

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Маја Б. Росић

**ПАСИВНИ МОДЕЛ  
ПОЗИЦИОНИРАЊА У БЕЖИЧНИМ  
СЕНЗОРСКИМ МРЕЖАМА ЗАСНОВАН  
НА АДАПТИВНИМ ХИБРИДНИМ  
ХЕУРИСТИЧКИМ АЛГОРИТМИМА**

докторска дисертација

Београд, 2020

UNIVERSITY OF BELGRADE

SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Maja B. Rosić

**PASSIVE LOCALIZATION MODEL IN  
WIRELESS SENSOR NETWORKS BASED  
ON ADAPTIVE HYBRID HEURISTIC  
ALGORITHMS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2020.

## **ПОДАЦИ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ**

### ***Ментор:***

др Мирјана Симић-Пејовић, ванредни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

### ***Чланови комисије:***

др Александар Нешковић, редовни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Горан Лазовић, ванредни професор  
Универзитет у Београду – Машински факултет

др Предраг Пејовић, редовни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Милан Бјелица, редовни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Датум одбране:

## **Захвалница**

Најпре бих желела да се захвалим менторки, проф. др Мирјани Симић-Пејовић на пруженој подршци и стручним саветима током израде дисертације, чије је знање и искуство допринело пре свега квалитету и вођењу научно-истраживачког процеса.

Захваљујем се и члановима Комисије за преглед и оцену докторске дисертације, проф. др Александру Нешковићу, проф. др Горану Лазовићу, проф. др Предрагу Пејовићу и проф. др Милану Бјелици на корисним сугестијама и саветима, који су допринели квалитету ове докторске дисертације.

Коначно, захваљујем се својим родитељима, мајци Слободанки и оцу Божидару, као и свом супругу Филипу на безусловној подршци и разумевању у току трајања научно-истраживачког процеса.

## Садржај

Резиме: .....	vii
Abstract: .....	x
1. Увод .....	1
2. Пасивни модели позиционирања .....	11
2.1 Пасивни ТОА модел лоцирања .....	12
2.2 Пасивни TDOA модел позиционирања .....	15
3. Естимација пасивне локације објекта.....	18
3.1 Метода максималне веродостојности .....	18
3.2 Метода максималне веродостојности за ТОА модел .....	20
3.3 Метода максималне веродостојности за TDOA модел .....	23
4. Линеаризовани модели лоцирања.....	27
4.1 Линеаризација пасивног ТОА модела .....	27
4.1.1 Линеарна метода тежинских најмањих квадрата .....	30
4.1.2 Линеарна метода тежинских најмањих квадрата са ограничењима..	31
4.2 Линеаризација пасивног TDOA модела.....	33
4.2.1 Линеарна метода тежинских најмањих квадрата .....	35
4.2.2 Линеарна метода тежинских најмањих квадрата са ограничењима..	36
5. Семидефинитно програмирање.....	38
5.1 Семидефинитно програмирање за ТОА модел .....	38
5.2 Семидефинитно програмирање за TDOA модел .....	44
6. Крамер-Раова граница прецизности .....	50
6.1 Крамер-Раова неједнакост за ТОА модел лоцирања .....	50
6.2 Крамер-Раова неједнакост за TDOA модел лоцирања .....	55

---

7.	Методе оптимизације за решавање проблема лоцирања.....	60
7.1	Хеуристички алгоритми оптимизације.....	61
7.1.1	Метахеуристички алгоритми.....	62
7.1.1.1	Алгоритам диференцијалне еволуције .....	64
7.1.1.2	Алгоритам оптимизације ројем честица.....	69
7.1.1.3	Алгоритам свитаца.....	72
7.2	Детерминистичке методе оптимизације.....	75
7.2.1	Нелдер – Мид симплекс метод.....	76
8.	Модификације хеуристичких алгоритама.....	80
8.1	Модификације алгоритма диференцијалне еволуције .....	80
8.1.1	Адаптивни одабир управљачких параметара .....	83
8.1.2	Адаптивно подешавање фактора скалирања $F$ .....	84
8.1.3	Адаптивно подешавање фактора укрштања $CR$ .....	86
8.1.4	Мутациони оператор DE/current-to-pbest/1 .....	87
8.1.5	Адаптивни мутациони оператор .....	88
8.2	Модификација алгоритма оптимизације роја честица .....	89
8.3	Модификација алгоритма свитаца .....	93
9.	Хибридизација алгоритама.....	96
9.1	Хибридизација алгоритама диференцијалне еволуције и Нелдер – Мид методе .....	96
9.2	Хибридизација алгоритама свитаца и диференцијалне еволуције .....	99
9.3	Хибридизација алгоритма оптимизације ројем честица и диференцијалне еволуције .....	103
10.	Нумерички резултати .....	107
10.1	Анализа побољшања хеуристичких алгоритама.....	107

---

10.1.1	Вилкоксонов тест ранга .....	108
10.1.2	Фридманов тест .....	110
10.1.3	Анализа предложених модификација HADENM алгоритма.....	111
10.1.4	Анализа предложених модификација AHFADE алгоритма .....	116
10.1.5	Анализа предложених модификација AHPSODE алгоритма.....	120
10.2	Анализа перформанси алгоритама .....	125
10.2.1	Анализа перформанси HADENM алгоритма.....	125
10.2.2	Анализа перформанси AHFADE алгоритма .....	130
10.2.3	Анализа перформанси AHPSODE алгоритма.....	135
10.3	Комплексност алгоритама .....	141
10.3.1	Комплексност HADENM алгоритма.....	142
10.3.2	Комплексност AHFADE алгоритма.....	143
10.3.3	Комплексност AHPSODE алгоритма.....	144
11.	Закључак.....	146
	Литература .....	152

## ПАСИВНИ МОДЕЛ ПОЗИЦИОНИРАЊА У БЕЖИЧНИМ СЕНЗОРСКИМ МРЕЖАМА ЗАСНОВАН НА АДАПТИВНИМ ХИБРИДНИМ ХЕУРИСТИЧКИМ АЛГОРИТМИМА

### Резиме:

Предмет истраживања ове докторске дисертације је проблем пасивног лоцирања заснован на мерењу времена пропагације сигнала (*Time of Arrival*, TOA), или временске разлике пропагације сигнала (*Time Difference of Arrival*, TDOA) ради одређивања непознате локације неког објекта. За постављене моделе лоцирања формирана је функција максималне веродостојности (*Maximum Likelihood*, ML) са Гаусовом случајном расподелом за грешку мерења. Разматрани естимациони модел описан је нелинеарном, неконвексном функцијом циља, односно мултимодалном функцијом. При томе, за формирану функцију циља, глобално оптимално решење не може се нумерички одредити класичним методама оптимизације.

Најчешће коришћени алгоритми прилагођени за решавање проблема лоцирања су: метода тежински најмањи квадрати (*Weighted Least Squares*, WLS), метода тежински најмањи квадрати са ограничењима (*Constrained Weighted Least Squares*, CWLS), као и семидефинитно програмирање (*Semidefinite Programming*, SDP). Посебно треба указати да је домен практичне примене ових алгоритама ограничен с обзиром на ниво шума у радио каналу.

Сходно овоме, постоји стална потреба за побољшањем постојећих и развојем нових хеуристичких оптимизационих алгоритама, познатих под називом метахеуристички алгоритми, у циљу решавања комплексних оптимизационих проблема, повишене тачност и ефикасности у изналажењу глобалног решења.



У дисертацији су детаљно разматрани метахеуристички алгоритми инспирисани биолошким системима у природи, као што су: оптимизација ројем честица (*Particle Swarm Optimization*, PSO), алгоритам свитаца (*Firefly Algorithm*, FA) и алгоритам диференцијалне еволуције (*Differential Evolution*, DE). Имплементацијом предложених алгоритама за формирану мултимодалну функцију циља, уочени су посебно проблеми у процесу претраге простора могућих решења, који се односе на неуравнотеженост глобалне и локалне претраге. Сходно овоме, ради отклањања наведених недостатака, предложени алгоритми у овој дисертацији модификовани су кроз: адаптивно подешавање параметара ради контроле извршавања оптимизационог процеса, развој нових оператора мутације, као и хибридизацију адекватних алгоритама. Посебно треба истаћи да је хибридизацији поменутих алгоритама претходила детаљна нумеричка симулација предложених алгоритама у циљу изналажењу глобалних решења кроз одговарајућу статистичку анализу. На тај начин, елиминисани су недостаци једних алгоритама, а укључене су предности других, чиме је област имплементације развијених хибридних алгоритама значајно проширена на решавање комплексних мултимодалних оптимизационих проблема. Осим тога, у оквиру ове дисертације остварена је хибридизација детерминистичке Нелдер – Мид (*Nelder – Mead*, NM) методе, која има изражену способност локалне претраге и хеуристичке робусне DE методе за глобалну претрагу у простору могућих решења.

У дисертацији је посебна пажња посвећена анализи утицаја адитивног шума на перформансе разматраних оптимизационих алгоритама, у односу на средњу квадратну грешку (*Mean Squared Error*, MSE), нумеричку сложеност и време извршавања у процесу изналажења глобалног оптималног решења. У том смислу, за постављене пасивне моделе лоцирања изведена је Крамер – Раова (*Cramér – Rao*, CRB) граница, односно најмања варијанса, ради статистичке евалуације и поређења перформанси имплементираних оптимизационих алгоритама. Такође, извршена је анализа перформанси разматраних оптимизационих алгоритама с обзиром на промене у просторном распореду између предајника и пријемника у мрежи.

Резултати Монте-Карло нумеричких симулација, за све нивое шума при пропагацији сигнала, јасно указују на предност коришћења развијених адаптивних

хибридних хеуристичких алгоритама, у поређењу са постојећим конвенционалним алгоритмима. Применом непараметарског статистичког Вилкоксеновог теста ранга (*Wilcoxon signed-rank*) и Фридмановог теста (*Friedman*) извршено је поређење оптимизационих перформанси разматраних алгоритама. На основу добијених резултата нумеричке симулације одређивања глобалног оптимума за разматране проблеме локализације произилази да модификовани хеуристички хибридни алгоритми остварују боље перформансе од разматраних оптимизационих алгоритама. Такође, у оквиру ове дисертације извршена је анализа комплексности и времена извршавања модификованих хеуристичких алгоритама. На основу спроведених нумеричких симулација и статистичке анализе произилази да развијене адаптивне хибридне хеуристичке алгоритме одликује повишена тачност, робусност и ефикасност у односу на разматране алгоритме при изналажењу непознате локације објекта за постављени пасивни проблем лоцирања.

Представљени научни доприноси верификовани су кроз већи број радова са научних конференција, као и кроз објављене радове у реномираним научним часописима.

**Кључне речи:** Технике позиционирања, пасивне технике лоцирања, естимационе методе, Крамер-Раова граница, хеуристичке оптимизационе методе, хибридни алгоритми, глобална оптимизација

**Научна област:** Електротехника

**Ужа научна област:** Телекомуникације

**УДК број:** 621.3

## **PASSIVE LOCALIZATION MODEL IN WIRELESS SENSOR NETWORKS BASED ON ADAPTIVE HYBRID HEURISTIC ALGORITHMS**

### **Abstract:**

The research in this dissertation is focused on the problem of passive target localization based on the noisy time of arrival (TOA) or time Difference of Arrival (TDOA) measurements, with the aim to accurately estimate the unknown passive target location. The maximum likelihood (ML) estimation problem is formulated for the considered localization problem, with measurement errors modelled as Gaussian distributed random variables. However, the ML objective function of the considered estimation problem is nonlinear and multimodal function, and in this case, the global optimal solution cannot be determined numerically by classical optimization methods.

In the literature, the most commonly employed methods for the estimation of the unknown target location are: Weighted Least Squares (WLS), Constrained Weighted Least Squares (CWLS) and Semidefinite Programming (SDP) methods. However, it should be noted that employing these algorithms in practical applications is limited, especially when the measurement noise is high. Thus, there is a constant requirement for the development of new and improvement of existing metaheuristic optimization algorithms, which have high efficiency and improved accuracy in solving complex optimization problems.

Therefore, in this dissertation the research is focused on metaheuristic algorithms inspired by biological systems including: Partical Swarm Optimization (PSO), Firefly

Algorithm (FA) and Differential Evolution (DE) algorithm. However, in solving the formulated ML objective function the considered algorithms show problems in the process of searching for global optimal solution, such as the imbalance between global exploration and local exploitation. Therefore, to overcome these difficulties in this thesis the considered algorithms have been modified with an effective parameter adaptation technique, in order to control the optimization process, development of new mutation operators and hybridization between algorithms. The hybridization of the considered algorithms has been preceded by statistical analysis of the numerical simulation results of the proposed algorithms in process of finding the global optimum. Therefore, the proposed modifications successfully combine the advantages of each algorithm and avoid their disadvantages, thus significantly expanding the scale of implementation of the proposed algorithms for complex optimization problems. Furthermore, hybridization between deterministic direct search Nelder-Mead method, with efficient local search abilities, and the metaheuristic DE algorithm, which has robust global search capability, has been performed in this dissertation.

The research in this dissertation considers the influence of additive measurement noise on the optimization algorithms performance, regarding the Mean Squared Error (MSE), numerical complexity and execution time in the optimization process. Therefore, in order to evaluate the localization performance of the considered algorithms the Cramer-Rao lower bound (CRB) has been derived. In addition, a performance analysis of the optimization algorithms has been performed with respect to changes in network topology.

The obtained Monte-Carlo numerical simulation results show that the proposed adaptive hybrid metaheuristic algorithms have high accuracy and robustness in comparison to the conventional algorithms. Furthermore, the optimization performance between considered algorithms has been compared using non-parametric statistical Wilcoxon signed-rank test and Friedman test. Analyzing the obtained numerical simulations results of the considered localization problems, it can be concluded that modified metaheuristic hybrid algorithms achieve better performance compared to the considered optimization algorithms. In addition, the complexity analysis and execution time of modified heuristic algorithms has been performed in this dissertation. Based on the conducted numerical simulations and statistical analysis, it follows that the adaptive

hybrid heuristic algorithms show improved accuracy, robustness and efficiency compared to the considered algorithms in finding the unknown location of the object for the formulated passive location problem.

The main contributions presented in this thesis have been verified through a number of papers published in scientific conferences and renowned scientific journals.

**Keywords:** Localization techniques, passive localization techniques, estimation methods, Cramer-Rao bound, heuristic optimization methods, hybrid algorithms, global optimization

**Scientific area:** Electrical Engineering

**Scientific subarea:** Telecommunications

**UDK code:** 621.3

## Списак слика

<i>Слика 2.1. Пасивни TOA модел позиционирања.</i>	12
<i>Слика 2.2. Пасивни TDOA модел позиционирања.</i>	15
<i>Слика 3.1. График функције циља <math>J_{ML,TOA}(\mathbf{x})</math> за пасивни TOA модел.</i>	22
<i>Слика 3.2. Контурни график функције циља <math>J_{ML,TOA}(\mathbf{x})</math> са векторским пољем градијента <math>\nabla J_{ML,TOA}(\mathbf{x})</math>.</i>	23
<i>Слика 3.3. График функције циља <math>J_{ML,TDOA}(\mathbf{x})</math> за пасивни TDOA модел.</i>	25
<i>Слика 3.4. Контурни график функције циља <math>J_{ML,TDOA}(\mathbf{x})</math> са векторским пољем градијента <math>\nabla J_{ML,TDOA}(\mathbf{x})</math>.</i>	26
<i>Слика 7.1. Операција мутације за дводимензионални оптимизациони проблем.</i>	66
<i>Слика 8.1. Промена <math>F_i^{(G)}</math> током оптимизационог процеса.</i>	85
<i>Слика 8.2. Промена <math>CR^{(G)}</math> током оптимизационог процеса.</i>	87
<i>Слика 8.3. Коефицијенти убрзања <math>c_1</math> и <math>c_2</math> с порастом генерација.</i>	92
<i>Слика 8.4. Адаптивно подешавање коефицијената <math>c_1^{(G)}</math> и <math>c_2^{(G)}</math> с порастом генерација.</i>	92
<i>Слика 8.5. Упоредни приказ функција привлачности <math>\beta(r_{i,j})</math> и <math>\tilde{\beta}(r_{i,j})</math> током оптимизационог процеса.</i>	94
<i>Слика 9.1. Промена позиција свитаца током процеса оптимизације.</i>	102
<i>Слика 10.1. Зависност RMSE од <math>p</math> за позицију објекта <math>\mathbf{x} = [5 \ 25]^T</math> m.</i>	126
<i>Слика 10.2. Зависност RMSE од <math>p</math> за позицију објекта <math>\mathbf{x} = [80 \ 50]^T</math> m.</i>	127
<i>Слика 10.3. Зависност RMSE од <math>p</math> за насумично одабрану позицију објекта.</i>	128

<b>Слика 10.4.</b> CDF за разматране алгоритме. ....	129
<b>Слика 10.5.</b> Зависност RMSE од броја пријемника $N$ за $\sigma_{ni}^2 = 1\text{m}^2$ . ....	130
<b>Слика 10.6.</b> Зависност RMSE од $p$ за позицију објекта $\mathbf{x} = [20\ 30]^T$ m. ....	131
<b>Слика 10.7.</b> Зависност RMSE од $p$ за позицију пасивног објекта $\mathbf{x} = [120\ 100]^T$ m. .....	132
<b>Слика 10.8.</b> Зависност RMSE од $p$ за насумично одабрану позицију објекта. ..	133
<b>Слика 10.9.</b> CDF за разматране алгоритме. ....	134
<b>Слика 10.10.</b> Зависност RMSE од броја пријемника $N$ за $\sigma_{ni}^2 = 1\text{m}^2$ . ....	135
<b>Слика 10.11.</b> Зависност RMSE од $p$ за позицију пасивног објекта $\mathbf{x} = [20\ 30]^T$ m. .....	136
<b>Слика 10.12.</b> Зависност RMSE од $p$ за позицију пасивног објекта $\mathbf{x} = [100\ 80]^T$ m. .....	137
<b>Слика 10.13.</b> Зависност RMSE од $p$ за насумично одабрану позицију објекта. ....	138
<b>Слика 10.14.</b> CDF за разматране алгоритме. ....	139
<b>Слика 10.15.</b> Зависност RMSE од броја пријемника $N_i$ за $\sigma_{ni}^2 = 1\text{m}^2$ . ....	140

## Списак табела

<i>Табела 10.1. Резултати Вилкоксеновог теста за HADENM, HADENM<sub>F=0.5</sub> и HADENM<sub>F=0.9</sub> за дати праг значајности <math>\alpha = 0.05</math>.....</i>	112
<i>Табела 10.2. Резултати Вилкоксеновог теста за HADENM, HADENM<sub>CR=0.1</sub>, HADENM<sub>CR=0.5</sub> и HADENM<sub>CR=0.9</sub> за дати праг значајности <math>\alpha = 0.05</math>.....</i>	113
<i>Табела 10.3. Резултати Вилкоксеновог теста за HADENM, HADENM-1 и HADENM-2 алгоритме за дати праг значајности <math>\alpha = 0.05</math>.....</i>	114
<i>Табела 10.4. Резултати Вилкоксеновог теста за HADENM без NM локалне претраге и предложеног HADENM алгоритма за праг значајности <math>\alpha = 0.05</math>..</i>	115
<i>Табела 10.5. Резултати примене Фридмановог теста за разматране алгоритме при различитим вредностима <math>10\log(\sigma_{ni}^2)</math> за дати праг значајности <math>\alpha = 0.05</math>..</i>	116
<i>Табела 10.6. Резултати Вилкоксеновог теста за AHFADE, AHFADE<sub>F=0.5</sub> и AHFADE<sub>F=0.9</sub> за дати праг значајности <math>\alpha = 0.05</math>.....</i>	117
<i>Табела 10.7. Резултати Вилкоксеновог теста за AHFADE, AHFADE<sub>CR=0.1</sub>, AHFADE<sub>CR=0.5</sub> и AHFADE<sub>CR=0.9</sub> за дати праг значајности <math>\alpha = 0.05</math>.....</i>	118
<i>Табела 10.8. Резултати Вилкоксеновог теста поређења AHFADE алгоритма са <math>\tilde{\beta}(r_{i,j})</math> и AHFADE алгоритма са <math>\beta(r_{i,j})</math>, за дати праг значајности <math>\alpha = 0.05</math>..</i>	119
<i>Табела 10.9. Резултати примене Фридмановог теста за разматране алгоритме при различитим вредностима <math>10\log(\sigma_{ni}^2)</math> за дати праг значајности <math>\alpha = 0.05</math>..</i>	120
<i>Табела 10.10. Резултати Вилкоксеновог теста за AHPSODE, AHPSODE<sub>F=0.5</sub> и AHPSODE<sub>F=0.9</sub> за дати праг значајности <math>\alpha = 0.05</math>.....</i>	121
<i>Табела 10.11. Резултати Вилкоксеновог теста за AHPSODE, AHPSODE<sub>CR=0.1</sub>, AHPSODE<sub>CR=0.5</sub> и AHPSODE<sub>CR=0.9</sub> за дати праг значајности <math>\alpha = 0.05</math>.....</i>	122
<i>Табела 10.12. Резултати поређења оптимизационих перформанси применом Вилкоксеновог теста између AHPSODE алгоритма и AHPSODE алгоритма са</i>	



---

фиксним вредностима коефицијената $c_1$ и $c_2$ , за дати праг значајности $\alpha = 0.05$ . .....	123
<b>Табела 10.13.</b> Резултати компаративне анализе оптимизационих перформанси применом Фридмановог теста за разматране алгоритме при различитим вредностима $10\log(\sigma_{ni}^2)$ за дати праг значајности $\alpha = 0.05$ . ....	124
<b>Табела 10.14.</b> Упоредни приказ времена извршавања разматраних алгоритама. .....	142
<b>Табела 10.15.</b> Упоредни приказ времена извршавања разматраних алгоритама. .....	144
<b>Табела 10.16.</b> Упоредни приказ времена извршавања разматраних алгоритама. .....	145

## **Списак скраћеница**

ABC	Artificial Bee Colony
ACO	Ant Colony Optimization
AHFADE	Adaptive Hybrid Firefly Differential Evolution
AHPSODE Algorithm	Adaptive Hybrid Particle Swarm Optimization Differential Evolution
AOA	Angle of arrival
BCO	Bee Colony Optimization
CoDE	Composite Differential Evolution
CRB	Cramér – Rao
CS	Cuckoo Search
CWLS	Constrained Weighted Least Squares
DE	Differential Evolution
EA	Evolutionary Algorithm
EP	Evolutionary Programming
FA	Firefly Algorithm
FP	Fletcher-Powell
GA	Genetic Algorithm
GP	Genetic Programming
GPS	Global Positioning System
HADENM	Hybrid Adaptive Differential Evolution Nelder Mead
HJ	Hooke-Jeeves
JADE	Adaptive Differential Evolution with Optional External Archive

LE	Localization Error
LLS	Linear Least Squares
LMI	Linear Matrix Inequalities
LOS	Line Of Sight
LS	Least Squares
ML	Maximum Likelihood
MSE	Mean Squared Error
NDAC	Nonlinear Dynamic Acceleration Coefficients
NM	Nelder – Mead
PSO	Partical Swarm Optimization
RFID	Radio-Frequency Identification
RMSE	Root Mean Squared Error
RSS	Received Signal Strength
SaDE	Self-adaptive Differential Evolution
SDP	Semidefinite Programming
SHADE	Success-History Based Parameter Adaptation for Differential Evolution
SS	Scatter Search
TDOA	Time Difference of Arrival
TS	Tabu Search
TVAC	Time-Varying Acceleration Coefficients
VNS	Variable Neighbourhood Search
WLS	Weighted Least Squares
WSN	Wireless Sensor Networks
TOA	Time of Arrival

## 1. Увод

Непрестана тежња за тачним и ефикасним поступком одређивања локације неког објекта, у сваком тренутку и месту на Земљи, све више заокупља пажњу истраживача и од примарног је значаја за: цивилне, инжењерске, биомедицинске и војне апликације, о чему сведочи изузетно велики број публикованих научно-стручних радова [1-5]. Интензиван развој информационо-комуникационих технологија, као и веома строги захтеви који се постављају од стране крајњих корисника у погледу перформанси лоцирања, иницирали су модификацију постојећих и развој нових естимационих и оптимизационих алгоритама, што је омогућило њихову успешну имплементацију на решавање комплексних проблема лоцирања. Имајући у виду веома строге захтеве за поузданим одређивањем непознате локације неког објекта и широку примену у различитим областима, проблеми лоцирања су током претходног периода разматрани са теоријског аспекта као и у циљу практичне примене.

