A$  – masa rotirajućeg dela klipnjače [kg],

$m_B$  – masa klipne grupe i dela klipnjače koji vrši pravolinijski oscilatorno kretanje [kg].

Ukupan redukovani moment inercije sistema koleno–klipnjača–klip dobija se sabiranjem redukovanog momenta inercije jednog kolena i redukovanog momenta inercije sistema klipnjača–klip. Kod motora sa „V“ rasporedom cilindara treba uzeti u obzir obe klipne grupe i obe klipnjače, vodeći računa o načinu na koje su one spojene sa kolenom kolenastog vratila.

## Ekvivalentni moment inercije razgranatih sistema

Sistemi kod kojih se obrtni moment prenosi sa jednog na drugo vratilo pomoću zupčanika nazivaju se razgranati sistemi. Pri analizi torzionih oscilacija ovakvih sistema potrebno je sistem spregnutih vratila zameniti jednim ekvivalentnim vratilom. U sistemu brodske propulzije najčešće se obrtni moment sa jednog vratila prenosi na drugo pomoću jednostepenog zupčastog prenosnika. Šematski prikaz realnog i ekvivalentnog sistema prenosa snage sa jednostepenim reduktorom prikazan je na sl. 3. Realan sistem sastoji se od dva vratila, pogonskog i gonjenog, koji se obrću ugaonim brzinama  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Na ovim vratilima nalaze se po dva diska, pri čemu dva spregnuta diska predstavljaju zupčanike reduktora, a preostala dva priрубnice vratila. Deformacije zupčastog para realnog sistema sa sl. 3. se zanemaruju.



Slika 3 – Šematski prikaz realnog (a) i ekvivalentnog (b) sistema prenosa snage sa jednostepenim reduktorom

Da bi se ovakav realan sistem zamenio ekvivalentnim mora se ispuniti uslov jednakosti kinetičkih i potencijalnih energija realnog i ekvivalentnog sistema. Prema oznakama na sl. 3. kinetička i potencijalna energija realnog sistema su [5]:

$$E_p = \frac{1}{2} \left[ c_1 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 + c_2 (\alpha_4 - \alpha_3)^2 \right] \quad (28)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \left( I_1 \dot{\alpha}_1^2 + I_2 \dot{\alpha}_2^2 + I_3 \dot{\alpha}_3^2 + I_4 \dot{\alpha}_4^2 \right) \quad (29)$$

gde je:  $I_i$  – momenti inercije diskova realnog sistema ( $i = 1, 4$ ) [ $\text{kgm}^2$ ],

$\alpha_i$  – uglovi obrtanja diskova realnog sistema ( $i = 1, 4$ ) [rad],

$\dot{\alpha}_i$  – ugaone brzine diskova realnog sistema ( $i = 1, 4$ ) [rad/s],

$c_1, c_2$  – torzione krutosti pogonskog i gonjenog vratila realnog sistema [Nm/rad].

Prenosni odnos zupčastog para  $i$  može se izraziti i preko odgovarajućih uglova obrtanja ili ugaonih brzina:

$$i = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\dot{\alpha}_2}{\dot{\alpha}_3} \quad (30)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \left[ I_1 \dot{\alpha}_1^2 + \left( I_2 + \frac{I_3}{i^2} \right) \dot{\alpha}_2^2 + I_4 \dot{\alpha}_4^2 \right] \quad (31)$$

Uvrštavajući jednačinu (30) u jednačine (28) i (29) dobija se:

$$E_p = \frac{1}{2} \left[ c_1 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 + c_2 \left( \alpha_4 - \frac{\alpha_2}{i} \right)^2 \right] \quad (32)$$

Da bi se zadovoljio uslov jednakosti kinetičkih i potencijalnih energija realnog i ekvivalentnog sistema (sl. 3), moraju se ispuniti sledeći uslovi:

$$\alpha_{e1} = \alpha_1, \quad \alpha_{e2} = \alpha_2, \quad \alpha_{e3} = \alpha_4 i, \quad I_{e1} = I_1, \quad I_{e2} = I_2 + \frac{I_3}{i^2}, \quad (33)$$

$$I_{e2} = \frac{I_4}{i}, \quad c_{e1} = c_1, \quad c_{e2} = \frac{c_2}{i^2}$$

gde je:  $I_{Ei}$  – momenti inercije diskova ekvivalentnog sistema ( $i=1,3$ ) [ $\text{kgm}^2$ ],

$\alpha_{Ei}$  – uglovi obrtanja diskova ekvivalentnog sistema ( $i=1,3$ ) [rad],

$c_{E1}, c_{E2}$  – torzione krutosti odsečaka vratila ekvivalentnog sistema [Nm/rad].