Глобални систем позиционирања (*Global Positioning System, GPS*) представља један од најраспрострањенијих навигационих система позиционирања, и састоји се од 24 сателита, по 4 сателита у 6 кружних орбита Земље, који непрекидно емитују навигационе радио сигнале [6, 7]. У општем случају, на основу пријема најмање три навигациона радио сигнала са сателита, радио пријемници могу да одреде своју тачну позицију на површини Земље, у реалном времену и у свим временским условима. Висина и брзина сателита изабрани су тако да сваки објекат, опремљен GPS пријемником на површини Земље, прима навигациони радио сигнал са најмање 4 сателита, што је довољан број да се на основу циркуларне латерације прецизно одреди позиција, у условима директне оптичке видљивости (*Line Of Sight, LOS*) између предајника на сателиту и GPS пријемника на површини Земље. Према

томе, GPS систем првенствено се примењује у отвореном (*outdoor*) простору за: навигацију на Земљи, ваздуху, мору, метеоролошка и медицинска истраживања, надгледање, израду географских карти итд. [8-11].

Лоцирање објеката применом GPS-а значајно је ограничено у окружењима као што су: затворени (*indoor*) простори, урбане средине с високим зградама, тунели, средине испод површине воде, шуме и слично [12-14]. Према томе, ради превазилажења ограничења у примени GPS-а и побољшања перформанси лоцирања, развијен је изузетно велики број метода и техника лоцирања, кроз: модификацију постојећих и развоју нових естимационих и оптимизационих алгоритама, као и практичну имплементацију адекватних техника и технологија [15-17]. Сходно томе, за поуздано и прецизно одређивање непознате локације објекта, намеће се имплементација метода пасивног лоцирања, које могу бити засноване на мерењу различитих параметара, што зависи од доступних техника и технологија лоцирања [18-20].

У општем случају, технике лоцирања могу се класификовати у две основне групе: активне и пасивне технике лоцирања [18]. Код активних техника, објекат као предајник емитује радио сигнал, према просторно распоређеним пријемницима на познатим позицијама. На тај начин, одређује се непозната локација објекта, који у процесу локализације активно учествује. За разлику од активних техника лоцирања, код пасивних техника емитовани радио сигнал од предајника рефлектује се од објекта према просторно распоређеним пријемницима на познатим локацијама. Према томе, на основу измерених параметара одређује се непозната локација објекта, који има пасивну улогу у процесу локализације [21]. У складу са тим, пасивне технике лоцирања одликује једноставна имплементација, мање димензије уређаја, нижа потрошња енергије, као и мањи трошкови одржавања у односу на активне технике. Дакле, пасивне технике лоцирања од посебног су значаја за: бежичне сензорске мреже, системе праћења, радаре, сонаре, итд. [22-25].

У затвореном (*indoor*) окружењу, технике активног и пасивног лоцирања имплементирани су на радио-фреквентни идентификациони (*Radio-Frequency Identification, RFID*) систем, према стандарду ISO/IEC 18000 [26]. Овај систем ради на фреквенцијама од 860 MHz до 960 MHz индустријског, научног и медицинског

опсега, тако да се примењује за лоцирање и праћење различитих објеката. Функционалност RFID система обезбеђују таг и одговарајући читач, при чему таг садржи антену и микрочип са одговарајућим подацима и представља интегрални део објекта. Генерално, у зависности од извора напајања разликују се активни и пасивни тагови. Активни тагови поседују извор напајања и на основу тога емитују одговарајући сигнал, који је опсега и до неколико стотина метара. За разлику од активних RFID тагова, пасивни RFID тагови не поседују напајање, и у процесу позиционирања рефлектују емитовани радио сигнал од читача. Дакле, читач обавља функцију радио предајника и пријемника у процесу позиционирања објекта тако да поседује могућност читања података с RFID тага. При томе, пасивни таг одликује једноставна имплементација, мање димензије и домет до неколико метара [27].

Естимација непознате позиције објекта може се извршити на основу различитих параметара радио сигнала: мерењем угла наиласка сигнала (*Angle of arrival, AOA*) и/или мерењем растојања [28, 29]. За разлику од директног мерења угла наиласка сигнала, растојање између скупа предајника и пријемника одређује се индиректно и то на основу мерења нивоа сигнала на пријему (*Received Signal Strength, RSS*), времена пропагације сигнала (*Time Of Arrival, TOA*) и временске разлике пропагације сигнала (*Time Difference Of Arrival, TDOA*) [30-32]. При мерењу TOA параметра, време наиласка сигнала се процењује на сваком од пријемника, при чему је потребно остварити временску синхронизацију између пријемника и предајника. За разлику од тога, при мерењу TDOA параметра процењује се временска разлика наиласка сигнала, тако да се не захтева синхронизација између предајника и пријемника [33-35].

У оквиру ове дисертације разматра се пасивни модел позиционирања заснован на мерењу времена пропагације сигнала или временске разлике пропагације сигнала. Услед постојања шума у радио каналу, намеће се потреба за моделовањем сигнала одређеном функцијом густине вероватноће. При моделовању сигнала најчешће је заступљен Гаусов шум, који представља адитивну величину у односу на измерени сигнал, у условима директне оптичке видљивости, чиме се не губи на општости постављеног модела лоцирања [36, 37].

Конфигурација пасивног модела лоцирања, заснованог на мерењу ТОА параметра, састоји се од референтног предајника и просторно распоређених пријемника који су међусобно временски синхронизовани. У том смислу, ради процене непознате локације објекта, сигнал који долази од предајника рефлектује се од објекта ка распоређеним пријемницима на познатим позицијама [34]. За разлику од пасивног ТОА модела, конфигурација модела заснованог на мерењу TDOA параметара обухвата више независних предајника просторно распоређених у односу на референтни пријемник, при чему није неопходна временска синхронизација између референтног пријемника и распоређених предајника. У овом случају, на референтни пријемник пристижу два сигнала, рефлектовани сигнал од предајника преко пасивног објекта и директни сигнал од сваког предајника [38].

Ради процене непознате локације објекта, за постављене проблеме лоцирања неопходно је применити одговарајућу естимациону методу, на основу које се формулише функција циља. У општем случају, проблем естимације непознате локације објекта може се представити као оптимизациони проблем, који се своди на минимизацију грешке мерења настале при пропагацији сигнала. Најчешће разматране методе за естимацију непознате локације објекта су метода најмањих квадрата и метода максималне веродостојности. Посебно место заузимају линеарни естиматори, које одликује једноставност у погледу имплементације и ефикасност у решавању постављеног проблема лоцирања, као што су: метода најмањих квадрата (*Linear Least Squares*, LLS) и линеарна метода тежинских најмањих квадрата (*Weighted Least Squares*, WLS) [39, 40]. Ради повећања тачности одређивања непознате локације објекта, линеарни естимациони проблем са тежинским коефицијентима WLS проширује се ограничењем у облику једнакости, тако да се проблем своди на естимациони проблем тежинских најмањих квадрата са ограничењима у облику једнакости (*Constrained Weighted Least Squares*, CWLS) [41]. Постављени оптимизациони проблем може се решити применом Лангранжеових множитеља, тако што се оптимизациони проблем са ограничењима трансформише у проблем без ограничења [42, 43]. Према томе, класични естиматор тежинских најмањих квадрата са ограничењима у облику једнакости примењен је

на проблем процене непознате локације објекта, заснован на мерењу TDOA параметара, у раду [44]. У наведеном раду, за постављени модел лоцирања, разматран је утицај грешке мерења на тачност одређивања непознате локације објекта, као и утицај временске несинхронизације између распоређених пријемника. Разматрани оптимизациони проблем са ограничењима у облику једнакости трансформисан је у оптимизациони проблем без ограничења применом Лангранжеових множитеља. Резултати нумеричке Монте-Карло симулације указали су да услед несинхронизације између пријемника настаје грешка при мерењу, што за последицу има непрецизност лоцирања објекта.

У циљу постизања захтеване тачност естимације, метода максималне веродостојности се најчешће примењује за процену непознате локације објекта [45, 46]. Постављена функција циља методе максималне веродостојности је нелинеарна и неконвексна, односно мултимодална функција, тако да конвенционалне оптимизационе методе нису погодне за решавање постављеног проблема [47]. За решавање постављеног проблема, може се применити метода семидефинитног програмирања (*Semidefinite Programming*, SDP), која се заснива на трансформацији неконвексног оптимизационог проблема у конвексни проблем [48, 49]. Предност SDP методе у односу на конвенционалне оптимизационе методе је што не захтева почетну апроксимацију оптималне тачке за успостављање итеративног поступка [50]. За решавање оптимизационог проблема формулисаног на основу SDP методе, у оквиру програмског окружења MATLAB примењују се пакет CVX [51, 52]. Према томе, у циљу побољшања перформанси SDP методе, при процени непознате локације објекта, за пасивни модел лоцирања заснован на мерењу TOA параметра, аутори су имплементирали SDP методу са методом бисекције, у раду [53]. Резултати нумеричке Монте-Карло симулације указали су да предложени побољшани алгоритам у погледу перформанси превазилази SDP методу, посматрано у односу на Крамер – Раову границу. Такође, SDP метода успешно је имплементирана и на проблем лоцирања у оквиру бежичне сензорске мреже (*Wireless Sensor Networks*, WSN) [54]. На основу резултата нумеричке симулације произилази да предложена метода остварује високу прецизност лоцирања, с обзиром да је одступање њене варијансе од Крамер – Раове границе минимално.



Међутим, у условима присуства високог шума у радио каналу, тачност SDP методе при одређивању глобалног оптималног решења значајно је мања за постављену мрежу [55, 56].

На основу напред изложеног, произилази да је за решавање комплексних оптимизационих проблема неопходно применити метахеуристичке алгоритме засноване на стохастичким хеуристичким оптимизационим алгоритмима, које одликује поузданост у погледу одређивања глобалног оптималног решења [57-61]. При томе, разматрани метахеуристички алгоритми имају одређене предности и недостатке у процесу изналажења глобалног оптималног решења, што представља подстицај и снажну мотивацију за модификацију постојећих и развој нових алгоритама оптимизације [62-64]. У том контексту, у оквиру ове дисертације, посебна пажња посвећена је модификацији постојећих метахеуристичких алгоритама у циљу решавања комплексног проблема лоцирања.

Најшире примењени популациони метахеуристички алгоритми базирани су на процесима инспирисаним природом, међу којима се посебно истичу еволутивни алгоритми (*Evolutionary Algorithm*, EA) [65-69]. У циљу добијања глобалног оптималног решења оптимизациони процес еволутивних алгоритама заснива се на примени механизма који су инспирисани генетичким операторима у природи, као што су селекција, укрштање и мутација. У оквиру групе еволутивних алгоритмима посебно се издвајају генетски алгоритам (*Genetic Algorithm*, GA), као и алгоритам диференцијалне еволуције (*Differential Evolution*, DE) [70, 71]. С друге стране, алгоритми интелигенције ројева припадају новијој групи популационих метахеуристичких алгоритама који су инспирисани биолошким системима као што су јата птица и колоније инсеката. Међу алгоритмима из ове групе посебно се издвајају алгоритам оптимизације ројем честица (*Particle Swarm Optimization*, PSO), алгоритми инспирисани пчелињим колонијама (*Artificial Bee Colony*, ABC), оптимизација мрављим колонијама (*Ant Colony Optimization*, ACO), алгоритам свитаца (*Firefly algorithm*, FA), претрага кукавице (*Cuckoo Search*, CS), као и многи други [72-76].

Оптимизациони процес метахеуристичких алгоритама може се поделити у две фазе и то: фаза глобалне претраге и фаза локалне претраге [77, 78]. Фаза глобалне

претраге односи се на истраживање простора допустивих решења у циљу изналажења најбољег глобалног оптималног решења. С друге стране, фаза локалне претраге односи се на истраживање региона локалног минимума, ради проналажења бољег решења. Анализом постојећих метахеуристичких оптимизационих алгоритама у одређеним случајевима уочена је неусклађеност равнотеже фаза глобалне и локалне претраге. У циљу постизања ефикасне претраге неопходно је успоставити равнотежу између ове две фазе током процеса оптимизације, посебно у случају комплексних проблема, као што је проблем пасивног лоцирања [79].

У општем случају, побољшање перформанси метахеуристичких алгоритама може се постићи модификацијом оператора претраге, тј. модификацијом оператора селекције, укрштања и мутације, и/или адекватним одабиром параметара који контролишу извршавање алгоритама [80, 81]. Још један вид побољшања перформанси метахеуристичких алгоритама може се остварити хибридизацијом, односно комбиновањем два оптимизациона алгоритама. Према томе, постоји више приступа хибридизацији, где се у циљу побољшања тачности може извршити хибридизација метахеуристичког алгорита са другим популационим метахеуристичким алгоритмом [82-85]. Други приступ односи се на хибридизацију комбиновањем популационог метахеуристичког алгорита са конвенционалним методама локалне претраге. Међу методама локалне претраге које се често примењују при хибридизацији посебно се издвајају Нелдер – Мид (*Nelder-Mead*, NM), Хук-Џевис (*Hooke-Jeeves*, HJ) и Флечер-Пауел (*Fletcher-Powell*, FP) алгоритми, који припадају класи метода директне претраге и не захтевају познавање извода функције [86-90]. Према томе, главни циљ ове тезе је развој нових и побољшање постојећих метахеуристичких алгоритама оптимизације, што се може постићи хибридизацијом са другим алгоритмима и адаптивним избором параметара у току оптимизационог процеса решавања проблема пасивног лоцирања.

Велики број радова у релевантној литератури посвећен је примени метахеуристичких алгоритама за решавање проблема позиционирања, односно одређивања непознате локације објекта [91-93]. У том контексту, у циљу повећања

тачности позиционирања, модификовани алгоритам оптимизације ројем честица примењен је на решавање проблема лоцирања заснованог на мерењу TDOA параметра [94]. Добијени резултати нумеричке симулације показали су да модификована верзија PSO алгоритма остварује већу тачност лоцирања у поређењу са конвенционалним PSO алгоритмом, као и са постојећим LLS и WLS методама. С друге стране, модификовани алгоритам претраге кукавице примењен је за решавање проблема лоцирања базираног на мерењу TDOA параметра, код којег је функција циља дефинисана на основу методе максималне веродостојности, у раду [95]. У наведеном раду, резултати нумеричке симулације показали су да модификовани CS алгоритам остварује већу тачност лоцирања у поређењу са Њутновом методом и PSO алгоритмом. Такође, у циљу добијања веће тачности, боље робусности као и избегавања тенденција заглављивања у локални оптимум разматрана је хибридикација хеуристичких алгоритма са другим алгоритмима и примена ових алгоритма на проблеме лоцирања [97].

У оквиру ове дисертације, посебна пажња посвећена је анализи тачности естимације разматраних алгоритма примењених на решавање постављеног пасивног модел лоцирања заснованог на мерењу времена пропагације сигнала или временске разлике пропагације сигнала. С тим у вези, у циљу поређења варијанси разматраних алгоритма, за постављене проблеме лоцирања изведена је Крамер – Раова (*Cramér – Rao*, CRB) граница, односно најмања варијанса [98]. Анализа перформанси предложених алгоритма за естимацију непознате локације објекта извршена је кроз симулације у програмском окружењу MATLAB [99]. У циљу додатног унапређења перформанси приказана је анализа осетљивости разматраних оптимизационих алгоритма с обзиром на промене у просторном распореду између предајника и пријемника у мрежи. Такође, спроведена је и анализа комплексности, као и времена извршавања развијених алгоритма. Поред овога, извршено је поређење оптимизационих перформанси предложених модификованих хеуристичких алгоритма са конвенционалним алгоритмима применом два непараметарска статистичка теста: Вилкоксеновог теста ранга (*Wilcoxon signed-rank*) и Фридмановог теста (*Friedman*). Циљ анализа спроведених у оквиру дисертације је да се утврди могућност остваривања веће тачности лоцирања у

односу на конвенционалне технике, применом предложених модификованих хеуристичких алгоритама, и то кроз: адаптивне технике за промену вредности управљачких параметара, адаптивни оператор мутације, као и кроз хибридизацију алгоритама.

Предмет и циљеви истраживања, у оквиру ове докторске дисертације, дефинисали су њену структуру, која је организована кроз једанаест поглавља и преглед коришћене литературе.

Уводно поглавље разматра проблем пасивног лоцирања, као и приказ релевантне литературе и публикованих научно-стручних радова, који су посвећени развоју техника и технологија лоцирања, естимационим и оптимизационим алгоритмима. У овом поглављу дефинисани су предмет и циљеви истраживања ове дисертације.

Друго поглавље посвећено је формулацији пасивног модела лоцирања, који је заснован на мерењу TOA и TDOA параметара, за радио канал у присуству шума, у условима директне оптичке видљивости.

У оквиру трећег поглавља формирана је функција максималне веродостојности за познату функцију густине вероватноће, са случајном Гаусовом расподелом за грешку мерења, у циљу постизања захтеване тачности естимације.

У циљу естимације локације неког објекта применом директних нумеричких метода, у оквиру четвртог поглавља описани су линеарни алгоритми лоцирања засновани на апроксимацији нелинеарних једначина приказаних у другом поглављу.

У петом поглављу описан је метод семидефинитног програмирања, имплементираног за решавање разматраних проблема пасивног лоцирања, који се заснива на трансформацији неконвексног оптимизационог проблема у конвексни проблем.

У оквиру шестог поглавља изведена је Крамер-Раова теоријска граница прецизности лоцирања, која представља доњу границу прецизности за сваки од непознатих параметара постављеног модела позиционирања.

У седмом поглављу приказана је једна од најшире заступљених класификација оптимизационих метода и за постављени оптимизациони проблем дефинисани су глобални и локални оптимум на простору могућих решења. Посебна пажња посвећена је метахеуристичким алгоритмима заснованим на хеуристичким алгоритмима оптимизације као и њихова класификација, с посебним освртом на имплементацију следећих алгоритама: алгорита диференцијалне еволуције, алгорита оптимизације ројем честица и алгорита свитаца. У овом поглављу описан је и Нелдер – Мид алгоритам, као најчешће коришћени оптимизациони алгоритам из групе алгоритама директне претраге, који је примењен за хибридизацију са метахеуристичким алгоритмом диференцијалне еволуције.

У осмом поглављу приказане су модификације разматраних метахеуристичких алгоритама, и то кроз: адаптивне технике за промену вредности управљачких параметара, као и предложени адаптивни оператор мутације, ради побољшања оптимизационих перформанси разматраних алгоритама.

Хибридизација предложених оптимизационих алгоритама разматрана је у деветом поглављу, у циљу адекватног коришћења предности једног и истовремене елиминације недостатака другог алгорита. У оквиру овог поглавља приказана је хибридизација: алгоритама диференцијалне еволуције и Нелдер – Мид методе, алгоритама свитаца и диференцијалне еволуције, као и алгорита оптимизације ројем честица и диференцијалне еволуције.

У оквиру десетог поглавља дати су резултати нумеричке симулације у циљу поређења оптимизационих перформанси предложених модификованих хеуристичких алгоритама са конвенционалним алгоритмима применом Вилкоксоновог и Фридмановог непараметарског статистичког теста. Такође, извршена је анализа перформанси предложених алгоритама у погледу тачности позиционирања, утицаја улазних параметара, осетљивости на промену топологије, комплексности, као и брзине извршавања.

У оквиру завршног једанаестог поглавља изложена су закључна разматрања ове докторске дисертације.