Ako se izrazi (33) smene u jednačine (31) i (32) dobija se kinetička i potencijalna energija ekvivalentnog sistema sa jednim vratilom:

$$E_k = \frac{1}{2} \left[ I_{E1} \dot{\alpha}_{E1}^2 + I_{E2} \dot{\alpha}_{E2}^2 + I_{E3} \dot{\alpha}_{E3}^2 \right] \quad (34)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \left[ c_{E1} (\alpha_{E2} - \alpha_{E1})^2 + c_{E2} (\alpha_{E3} - \alpha_{E2})^2 \right] \quad (35)$$

## Analiza pobudnog momenta

Prinudne torzione oscilacije elastičnog sistema nastaju pod dejstvom periodičnog pobudnog momenta, pri čemu je frekvencija prinudnih oscilacija jednaka frekvenciji pobudnog momenta. Elementi klipnog mehanizma motora opterećeni su promenljivim momentima, koji pobuđuju kolenasto vratilo na torziono oscilovanje. Iz analize sila klipnog motornog mehanizma poznato je da se pobudni moment sastoji od momenta gasnih sila i momenta inercijalnih sila:

$$M(\alpha) = M_g(\alpha) + M_{in}(\alpha) \quad (36)$$

gde je:  $M_g$  – moment gasnih sila [Nm],

$M_{in}$  – moment inercijalnih sila [Nm],

$\alpha$  – ugao obrtanja kolenastog vratila [rad].

Sile težine se zanemaražu zbog svoje male veličine, u odnosu na gasne i inercijalne, a sile trenja se uzimaju u obzir preko spoljašnjeg prigušenja [13, 14, 15].

Promenljivost pobudnog momenta uglavnom zavisi od: taktnosti motora, broja i međusobnog rasporeda cilindara, veličine masa koje pravolinijski osciluju, broja obrtaja i opterećenja. Tok promene pobudnog momenta je složena periodična funkcija, kako po uglu obrtanja kolenastog vratila za jedan radni ciklus, tako i sa aspekta promene režima rada. Da bi se analizirao uticaj pobudnog momenta na torzione oscilacije, neophodno je izvršiti njegovu harmonijsku analizu. Harmonijskom analizom se složen periodičan signal torzionog momenta predstavlja sumom prostoperiodičnih (sinusoidalnih) signala (harmonika) različitih amplituda, početnih faza i perioda (sl. 4). Svaki od harmonika izaziva prinudne oscilacije torzionog sistema, tako da se sabiranjem otklona od ravnotežnog položaja, izazvanih elementarnim torzionim momentima, dobija ukupan otklon jednak otklonu usled složenog torzionog momenta. Kako se pri promeni radnih režima motora pobudni momenti od gasnih i inercijalnih sila menjaju na različite načine, može se vršiti i odvojena harmonijska analiza ovih momenata [7].

## 1) Pobudni moment od gasnih sila

Iz dinamike klipnog motornog mehanizma (sl. 2) poznat je izraz za moment od gasnih sila [7], [10]:

$$M_g(\alpha) = p(\alpha)r \frac{D_k^2 \pi \sin(\alpha + \beta)}{4 \cos \beta} \quad (37)$$

gde je:  $M_g$  – moment gasnih sila [Nm],

$\Delta p$  – razlika pritiska gasa u cilindru i pritiska ispod klipa u kućištu motora [Pa],

$D_k$  – prečnik klipa [m],

$r$  – dužina ramena kolena kolenastog vratila [m],

$\alpha$  – ugao obrtanja kolenastog vratila [rad],

$\beta$  – ugao otklona klipnjače u odnosu na osu cilindra [rad].

Za četvorotaktni motor period obrtnog momenta od gasnih sila je  $4\pi$ , pa se može razviti u Furijeov red [13]:

$$M_g = M_{g0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k}{2} \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k}{2} \alpha, \quad M_{g0} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} M_g d\alpha, \quad (38)$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} M_g \cos \frac{k}{2} \alpha d\alpha, \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} M_g \sin \frac{k}{2} \alpha d\alpha,$$

gde je:  $k = 1, 2, 3, \dots$  red pobude.

Amplituda  $M_k$  i fazni ugao  $\varphi_k$  harmonika  $k$ -tog reda mogu se izračunati na osnovu sledećih izraza:

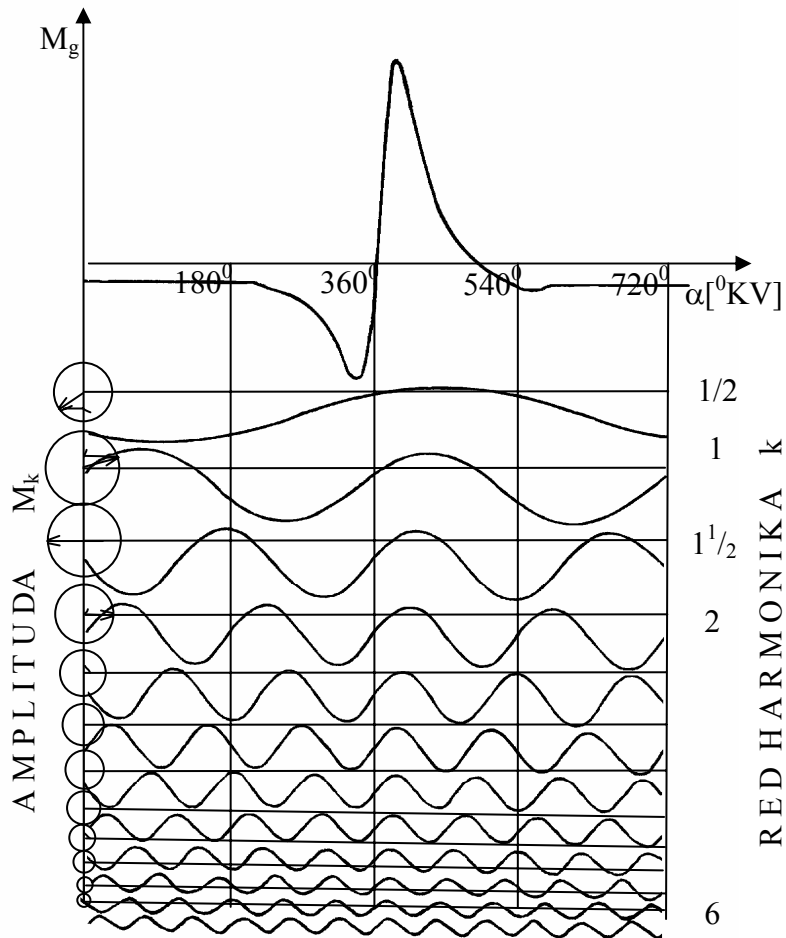
$$M_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k} \quad (39)$$

U tom slučaju se izraz (38) može pojednostaviti:

$$M_g = M_{g0} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sin\left(\frac{k}{2} \alpha + \varphi_k\right) \quad (40)$$

Srednji obrtni moment od gasnih sila  $M_{g0}$  izaziva samo početni otklon od ravnotežnog položaja, tako da se može zanemariti. Iako je ugao-ni položaj kolena kolenastog vratila određen uglom obrtanja  $\omega t$  i uglom oscilovanja  $\theta$ , obično se uzima da obrtni moment od gasnih sila zavisi samo od ugla obrtanja. Koeficijenti  $a_k$  i  $b_k$  (amplitude harmonika  $k$ -tog reda) mogu se odrediti na osnovu snimljenog toka pritiska u cilindru ili korišćenjem empirijskih formula.

Pri harmonijskoj analizi obrtnog momenta od gasnih sila obično se razmatraju harmonici do 12. ili do 18. reda. Ovako veliki broj harmonika uzima se u obzir zbog činjenice da vrednosti amplituda harmonika sporo opadaju sa porastom reda harmonika (sl. 4).