## 2. Пасивни модели позиционирања

Динамичан развој савремених комуникационих технологија, у последњих неколико деценија, допринео је примени различитих корисничких сервиса за тродимензионално позиционирање објекта и људи у реалном времену на основу GPS сателитске инфраструктуре. При томе, пријем GPS сигнала посебно је онемогућен у затвореним просторима и урбанизованим градским срединама, услед рефлексије сигнала од зграда и других препрека, као и у тунелима и окружењима испод површине воде. У окружењима где је онемогућен пријем GPS радио сигнала, као решење проблема лоцирања намеће се пасивни поступак лоцирања, који обезбеђује задовољавајућу тачност и ефикасност при одређивању непознате позиције објекта [12-14].

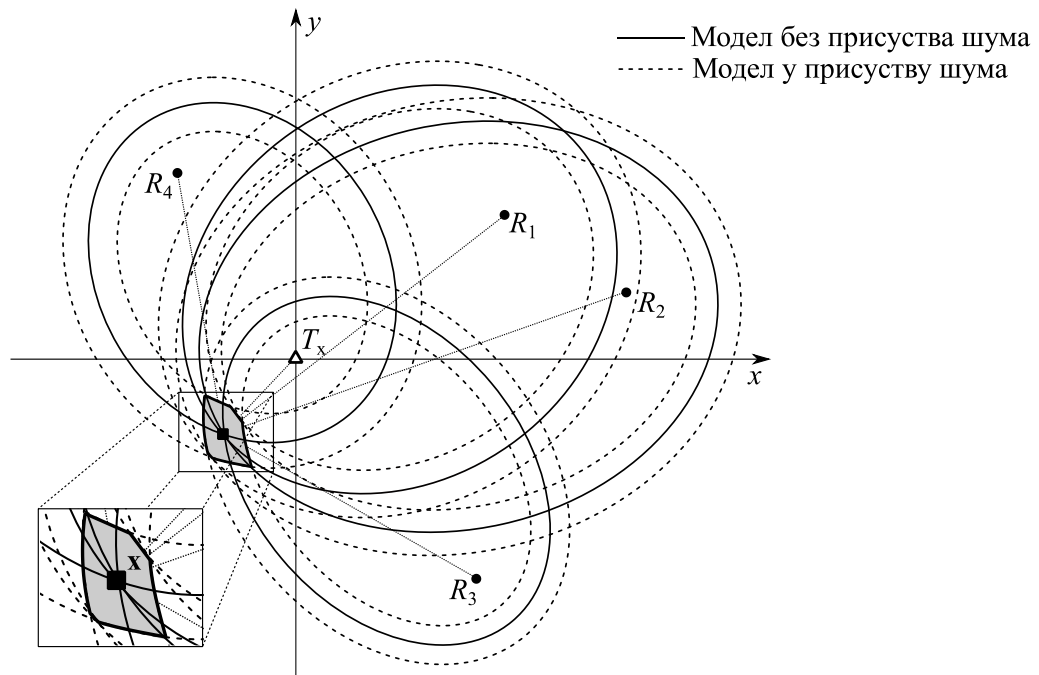
За разлику од активног модела лоцирања, пасивни модел не захтева да објекат директно учествује у процесу позиционирања. Одређивање непознате локације објекта применом пасивног лоцирања, на основу просторно распоређених предајника и пријемника, од посебног је значаја за: бежичне сензорске мреже, системе праћења, радаре, сонаре, детекцију у медицини, обраде слике, итд. [22-25].

У овом поглављу разматрају се дводимензионални модели пасивног лоцирања засновани на мерењу TOA и TDOA параметара, при пропагацији сигнала између предајника, објекта и пријемника, кроз радио канал у присуству шума, у LOS условима [36, 37]. Растојања између предајника, објекта и пријемника су случајне величине, с обзиром да садрже грешку мерења и у том случају неопходно је применити неки од пробабилистичких модела ради процене одговарајућих растојања.

## 2.1 Пасивни ТОА модел лоцирања

У овом одељку разматра се поступак одређивања непознате локације пасивног објекта, који се заснива на мерењу времена приспећа сигнала, емитованог од предајника познатих координата  $T_x$ , и рефлектованог од пасивног објекта ка најмање три пријемника  $\{R_i\}_{i=1}^N$ , где  $N$  означава број пријемника ( $N \geq 3$ ). При томе, неопходно је обезбедити временску синхронизацију између пријемника, као и синхронизацију између предајника и пријемника, како би се прецизно одредила непозната локација објекта.

Не умањујући општост лоцирања, непозната локација објекта одређује се у односу на Декартов координатни систем, при чему се позиција предајника  $\mathbf{x}_T$  поклапа с почетком координатног система, односно  $\mathbf{x}_T = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^2$ . Сходно овоме, на слици 2.1 приказане су познате позиције пријемника  $\mathbf{x}_i^r = [x_i^r \ y_i^r]^T \in \mathbb{R}^2, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , као и непозната позиција објекта  $\mathbf{x} = [x \ y]^T \in \mathbb{R}^2$ .



Слика 2.1. Пасивни ТОА модел позиционирања.

Процес одређивања непознате локације пасивног објекта почиње емитовањем сигнала са предајника, који се рефлектује од пасивног објекта ка пријемнику. У реалним условима, при пропагацији сигнала кроз радио канал поред корисног сигнала присутан је и Гаусов шум, који представља адитивну величину у односу на измерени сигнал у условима директне оптичке видљивости [21]. Према томе, у присуству шума, време пропагације сигнала  $t_{TOA,i}$  од предајника  $T_x$  преко пасивног објекта до пријемника  $R_i$ , може се приказати у облику следеће релације

$$t_{TOA,i} = \frac{1}{c} \left( \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^r\|_2 \right) + \bar{n}_{TOA,i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (2.1)$$

где је  $c$  брзина пропагације сигнала (брзина светлости),  $\bar{n}_{TOA,i}$  је случајно одступање или грешка при мерењу и  $\|\cdot\|_2$  представља Еуклидску норму. Одступање  $\bar{n}_{TOA,i}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  је случајна независна (потпуно некорелисана) величина, која настаје без икакве правилности и подвргава се нормалној или Гаусовој расподели  $\mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ . Тада се множењем времена пропагације сигнала  $t_{TOA,i}$  брзином светлости  $c$  добија растојање  $r_{TOA,i}$ , које представља збир детерминистичког сабирка – растојања  $d_{TOA,i}$  и случајног сабирка  $n_{TOA,i}$ , односно

$$r_{TOA,i} = ct_{TOA,i} = d_{TOA,i} + n_{TOA,i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (2.2)$$

где је  $d_{TOA,i}$  растојање од предајника преко пасивног објекта до  $i$ -тог пријемника за детерминистички модел позиционирања, односно  $d_{TOA,i} = \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^r\|_2$  и  $n_{TOA,i} = c\bar{n}_{TOA,i}$  представља грешку при мерењу која се подвргава нормалној расподели  $\mathcal{N}(0, \sigma_{ni}^2)$  са варијансом  $\sigma_{ni}^2 = c^2 \sigma_i^2$ .

За постављени детерминистички модел позиционирања, без присуства шума, позиције пријемника  $R_i$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  и предајника  $T_x$  поклапају се са фокусима одговарајућих елипси. Према томе, елипса  $E_i$  означава геометријско место тачака у равни за које је апсолутна вредност збира растојања од било које њене тачке – пасивног објекта  $\mathbf{x}$  до две фиксне тачке – пријемника  $\mathbf{x}_i^r$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  и



предајника  $\mathbf{x}_T$  константна величина. Тада, за сваку тачку  $\mathbf{x}$  која припада елипси важи

$$E_i = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_{TOA,i} = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - x_i^r)^2 + (y - y_i^r)^2} \right\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (2.3)$$

Дакле, за детерминистички модел позиционирања, непознате координате  $\mathbf{x} = [x \ y]^T$  пасивног објекта у Декартовом координатном систему  $Oxy$ , налазе се у пресеку најмање три елипси, приказаних пуном линијом на слици 2.1.

У условима присуства шума, израз (2.2) може се приказати у векторском облику, односно

$$\mathbf{r}_{TOA} = \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_{TOA}, \quad (2.4)$$

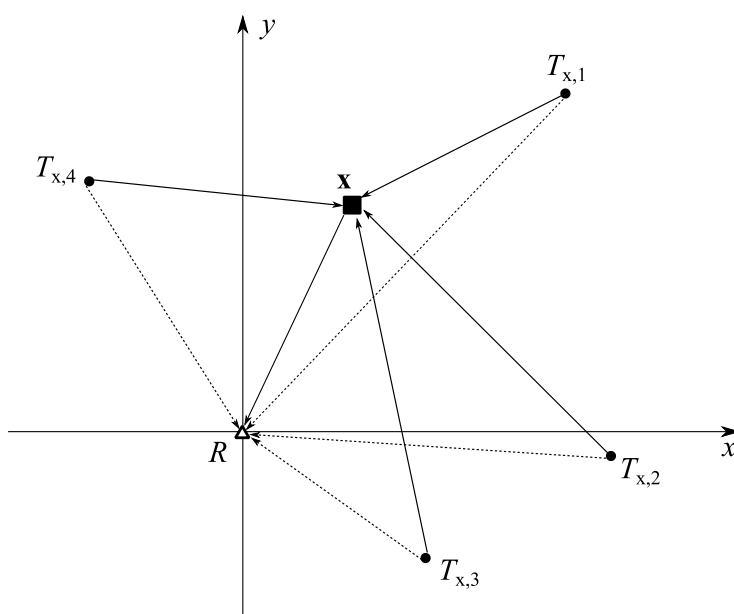
где  $\mathbf{r}_{TOA} = [r_{TOA,1} \ \dots \ r_{TOA,N}]^T$  представља случајни вектор растојања,  $\mathbf{n}_{TOA} = [n_{TOA,1} \ \dots \ n_{TOA,N}]^T$  означава вектор одступања растојања и  $\mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})$  је вектор растојања за детерминистички модел позиционирања, који се може приказати у облику следећег изрази

$$\mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^r\|_2 \\ \vdots \\ \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N^r\|_2 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Према томе, услед присуства грешке при мерењу, непозната локација пасивног објекта не налази се у пресеку одговарајућих геометријских места тачака – елипси, добијених за постављени модел лоцирања [100]. У овом случају, у присуству шума у LOS окружењу, непозната позиција пасивног објекта налази се у области коначне површине (осенчена површина), илустровано на слици 2.1. Сходно овоме, ради процене непознате локације објекта, неопходно је применити одговарајући естимациони поступак за постављени пасивни модел лоцирања. С обзиром да су захтеви за одређивање непознате локације објекта са аспекта тачности од крајњих корисника веома строги, намеће се неопходност примене алгоритама за естимацију и оптимизацију, који обезбеђују прецизно одређивање локације пасивног објекта.

## 2.2 Пасивни TDOA модел позиционирања

Одређивање непознате позиције пасивног објекта на основу мерења временске разлике пропагације сигнала заснива се на познавању координата позиције једног пријемника  $R$  и најмање три предајника  $\{T_{x,i}\}_{i=1}^N$ ,  $N \geq 3$ . Ради добијања што тачније информације о непознатој позицији објекта  $\mathbf{x} = [x \ y]^T \in \mathbb{R}^2$ , посматрани пасивни TDOA модел позиционирања полази од међусобно независних предајника познатих локација  $\mathbf{x}_i^t = [x_i^t \ y_i^t]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , и референтног пријемника чија се позиција поклапа са почетком координатног система  $\mathbf{x}_r = [0 \ 0]^T$ , као што је приказано на слици 2.2.



Слика 2.2. Пасивни TDOA модел позиционирања.

Процес одређивања непознате локације пасивног објекта започиње емитовањем сигнала са скупа предајника  $T_{x,i}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Тада се метода временске разлике приспећа сигнала заснива на мерењу приспећа два ТОА сигнала на пријемнику, и то: рефлектованог сигнала од пасивног објекта и директног сигнала који долази од  $i$ -тог предајника [38]. Такође, поред корисног сигнала присутан је и Гаусов шум у условима директне оптичке видљивости [53].

Нека су познате брзина пропагације сигнала и координате предајника и пријемника, тада се измерено време приспећа директног сигнала  $t_{d,i}$  до референтног пријемника  $R$  емитованог са предајника  $T_{x,i}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , може приказати у облику релације

$$t_{d,i} = \frac{1}{c} \left( \|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}_r\|_2 \right), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (2.6)$$

Поред овог, измерено време приспећа рефлектованог сигнала  $t_{r,i}$  од пасивног објекта до референтног пријемника  $R$ , емитованог са предајника  $T_{x,i}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , дато је следећим изразом

$$t_{r,i} = \frac{1}{c} \left( \|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2 \right), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (2.7)$$

Дакле, параметар временске разлике приспећа сигнала - TDOA поступка одређује се на основу разлике времена приспећа сигнала и може се приказати у облику следеће релације

$$t_i = t_{r,i} - t_{d,i} = \frac{1}{c} \left( \|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}_r\|_2 \right), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (2.8)$$

У општем случају, при пропагацији сигнала између предајника и пријемника, сигнал је изложен различитим сметњама, што знатно отежава одређивање тачне локације објекта. Наиме, у реалним условима, поред корисног сигнала присутан је шум кога представљамо као адитивну сметњу у радио каналу. Дакле, временска разлика пропагације сигнала  $t_{TDOA,i}$  може се приказати у облику следеће релације

$$t_{TDOA,i} = t_i + \bar{n}_{TDOA,i} = \frac{1}{c} \left( \|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}_r\|_2 \right) + \bar{n}_{TDOA,i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (2.9)$$

где  $\bar{n}_{TDOA,i}$  означава случајно одступање или грешку при мерењу која се подвргава нормалној расподели. Тада се множењем временске разлике приспећа сигнала  $t_{TDOA,i}$  брзином светлости  $c$  добија растојање  $r_{TDOA,i}$  које се може представити следећим изразом

$$r_{TDOA,i} = ct_{TDOA,i} = \left( \|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}_r\|_2 \right) + n_{TDOA,i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (2.10)$$

где  $n_{TDOA,i} = c\bar{n}_{TDOA,i}$  означава случајно одступање или грешку при мерењу. При томе,

увођењем релације  $\tilde{r}_i = r_{TDOA,i} + \|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}_r\|_2$  у израз (2.10) произилази

$$\tilde{r}_i = \|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2 + n_{TDOA,i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (2.11)$$

У овом случају, израз (2.11) може се приказати у векторском облику, односно

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{d}_{TDOA}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_{TDOA}, \quad (2.12)$$

где је

$$\mathbf{d}_{TDOA}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_1^t - \mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2 \\ \vdots \\ \|\mathbf{x}_N^t - \mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

при чему је са  $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{r}_1 \ \dots \ \tilde{r}_N]^T$  означен случајни вектор растојања, док

$\mathbf{n}_{TDOA} = [n_{TDOA,1} \ \dots \ n_{TDOA,N}]^T$  представља вектор одступања растојања.

Према томе, у условима присуства шума, ради процене координата непознате позиције објекта, неопходно је применити неки од пробабилистичких поступака за постављени пасивни модел позиционирања.

### **3. Естимација пасивне локације објекта**

У општем случају, под појмом естимација подразумева се поступак процене непознатих параметара на основу спроведених мерења. При томе, неопходно је успоставити функционалну зависност између непознатих параметара и доступних мерења. Проблем естимације може се представити као оптимизациони проблем који је описан одговарајућом функцијом циља – критеријумом оптималности [45, 46].

У доступној литератури, најчешће заступљене естимационе методе за решавање проблема у различитим областима су: метода најмањих квадрата, линеаризоване методе најмањих квадрата, као и метода максималне веродостојности [39-41, 45]. Ове методе међусобно се разликују по обиму, сложености и тачности процењене локације објекта. Према томе, метода најмањих квадрата заснована је на минимизацији грешке лоцирања, и у литератури је позната под називом метода минималне квадратне грешке или Гаусова метода најмањих квадрата. Метода максималне веродостојности примењује се када је познат закон расподеле вероватноће случајне променљиве и успешно се користи за решавање широког спектра научних проблема од: биолошких, медицинских, економских, техничких и других области. Дакле, за постављени проблем лоцирања, избор естиматора за процену непознате локације неког објекта веома је значајан, као и имплементирани оптимизациони алгоритам за његово решавање.

#### **3.1 Метода максималне веродостојности**

Метода максималне веродостојности је статистичка метода за естимацију, односно процену непознатих параметара, при чему је за њену практичну

имплементацију неопходно познавати закон расподеле вероватноће случајне променљиве. Према томе, функција веродостојности се примењује ради процене непознатих параметара на основу познатих исхода [20]. Претпоставимо да имамо здружену функцију густине вероватноће  $p(\mathbf{X}|\theta)$ , случајни вектор  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  и вектор параметара  $\theta$ , који се процењује, тада на основу следеће дефиниције добијамо функцију максималне веродостојности [20].

**Дефиниција 3.1.** Нека је дата здружена функција расподеле вектора случајних променљивих  $\mathbf{X}$  у зависности од вектора параметара  $\theta$ ,  $p(\mathbf{X}|\theta)$ . Функција веродостојности вектора параметара  $\theta$  за фиксно  $\mathbf{X}$ , у ознаци  $L(\mathbf{X}|\theta)$ , је функција  $p(\mathbf{X}|\theta)$  посматрана као функција свог другог аргумента.

Функцију веродостојности, ради једноставности, означавамо са  $L(\theta)$ . Према томе, функција веродостојности  $L(\theta)$  може се приказати у облику следеће релације

$$L(\theta) = p(\mathbf{X}|\theta) = \prod_{i=1}^n p(X_i|\theta). \quad (3.1)$$

Према методи максималне веродостојности непознатом вектору  $\theta$  треба доделити ону вредност за који је вероватноћа да се добије баш посматрани реализовани узорак  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  максимална, тј.

$$\max_{\theta \in \Theta} L(\theta), \quad (3.2)$$

где  $\Theta$  означава скуп могућих (допустивих) вредности параметра  $\theta$ . Према томе, вредност  $\hat{\theta}$  за коју функција веродостојности достиже свој максимум је оцена максималне веродостојности параметра  $\theta$ , која се може приказати на следећи начин

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta). \quad (3.3)$$

Нека је функција веродостојности узорка диференцијабилна по  $\theta$ , тада се оцена максималне веродостојности  $\hat{\theta}$ , добија решавањем

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0. \quad (3.4)$$

Изразом (3.4) дат је само потребан услов за изналагање вредности параметра  $\boldsymbol{\theta}$ , за коју функција веродостојности узорка достиже максимум.

Како је функција  $\ln x$ ,  $x \rightarrow \infty$ , монотono растућа, тада функције  $L(\boldsymbol{\theta})$  и  $\ln L(\boldsymbol{\theta})$  имају исте екстремуме. Логаритмовањем једначине (3.4) добијамо једначину веродостојности у облику следећег израза

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0, \quad (3.5)$$

одакле непосредно произилази оцена максималне веродостојности.

У случајевима када функцију максималне веродостојности карактерише нелинеарност и неконвексност на скупу допустивих решења, где осим глобалног оптимума постоји више различитих локалних оптимума, решење није доступно у аналитичком облику. Тада се решење, односно оцена максималне веродостојности параметра  $\boldsymbol{\theta}$  одређује применом одговарајућих нумеричких метода оптимизације.

## 3.2 Метода максималне веродостојности за ТОА модел

У овом одељку применићемо функцију веродостојности за пасивни ТОА модел позиционирања ради одређивања непознате позиције објекта [36]. За постављени пасивни ТОА модел позиционирања, који је дефинисан у другом поглављу, поставићемо функцију веродостојности  $L_{\text{ТОА}}(\mathbf{x})$ . Нека је случајна променљива  $\mathbf{r}_{\text{ТОА}}$  узорак из нормалне расподеле, тада се функција веродостојности  $L_{\text{ТОА}}(\mathbf{x})$  променљиве  $\mathbf{r}_{\text{ТОА}}$  у односу на непознату локацију објекта  $\mathbf{x}$ , може записати у облику следећег израза

$$L_{\text{ТОА}}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{r}_{\text{ТОА}} | \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(\mathbf{C}_{\text{ТОА}})^{1/2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\text{ТОА}} - \mathbf{d}_{\text{ТОА}}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{\text{ТОА}}^{-1} (\mathbf{r}_{\text{ТОА}} - \mathbf{d}_{\text{ТОА}}(\mathbf{x}))\right), \quad (3.6)$$

где је  $\mathbf{C}_{TOA}$  матрица коваријансе случајног вектора  $\mathbf{r}_{TOA}$ , односно  $\mathbf{C}_{TOA} = E \left[ (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})) (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}))^T \right] = E (\mathbf{n}_{TOA} \mathbf{n}_{TOA}^T)$ . Ако се претпостави да су грешке мерења међусобно некорелисане, тада се матрица коваријансе  $\mathbf{C}_{TOA}$  може представити као дијагонална матрица, где вредности на дијагонали представљају квадрат варијансе мерења, односно

$$\mathbf{C}_{TOA} = \begin{bmatrix} \sigma_{TOA,1}^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{TOA,N}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Изрази (3.6) приказан у експоненцијалном облику може се поједноставити ако се логаритмује, па се тако добија

$$\ln L_{TOA}(\mathbf{x}) = k - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})), \quad (3.8)$$

где је  $k = \ln \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(\mathbf{C}_{TOA})^{1/2}}$  константа независна од  $\mathbf{x}$ .

Како константа  $k$  не утиче на одређивање максимума функције (3.8), тада се проблем (3.8) своди на одређивање максимума функције

$$\ln L_{TOA}(\mathbf{x}) = -(\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})). \quad (3.9)$$

Дакле, проблем одређивања максимума еквивалентан је минимизацији, односно

$$\max(-J_{ML,TOA}(\mathbf{x})) = \min(J_{ML,TOA}(\mathbf{x})), \quad (3.10)$$

где је  $J_{ML,TOA}(\mathbf{x})$  функција циља дата следећим изразом

$$J_{ML,TOA}(\mathbf{x}) = (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})). \quad (3.11)$$

Према томе, проблем одређивања оптималне позиције објекта  $\mathbf{x}$  своди се на одређивање минимума функције циља, што се може записати у облику

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} J_{ML,TOA}(\mathbf{x}). \quad (3.12)$$

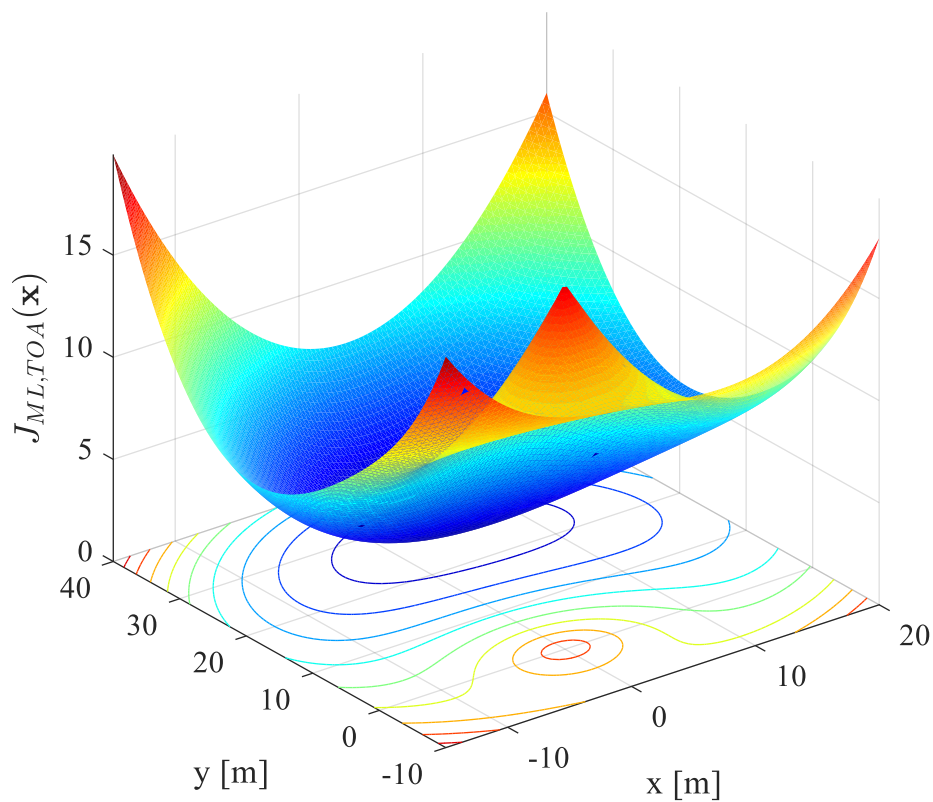


Одавде произилази да се оптимална локација објекта одређује решавањем оптимизационог проблема

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} J_{ML,TOA}(\mathbf{x}), \quad (3.13)$$

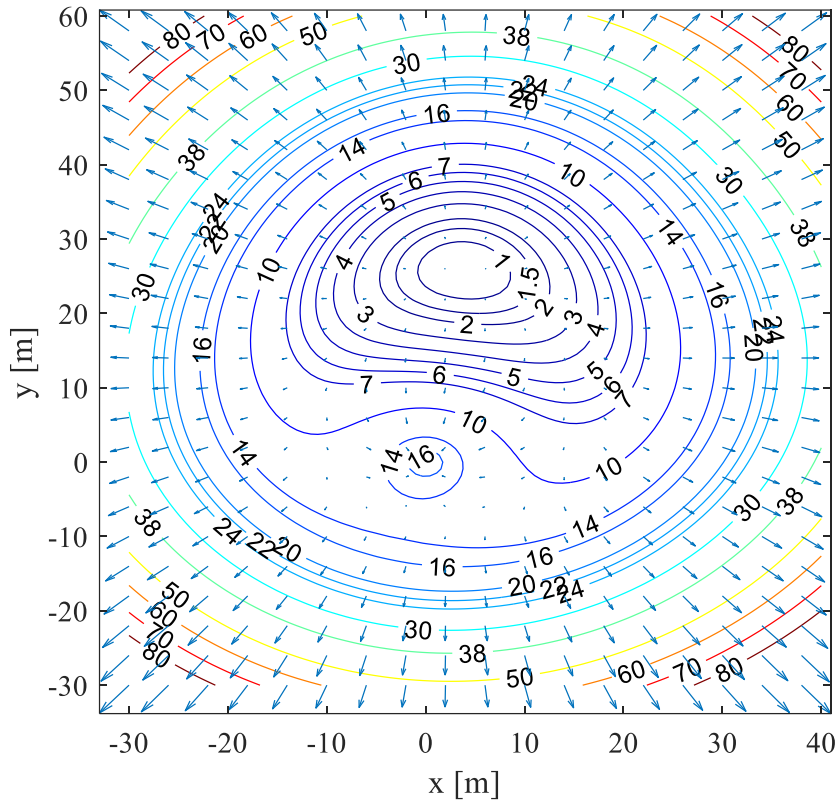
применом нумеричких метода оптимизације.

На слици 3.1 приказан је график функције циља  $J_{ML,TOA}(\mathbf{x})$  за постављени модел пасивног лоцирања заснован на мерењу ТОА параметра.



Слика 3.1. График функције циља  $J_{ML,TOA}(\mathbf{x})$  за пасивни ТОА модел.

Поред овог, на слици 3.2 дат је контурни график функције циља  $J_{ML,TOA}(\mathbf{x})$ , са векторским пољем градијента  $\nabla J_{ML,TOA}(\mathbf{x})$ .



Слика 3.2. Контурни график функције циља  $J_{ML,TOA}(\mathbf{x})$  са векторским пољем градијента  $\nabla J_{ML,TOA}(\mathbf{x})$ .

Дакле са слика 3.1 и 3.2, произилази да функцију циља  $J_{ML,TOA}(\mathbf{x})$  карактерише нелинеарност и неконвексност на скупу допустивих решења, где осим глобалног оптимума постоји више различитих локалних оптимума. Према томе, у зависности од нивоа шума у каналу, постављени мултимодални оптимizacionи проблем, може се успешно решити применом хеуристичких алгоритама оптимизације.

### 3.3 Метода максималне веродостојности за TDOA модел

У овом одељку применићемо функцију веродостојности на пасивни TDOA модел позиционирања ради одређивања непознате позиције објекта [53]. Дакле, при формирању функције максималне веродостојности за пасивни TDOA модел позиционирања полази се од вектора  $\mathbf{d}_{TDOA}(\mathbf{x})$  који се може записати у следећем облику

$$\mathbf{d}_{TDOA}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}), \quad (3.14)$$

где је  $\mathbf{g}_{TDOA}$  одговарајући вектор представљен следећим изразом

$$\mathbf{g}_{TDOA} = \left[ \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\| \quad \|\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}\| \quad \dots \quad \|\mathbf{x}'_N - \mathbf{x}\| \right]^T, \quad (3.15)$$

при чему је матрица  $\mathbf{H}$  дефинисана на следећи начин

$$\mathbf{H} = [\mathbf{1}_N \quad \mathbf{I}_N] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

при чему  $\mathbf{1}_N$  представља  $N$  димензионални вектор чији су сви елементи јединице,  $\mathbf{I}_N$  означава јединичну матрицу димензија  $(N \times N)$ . Сходно овоме, једначина (2.12) може се приказати у облику следеће релације

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_{TDOA}. \quad (3.17)$$

Према томе, за постављени пасивни TDOA модел позиционирања, који је дефинисан у претходном поглављу, поставићемо функцију веродостојности  $L_{TDOA}(\mathbf{x})$ . Нека је случајна променљива  $\tilde{\mathbf{r}}$  узорак из нормалне расподеле, тада се функција веродостојности  $L_{TDOA}(\mathbf{x})$  променљиве  $\tilde{\mathbf{r}}$  у односу на  $\mathbf{x}$ , може записати у облику следећег израза

$$\begin{aligned} L_{TDOA}(\mathbf{x}) &= p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(\mathbf{C}_{TDOA})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TDOA}^{-1} (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

где је  $\mathbf{C}_{TDOA}$  матрица коваријансе, таква да је  $\mathbf{C}_{TDOA} = \sigma_{TDOA}^2 \mathbf{I}_N$ , при чему  $\mathbf{I}_N$  означава  $(N \times N)$  димензиону јединичну матрицу. Логаритмовања израза (3.18) добија се

$$\ln L_{TDOA}(\mathbf{x}) = k - \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TDOA}^{-1} (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})), \quad (3.19)$$

где је  $k = \ln \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(\mathbf{C}_{TDOA})^{1/2}}$  константа независна од  $\mathbf{x}$ , која се може занемарити.

Тада се проблем одређивања оптималне позиције објекта  $\mathbf{x}$  своди на одређивање минимума функције циља  $J_{ML,TDOA}(\mathbf{x})$ , што се може описати следећом релацијом

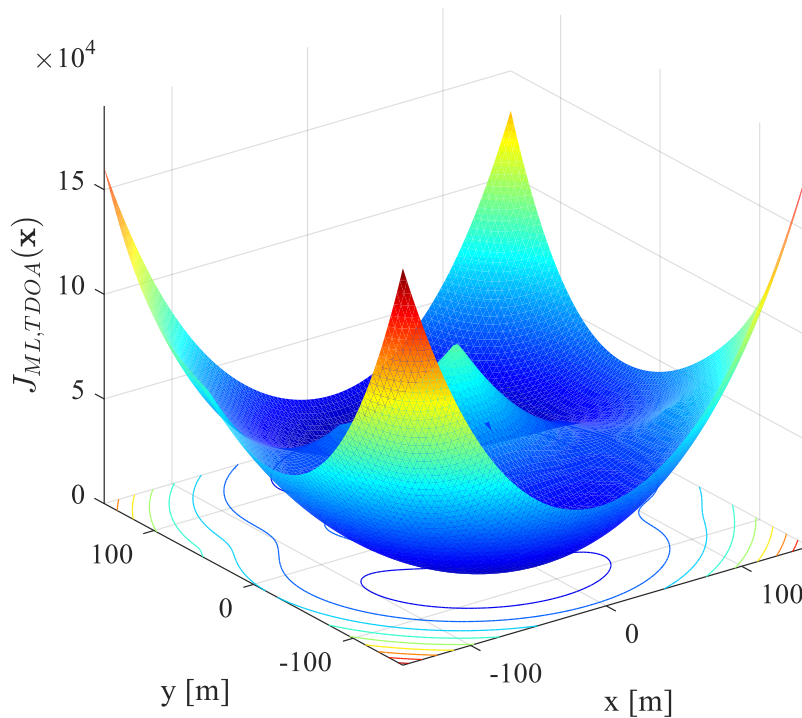
$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} J_{ML,TDOA}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TDOA}^{-1} (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})). \quad (3.20)$$

Одавде произилази да се оптимална локација објекта одређује решавањем оптимизационог проблема

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} J_{ML,TDOA}(\mathbf{x}), \quad (3.21)$$

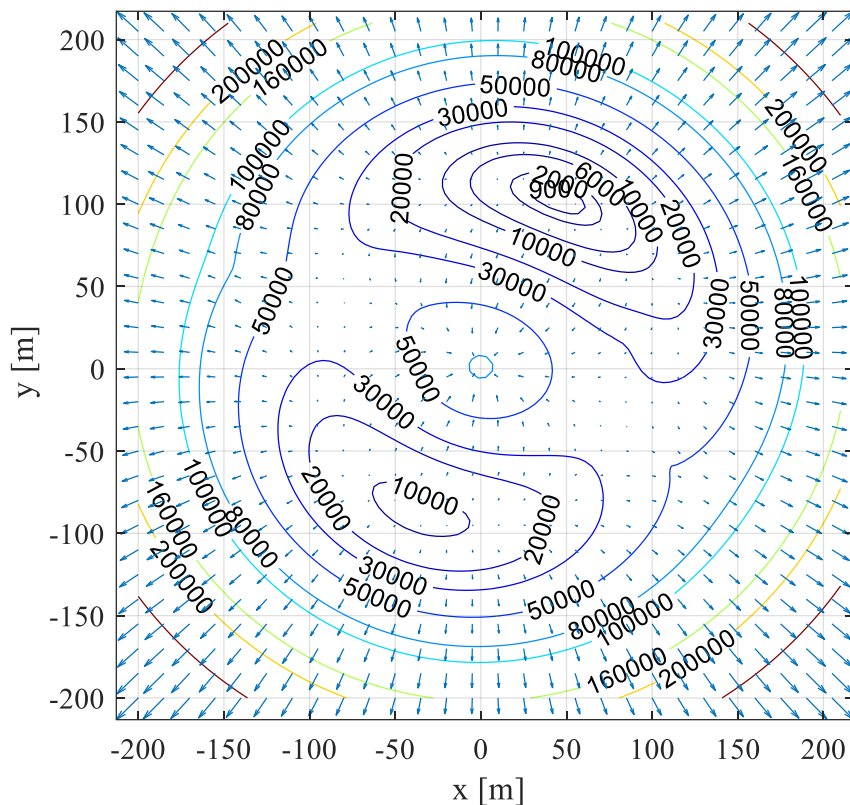
применом одговарајућих нумеричких метода оптимизације.

Слика 3.3 илуструје график функције циља за постављени пасивни TDOA модел позиционирања.



Слика 3.3. График функције циља  $J_{ML,TDOA}(\mathbf{x})$  за пасивни TDOA модел.

Поред овог, на слици 3.4 дат је контурни график функције циља  $J_{ML,TDOA}(\mathbf{x})$ , са векторским пољем градијента  $\nabla J_{ML,TDOA}(\mathbf{x})$ .



Слика 3.4. Контурни график функције циља  $J_{ML,TDOA}(\mathbf{x})$  са векторским пољем градијента  $\nabla J_{ML,TDOA}(\mathbf{x})$ .

Према томе, са слика 3.3 и 3.4, произилази да функцију циља  $J_{ML,TDOA}(\mathbf{x})$  карактерише мултимодалност на скупу допустивих решења, где осим глобалног оптимума постоји више различитих локалних оптимума. Дакле, у зависности од нивоа шума у каналу, нелинеарни и неконвексни оптимизациони проблем може се успешно решити применом хеуристичких алгорита оптимизације.

## 4. Линеаризовани модели лоцирања

У овом поглављу биће представљени линеарни алгоритми лоцирања засновани на апроксимацији нелинеарних једначина описаних у другом поглављу. У складу с тим, на основу линеаризованог модела лоцирања процењена локација неког објекта може се одредити директним нумеричким методама, што знатно олакшава поступак одређивања оптималне позиције објекта [39, 40, 43]. У оквиру ове дисертације за постављени модел лоцирања биће разматрани: линеарни метод најмањих квадрата, линеарни метод тежинских најмањих квадрата и линеарни метод тежинских најмањих квадрата са ограничењима.

### 4.1 Линеаризација пасивног ТОА модела

Приступајући линеаризацији пасивног модела позиционирања заснованог на ТОА поступку, полази се од израза (2.2) одакле непосредно произилази квадрат растојања између пасивног објекта непознате локације и пријемника познате локације,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , респективно, односно

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^r\|_2^2 = (r_{TOA,i} - n_{TOA,i})^2 - 2(r_{TOA,i} - n_{TOA,i})\|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x}\|_2^2, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (4.1)$$

Након преуређивања израза добијамо

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{x}_i^r + (\mathbf{x}_i^r)^T \mathbf{x}_i^r \\ & = r_{TOA,i}^2 - 2r_{TOA,i}n_{TOA,i} + n_{TOA,i}^2 - 2r_{TOA,i}\|\mathbf{x}\|_2 + 2n_{TOA,i}\|\mathbf{x}\|_2 + \mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

У следећем кораку, занемарује се  $n_{TOA,i}^2$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , као мала величина вишег реда. Такође, уводимо смену

$$R^t = \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.3)$$

тако да се добија апроксимација у облику следећег система једначина

$$\begin{aligned} & 2x_i^r x + 2y_i^r y - 2r_{TOA,i} R^t \\ & = (x_i^r)^2 + (y_i^r)^2 - r_{TOA,i}^2 - 2n_{TOA,i} R^t + 2r_{TOA,i} n_{TOA,i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

који се може приказати у матричном облику

$$\mathbf{A}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA} = \mathbf{b}_{TOA} + \mathbf{m}_{TOA}, \quad (4.5)$$

где су уведене следеће ознаке

$$\mathbf{A}_{TOA} = 2 \begin{bmatrix} x_1^r & y_1^r & -r_{TOA,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^r & y_N^r & -r_{TOA,N} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{TOA} = [x \quad y \quad R^t]^T, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{b}_{TOA} = \begin{bmatrix} (x_1^r)^2 + (y_1^r)^2 - r_{TOA,1}^2 \\ \vdots \\ (x_N^r)^2 + (y_N^r)^2 - r_{TOA,N}^2 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

и

$$\mathbf{m}_{TOA} = 2 \left[ (r_{TOA,1} - R^t) n_{TOA,1} \quad \dots \quad (r_{TOA,N} - R^t) n_{TOA,N} \right]^T. \quad (4.9)$$

Систем једначина (4.5) је предефинисан, имајући у виду да има више једначина него променљивих величина. Ради превазилажења овог проблема, неопходно је поставити додатни критеријум оптималности, тако да је укупно одступање  $\mathbf{A}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA}$  од  $\mathbf{b}_{TOA}$  минимално. Дакле, у циљу процене непознате локације објекта формира се функција суме квадрата одступања  $\mathbf{A}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA} - \mathbf{b}_{TOA}$ , за чије се решавање имплементира естимациони поступак линеарне методе најмањих квадрата (*Linear Least Squares*, LLS).

Према томе, оптимално решење добија се на основу минимума функције циља  $J_{LLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA})$ , која се може приказати у облику следеће релације

$$J_{LLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA}) = (\mathbf{A}_{TOA}\boldsymbol{\theta}_{TOA} - \mathbf{b}_{TOA})^T (\mathbf{A}_{TOA}\boldsymbol{\theta}_{TOA} - \mathbf{b}_{TOA}). \quad (4.10)$$

Дакле, полазећи од формиране функције циља поставља се оптимизациони проблем, записан у следећем облику

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} J_{LLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA}), \quad (4.11)$$

где је оптимално решење

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} J_{LLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA}). \quad (4.12)$$

Оптимално решење  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA}$  одређује се на основу услова да је први извод функције циља  $J_{LLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA})$  једнак нули, што представља потребан, али не и довољан услов.

Према томе, оптимално решење  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA}$  добијамо на основу услова

$$\frac{\partial J_{LLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{TOA}} = 0, \quad (4.13)$$

одакле следи да је вектор  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA}$  одређен изразом

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA} = (\mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{A}_{TOA})^{-1} \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{b}_{TOA}, \quad (4.14)$$

представља решење оптимизационог проблема (4.11). Решење  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA}$  је јединствено ако матрица  $\mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{A}_{TOA}$  није сингуларна, односно

$$\det(\mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{A}_{TOA}) \neq 0. \quad (4.15)$$

Ако потражимо други извод функције  $J_{LLS,TOA}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{TOA})$  добијамо следећу релацију

$$\frac{\partial^2 J_{LLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA})}{\partial^2 \boldsymbol{\theta}_{TOA}} = \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{A}_{TOA} > \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

па је  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA}$  минимум функције  $J_{LLS,TOA}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{TOA})$ .

Коначно, на основу вектора колоне  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA}$  непосредно произилазе координате оптималне локације пасивног објекта које се могу приказати у облику следећег



вектора

$$\hat{\mathbf{x}}_{LLS,TOA} = \left[ \left[ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA} \right]_1 \quad \left[ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA} \right]_2 \right]^T, \quad (4.17)$$

где  $\left[ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA} \right]_i$  представља  $i$ -ти елемент вектора  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS,TOA}$ .

#### 4.1.1 Линеарна метода тежинских најмањих квадрата

Полазећи од критеријума линеарне методе најмањих квадрата (*Weighted Least Squares*, WLS), при формирању оптимizacionог критеријума за решавање постављеног проблема минимизације квадрата одступања потребно је увести модификацију која се назива критеријум тежинских најмањих квадрата. У овом случају, оптимално решење одређује се минимизацијом функције циља  $J_{WLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA})$  која се може приказати у следећем облику

$$J_{WLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA}) = (\mathbf{A}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA} - \mathbf{b}_{TOA})^T \mathbf{W}_{TOA} (\mathbf{A}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA} - \mathbf{b}_{TOA}), \quad (4.18)$$

где је  $\mathbf{W}_{TOA} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  позитивно дефинитна и симетрична матрица тежинских коефицијената. Како је  $\mathbf{m}_{TOA}$  довољно мала величина, тада се матрица  $\mathbf{W}_{TOA}$  може одредити следећим изразом

$$\mathbf{W}_{TOA} = \left[ E \{ \mathbf{m}_{TOA} \mathbf{m}_{TOA}^T \} \right]^{-1} = (\mathbf{D}_{TOA}^T \mathbf{C}_{TOA} \mathbf{D}_{TOA})^{-1}, \quad (4.19)$$

при чему је  $\mathbf{D}_{TOA} = \text{diag} \{ 2(r_{TOA,1} - R^t), \dots, 2(r_{TOA,N} - R^t) \}$ . Дакле, полазећи од функције циља  $J_{WLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA})$  поставља се оптимizacionи проблем, записан у следећем облику

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{WLS,TOA} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2}{\text{argmin}} J_{WLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA}), \quad (4.20)$$

одакле следи да је вектор  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{WLS,TOA}$  одређен изразом

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{WLS,TOA} = (\mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA})^{-1} \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{b}_{TOA}. \quad (4.21)$$

## 4.1.2 Линеарна метода тежинских најмањих квадрата са ограничењима

У циљу добијања што тачније информације о позицији објекта, критеријум оптималности дефинисан методом тежинских најмањих квадрата (*Constrained Weighted Least Squares*, CWLS) проширује се увођењем ограничења типа једнакости другог реда између непознате позиције објекта  $\mathbf{x}$  и смене  $R^t$ , тако да се добија следећи оптимizacionи проблем

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\theta}_{TOA}} J_{CWLS, TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA}) &= \min_{\boldsymbol{\theta}_{TOA}} (\mathbf{A}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA} - \mathbf{b}_{TOA})^T \mathbf{W}_{TOA} (\mathbf{A}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA} - \mathbf{b}_{TOA}), \\ \text{под условом} \quad \boldsymbol{\theta}_{TOA}^T \mathbf{S}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA} &= 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где је  $\mathbf{S}_{TOA} = \text{diag}\{1, 1, -1\}$  дијагонална матрица.