Slika 4 – Harmonijska analiza obrtnog momenta od gasnih sila jednog cilindra

Red harmonika  $k$  predstavlja broj punih oscilacija (perioda) nekog harmonika, koje se izvrše u toku jednog obrtaja kolenastog vratila motora. Odnosno, red harmonika se može definisati i kao broj pobudnih impulsa po jednom obrtaju kolenastog vratila. Potrebno je napomenuti da se red harmonika ne određuje po periodu radnog ciklusa, već po jednom

obrtaju kolenastog vratila. Kod četvorotaktnog motora se radni ciklus, pa i kriva momenta od gasnih sila, prostire na dva obrtaja kolenastog vratila, usled čega se javljaju harmonici reda 1/2, 1, 3/2, 2, ..., koji se nazivaju motorni harmonici. Kod dvotaktnih motora radni ciklus se odvija za jedan obrtaj kolenastog vratila, pa se ne javljaju harmonici čiji redovi nisu celobrojni brojevi.

Da bi se izbegli komplikovani i skupi postupci snimanja toka stvarnog pritiska u cilindrima motora, za određivanje amplituda pobude od sile gasova i inercijalnih sila često se koriste različite približne metode (Maass i Klier, Wilson, Vihert, i dr.) [2], [4]. Analizirajući ove poluempirijske metode za proračun amplituda harmonika pobude  $M_k$ , može se doći do zaključka da je metoda koju su dali Maass i Klier najprihvatljivija, jer obuhvata veliki broj relevantnih parametara motora.

## 2) Pobudni moment od inercijalnih sila

Mase pokretnih delova klipnog mehanizma motora (sl. 2) izložene su promenljivom kretanju, usled čega se javljaju inercijalne sile, koje opterećuje motorske elemente i izazivaju oscilacije. Sa aspekta uravnotežavanja motora najveći problem predstavljaju inercijalne sile pravolinijski oscilatornih masa (klipna grupa i deo klipnjače redukovana na osu osovinice klipa). Pobudni moment od inercijalnih sila pravolinijski oscilatornih masa je periodična funkcija, sa periodom  $2\pi$ , što odgovara jednom obrtaju kolenastog vratila. Ovaj moment može se razviti u Furijeov red, pri čemu se javljaju samo harmonici čiji su redovi celi brojevi. Međutim, u praksi se češće koristi sledeći približan izraz za pobudni moment od inercijalnih sila pravolinijski oscilatornih masa, dobijen bez razvijanja u Furijeov red [7]:

$$M_{in} \approx m_0 r^2 \dot{\alpha}^2 \left( \frac{\delta}{4} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{3\delta}{4} \sin 3\alpha - \frac{\delta^2}{4} \sin 4\alpha \right) \quad (41)$$

gde je:  $M_{in}$  – pobudni moment od inercijalnih sila [Nm],

$\alpha$  – ugaona brzina kolenastog vratila motora [rad/s],

$m_0$  – masa pravolinijski oscilatornih elemenata [kg],

$r$  – poluprečnik kolena kolenastog vratila [m],

$d$  – kinematska karakteristika motora ( $d = r/l$ , sl. 2).

Tok krive pobudnog momenta od inercijalnih sila pravolinijski oscilatornih masa blizak je harmonijskom, pa amplitude harmonika brzo opadaju sa porastom reda harmonika. Zbog toga je dovoljno posmatrati samo prva četiri harmonika. Iz izraza (41) se vidi da najveću amplitudu ima drugi harmonik, dok su amplitude prvog i četvrtog harmonika veoma male.

## 3) Pobudni moment kod višecilindričnog motora

Ukupan pobudni moment koji deluje na jedno koleno je, prema jednačini (36), suma pobudnog momenta od gasnih i inercijalnih sila. Ako se oba momenta razviju u red onda se ukupni moment može predstaviti pomoću reda čiji članovi imaju različite amplitude i faze. Ako se pretpostavi da su radni ciklusi u svim cilindrima višecilindričnog motora jednaki, onda su i pobudni momenti koji deluju na svim kolenima kolenastog vratila jednaki, ali fazno pomereni. Fazno pomeranje zavisi od geometrijske izvedbe motora i redosleda paljenja. Ugaoni razmak paljenja  $\alpha_p$  određuje se iz uslova da se u toku jednog radnog ciklusa izvrši paljenje u svim cilindrima. Za četvorotaktni motor razmak paljenja je:

$$\alpha_p = \frac{4 \cdot \pi}{Z} \quad (42)$$

gde je:  $\alpha_p$  – ugaoni razmak paljenja [°]  
 $Z$  – broj cilindara.