Услед нелинеарности постављеног оптимizacionог проблема са ограничењима, није могуће одредити решење у затвореном облику. Према томе, постављени оптимizacionи проблем са ограничењима трансформише се у оптимizacionи проблем без ограничења применом методе Лагранжеових множитеља [42]. Дакле, увођењем Лагранжеве функције  $\mathcal{L}_{TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA}, \lambda_{TOA})$ , оптимizacionи проблем (4.15) може се приказати у облику израза

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\theta}_{TOA}, \lambda_{TOA}} \mathcal{L}_{TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA}, \lambda_{TOA}) \\ = \min_{\boldsymbol{\theta}_{TOA}, \lambda_{TOA}} (\mathbf{A}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA} - \mathbf{b}_{TOA})^T \mathbf{W}_{TOA} (\mathbf{A}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA} - \mathbf{b}_{TOA}) + \lambda_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA}^T \mathbf{S}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где је  $\lambda_{TOA}$  Лагранжев множитељ. Оптимално решење  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{CWLS, TOA}$  одређује се на основу услова да је парцијални извод Лагранжеве функције  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_{TOA}, \lambda_{TOA})$  по свакој од променљивих  $(\boldsymbol{\theta}_{TOA}, \lambda_{TOA})$  једнак нули, што представља потребан, али не и довољан услов. Према томе, оптимално решење треба да задовољи следеће услове

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA}, \lambda_{TOA})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{TOA}} = (\mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA} + \lambda_{TOA} \mathbf{S}_{TOA}) \boldsymbol{\theta}_{TOA} - \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{b}_{TOA} = \mathbf{0}, \quad (4.24)$$

односно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA}, \lambda_{TOA})}{\partial \lambda_{TOA}} = \boldsymbol{\theta}_{TOA}^T \mathbf{S}_{TOA} \boldsymbol{\theta}_{TOA} = 0. \quad (4.25)$$

На основу (4.24) одређује се оптимално решење  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{CMLS,TOA}$ , за линеарни метод тежинских најмањих квадрата са ограничењима у облику једнакости, што се може приказати следећим изразом

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{CMLS,TOA} = \left( \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA} + \lambda_{TOA} \mathbf{S}_{TOA} \right)^{-1} \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{b}_{TOA}. \quad (4.26)$$

Да би одредили Лангранжеове множитеље неопходно је заменити (4.26) у (4.25) одакле произилази следећа релација

$$\mathbf{b}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA} \left( \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA} + \lambda_{TOA} \mathbf{S}_{TOA} \right)^{-1} \mathbf{S}_{TOA} \left( \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA} + \lambda_{TOA} \mathbf{S}_{TOA} \right)^{-1} \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{b}_{TOA} = 0. \quad (4.27)$$

Применом декомпозиције на сопствене вредности, матрица  $\mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA} \mathbf{S}_{TOA}$  може се приказати у следећем облику

$$\mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA} \mathbf{S}_{TOA} = \boldsymbol{\Sigma}_{TOA} \mathbf{D}_{TOA} \boldsymbol{\Sigma}_{TOA}^{-1}, \quad (4.28)$$

при чему  $\mathbf{D}_{TOA} = \text{diag} \{ \zeta_{TOA,1}, \zeta_{TOA,2}, \zeta_{TOA,3} \}$  представља матрицу сопствених вредности,  $\boldsymbol{\Sigma}_{TOA}$  означава матрицу сопствених вектора и  $\zeta_{TOA,i}$ ,  $i=1,2,3$ , представљају сопствене вредности матрице  $\mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA} \mathbf{S}_{TOA}$ . Према томе, заменом (4.28) у израз  $\left( \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA} + \lambda_{TOA} \mathbf{S}_{TOA} \right)^{-1}$ , добија се

$$\left( \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA} + \lambda_{TOA} \mathbf{S}_{TOA} \right)^{-1} = \mathbf{S}_{TOA} \boldsymbol{\Sigma}_{TOA} \left( \mathbf{D}_{TOA} + \lambda_{TOA} \mathbf{I}_{TOA} \right)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{TOA}^{-1}. \quad (4.29)$$

Заменом (4.29) у (4.27) и после преуређивања израза добија се

$$\boldsymbol{\alpha}_{TOA}^T \left( \mathbf{D}_{TOA} + \lambda_{TOA} \mathbf{I} \right)^{-2} \boldsymbol{\beta}_{TOA} = 0, \quad (4.30)$$

где су  $\boldsymbol{\alpha}_{TOA} = \boldsymbol{\Sigma}_{TOA}^T \mathbf{S}_{TOA} \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{b}_{TOA} = \left[ \alpha_{TOA,1} \ \alpha_{TOA,2} \ \alpha_{TOA,3} \right]^T$  и

$$\boldsymbol{\beta}_{TOA} = \left( \boldsymbol{\Sigma}_{TOA} \right)^{-1} \mathbf{A}_{TOA}^T \mathbf{W}_{TOA} \mathbf{b}_{TOA} = \left[ \beta_{TOA,1} \ \beta_{TOA,2} \ \beta_{TOA,3} \right]^T.$$

Према томе, вредност Лагранжеовог множитеља  $\lambda_{TOA}$  одређује се решавањем

следеће једначине

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_{TOA,i} \beta_{TOA,i}}{(\zeta_{TOA,i} + \lambda_{TOA})^2} = 0. \quad (4.31)$$

Дакле, поступак одређивања непознате позиције пасивног објекта за постављени модел позиционирања дат је следећим алгоритмом:

*Корак 1.* Изабрати почетну вредност симетричне матрице тежинских коефицијената, односно поставити  $\mathbf{W}_{TOA} = \mathbf{I}$ , при чему  $\mathbf{I}$  означава јединичну матрицу.

*Корак 2.* Израчунати сва реална решења једначине (4.31).

*Корак 3.* За свако  $\lambda_{TOA}$ , из *Корак* 2, одредити вредности параметра  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{CWLS,TOA}$  на основу једначине (4.26). Издвојити све вредности параметра  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{CWLS,TOA}$  за које је функција циља  $J_{CWLS,TOA}(\boldsymbol{\theta}_{TOA})$  минимална.

*Корак 4.* Срачунати симетричну матрицу тежинских коефицијената  $\mathbf{W}_{TOA}$  на основу једначине (4.19).

*Корак 5.* Поновити *Корак* 2-4, све док се не задовољи услов за заустављање нумеричког поступка.

## 4.2 Линеаризација пасивног TDOA модела

У циљу линеаризације пасивног модела позиционирања заснованог на TDOA поступку, на основу израза (2.11), произилази да се растојање између предајника  $T_{x,i}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  и непознате локације пасивног објекта може приказати у облику израза

$$\|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}\|_2 = (\tilde{r}_i - n_{TDOA,i}) - \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (4.32)$$

Квадрирањем обе стране једначине (4.32) и после замене  $R^r = \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|$  добија се једначина у облику следећег израза

$$-2(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_i^t)^T \mathbf{x} - 2\tilde{r}_i R^r + \tilde{r}_i^2 + \|\mathbf{x}_r\|^2 - \|\mathbf{x}_i^t\|^2 = 2(\tilde{r}_i - R^r)n_{TDOA,i}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (4.33)$$

где се занемарује  $n_{TDOA,i}^2$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , као мала величина вишег реда, тако да се добија апроксимација у облику следећег система једначина, који се може приказати у матричном облику

$$\mathbf{A}_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA} = \mathbf{b}_{TDOA} + \mathbf{m}_{TDOA}, \quad (4.34)$$

где су уведене следеће ознаке

$$\mathbf{A}_{TDOA} = 2 \begin{bmatrix} x_r - x_1^t & y_r - y_1^t & \tilde{r}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r - x_N^t & y_r - y_N^t & \tilde{r}_N \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{TDOA} = [x \quad y \quad R^r]^T, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{b}_{TDOA} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_1^2 + x_r^2 + y_r^2 - (x_1^t)^2 - (y_1^t)^2 \\ \vdots \\ \tilde{r}_N^2 + x_r^2 + y_r^2 - (x_N^t)^2 - (y_N^t)^2 \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

и

$$\mathbf{m}_{TDOA} = 2 \begin{bmatrix} (R^r - \tilde{r}_1)n_{TDOA,1} \\ \vdots \\ (R^r - \tilde{r}_N)n_{TDOA,N} \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Ако је при пропагацији сигнала у радио каналу присутан Гаусов шум, тада је неопходно применити више предајника, ради побољшања тачности одређивања непознате позиције пасивног објекта.

Систем линеарних једначина (4.34) за постављени модел позиционирања је предетерминисан, за чије решавање је неопходно применити линеарна метода најмањих квадрата.

Функција циља за линеаризовани модел лоцирања заснована на методи најмањих квадрата,  $J_{LLS,TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA})$ , може се приказати у облику следеће релације

$$J_{LLS,TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA}) = (\mathbf{A}_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA} - \mathbf{b}_{TDOA})^T (\mathbf{A}_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA} - \mathbf{b}_{TDOA}). \quad (4.39)$$

Дакле, полазећи од формиране функције циља поставља се оптимизациони проблем, записан у следећем облику

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} J_{LLS, TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA}). \quad (4.40)$$

Оптимально решење  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS, TDOA}$  одређује се на основу услова да је први извод функције циља  $J_{LLS, TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA})$  једнак нули, што представља потребан, али не и довољан услов. Према томе, следи да је вектор  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS, TDOA}$  одређен изразом

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS, TDOA} = (\mathbf{A}_{TDOA}^T \mathbf{A}_{TDOA})^{-1} \mathbf{A}_{TDOA}^T \mathbf{b}_{TDOA}. \quad (4.41)$$

При чему  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS, TDOA}$  представља јединствено решење оптимизационог проблема (4.40), под условом  $\det(\mathbf{A}_{TDOA}^T \mathbf{A}_{TDOA}) \neq 0$ . Коначно, на основу вектора колоне  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{TDOA}$  непосредно произилазе координате оптималне локације пасивног објекта које се могу приказати у облику следећег вектора

$$\hat{\mathbf{x}}_{LLS, TDOA} = \left[ \left[ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS, TDOA} \right]_1 \quad \left[ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS, TDOA} \right]_2 \right]^T, \quad (4.42)$$

где  $\left[ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS, TDOA} \right]_i$  представља  $i$ -ти елемент вектора  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LLS, TDOA}$ .

#### 4.2.1 Линеарна метода тежинских најмањих квадрата

На аналоган начин приступа се формирању линеарне методе тежинских најмањих квадрата за модел позиционирања заснован на TDOA поступку. У овом случају, оптимално решење добија се одређивањем минимума функције циља  $J_{WLS, TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA})$ , која је записана у следећем облику

$$J_{WLS, TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA}) = (\mathbf{A}_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA} - \mathbf{b}_{TDOA})^T \mathbf{W}_{TDOA} (\mathbf{A}_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA} - \mathbf{b}_{TDOA}), \quad (4.43)$$

где је  $\mathbf{W}_{TDOA} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  позитивно дефинитна и симетрична матрица тежинских коефицијената. Како је  $\mathbf{m}_{TDOA}$  довољно мала величина, тада се матрица  $\mathbf{W}_{TDOA}$  може одредити следећим изразом

$$\mathbf{W}_{TDOA} = \left[ E \left\{ \mathbf{m}_{TDOA} \mathbf{m}_{TDOA}^T \right\} \right]^{-1} = \left( \mathbf{D}_{TDOA}^T \mathbf{C}_{TDOA} \mathbf{D}_{TDOA} \right)^{-1}, \quad (4.44)$$

где је  $\mathbf{C}_{TDOA}$  матрица коваријансе случајног вектора  $\mathbf{r}_{TDOA}$ , таква да је  $\mathbf{C}_{TDOA} = E \left[ \mathbf{m}_{TDOA} \mathbf{m}_{TDOA}^T \right] = \sigma_{TDOA}^2 \mathbf{I}_N$ , при чему  $\mathbf{I}_N$  означава  $(N \times N)$  димензиону јединичну матрицу и  $\mathbf{D}_{TDOA} = \text{diag} \left\{ 2(\tilde{r}_1 - R^r), \dots, 2(\tilde{r}_N - R^r) \right\}$ .

Дакле, полазећи од функције циља  $J_{WLS,TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA})$  поставља се оптимизациони проблем, записан у следећем облику

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{WLS,TDOA} = \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2}{\text{argmin}} J_{WLS,TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA}). \quad (4.45)$$

одакле следи да је вектор  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{WLS,TDOA}$  одређен изразом

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{WLS,TDOA} = \left( \mathbf{A}_{TDOA}^T \mathbf{W}_{TDOA} \mathbf{A}_{TDOA} \right)^{-1} \mathbf{A}_{TDOA}^T \mathbf{W}_{TDOA} \mathbf{b}_{TDOA}. \quad (4.46)$$

## 4.2.2 Линеарна метода тежинских најмањих квадрата са ограничењима

На основу извођења у претходном поглављу, при формирању линеарне методе тежинских најмањих квадрата са ограничењима полази се од критеријума оптималности WLS методе која се проширује увођењем ограничења типа једнакости другог реда између непознате позиције објекта и смене  $R^r$ , тако да се добија следећи оптимизациони проблем

$$\min_{\boldsymbol{\theta}_{TDOA}} J_{CWLS,TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA}) = \min_{\boldsymbol{\theta}_{TDOA}} \left( \mathbf{A}_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA} - \mathbf{b}_{TDOA} \right)^T \mathbf{W}_{TDOA} \left( \mathbf{A}_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA} - \mathbf{b}_{TDOA} \right), \quad (4.47)$$

под условом  $\boldsymbol{\theta}_{TDOA}^T \mathbf{S}_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA} = 0$ ,

где је  $\mathbf{S}_{TDOA} = \text{diag} \{1, 1, -1\}$  дијагонална матрица.

Како није могуће одредити решење у затвореном облику, постављени оптимизациони проблем са ограничењима трансформише се у оптимизациони проблем без ограничења, увођењем Лагранжеве функције  $\mathcal{L}_{TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA}, \lambda_{TDOA})$ , односно

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\theta}_{TDOA}, \lambda_{TDOA}} \mathcal{L}_{TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA}, \lambda_{TDOA}) \\ & = \min_{\boldsymbol{\theta}_{TDOA}, \lambda_{TDOA}} (\mathbf{A}_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA} - \mathbf{b}_{TDOA})^T \mathbf{W}_{TDOA} (\mathbf{A}_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA} - \mathbf{b}_{TDOA}) + \lambda_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA}^T \mathbf{S}_{TDOA} \boldsymbol{\theta}_{TDOA}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Решавањем овог оптимизационог проблема добија се оптимално решење  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{CWLS, TDOA}$  у облику следећег израза

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{CWLS, TDOA} = (\mathbf{A}_{TDOA}^T \mathbf{W}_{TDOA} \mathbf{A}_{TDOA} + \lambda_{TDOA} \mathbf{S}_{TDOA})^{-1} \mathbf{A}_{TDOA}^T \mathbf{W}_{TDOA} \mathbf{b}_{TDOA}. \quad (4.49)$$

Аналогно поступку који је дат за ТОА модел позиционирања, вредност Лагранжевог множитеља  $\lambda_{TDOA}$  одређује се решавањем следеће једначине

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_{TDOA,i} \beta_{TDOA,i}}{(\zeta_{TDOA,i} + \lambda_{TDOA})^2} = 0, \quad (4.50)$$

где су  $\boldsymbol{\alpha}_{TDOA} = \boldsymbol{\Sigma}_{TDOA}^T \mathbf{S}_{TDOA} \mathbf{A}_{TDOA}^T \mathbf{W}_{TDOA} \mathbf{b}_{TDOA} = [\alpha_{TDOA,1} \ \alpha_{TDOA,2} \ \alpha_{TDOA,3}]^T$  и

$$\boldsymbol{\beta}_{TDOA} = (\boldsymbol{\Sigma}_{TDOA})^{-1} \mathbf{A}_{TDOA}^T \mathbf{W}_{TDOA} \mathbf{b}_{TDOA} = [\beta_{TDOA,1} \ \beta_{TDOA,2} \ \beta_{TDOA,3}]^T.$$

Дакле, поступак одређивања непознате позиције пасивног објекта за постављени пасивни модел позиционирања дат је следећим алгоритмом:

*Корак 1.* Изабрати почетну вредност симетричне матрице тежинских коефицијената, односно поставити  $\mathbf{W}_{TDOA} = \mathbf{I}$ , при чему  $\mathbf{I}$  означава јединичну матрицу.

*Корак 2.* Израчунати сва реална решења једначине (4.50).

*Корак 3.* За свако  $\lambda_{TDOA}$ , из *Корака 2*, одредити вредности параметра  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{CWLS, TDOA}$  на основу једначине (4.49). Издвојити све вредности параметра  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{CWLS, TDOA}$  за које је функција циља  $J_{CWLS, TDOA}(\boldsymbol{\theta}_{TDOA})$  минимална.

*Корак 4.* Срачунати симетричну матрицу тежинских коефицијената  $\mathbf{W}_{TDOA}$  на основу једначине (4.44).

*Корак 5.* Поновити *Кораке 2-4*, све док се не задовољи услов за заустављање нумеричког поступка.



## 5. Семидефинитно програмирање

Семидефинитно програмирање обухвата широку класу оптимизационих метода које се могу ефикасно применити на решавање проблема код којих су критеријумска функција и ограничења нелинеарне и неконвексне функције [101, 102]. Применом методе семидефинитног програмирања постављени нелинеарни и неконвексни оптимизациони проблем може се трансформисати у конвексни проблем, који се решава применом развијених софтверских пакета као што је CVX toolbox [51, 52].

### 5.1 Семидефинитно програмирање за ТОА модел

У овом одељку биће приказан проблем семидефинитног програмирања, који се може применити за решавање проблема лоцирања пасивног објекта заснованог на мерењу ТОА параметара [102]. Основна идеја примене методе семидефинитног програмирања састоји се у трансформацији неконвексног оптимизационог проблема у конвексни проблем.

Полазећи од израза (3.9) – (3.12), постављени оптимизациони проблем естимације непознате локације објекта  $\mathbf{x}$ , може се приказати у облику релације

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})). \quad (5.1)$$

Ради формирања проблема семидефинитног програмирања полази се од вектора  $\mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})$ , који се може записати у следећем облику

$$\mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{g}_{TOA}(\mathbf{x}), \quad (5.2)$$

где је  $\mathbf{g}_{TOA}$  одговарајући вектор записан на следећи начин

$$\mathbf{g}_{TOA} = \left[ \|\mathbf{x}\|_2 \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^r\|_2 \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2^r\|_2 \cdots \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N^r\|_2 \right]^T, \quad (5.3)$$

и  $\mathbf{H}$  означава матрицу дату следећим изразом

$$\mathbf{H} = [\mathbf{1}_N \quad \mathbf{I}_N] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

при чему  $\mathbf{1}_N$  представља  $N$  димензионални вектор чији су сви елементи јединице,  $\mathbf{I}_N$  означава јединичну матрицу димензија  $(N \times N)$ . Означимо са  $[\mathbf{g}_{TOA}]_{1,1}^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2$  и  $[\mathbf{g}_{TOA}]_{i,i}^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i-1}^r\|_2^2$ ,  $\forall i \in \{2, \dots, N+1\}$ , ограничења дата једнакостима између предајника  $\mathbf{x}_T$  и непознате позиције пасивног објекта  $\mathbf{x}$ , као и између пријемника  $\mathbf{x}_i^r$  и пасивног објекта  $\mathbf{x}$ , респективно. Према томе, оптимизациони проблем дат изразом (5.1) може се приказати у облику следећег оптимизационог проблема са ограничењима

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \mathbf{g}_{TOA}} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TOA})^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TOA}) \\ & \text{под условом} \quad [\mathbf{g}_{TOA}]_{1,1}^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2, \\ & \quad [\mathbf{g}_{TOA}]_{i,i}^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i-1}^r\|_2^2, \quad \forall i \in \{2, \dots, N+1\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Применом одговарајућих матричних трансформација функција циља оптимизационог проблема (5.5) може се приказати у следећем облику

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TOA})^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TOA}) \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{TOA} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{H} & -\mathbf{H}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{r}_{TOA} \\ -\mathbf{r}_{TOA}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{H} & \mathbf{r}_{TOA}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{r}_{TOA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{TOA} \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Према томе, на основу својства  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \text{Tr}(\mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{A})$  и увођењем  $\mathbf{G}_{TOA} = \mathbf{g}_{TOA} \mathbf{g}_{TOA}^T$ , израз (5.6) може се приказати у облику следеће релације

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{TOA} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{H} & -\mathbf{H}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{r}_{TOA} \\ -\mathbf{r}_{TOA}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{H} & \mathbf{r}_{TOA}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{r}_{TOA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{TOA} \\ 1 \end{bmatrix} = \\ & = \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{TOA} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{TOA}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_{TOA} \right) = \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{TOA} & \mathbf{g}_{TOA} \\ \mathbf{g}_{TOA}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_{TOA} \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где је матрица  $\mathbf{P}_{TOA}$  дефинисана на следећи начин

$$\mathbf{P}_{TOA} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{H} & -\mathbf{H}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{r}_{TOA} \\ -\mathbf{r}_{TOA}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{H} & \mathbf{r}_{TOA}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{r}_{TOA} \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

при чему  $\text{Tr}(\cdot)$  означава траг квадратне матрице.

Увођењем израза  $z = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ , ограничења дата у оптимизационом проблему (5.5) трансформишу се на следећи начин

$$[\mathbf{G}_{TOA}]_{1,1} = \|\mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = z, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}_{TOA}]_{i,i} &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i-1}^r\|_2^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{x}_{i-1}^r + (\mathbf{x}_{i-1}^r)^T \mathbf{x}_{i-1}^r \\ &= z - 2\mathbf{x}^T \mathbf{x}_{i-1}^r + (\mathbf{x}_{i-1}^r)^T \mathbf{x}_{i-1}^r, \quad \forall i \in \{2, \dots, N+1\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

После замене једначина (5.7) и (5.8) у израз (5.5) произилази да се дати оптимизациони проблем може приказати у следећем облику

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \mathbf{g}_{TOA}, \mathbf{G}_{TOA}, z} \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{TOA} & \mathbf{g}_{TOA} \\ \mathbf{g}_{TOA}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_{TOA} \right) \\ & \text{под условом} \quad [\mathbf{G}_{TOA}]_{1,1} = z, \\ & \quad [\mathbf{G}_{TOA}]_{i,i} = z - 2\mathbf{x}^T \mathbf{x}_{i-1}^r + (\mathbf{x}_{i-1}^r)^T \mathbf{x}_{i-1}^r, \quad \forall i \in \{2, \dots, N+1\}, \\ & \quad \mathbf{G}_{TOA} = \mathbf{g}_{TOA} \mathbf{g}_{TOA}^T, \\ & \quad z = \mathbf{x}^T \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

У наставку овог одељка приказане су две основне теореме са доказима на које се позивамо у излагању при изради дисертације [103-105].

**Теорема 5.1.** Нека су  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  вектори у  $\mathbb{R}^n$ . Тада важи Коши – Шварцова неједнакост:

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad (5.12)$$

где је  $\|x\| = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}$  и  $\|y\| = (|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2)^{1/2}$ .

**Доказ.** С обзиром да је  $\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sum_{k=1}^n |x_k| |y_k|$ , довољно је доказати да Коши –

Шварцова неједнакост важи за ненегативне бројеве  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Ако је  $x = 0$  или  $y = 0$  онда неједнакост тривијално важи, па у наставку посматрамо  $\|x\| > 0$  и  $\|y\| > 0$ .

Однос геометријске и аритметичке средине имплицира

$$\frac{x_k}{\|x\|} \frac{y_k}{\|y\|} = \left( \frac{x_k^2}{\|x\|^2} \frac{y_k^2}{\|y\|^2} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{x_k^2}{\|x\|^2} + \frac{y_k^2}{\|y\|^2} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.13)$$

Сумирањем по  $k$  добија се

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\|x\|} \frac{y_k}{\|y\|} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{x_k^2}{\|x\|^2} + \frac{y_k^2}{\|y\|^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\|x\|^2} + \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{\|y\|^2} \right). \quad (5.14)$$

Како је

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{\|x\|^2} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{\|y\|^2} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k^2}{\|y\|^2} = 1, \quad (5.15)$$

добија се

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\|x\|} \frac{y_k}{\|y\|} \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \|x\| \|y\|, \quad (5.16)$$

чиме је тврђење доказано.

Према томе, применом Коши-Шварцове неједнакости (*Cauchy-Schwarz Inequality*) на све елементе матрице  $\mathbf{G}_{ТОА}$  ван главне дијагонале добија се следећи израз

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{G}_{TOA}]_{i,j} &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i-1}^r\|_2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{j-1}^r\|_2 \\
 &\geq \left| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i-1}^r)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{j-1}^r) \right| \\
 &= \left| \mathbf{x}^T \mathbf{x} - (\mathbf{x}_{i-1}^r + \mathbf{x}_{j-1}^r)^T \mathbf{x} + (\mathbf{x}_{i-1}^r)^T \mathbf{x}_{j-1}^r \right|, \\
 &\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N+1\}, i \neq j,
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

при чему важи да је  $\mathbf{x}_0^r = \mathbf{x}_T = [0 \ 0]^T$ .

Приметимо да су ограничења  $\mathbf{G}_{TOA} = \mathbf{g}_{TOA} \mathbf{g}_{TOA}^T$  и  $z = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$  задата у оквиру оптимizacionог проблема (5.11) нелинеарна и неконвексна, одакле следи да је посматрани оптимizacionи проблем нелинеаран и неконвексан проблем на скупу допустивих решења. У циљу добијања оптималног решења, неконвексна ограничења типа једнакости  $\mathbf{G}_{TOA} = \mathbf{g}_{TOA} \mathbf{g}_{TOA}^T$  и  $z = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$  се релаксирају у конвексна ограничења типа неједнакости, као што је записано у облику следеће релације

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}_{TOA} - \mathbf{g}_{TOA} \mathbf{g}_{TOA}^T &\succeq \mathbf{0}, \\
 z \mathbf{I}_2 - \mathbf{x} \mathbf{x}^T &\succeq \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

**Теорема 5.2.** Нека је  $A > 0$ . Онда је

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0 \tag{5.19}$$

ако и само ако је  $C - B^T A^{-1} B \geq 0$ .

**Доказ.**

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (C - B^T A^{-1} B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1} B^T \\ 0 & I \end{bmatrix}; \\
 \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & (C - B^T A^{-1} B) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1} B^T \\ 0 & I \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Како је  $\left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} I & A^{-1} B^T \\ 0 & I \end{bmatrix}$ , закључујемо да је

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow C - B^T A^{-1} B \geq 0 \tag{5.21}$$

подсећајући се да је матрица  $A$  позитивно дефинитна по претпоставци леме.

Матрица  $C - B^T A^{-1} B$  је Шуров комплемент матрице  $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$ .

Дакле, применом теореме Шурових комплемената (*Schur Complement*), постављена ограничења типа неједнакости се могу приказати у облику линеарних матричних неједнакости (*Linear Matrix Inequalities*, LMI) на следећи начин

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{TOA} & \mathbf{g}_{TOA} \\ \mathbf{g}_{TOA}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & z \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \quad (5.23)$$

Треба приметити да су матрице дате изразима (5.22) и (5.23) симетричне и позитивно дефинитне матрице ранга 1, одакле следи да су ова ограничења конвексне функције.

На основу примењених релаксација могуће је формирати конвексни оптимизациони проблем, који се може записати на следећи начин

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \mathbf{g}_{TOA}, \mathbf{G}_{TOA}, z} \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{TOA} & \mathbf{g}_{TOA} \\ \mathbf{g}_{TOA}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_{TOA} \right) \\ & \text{под условом} \quad [\mathbf{G}_{TOA}]_{1,1} = z, \\ & \quad [\mathbf{G}_{TOA}]_{i,i} = z - 2\mathbf{x}^T \mathbf{x}'_{i-1} + (\mathbf{x}'_{i-1})^T \mathbf{x}'_{i-1}, \forall i \in \{2, \dots, N+1\}, \\ & \quad [\mathbf{G}_{TOA}]_{i,j} \geq \left| z - (\mathbf{x}'_{i-1} + \mathbf{x}'_{j-1})^T \mathbf{x} + (\mathbf{x}'_{i-1})^T \mathbf{x}'_{j-1} \right|, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N+1\}, i \neq j, \\ & \quad \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{TOA} & \mathbf{g}_{TOA} \\ \mathbf{g}_{TOA}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \\ & \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & z \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Према томе, формиран проблем семидефинитног програмирања је конвексан оптимизациони проблем који се решава применом развијених софтверских пакета као што је CVX toolbox [51, 52].

## 5.2 Семидефинитно програмирање за TDOA модел

У циљу решавања проблема естимације непознате позиције објекта, у овом одељку биће приказана примена проблема семидефинитног програмирања за решавање пасивног TDOA модела позиционирања [53]. Полазећи од дефиниције критеријума оптималности – функције циља, која је изложена у трећем поглављу, проблем естимације непознате позиције објекта  $\mathbf{x}$ , може се приказати у облику релације

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in R^2} (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))^T (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})). \quad (5.25)$$

Означимо са  $R^r = \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2$ , ограничење типа једнакости између непознате позиције пасивног објекта  $\mathbf{x}$  и пријемника  $\mathbf{x}_r$  познате позиције. Према томе, оптимизациони проблем дат изразом (5.25) може се приказати у облику следећег оптимизационог проблема са ограничењима

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))^T (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})) \\ & \text{под условом} \quad R^r = \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Прикажимо функцију циља оптимизационог проблема (5.26) у скаларном облику

$$\sum_i^N (\tilde{r}_i - \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}\|_2)^2 = \sum_i^N \left( \frac{\tilde{r}_i^2 + \|\mathbf{x}_r\|_2^2 - \|\mathbf{x}_i^t\|_2^2 - 2(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_i^t)^T \mathbf{x} - 2\tilde{r}_i R^r}{\tilde{r}_i - R^r} \right)^2. \quad (5.27)$$

Означимо са  $b_i$ ,  $i$ -ти елемент вектора  $\mathbf{b}_{TDOA} = [b_1, \dots, b_i, \dots, b_N]^T$ , тако да је

$b_i = \tilde{r}_i^2 + \|\mathbf{x}_r\|_2^2 - \|\mathbf{x}_i^t\|_2^2$  и са  $\mathbf{a}_i$  вектор који представља  $i$ -ти ред матрице

$$\mathbf{A}_{TDOA} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

где је  $\mathbf{a}_i = [A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{iN}]$ , тако да важи  $\mathbf{a}_i = 2 \left[ (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_i^t)^T \quad \tilde{r}_i \right]$ . Тада се применом одговарајућих алгебарских трансформација, функција циља оптимизационог проблема (5.26) може се приказати у следећем облику

$$\sum_{i=1}^N \frac{(b_i - \mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}_{TDOA})^2}{(\tilde{r}_i - R^r)^2} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{b_i}{\tilde{r}_i - R^r} - \frac{\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}_{TDOA}}{\tilde{r}_i - R^r} \right)^2, \quad (5.29)$$

који треба минимизовати по променљивој  $\boldsymbol{\theta}_{TDOA} = [\mathbf{x} \quad R^r]^T$ . У циљу експлицитног решавања постављеног оптимизационог проблема по непознатој позицији пасивног објекта  $\mathbf{x}$ , потребно је извршити даљу трансформацију функције циља. Према томе, ако вектор  $\mathbf{a}_i$  представимо у форми блок матрице

$$\mathbf{a}_i = [\tilde{\mathbf{a}}_i \quad v_i], \quad (5.30)$$

где су  $\tilde{\mathbf{a}}_i = [A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{iN-1}]$  и  $v_i = A_{iN}$ . Тада се скаларни производ вектора  $\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}_{TDOA}$  може представити у облику следећег изрази

$$\mathbf{a}_i \boldsymbol{\theta}_{TDOA} = [\tilde{\mathbf{a}}_i \quad v_i] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ R^r \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} + v_i R^r. \quad (5.31)$$

После замене једначине (5.31) у израз (5.29), произилази да се дата функција циља може приказати у облику следеће релације

$$J_{SDP, TDOA} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{b_i}{\tilde{r}_i - R^r} - \frac{\tilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x}}{\tilde{r}_i - R^r} - \frac{v_i R^r}{\tilde{r}_i - R^r} \right]^2. \quad (5.32)$$

Према томе, применом одговарајућих матричних трансформација на основу својства  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \text{Tr}(\mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^T)$  и увођењем израза  $z = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ , функција циља (5.32) може се приказати у следећем облику



$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mathbf{a}}_i^T \tilde{\mathbf{a}}_i}{(\tilde{r}_i - R^r)^2} & \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mathbf{a}}_i^T (v_i R^r - b_i)}{(\tilde{r}_i - R^r)^2} \\ \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mathbf{a}}_i (v_i R^r - b_i)}{(\tilde{r}_i - R^r)^2} & \sum_{i=1}^N \frac{(v_i R^r - b_i)^2}{(\tilde{r}_i - R^r)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \\
 & = \text{Tr} \left( \mathbf{P}_{TDOA} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \text{Tr} \left( \mathbf{P}_{TDOA} \begin{bmatrix} z & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & 1 \end{bmatrix} \right),
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

где је матрица  $\mathbf{P}_{TDOA}$  дефинисана на следећи начин

$$\mathbf{P}_{TDOA} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mathbf{a}}_i^T \tilde{\mathbf{a}}_i}{(\tilde{r}_i - R^r)^2} & \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mathbf{a}}_i^T (v_i R^r - b_i)}{(\tilde{r}_i - R^r)^2} \\ \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\mathbf{a}}_i (v_i R^r - b_i)}{(\tilde{r}_i - R^r)^2} & \sum_{i=1}^N \frac{(v_i R^r - b_i)^2}{(\tilde{r}_i - R^r)^2} \end{bmatrix}. \tag{5.34}$$

После замене једначине (5.33) у израз (5.26) произилази да се дати оптимизациони проблем може приказати у следећем облику

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}, z} \text{Tr} \left( \mathbf{P}_{TDOA} \begin{bmatrix} z & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & 1 \end{bmatrix} \right) \\
 & \text{под условом} \quad R^r = \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2, \\
 & \quad \quad \quad z = \mathbf{x}^T \mathbf{x}.
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Применом својства  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \text{Tr}(\mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{A})$  ограничења дата у оптимизационом проблему (5.35) могу се записати на следећи начин

$$\begin{aligned}
 & R^{r2} = \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}_r^T \mathbf{x}_r - \mathbf{x}_r^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{x}_r + \mathbf{x}^T \mathbf{x} \\
 & \Leftrightarrow R^{r2} = \text{Tr} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{x}_r \\ -\mathbf{x}_r^T & \mathbf{x}_r^T \mathbf{x}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & 1 \\ \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\
 & = \text{Tr} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{x}_r \\ -\mathbf{x}_r^T & \mathbf{x}_r^T \mathbf{x}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & 1 \end{bmatrix} \right\},
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

при чему  $\mathbf{I}_n$  означава јединичну матрицу димензија  $(n \times n)$ .

Приметимо да је ограничење  $z = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ , које је задато у оквиру оптимизационог проблема (5.35) нелинеарно и неконвексно, одакле следи да је посматрани

оптимизациони проблем нелинеаран и неконвексан на скупу допустивих решења. У циљу добијања оптималног решења, неконвексна ограничења типа једнакости се релаксирају у конвексна ограничења типа неједнакости, као што је записано у облику следеће релације

$$z - \mathbf{x}^T \mathbf{x} \succeq 0. \quad (5.37)$$

Применом теореме Шурових комплемената, ограничења (5.37) може се приказати у облику линеарне матричне неједнакости на следећи начин

$$\begin{bmatrix} z & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \quad (5.38)$$

Треба приметити да је добијена матрица симетрична и позитивно дефинитна матрица ранга 1, одакле следи да је добијено ограничење конвексно.

На основу примењених релаксација могуће је формирати оптимизациони проблем, који се може записати на следећи начин

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, z, R^r} \text{Tr} \left( \mathbf{P}_{TDOA} \begin{bmatrix} z & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \text{под условом} \quad R^{r2} = \text{Tr} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{x}_r \\ -\mathbf{x}_r^T & \mathbf{x}_r^T \mathbf{x}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & 1 \end{bmatrix} \right\} \\ \begin{bmatrix} z & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & 1 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Постављени оптимизациони проблем (5.39) треба минимизовати у односу на непознате  $\{\mathbf{x}, z, R^r\}$ . Треба приметити да за фиксно  $R^r$  постављени проблем (5.39) постаје конвексни оптимизациони проблем. Међутим, у општем случају, проблем дат изразом (5.39) је неконвексни оптимизациони проблем када се решава у односу на  $\{\mathbf{x}, z, R^r\}$ . Према томе, приступајући решавању оптимизационог проблема (5.39), потребно је најпре одредити оптималну вредност променљиве  $R^r$  за коју посматрани оптимизациони проблем постаје конвексан. Услед природе проблема одређивања непознате позиције објекта у пасивном TDOA моделу позиционирања, јасно је да параметар  $R^r$  мора да буде позитиван реалан број, што поједностављује проблем одређивања оптималне вредности овог параметра. Ради одређивања

оптималне вредности променљиве  $R^r$  примењена је метода златног пресека. У реализацији методе златног пресека не јавља се рачунски проблем дељења бројева блиским или чак једнаким нули, што се може догодити при примени осталих метода једнодимензионалне безусловне оптимизације.

Приступајући одређивању оптималне вредности променљиве  $R^r$ , за коју је оптимизациони проблем (5.39) конвексан, полази се од функције циља

$$J_{SDP, TDOA}(\mathbf{x}, z, R^r) = \text{Tr} \left( \mathbf{P}_{TDOA} \begin{bmatrix} z & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & 1 \end{bmatrix} \right). \quad (5.40)$$

Дакле, познајући параметар златног пресека  $\varphi$  можемо дефинисати и одговарајуће тачке унутар интервала  $[R_l^r, R_u^r]$ , односно

$$R_1^r = R_u^r - \varphi(R_u^r - R_l^r), \quad (5.41)$$

$$R_2^r = R_l^r + \varphi(R_u^r - R_l^r), \quad (5.42)$$

при чему

$$\varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.61803, \quad (5.43)$$

где  $\varphi$  представља параметар сразмере две узастопне итерације, у литератури познат под називом параметар златног пресека. Алгоритам започиње упоређивањем вредности функција  $J_{SDP, TDOA}(\mathbf{x}_1, z_1, R_1^r)$  и  $J_{SDP, TDOA}(\mathbf{x}_2, z_2, R_2^r)$ , у унутрашњим тачкама  $R_1^r$  и  $R_2^r$ , респективно, ради елиминације неког одсечка интервала  $[R_l^r, R_u^r]$ . Према томе, разликујемо следећа три случаја:

- Ако је  $J_{SDP, TDOA}(\mathbf{x}_1, z_1, R_1^r) < J_{SDP, TDOA}(\mathbf{x}_2, z_2, R_2^r)$ , тада оптимална тачка припада интервалу  $[R_l^r, R_2^r]$ .
- У супротном, када је  $J_{SDP, TDOA}(\mathbf{x}_1, z_1, R_1^r) > J_{SDP, TDOA}(\mathbf{x}_2, z_2, R_2^r)$ , тада оптимална тачка припада интервалу  $[R_1^r, R_u^r]$ .

- Ако је  $J_{SDP,TDOA}(\mathbf{x}_1, z_1, R_1^r) = J_{SDP,TDOA}(\mathbf{x}_2, z_2, R_2^r)$ , тада се оптимална тачка налази у интервалу  $[R_1^r, R_2^r]$ .

На основу приказаног поступка произилази да се оптимална тачка налази елиминацијом одсецака почетног интервала  $[R_l^r, R_u^r]$ . Дакле, оптимизациони процес методе златног пресека састоји се од коначног броја итерација, којима се почетни интервал претраживања смањује до жељене вредности. Итеративни процес изналажења минимума функције се зауставља када се испуни следећи услов

$$|R_1^r - R_2^r| \leq \varepsilon, \quad (5.44)$$

где је  $\varepsilon$  унапред задата тачност.

Према томе, алгоритам семидефинитног програмирања за постављени пасивни TDOA модел позиционирања дат је следећим корацима:

*Корак 1.* Поставити почетни интервал  $[R_l^r, R_u^r]$ .

*Корак 2.* Израчунати вредност променљиве  $R^r$  у тачкама  $R_1^r$  и  $R_2^r$  према изразима (5.41) и (5.42).

*Корак 3.* Решити оптимизациони проблем дат изразом (5.39) за добијене тачке у интервалу  $R^r = R_1^r$  и  $R^r = R_2^r$ .

*Корак 4.* Ако је  $J_{SDP,TDOA}(\mathbf{x}_1, z_1, R_1^r) < J_{SDP,TDOA}(\mathbf{x}_2, z_2, R_2^r)$ , тада оптимална тачка припада интервалу  $[R_l^r, R_2^r]$ , у супротном тачка припада  $[R_1^r, R_u^r]$ .

*Корак 5.* Поновити *Корак*е 2 - 4 док се не задовољи услов  $|R_1^r - R_2^r| \leq \varepsilon$ .

## 6. Крамер-Раова граница прецизности

Процена прецизности локализације непознатог објекта један је од кључних параметара система позиционирања. При процени непознатих параметара постављеног пасивног модела позиционирања могуће је применити више различитих алгоритама за естимацију, тако да је од значаја одредити квалитет одговарајућег естиматора. Према томе, у циљу процене прецизности локализације могу се применити теоријска ограничења која не зависе од примењеног алгорита за естимацију, већ су везана за постављени математички модел позиционирања као и за узорак. У овом поглављу биће разматрана Крамер-Раова граница која представља доње ограничење прецизности за сваки од непознатих параметара постављеног модела позиционирања. Дакле, Крамер-Раова граница непристрасног естиматора при оцени параметра представља најмање могуће одступање средње вредности од стварне вредности параметра који се процењује [106, 107]. У области позиционирања, Крамер-Раова граница везана је за математички модел пасивног лоцирања, односно за апостериорну густину расподеле случајне променљиве у односу на непознату позицију пасивног објекта [34, 38]

### 6.1 Крамер-Раова неједнакост за ТОА модел лоцирања

У циљу примене Крамер-Раове неједнакости за ТОА модел позиционирања полази се од израза (2.4), одакле непосредно следи математичко очекивање случајне променљиве  $\mathbf{r}_{TOA}$  за дати модел позиционирања, које се може приказати у облику израза

$$E[\mathbf{r}_{TOA}] = E[\mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})] + E[\mathbf{n}_{TOA}], \quad (6.1)$$

како је

$$E[\mathbf{n}_{TOA}] = 0, \quad (6.2)$$

добивамо да је

$$E[\mathbf{r}_{TOA}] = E[\mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})]. \quad (6.3)$$

Апостериорна густина расподеле  $p(\mathbf{r}_{TOA}|\mathbf{x})$  случајне променљиве  $\mathbf{r}_{TOA}$  у односу на непознату позицију пасивног објекта  $\mathbf{x} = [x \ y]^T \in R^2$  може се приказати у облику следећег израза

$$p(\mathbf{r}_{TOA}|\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(\mathbf{C}_{TOA})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}))\right), \quad (6.4)$$

при чему  $\mathbf{C}_{TOA}$  представља матрицу коваријансе случајног вектора  $\mathbf{r}_{TOA}$ , која је позната, односно

$$\mathbf{C}_{TOA} = \text{diag}(\sigma_{TOA,1}^2, \dots, \sigma_{TOA,N}^2). \quad (6.5)$$

Здружена функција густине условне вероватноће случајног вектора  $\mathbf{r}_{TOA}$  у односу на  $\mathbf{x}$  може се приказати у облику следећег израза

$$p(\mathbf{r}_{TOA}|\mathbf{x}) = p(r_{TOA,1}, \dots, r_{TOA,N}|\mathbf{x}) = \prod_i^N p_i(r_{TOA,i}|\mathbf{x}), \quad (6.6)$$

односно

$$p(\mathbf{r}_{TOA}|\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N \sigma_{TOA,i}^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(r_{TOA,i} - d_{TOA,i})^2}{\sigma_{TOA,i}^2}\right). \quad (6.7)$$

При томе, ознака  $\mathcal{N}(\mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}), \text{diag}(\sigma_{TOA,1}^2, \dots, \sigma_{TOA,N}^2))$ , симболички означава нормалну расподелу случајног вектора  $\mathbf{r}_{TOA}$ .