Ukupan pobudni moment, koji deluje na j-tom kolenu kolenastog vratila, može se predstaviti redom sa m harmonika [6]:

$$M(\alpha) = M_g(\alpha) + M_{in}(\alpha) = \sum_{k=1}^m M_{gk} \sin\left(\frac{k}{2}\alpha + \varphi_{gk} - \phi_{jk}\right) + \sum_{k=1}^m M_{ink} \sin\left(\frac{k}{2}\alpha - \phi_{jk}\right) \quad (43)$$

gde je:  $M_{gk}$  – amplituda k-tog harmonika pobudnog momenta od gasnih sila [Nm],

$M_{ink}$  – amplituda k-tog harmonika pobudnog momenta od inercijalnih sila [Nm],

$\varphi_{gk}$  – faza k-tog harmonika pobudnog momenta od gasnih sila [°],

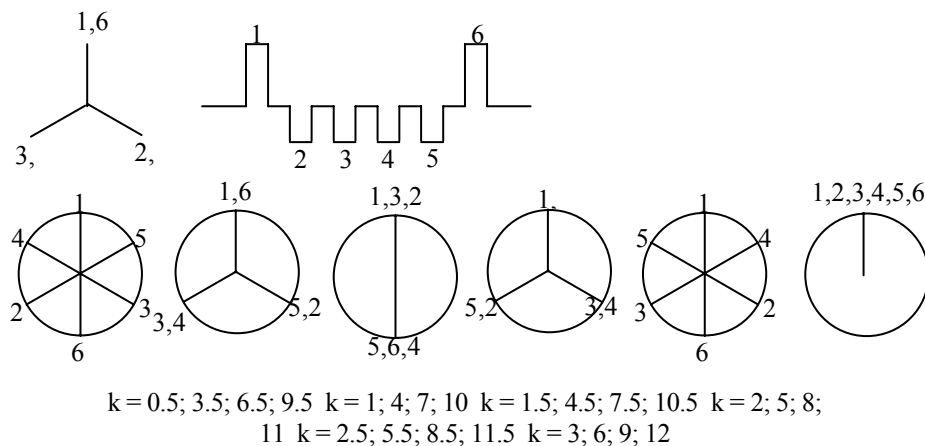
$\phi_{jk}$  – faza k-tog harmonika pobudnog momenta koji deluje na j-tom kolenu kolenastog vratila [°] ( $\phi_{jk} = 0$  za  $j = 1, k = 1$ ),

$\alpha$  – ugao obrtanja kolenastog vratila [°].

Amplituda i faza k-tog harmonika pobudnog momenta od gasnih sila određuju se na osnovu izraza (39). Faze k-tog harmonika pobudnog momenta od gasnih i inercijalnih sila su jednake. Faza k-tog harmonika pobudnog momenta koji deluje na j-tom kolenu određuje se iz faznog dijagrama.

Crtanje faznog dijagrama biće objašnjeno na četvorotaktnom šestocilindričnom linijskom motoru sa razmakom paljenja od 120° i redosledom paljenja 1-5-3-6-2-4 (sl. 5).





Slika 5 – Raspored kolena četvorotaktnog šestocilindričnog linijskog motora i fazni dijagram harmonika pobudnog momenta

Fazni dijagram za  $(Z+i)$ -ti harmonik identičan je sa faznim dijagramom za  $i$ -ti harmonik, pa je dovoljno nacrtati samo prvih  $Z$  faznih dijagrama. Fazni (vektorski) dijagram se crta tako da se faze pobude na različitim kolenima nanose respektivno u odnosu na referentno koleno. Ciklus motora se prikazuje kružnicom, pri čemu se kao referentno koleno obično uzima prvo koleno. Harmonik reda  $k = 1/2$  menja se sa frekvencijom ciklusa, pa za jedan obrtaj kolenastog vratila obavi samo pola ciklusa. Iako je peto koleno ugao-pomereno za  $120^\circ$  u odnosu na prvo, odgovarajući vektor momenta na ovom kolenu biće ugaono pomeren za  $60^\circ$  u odnosu na vektor momenta na prvom kolenu. Vektor pobudnog momenta za harmonik reda  $k = 1$  dva puta brže rotira od vektora momenta za harmonik reda  $k = 1/2$ . To je posledica činjenice da harmonik reda  $k = 1$  za jedan obrtaj kolenastog vratila napravi pun ciklus. Vektor pobudnog momenta na petom kolenu biće pomeren za ugao od  $120^\circ$  u odnosu na prvo koleno. Fazni uglovi harmonika ostalih redova dobijaju se tako što se fazni ugao harmonika reda  $k = 1$  pomnoži sa redom harmonika čiji se fazni ugao želi odrediti. Pri proračunu torzionih oscilacija važno je poznavati fazni pomak, između amplituda momenata  $k$ -tog reda na prvom i  $i$ -tom kolenu, kako bi se odredili efekti pojedinih harmonika.

Harmonici kod kojih je red jednak ili deljiv sa brojem paljenja za jedan obrtaj kolenastog vratila nazivaju se glavnim, a glavni harmonik najnižeg reda je osnovni harmonik. U slučaju šestocilindričnog četvorotaktnog motora glavni su harmonici 3, 6, 9,.. reda, dok je harmonik 3. reda osnovni. Glavni harmonici su najopasniji, jer su u fazi na svim cilindrima (vektori u faznom dijagramu su kolinearni, sl. 5).

Fazni dijagrami linijskih motora mogu se primeniti i za motore sa „V“ rasporedom cilindara, ukoliko su im identični rasporedi kolena kolenastog vratila.

## Zaključak

Zamenom realnog mehaničkog sistema za prenos snage sa kolena-stog vratila brodskog motora na propeler odgovarajućim ekvivalentnim sistemom dobija se idealizovan i uprošćen torzionooscilatorni sistem, koji se sastoji od vratila zanemarljive mase sa određenim brojem koncentrisanih masa odgovarajućih momenata inercije. Od tačnosti kojom se definiše ekvivalentan sistem, odnosno od tačnosti kojom se određene ekvivalentne dužine, krutosti i momenti inercije elemenata ekvivalentnog sistema, te tačnosti kojom je izvršena analiza prinude zavisi i tačnost izračunatih frekvencija sopstvenih oscilacija i frekvencija prinudnih oscilacija.

### Literatura

- [1] Jankov, R., Blažić, Ž.: Ispitivanje i analiza torzionih oscilacija u sistemu za prenos snage za pogon ventilatora guseničnog vozila, Mašinski fakultet, Beograd, 1999.
- [2] Filipović, I.: Torzione oscilacije motora sa unutrašnjim sagorijevanjem, Mašinski fakultet, Sarajevo, 1998.
- [3] Hafner, K. E., Maass, H.: Torsionsschwingungen in der verbrennungskraftmaschinen, Springer-Verlag, Wien, New York, 1986.
- [4] Wilson, W. K.: Practical solution of torsional vibration problems, Chapman & Hall, London, 1963.
- [5] Vuković, J., Obradović, A.: Linearne oscilacije mehaničkih sistema, Mašinski fakultet, Beograd, 2007.
- [6] Milašinović, A.: Uticaj translatornih masa krivajnog mehanizma na torzione oscilacije kolenastog vratila, Magistarski rad, Banja Luka, 2001.
- [7] Živković, M.: Motori sa unutrašnjim sagorevanjem, II deo, Mašinski fakultet, Beograd, 1983.
- [8] Rašković, D.: Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1990.
- [9] Šretner, J.: Brodski motori s unutarnjim izgaranjem, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1972.
- [10] Tomić, M., Petrović, S.: Motori sa unutrašnjim sagorevanjem, Mašinski fakultet, Beograd, 1994.
- [11] Trifković, D.: Istraživanje torzionih oscilacija u sistemu prenosa snage sa brodskog dizel motora na propeler, Magistarski rad, Mašinski fakultet, Beograd, 2004.
- [12] Jankov, R.: Simulacija i eksperimentalno ispitivanje torzionih oscilacija, Mašinski fakultet, Beograd, 2002.
- [13] Harker, R.: Generalized methods of vibration analyzis, University of Wisconsin, Madison, 1983.
- [14] Trifković, D., Petrović, Ž., Dobratić, P.: Rezultati proračuna torzionih oscilacija u sistemu brodske dizel motorne propulzije, Vojnotehnički glasnik br. 3/2008, str. 102–119, ISSN: 0042–8469, Beograd.
- [15] Trifković D., Nikolić R., Petrović Ž.: Rezultati merenja torzionih oscilacija u sistemu propulzije brodskog dizel motora, Vojnotehnički glasnik br. 6/2005, str. 86–93, ISSN: 0042–8469, Beograd.