Дакле, Крамер-Раову границу неједнакости за функцију условне густине расподеле  $p(\mathbf{r}_{TOA}|\mathbf{x})$ , означавамо са

$$\mathbf{CRB}_{TOA}(\mathbf{x}) = \frac{1}{E \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x}) \right]^2} = - \frac{1}{E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \ln p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x}) \right]}, \quad (6.8)$$

при чему  $\mathbf{CRB}_{TOA}(\mathbf{x})$  представља најмању варијансу коју може имати једна непристрасна оцена. Према томе, Крамер – Раова граница за непознату локацију  $\mathbf{x}$  добија се инвертовањем матрице  $\mathbf{I}_{TOA}(\mathbf{x})$ , односно

$$\mathbf{CRB}_{TOA}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}_{TOA}(\mathbf{x})^{-1}, \quad (6.9)$$

где је  $\mathbf{I}_{TOA}(\mathbf{x})$  Фишеова информациона матрица. Дакле, за варијансу произвољног непристрасног естиматора важи

$$\text{var}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{CRB}_{TOA}(\mathbf{x}). \quad (6.10)$$

На основу израза (6.9) произилази да Фишеову информациону матрицу можемо приказати у облику следеће релације

$$\mathbf{I}_{TOA}(\mathbf{x}) = E \left[ \left( \frac{\partial \ln(p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right) \left( \frac{\partial \ln(p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right] = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln(p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} \right]. \quad (6.11)$$

Полазећи од функције условне густине расподеле случајне променљиве  $\mathbf{r}_{TOA}$  у односу на  $\mathbf{x}$ , која је дата изразом (6.4), логаритмовањем леве и десне стране добијамо

$$\ln(p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x})) = \left( \ln \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(\mathbf{C}_{TOA})^{1/2}} \right) - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})).$$

(6.12)

Одавде, парцијалним диференцирањем по  $\mathbf{x}$ , имамо да је

$$\frac{\partial \ln(p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})) \right), \quad (6.13)$$

где је

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})) \right) = -2 \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})), \quad (6.14)$$

одакле је коначно

$$\frac{\partial \ln(p(\mathbf{r}_{TOA}|\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})). \quad (6.15)$$

Уврстимо (6.15) у (6.11) и узимајући у обзир израз

$$\mathbf{n}_{TOA} = \mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}), \quad (6.16)$$

добијамо

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{TOA}(\mathbf{x}) &= E \left[ \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{n}_{TOA} \mathbf{n}_{TOA}^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \\ &= \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C}_{TOA}^{-1} E(\mathbf{n}_{TOA} \mathbf{n}_{TOA}^T) \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \mathbf{C}_{TOA} \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

одакле је коначно Фишерава информациона матрица дата следећим изразом

$$\mathbf{I}_{TOA}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C}_{TOA}^{-1} \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}. \quad (6.18)$$

На основу (6.9) произилази да је Крамер – Раове граница неједнакости за координате  $x$  и  $y$ , дата следећом инверзијом Фишераве информационе матрице

$$\mathbf{CRB}_{TOA} = \mathbf{I}_{TOA}(\mathbf{x})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{I}_{TOA}(\mathbf{x})|} \begin{bmatrix} I_{TOA,yy} & -I_{TOA,xy} \\ -I_{TOA,yx} & I_{TOA,xx} \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

где су

$$\begin{aligned} I_{TOA,xx} &= E \left[ \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{r}_{TOA}|\mathbf{x})}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{r}_{TOA}|\mathbf{x})}{\partial x} \right)^T \right] \\ &= E \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})) (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}))^T (\mathbf{C}_{TOA}^{-1})^T \left( \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial x} \right) \right] \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^T (\mathbf{C}_{TOA}^{-1})^T \left( \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

(6.20)



$$I_{TOA,xy} = I_{TOA,yx} = E \left[ \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x})}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x})}{\partial y} \right)^T \right] \quad (6.21)$$

$$= \left( \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^T (\mathbf{C}_{TOA}^{-1})^T \left( \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial y} \right),$$

$$I_{TOA,yy} = E \left[ \frac{\partial \ln p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x})}{\partial y} \left( \frac{\partial \ln p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x})}{\partial y} \right)^T \right] = \left( \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial y} \right)^T (\mathbf{C}_{TOA}^{-1})^T \left( \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial y} \right). \quad (6.22)$$

Парцијални извод у односу на компоненту вектора  $\mathbf{x}$ , може се одредити на основу следећег израза

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{r}_{TOA} | \mathbf{x})}{\partial x} = \left( \frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^T \mathbf{C}_{TOA}^{-1} (\mathbf{r}_{TOA} - \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})). \quad (6.23)$$

Полазећи од растојања, између непознате локације пасивног објекта  $\mathbf{x} = [x \ y]^T \in R^2$  и пријемника на познатој позицији  $\mathbf{x}_i^r = [x_i \ y_i]^T \in R^2, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , које можемо приказати у векторском облику за дати модел позиционирања, тј.

$$\mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^r\|_2 \\ \vdots \\ \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N^r\|_2 \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

парцијалним диференцирањем по  $\mathbf{x}$ , леве и десне стране, добијамо да је

$$\frac{\partial \mathbf{d}_{TOA}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{x - x_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^r\|_2} + \frac{x}{\|\mathbf{x}\|_2} & \frac{y - y_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^r\|_2} + \frac{y}{\|\mathbf{x}\|_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x - x_N}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N^r\|_2} + \frac{x}{\|\mathbf{x}\|_2} & \frac{y - y_N}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N^r\|_2} + \frac{y}{\|\mathbf{x}\|_2} \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Према томе, одговарајуће компоненте Фишерове информационе матрице могу се одредити следећим изразима

$$I_{TOA,xx} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ni}^2} \left( \frac{x - x_i^r}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^r\|_2} + \frac{x}{\|\mathbf{x}\|_2} \right)^2, \quad (6.26)$$

$$I_{TOA,xy} = I_{TOA,yx} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ni}^2} \left( \frac{x - x_i^r}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^r\|_2} + \frac{x}{\|\mathbf{x}\|_2} \right) \left( \frac{y - y_i^r}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^r\|_2} + \frac{y}{\|\mathbf{x}\|_2} \right), \quad (6.27)$$

$$I_{TOA,yy} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ni}^2} \left( \frac{y - y_i^r}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i^r\|_2} + \frac{y}{\|\mathbf{x}\|_2} \right)^2. \quad (6.28)$$

На основу (6.19) произилази да је Крамер – Раове граница неједнакости за  $x$  и  $y$ , дата са  $[\mathbf{I}_{TOA}^{-1}(\mathbf{x})]_{1,1}$  и  $[\mathbf{I}_{TOA}^{-1}(\mathbf{x})]_{2,2}$ , респективно, што се може приказати у облику следећих израза

$$\text{var}(x) = [\mathbf{I}_{TOA}^{-1}(\mathbf{x})]_{1,1}, \quad (6.29)$$

и

$$\text{var}(y) = [\mathbf{I}_{TOA}^{-1}(\mathbf{x})]_{2,2}. \quad (6.30)$$

Према томе, варијансу за дати ТОА модел позиционирања можемо представити у облику следеће релације

$$E[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T] \geq \text{Tr}\{\mathbf{I}_{TOA}^{-1}(\mathbf{x})\} = \mathbf{CRB}_{TOA}(\mathbf{x}), \quad (6.31)$$

при чему је  $\hat{\mathbf{x}}$  естимирана вредност параметра  $\mathbf{x}$ . Јасно је да ће од свих непристрасних оцена истог параметра бити најбоља она која има најмању варијансу.

## 6.2 Крамер-Раова неједнакост за TDOA модел лоцирања

У примени Крамер-Раове неједнакости за TDOA модел позиционирања полази се од израза (2.12), одакле следи да се математичко очекивање случајне променљиве  $\tilde{\mathbf{r}}$  може приказати у облику израза

$$E[\tilde{\mathbf{r}}] = E[\mathbf{d}_{TDOA}(\mathbf{x})] + E[\mathbf{n}_{TDOA}], \quad (6.32)$$

При чему, за  $E[\mathbf{n}_{TDOA}] = 0$  добијамо да је

$$E[\tilde{\mathbf{r}}] = E[\mathbf{d}_{TDOA}(\mathbf{x})]. \quad (6.33)$$

Дакле, густина расподеле  $p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x})$  случајне променљиве  $\tilde{\mathbf{r}}$  у односу на непознату позицију пасивног објекта  $\mathbf{x} = [x \ y]^T \in R^2$ , може се приказати у облику следећег израза

$$p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(\mathbf{C}_{TDOA})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{C}_{TDOA}^{-1} (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))\right) \quad (6.34)$$

Дакле, Крамер-Раове границу неједнакости, за функцију условне густине расподеле  $p(\mathbf{r}_{TDOA}|\mathbf{x})$  означавамо са

$$\mathbf{CRB}_{TDOA}(\mathbf{x}) = \frac{1}{E\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x})\right]^2} = -\frac{1}{E\left[\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \ln p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x})\right]}. \quad (6.35)$$

Крамер – Раова граница за непознату локацију  $\mathbf{x}$  добија се инвертовањем матрице  $\mathbf{I}_{TDOA}(\mathbf{x})$ , односно

$$\mathbf{CRB}_{TDOA} = \mathbf{I}_{TDOA}(\mathbf{x})^{-1}, \quad (6.36)$$

где је  $\mathbf{I}_{TDOA}(\mathbf{x})$  Фишеова информациона матрица. Дакле, за варијансу произвољног непристрасног естиматора важи

$$\text{var}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{CRB}_{TDOA}. \quad (6.37)$$

На основу израза (6.36) произилази да Фишеову информациону матрицу можемо приказати у облику следеће релације

$$\mathbf{I}_{TDOA}(\mathbf{x}) = E\left[\left(\frac{\partial \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}}\right)\left(\frac{\partial \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}}\right)^T\right] = -E\left[\frac{\partial^2 \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T}\right]. \quad (6.38)$$

Полазећи од функције условне густине расподеле случајне променљиве  $\tilde{\mathbf{r}}$  у односу на  $\mathbf{x}$ , која је дата изразом (6.34), и логаритмовањем леве и десне стране добијамо

$$\ln p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}) = c - \frac{1}{2\sigma^2} \left( (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))^T (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})) \right). \quad (6.39)$$

Одавде, парцијалним диференцирањем по  $\mathbf{x}$ , имамо да је

$$\frac{\partial \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))^T (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})) \right), \quad (6.40)$$

где је

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))^T (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})) \right) = -2 \frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{H}^T (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})), \quad (6.41)$$

одакле је коначно

$$\frac{\partial \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{H}^T (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})). \quad (6.42)$$

На основу (6.36) произилази да је Крамер – Раове граница неједнакости за  $x$  и  $y$ , дата следећом инверзијом Фишерове информационе матрице

$$\mathbf{CRB}_{TDOA} = \mathbf{I}_{TDOA}(\mathbf{x})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{I}_{TDOA}(\mathbf{x})|} \begin{bmatrix} I_{TDOA,yy} & -I_{TDOA,xy} \\ -I_{TDOA,yx} & I_{TDOA,xx} \end{bmatrix}. \quad (6.44)$$

где су

$$\begin{aligned} I_{TDOA,xx} &= E \left[ \left( \frac{\partial \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial x} \right)^T \right] \\ &= E \left[ \frac{1}{\sigma^4} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})^T}{\partial x} \right)^T \mathbf{H}^T (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})) (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H}\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x}))^T \mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})}{\partial x} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})^T}{\partial x} \right)^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

(6.45)

$$\begin{aligned}
 I_{TDOA,xy} = I_{TDOA,yx} &= E \left[ \left( \frac{\partial \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial y} \right)^T \right] \\
 &= \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})}{\partial y} \right),
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

$$\begin{aligned}
 I_{TDOA,yy} &= E \left[ \left( \frac{\partial \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial y} \right)^T \right] \\
 &= \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})}{\partial y} \right)^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})}{\partial y} \right),
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Парцијални извод у односу на компоненту вектора  $\mathbf{x}$ , може се одредити на основу следећег израза

$$\left( \frac{\partial \ln(p(\tilde{\mathbf{r}}|\mathbf{x}))}{\partial x} \right) = \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})}{\partial x} \right)^T \mathbf{H}^T (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{H} \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})). \tag{6.48}$$

Полазећи од растојања, између непознате локације пасивног објекта  $\mathbf{x} = [x \ y]^T \in \mathbb{R}^2$  и познатих позиција пријемника  $\mathbf{x}_i^t$  и предајника  $\mathbf{x}_r$ , које можемо приказати у векторском облику  $\mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})$ , за дати модел позиционирања, парцијалним диференцирањем по  $\mathbf{x}$  добијамо да је

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{TDOA}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{x - x_r}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\|_2} & \frac{y - y_r}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\|_2} \\ \frac{x - x_1^t}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^t\|_2} & \frac{y - y_1^t}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^t\|_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x - x_N^t}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N^t\|_2} & \frac{y - y_N^t}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N^t\|_2} \end{bmatrix}. \tag{6.43}$$

Према томе, одговарајуће компоненте Фишерове информационе матрице могу се одредити следећим изразима

$$I_{TDOA,xx} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x - x_r}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\|} + \frac{x - x'_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i\|_2} \right)^2, \quad (6.49)$$

$$I_{TDOA,xy} = I_{TDOA,yx} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x - x_r}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\|} + \frac{x - x'_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i\|_2} \right) \left( \frac{y - y_r}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\|} + \frac{y - y'_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i\|_2} \right), \quad (6.50)$$

$$I_{TDOA,yy} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{y - y_r}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\|} + \frac{y - y'_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i\|_2} \right)^2. \quad (6.51)$$

Дакле, варијансу за дати TDOA модел позиционирања можемо представити у облику следеће релације

$$E \left[ (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T \right] \geq \text{Tr} \left\{ \mathbf{I}_{TDOA}(\mathbf{x})^{-1} \right\} = \mathbf{CRB}_{TDOA}(\mathbf{x}), \quad (6.52)$$

при чему је  $\hat{\mathbf{x}}$  естимирана вредност параметра  $\mathbf{x}$ .

## 7. Методе оптимизације за решавање проблема лоцирања

У претходним поглављима, указано је да се проблем локализације своди на проблем оптимизације, односно минимизације формиране естимационе функције циља, ради процене непознате локације неког објекта. У општем случају, процес оптимизације састоји се од следећих фаза који се извршавају секвенцијално и то: поставке проблема, дефинисање модела, имплементације одговарајућег алгоритма, евалуације решења, као и валидација добијених решења. Не губећи на општости, сваки проблем оптимизације може се формулисати као проблем минимизације постављене функције циља. С друге стране, проблем максимизације може се увек трансформисати на проблем минимизације множењем функције циља са  $-1$ , који представљен следећом релацијом

$$\min f(\mathbf{x}) = -\max(-f(\mathbf{x})). \quad (7.1)$$

Нека је дата произвољна функција циља  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , тада проблем глобалне безусловне оптимизације (*unconstrained optimization*) може се математички формулисати на следећи начин

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}), \quad (7.2)$$

где су  $n$  димензија проблема,  $\mathbb{R}^n$  простор претраге функције циља  $f(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  променљива са могућим решењем за оптимизациони проблем (7.2).

**Дефиниција 7.1.** Нека је  $f: R^n \rightarrow R$  произвољна функција циља. Тада тачка  $\mathbf{x}^* \in R^n$  означава *глобални минимум* оптимизационог проблема (7.2), ако је  $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$  за све  $\mathbf{x} \in R^n$ .

**Дефиниција 7.2.** Нека је  $f: \mathcal{D} \rightarrow R$ ,  $\mathcal{D} \subset R^n$  произвољна функција циља. Тада је  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{D}$  је тачка *локалног минимума* оптимизационог проблема (7.2) (субоптимално решење) на скупу  $\mathcal{D}$  ако постоји околина  $\mathcal{O}$  тачке  $\mathbf{x}^*$ , при чему је  $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$  за све  $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$ .

У релевантној литератури из ове области приказан је изузетно велики број разноврсних оптимизационих алгоритама, који се могу класификовати на: детерминистичке (*deterministic*) и стохастичке (*stochastic*) алгоритме [108, 109]. У општем случају, за посматрани естимациони проблем, формирана функција циља је нелинеарна и неконвексна, односно мулимодална, с више локалних оптимума, тако да се глобално оптимално решење не може нумерички одредити класичним - детерминистичким методама оптимизације. У поређењу са детерминистичким, стохастички алгоритми заснивају се на случајности и у класу ових алгоритама спадају хеуристички и на њима засновани метахеуристички оптимизациони алгоритми, који се примењују за решавање комплексних мултимодалних оптимизационих проблема.

## 7.1 Хеуристички алгоритми оптимизације

Хеуристички алгоритми прилагођени су конкретном проблему који решавају и одликује их ефикасност претраге простора допустивих решења и изналажење апроксимативног „задовољавајућег“ решења, у разумном временском периоду за дати проблем оптимизације. Посебно треба указати да хеуристичке алгоритме одликује робусност при решавању великог броја оптимизационих проблема [65, 66]. Реч хеуристика потиче од старогрчке речи *хеурикеин* што означава вештину решавања неког проблема на основу покушаја и грешака.

Основни недостатак хеуристичких алгоритама је немогућност широке претраге простора могућих решења, услед „заглављивања“ у неком од локалних оптимума



мултимодалне функције циља, које при томе не мора бити и глобално решење, за постављени комплексни оптимизациони проблем.

Ради превазилажења наведеног недостатка, током последњих деценија приступило се развоју низа нових хеуристичких алгоритама, тзв. метахеуристичких алгоритама [57-59, 61, 110]. Метахеуристички алгоритми засновани су на итеративном поступку проналажења глобалног оптималног решења, чији је механизам претраге инспирисан одговарајућим процесима у природи, тако да се називају природно инспирисани алгоритми [111-113].

### 7.1.1 Метахеуристички алгоритми

У доступној литератури из ове области, приказани су разноврсни метахеуристички алгоритми, успешно имплементирани на решавање великог броја различитих оптимизационих проблема, који се могу класификовати на:

- алгоритме инспирисане природним процесима: еволутивни алгоритми (*Evolutionary Algorithms*, EA) инспирисани процесом еволуције јединки, као што су: генетски алгоритам (*Genetic Algorithm*, GA), генетско програмирање (*Genetic Programming*, GP), еволутивно програмирање (*Evolutionary Programming*, EP), диференцијална еволуција (*Differential Evolution*, DE) и други. Алгоритми оптимизације ројевима честица (*Particle Swarm Optimization*, PSO), оптимизације кретањем мрављим колонијама (*Ant Colony Optimization*, ACO) и оптимизације колонијама пчела (*Bee Colony Optimization*, BCO), такође су инспирисани природним појавама и заснивају се на групној интелигенцији скупа самоорганизујућих јединки [70-76].
- алгоритми који нису инспирисане природним процесима: табу претрага (*Tabu Search*, TS), метода променљивих околина (*Variable Neighbourhood Search*, VNS), распршена претрага (*Scatter Search*, SS), и друге [65, 66].

Поред наведене класификације, метахеуристички алгоритми могу се поделити и према броју решења који се посматра у оквиру једне итерације, односно:

- алгоритми засновани на једном решењу (*single point search*), у простору претраге могућих решења кроз сукцесивни итеративни поступак, изналазе се тренутно најбоља решења описана одговарајућом путањом –

трајекторијом. У класу ових алгоритама спадају: метода променљивих околина, табу претрага, симулирано каљење (*Simulated Annealing*, SA) и друге [65, 66].

- алгоритми засновани на популацији (*population-based*) решења, заснивају се на итеративном поступку у простору претраге, тако што се применом одговарајућих оператора (селекције, мутације и укрштања) текућа генерација поступно усмерава ка новој генерацији с бољим решењима. Овој класи алгоритама припадају: генетски алгоритам, оптимизација мрављим колонијама, оптимизација колонијама пчела и друге [111-113].

У општем случају, процес претраге метахеуристичких алгоритама може се поделити у две фазе, и то: глобална претрага и локална претрага [115]. У оквиру фазе глобалне претраге врши се претрага простора допустивих решења, док се кроз фазу локалне претраге врши побољшање најбољих решења добијених у претходној фази. Према томе, ради постизања ефикасне претраге простора допустивих решења потребно је успоставити равнотежу између ове две фазе током процеса оптимизације.

Метахеуристичке алгоритме одликује ефикасност претраге простора могућих решења, при изналажењу глобалног оптималног решења, као и робусност за већину проблема које решавају. Посебно треба указати да оптимизационе перформансе метахеуристичких алгоритама првенствено зависе од адекватног подешавања параметара у оквиру оптимизационог процеса. Основни проблеми с којима се сусрећу метахеуристички алгоритми у процесу претраге простора могућих решења су:

- преурађена конвергенција (*premature convergence*), манифестује се конвергенцијом ка локалном оптимуму формиране мултимодалне функције циља, које се не поклапа са глобалним оптималним решењем,
- спора конвергенција (*slow convergence*), итеративни процес изналажења потенцијалног решења за постављени оптимизациони проблем не побољшава се довољно брзо.

На основу изузетно великог броја публикованих радова у еминентним часописима може се закључити да је ова област оптимизације веома актуелна и да постоји велики број изазова за модификацију и побољшање постојећих и развој нових метахеуристичких алгоритама, што представља и један од основних мотива за истраживање у оквиру ове дисертације.

Полазећи од наведеног, фокус ове дисертације усмерен је на унапређење разматраних метахеуристичких алгоритама кроз: адаптивно подешавање параметара, развој нових оператора мутације, као и хибридизацију предложених алгоритама, у смислу повећања брзине конвергенције, као и тачности генерисаног глобалног оптималног решења за постављени проблем оптимизације.

У следећим одељцима приказани су разматрани метахеуристичких алгоритми за решавање проблема лоцирања и то алгоритми: диференцијалне еволуције, оптимизације ројем честица и алгоритам свитаца.