## DETERMINATION OF THE EQUIVALENT TORSIONAL VIBRATION SYSTEM

### Summary:

*The procedure of replacing the elements of a complex torsional vibration system of ship diesel engine propulsion with simplified equivalent ones with the same dynamic characteristics is shown in this work. The given procedure comprises the methods for the determination of equivalent lengths, stiffnesses and moments of inertia based on the equality between kinetic and potential energy of real and equivalent elements of the system. Additionally, the exciting moments which excite forced torsional vibrations of the considered system are analysed.*

### Introduction

*Two basic principles for forming and solving equations of vibration are often used in engineering practice. The first one, presented here, implies simplification and idealization of a mechanical system for transmission of power from the ship engine onto the propeller. A real system is substituted with a simplified one with the same dynamic characteristics called an equivalent torsional oscillating system. The equivalent system consists of shaft segments with a constant diameter and negligible mass, but with the stiffness corresponding to the real and concentrated masses. This idealization leads to the model with finite degrees of freedom (DOF) the movement of which is described by the system of ordinary differential equations.*

### The equivalent length and stiffness

*Equivalent lengths are determined from the condition that the potential energies of the real shaft segment and the equivalent one are equal. This condition results in equal torsional stiffness of the real shaft segment and the equivalent one.*

### The equivalent moment of inertia

*In order to substitute all masses of the real system with concentrated ones or disks, the condition of equality of kinetic energies of the real system and the equivalent one must be fulfilled. For linear systems this condition leads to equality of the moment of inertia of the equivalent system and the real one. The sum of the single moments of inertia presents the moment of inertia of the elements of a complex geometric shape. The moment of inertia can be defined graphically or, in some specific cases, experimentally. For example, the moment of inertia of the propeller is often defined experimentally by the method of pendulum. A particular difficulty appears during defining the total moment of inertia of the crank of crankshaft linked to the piston by the connecting rod.*

*While analyzing torsional vibrations of these systems, it is necessary to substitute the system of coupled shafts with an equivalent shaft.*

### The analyses of the moment of excitation

*In order to analyze the influence of the moment of excitation on torsional vibration, its harmonic analysis must be performed. With this method, a complex periodical signal of torsional vibration can be represented by a sum of simple periodical signals (harmonics) with different amplitudes, phases and periods.*

#### 1) The gas forces moment of excitation

*During the analysis of the gas forces moment, the harmonics up to 12th or 18th order are usually considered. In order to avoid complex and expensive procedures of recording pressure in engine cylinders, different approximate methods for determining amplitudes of the excitation from the gas and inertial forces are often applied. The analysis of these quasi-empirical formulae can lead to the conclusion that the Maass and Klier methods are the most acceptable ones, because they include numerous engine parameters.*

#### 2) The inertial forces moment of excitation

*The principle of change of the moment of excitation of inertial forces, originated from linear oscillating masses, is similar to the harmonics principle. Therefore, the amplitudes of harmonics decrease steply as the order of harmonics increases, so it is enough to consider the first four harmonics.*

#### 3) The multicylinder moment of excitation

*The total moment of excitation on one crank is the sum of the moment of excitation of gas and inertial forces. If both moments are expanded into a series, then the total moment can be represented by a series with different amplitudes and phases of the members. If we assume that all operating cycles in the cylinders are equal, then all the moments of excitation on all cranks of the crankshaft are equal too, but phase-shifted.*

*Key words: torsional vibrations, ship diesel engine propulsion system*

Datum prijema članka: 23. 01. 2009.

Datum dostavljanja ispravki rukopisa: 16. 12. 2009

Datum konačnog prihvatanja članka za objavljivanje: 18. 12. 2009.