#### **7.1.1.1 Алгоритам диференцијалне еволуције**

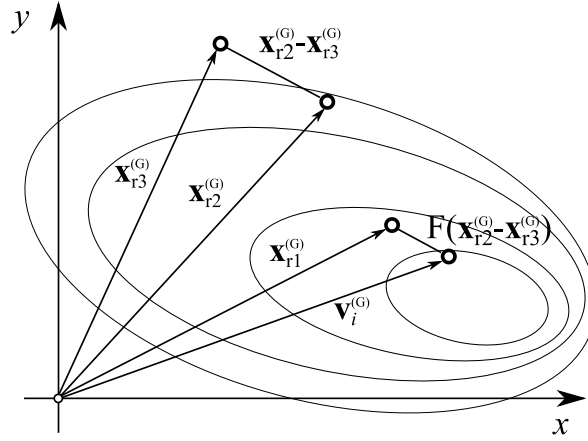
Алгоритам диференцијалне еволуције је ефикасан метахеуристички оптимизациони алгоритам, предложен од стране К. Price-а и R. Storn-а [71]. Овај алгоритам нашироко је примењен за решавање проблема глобалне оптимизације првенствено због ефикасности, изражене способности глобалне претраге, брзе конвергенције, једноставне структуре и имплементације [114, 115]. Оптимизациони процес овог алгоритма заснива се на итеративном поступку кроз примену оператора мутације, укрштања и селекције у свакој генерацији, док се не испуни унапред дефинисан критеријум заустављања. Анализом оптимизационог процеса DE алгоритма, уочена је појава спорије конвергенције и слабије локалне претраге, као и осетљивост на одабир улазних параметара који контролишу оптимизациони процес. Сходно овоме, у циљу успешног решавања оптимизационих проблема неопходно је адекватно одабрати следеће параметре: број чланова популације ( $N_p$ ), фактор скалирања ( $F$ ) и фактор укрштања ( $CR$ ) [116, 117]. У наставку поглавља биће приказани оператори иницијализације, мутације, укрштања и селекције, који су имплементирани у алгоритму диференцијалне еволуције.

Оптимизациони процес алгоритма диференцијалне еволуције започиње формирањем почетне популације, односно скупа случајно одабраних потенцијалних решења. Популација DE алгоритма може се представити скупом од  $N_p$  вектора  $\{\mathbf{x}_i^{(G)} : x_{i,j}^{(G)} \in [x_{i,j}^L, x_{i,j}^U]\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Сваки члан из популације  $\mathbf{x}_i^{(G)} = [x_{i,1}^{(G)} \ \dots \ x_{i,n}^{(G)}]^T$ , у тренутној генерацији  $G$ , записује се као  $n$ -димензионални вектор који представља могуће решење за дати проблем. При томе, елементи вектора  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  налазе се унутар дозвољених граница  $x_{i,j}^{(G)} \in [x_{i,j}^L, x_{i,j}^U]$ , где  $x_{i,j}^L$  и  $x_{i,j}^U$  означавају доњу и горњу границу дозвољених вредности, респективно. Дакле, у почетној генерацији  $G=0$ , популација се може распоредити равномерно по простору претраге, применом следећег израза

$$x_{i,j}^{(0)} = x_{i,j}^L + \text{rand}_j (x_{i,j}^U - x_{i,j}^L), \quad (7.3)$$

где  $\text{rand}_j$  означава равномерно распоређен случајни број из опсега  $[0,1]$ .

Након формирања иницијалне популације, приступа се процесу мутације где се за сваки циљни вектор  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  генерише мутирани вектор  $\mathbf{v}_i^{(G)}$ . У алгоритму диференцијалне еволуције мутација се извршава додавањем скаларне разлике два случајно одабрана вектора из тренутне популације трећем произвољно одабраном вектору. У доступној литератури, у употреби је већи број различитих мутационих оператора од којих је најчешће коришћен оператор мутације DE/rand/1. Дакле, применом мутационог оператора DE/rand/1 из тренутне популације бирају се три произвољно изабрана вектора  $\mathbf{x}_{r_1}^{(G)}, \mathbf{x}_{r_2}^{(G)}, \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}$ . Тада се срачунава разлика вектора  $\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}$ , која се затим множи фактором скалирања  $F$ , односно  $F(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)})$ . Дакле, на слици 7.1 приказан је мутирани вектор  $\mathbf{v}_i^{(G)}$  који се формира додавањем скаларне разлике вектора  $F(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)})$  на трећи произвољно одабрани вектор  $\mathbf{x}_{r_1}^{(G)}$ , који се назива базни вектор.



Слика 7.1. Операција мутације за дводимензионални оптимизациони проблем.

Дакле, мутациони вектор  $\mathbf{v}_i^{(G)}$  формира се применом мутационог оператора DE/rand/1 на основу следећег израза

$$\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{r_1}^{(G)} + F \left( \mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)} \right), \quad (7.4)$$

где су  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  случајно одабрани међусобно различити цели бројеви из скупа  $\{1, 2, \dots, N_p\} \setminus \{i\}$ , који нису једнаки тренутном индексу  $i$  и  $F$  представља фактор скалирања из опсега  $[0, 1]$ .

У релевантној литератури у употреби је већи број различитих мутационих оператора, и то [114, 118, 119]:

DE/rand/2

$$\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{r_1}^{(G)} + F \left( \mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)} \right) + F \left( \mathbf{x}_{r_4}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_5}^{(G)} \right), \quad (7.5)$$

DE/best/1

$$\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{best}^{(G)} + F \left( \mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)} \right), \quad (7.6)$$

DE/best/2

$$\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{best}^{(G)} + F \left( \mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)} \right) + F \left( \mathbf{x}_{r_3}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_4}^{(G)} \right), \quad (7.7)$$

DE/current-to-best/1

$$\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + F(\mathbf{x}_{best}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + F(\mathbf{x}_{r1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r2}^{(G)}), \quad (7.8)$$

где су  $r_1, r_2, r_3, r_4$  и  $r_5$  случајно одабрани међусобно различити цели бројеви из скупа  $\{1, 2, \dots, NP\} \setminus \{i\}$  и  $\mathbf{x}_{best}^{(G)}$  представља тренутну најбољу јединку из популације.

После генерисања мутационог вектора  $\mathbf{v}_i^{(G)}$ , примењује се оператор укрштања ради повећања разноликости популације и побољшања претраге простора допустивих решења. Према томе, у циљу креирања пробног вектора  $\mathbf{u}_i^{(G)}$ , оператор укрштања комбинује параметре циљног вектора  $x_{i,j}^{(G)}$  и параметре мутационог вектора  $v_{i,j}^{(G)}$ . У општем случају, најчешће примењена метода укрштања је биномно укрштање (*binomial crossover*) [69], при чему се компонента пробног вектора  $u_{i,j}^{(G)}$  добија применом следећег израза

$$\mathbf{u}_{i,j}^{(G)} = \begin{cases} v_{i,j}^{(G)} & \text{ако је } (\text{rand}_{i,j} \leq CR \vee j = j_{\text{rand}}) \\ x_{i,j}^{(G)} & \text{у супротном} \end{cases}, \quad (7.9)$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\},$$

где се  $\text{rand}_{i,j}$  користи за генерисање случајних бројева који имају униформну расподелу из опсега  $[0,1]$ ,  $CR$  представља вероватноћу укрштања која узима вредност из опсега  $[0,1]$  и  $j_{\text{rand}}$  означава произвољно одабрани индекс из скупа  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Након укрштања, у циљу задржавања добијеног пробног вектора  $\mathbf{u}_i^{(G)}$  у наредној популацији примењује се оператор селекције. Дакле, поређењем вредности функције циља циљног вектора  $f(\mathbf{x}_i^{(G)})$  и одговарајуће вредности функције циља пробног вектора  $f(\mathbf{u}_i^{(G)})$ , у наредној популацији задржава се вектор који има нижу вредност функције циља, односно

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \begin{cases} \mathbf{u}_i^{(G)} & \text{ако је } f(\mathbf{u}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{x}_i^{(G)}) \\ \mathbf{x}_i^{(G)} & \text{у супротном} \end{cases}, \quad (7.10)$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\},$$

где  $\mathbf{x}_i^{(G+1)}$  означава вектор који се задржава у популацији у следећој генерацији.

Оптимизациони процес алгоритма диференцијалне еволуције итеративно примењује операторе мутације, укрштања и селекције у свакој генерацији све док се не испуни унапред дефинисан критеријум конвергенције.

Псеудо-код алгоритма диференцијалне еволуције приказан је у Алгоритму 1.

---

**Алгоритам 1** Алгоритам диференцијалне еволуције

---

- 1: Поставити параметре  $N_p$ ,  $G_{max}$ ,  $F$ ,  $CR$
  - 2: Формирање почетне популације у домену  $[x_{i,j}^L, x_{i,j}^U]$
  - 3: Одредити вредност функције циља целе популације
  - 4:  $G = 0$
  - 5: **while**  $G \leq G_{max}$  **do**
  - 6:     **for**  $i = 1$  до  $N_p$  **do**
  - 7:         Генерисати три индекса  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$
  - 8:         Одредити мутациони вектор
  - 9:          $\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{r_1}^{(G)} + F(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)})$
  - 10:     **end for**
  - 11:     **for**  $i = 1$  до  $N_p$  **do**
  - 12:         **for**  $j = 1$  до  $n$  **do**
  - 13:             **if**  $\text{rand}_{i,j} \leq CR \vee j = j_{\text{rand}}$  **then**
  - 14:                  $u_{i,j}^{(G)} = v_{i,j}^{(G)}$
  - 15:             **else**
  - 16:                  $u_{i,j}^{(G)} = x_{i,j}^{(G)}$
  - 17:             **end if**
  - 18:         **end for**
  - 19:         **if**  $f(\mathbf{u}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{x}_i^{(G)})$  **then**
  - 20:              $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{u}_i^{(G)}$
  - 21:         **else**
  - 22:              $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)}$
  - 23:         **end if**
  - 24:     **end for**
  - 25:      $G++$
  - 26: **end while**
  - 27: Прикажи глобално оптимално решење
-

### 7.1.1.2 Алгоритам оптимизације ројем честица

Оптимизација ројем честица, предложена од Kennedy-а и Eberhart-а, је оптимизациона метода из групе алгоритама интелигенције ројева инспирисана биолошким системима као што су јата птица [120]. Свака честица у популацији мења свој положај на основу сопственог искуства, као и на основу информација добијених у интеракцији са осталим честицама у јату. PSO алгоритам нашироко је примењен за решавање проблема глобалне оптимизације првенствено због своје ефикасности, једноставне структуре и имплементације [121, 122]. С друге стране, основни недостаци PSO алгоритма су спора конвергенција ка оптималном решењу и неодговарајућа равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге. Ови проблеми јављају се услед одсуства оператора мутације, укрштања и селекције у свакој генерацији. У општем случају, оптимизационе перформансе PSO алгоритма зависе од одговарајућег одабира вредности фактора инерције ( $\omega^{(G)}$ ), когнитивног коефицијента ( $c_1$ ) и социјалног коефицијента ( $c_2$ ) [123].

Честице у PSO алгоритму крећу се кроз простор допустивих решења у потрази за глобалним оптималним решењем на основу промене вектора позиције и вектора брзине. Популација честица PSO алгоритма у  $G$ -тој генерацији може се дефинисати као скуп од  $N_p$  вектора  $\{\mathbf{x}_i^{(G)} : x_{i,j}^{(G)} \in [x_{i,j}^L, x_{i,j}^U]\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Сваки елемент из овог скупа је  $n$ -димензионални вектор  $\mathbf{x}_i^{(G)} = [x_{i,1}^{(G)} \ \dots \ x_{i,n}^{(G)}]^T$  који представља потенцијално решење оптимизационог проблема, при чему  $x_{i,j}^L$  и  $x_{i,j}^U$  означавају доњу и горњу граница дозвољених вредности, респективно. Дакле, популација се може распоредити равномерно по простору претраге, применом следећег израза

$$x_{i,j}^{(G)} = x_{i,j}^L + \text{rand}_j (x_{i,j}^U - x_{i,j}^L), \quad (7.11)$$

где се  $\text{rand}_j$  користи за генерисање случајних бројева који имају униформну расподелу из опсега  $[0,1]$ .



Током оптимизационог процеса, у циљу истраживања простора допустивих решења, положај честице у простору се ажурира на основу вредности вектора брзине  $\mathbf{s}_i^{(G)} = [s_{i,1}^{(G)} \ \cdots \ s_{i,n}^{(G)}]^T$ . У свакој итерацији брзина честице ажурира се на основу најбољих позиција честица које су остварене у току оптимизационог процеса  $\mathbf{p}_i^{(G)} = [p_{i,1}^{(G)} \ \cdots \ p_{i,n}^{(G)}]^T$ . С друге стране, брзину честица потребно је прилагодити на основу информација добијених у интеракцији са осталим честицама у популацији, односно одређивањем глобалне најбоље позиције свих честица у популацији  $\mathbf{g}^{(G)} = [g_{i,1}^{(G)} \ \cdots \ g_{i,n}^{(G)}]^T$ , према следећој једначини

$$\mathbf{g}^{(G)} = \arg \min_i f(\mathbf{p}_i^{(G)}), \forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\}. \quad (7.12)$$

Дакле, у свакој генерацији врши се ажурирање вредности вектора брзине и вектора позиције честица на основу следећих израза

$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1 r_1 (\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + c_2 r_2 (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}), \quad (7.13)$$

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + \mathbf{s}_i^{(G+1)}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\}, \quad (7.14)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  означавају случајне бројеве са униформном расподелом из опсега  $[0,1]$ ,  $c_1$  и  $c_2$  су коефицијенти когнитивног и социјалног убрзања, респективно. У конвенционалној варијанти PSO алгоритма коришћена је јединствена вредност коефицијената когнитивног и социјалног убрзања, односно  $c_1 = c_2 = 2$ . У релевантној литератури проналази се велики број радова на тему ажурирања вредности коефицијената  $c_1$  и  $c_2$  [124-126]. Наиме, већа вредност коефицијента  $c_1$  омогућава бољу глобалну претрагу, док већа вредност коефицијента  $c_2$  побољшава локалну претрагу у околини честице  $\mathbf{g}^{(G)}$ .

У циљу успостављања равнотеже између фаза глобалне и локалне претраге, у току оптимизационог процеса, у једначину (7.13) уводи се нови параметар  $\omega^{(G)}$  – фактор инерције, према следећем изразу

$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \omega^{(G)} \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1 r_1 (\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + c_2 r_2 (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}). \quad (7.15)$$

Фактор инерције  $\omega^{(G)}$  мења вредност кроз генерације према унапред дефинисаној законитости. На почетку оптимизационог процеса, вредност фактора инерције је блиска вредности 1 у циљу глобалне претраге простора решења. С друге стране, са порастом броја генерација, на крају процеса оптимизације, вредност фактора инерције постаје блиска вредности 0, ради побољшања локалне претраге [126].

Сходно овоме, најчешће коришћена законитост за промену вредности фактора инерције је линеарна законитост, која се може описати следећом једначином

$$\omega^{(G)} = \omega_{\max} - \frac{G}{G_{\max}} (\omega_{\max} - \omega_{\min}), \quad (7.16)$$

где су  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  горња и доња граница фактора инерције, респективно, и  $G_{\max}$  означава максимални број генерација. У доступној литератури, дате су препоруке за горњу и доњу границу фактора инерције  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$ , респективно [127].

Алгоритам полази од вектора позиција честица и при томе у свакој итерацији врши се ажурирање скупа најбољих позиција честица  $\{\mathbf{p}_i^{(G)}\}$ , тако што се тражи  $N_p$  најбољих позиција честица  $\mathbf{p}_i^{(G)}$ , остварене у току оптимизационог процеса, у складу са следећом једначином

$$\mathbf{p}_i^{(G+1)} = \begin{cases} \mathbf{x}_i^{(G+1)}, & \text{ако је } f(\mathbf{x}_i^{(G+1)}) \leq f(\mathbf{p}_i^{(G)}), \\ \mathbf{p}_i^{(G)}, & \text{у супротном} \end{cases}, \quad (7.17)$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\}.$$

Тада се из скупа најбољих позиција које су остварене у току оптимизационог процеса  $\{\mathbf{p}_i^{(G+1)}\}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\}$  одређује глобално најбоља позиција свих честица у јату  $\mathbf{g}^{(G+1)}$  у складу са једначином (7.12).

Описани оптимизациони процес PSO алгоритма понавља се итеративно док се не задовољи унапред дефинисан услов заустављања.

Псеудо-код PSO алгоритма приказан је у Алгоритму 2.

**Алгоритам 2** Алгоритам оптимизације ројем честица

---

```

1: Поставити параметре  $G_{max}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\omega_{max}$ ,  $\omega_{min}$ 
2: Генерисање почетне популацију честица у домену  $[x_{i,j}^L, x_{i,j}^U]$ 
3: Поставити почетне вредности брзине  $\mathbf{v}_i^{(0)}, \forall i \in \{1, 2 \dots N_p\}$ 
4: Одредити вредност функције циља целе популације
5: Поставити иницијалне вредности  $\mathbf{p}_i^{(0)}, \forall i \in \{1, 2 \dots N_p\}$  и  $\mathbf{g}^{(0)}$ 
6:  $G = 0$ 
7: while  $G \leq G_{max}$  do
8:   Одредити вредност фактора инерције  $\omega^{(G)}$ 
9:   for  $i = 1$  do  $N_p$  do
10:     Ажурирати вредности вектора брзине
11:      $\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \omega^{(G)} \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1 r_1 (\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + c_2 r_2 (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)})$ .
12:     Ажурирати вектор позиције
13:      $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + \mathbf{s}_i^{(G+1)}$ 
14:     Одредити вредност функције циља за нове позиције честица
15:     if  $f(\mathbf{x}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{p}_i^{(G)})$  then
16:       Поставити  $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{x}_i$ 
17:     end if
18:     if  $f(\mathbf{x}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{g}^{(G)})$  then
19:       Поставити  $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{x}_i$ 
20:     end if
21:   end for
22:    $G++$ 
23: end while
24: Прикажи глобално оптимално решење

```

---

**7.1.1.3 Алгоритам свитаца**

Алгоритам свитаца, предложен од Xin-She Yang-a, припада групи алгоритама интелигенције ројева инспирисан биолошким процесима, као што је светлосна сигнализација свитаца [128, 129]. Оптимизациони процес овог алгоритма заснован је на привлачности међу свицима, при чему се сваки свитац у популацији креће ка позицији следећег светлијег свица. Према томе, привлачност свитаца дефинисана је на основу интензитета светлости, која је пропорционална вредности функције циља која се оптимизује. Током последњих година, FA алгоритам нашироко је примењен за решавање проблема изналажења глобалног оптимума, где је у поређењу са другим хеуристичким алгоритмима, као што су GA и PSO остварио значајно боље резултате [128]. С друге стране, основни недостатак FA алгоритма је спора конвергенција ка оптималном решењу посебно на крају процеса оптимизације.

У општем случају, оптимизациони процес FA алгоритма заснива се на следећим претпоставкама:

- пол свитаца се занемарује,
- привлачност свитаца директно је пропорционална интензитету светлости, при чему најсветлији свитац привлачи остале свице слабијег интензитета светлости. Уколико у популацији нема светлијег свица, претрага најсветлијег свица је потпуно случајног карактера,
- интензитет светлости свица зависи од вредности функције циља. Дакле, за случај минимизације, интензитет светлости свица обрнуто је пропорционалан вредности функције циља.

Оптимизациони процес FA алгоритма започиње формирањем почетне популације коју сачињава скуп  $n$ -димензионалних вектора  $\mathbf{x}_i^{(G)} = [x_{i,1}^{(G)} \ \dots \ x_{i,n}^{(G)}]^T$ , тако да је  $\{\mathbf{x}_i^{(G)} : x_{i,j}^{(G)} \in [x_{i,j}^L, x_{i,j}^U]\}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, N_P\}$ ,  $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , где су са  $x_{i,j}^L$  и  $x_{i,j}^U$  означене доња и горња граница дозвољених вредности, респективно. У општем случају, при имплементацији FA алгоритма неопходно је дефинисати промену интензитета светлости и дати формулацију привлачности између свитаца у популацији. Интензитет светлости  $I(r)$ , као физичка величина са квадратом растојања опада, што се може представити следећим изразом

$$I(r) = \frac{I_s}{r^2}, \quad (7.18)$$

где  $I_s$  означава интензитет светлосног извора и  $r$  представља удаљеност посматрача од светлосног извора. С друге стране, интензитет светлости  $I(r)$  за медијум са константним коефицијентом апсорпције  $\gamma$  може се представити монотono опадајућом експоненцијалном функцијом, на основу следеће једначине

$$I(r) = I_0 e^{-\gamma r^2}, \quad (7.19)$$

где је  $I_0$  почетни интензитет светлости. Параметар  $\gamma$  из интервала  $[0, \infty)$ , описује промену привлачности, и на тај начин утиче на одређивање брзине конвергенције

FA алгоритма. У већини апликација вредност овог параметра бира се из опсега  $[1,10]$ , и обично се поставља  $\gamma = 1$  [67].

Дакле, на основу израза за интензитет светлости  $I(r)$  произилази формулација функције привлачности  $\beta(r_{i,j})$ , између  $i$ -тог и  $j$ -тог свица у популацији, што се може записати следећим изразом

$$\beta(r_{i,j}) = \beta_0 e^{-\gamma r_{i,j}^2}, \quad (7.20)$$

где је  $\beta_0$  привлачност за  $r_{i,j} = 0$ , односно вредност привлачности за случај када се на истој локацији простора решења нађу истовремено два свица. У већини имплементација узима се да је  $\beta_0 = 1$  [75]. Еуклидско растојање  $r_{i,j}$ , у Декартовом координатном систему, између  $i$ -тог и  $j$ -тог свица, чије су позиције  $\mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{x}_j$ , респективно, може се одредити следећим изразом

$$r_{i,j} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{i,k} - x_{j,k})^2}, \quad (7.21)$$

где  $x_{i,k}$  и  $x_{j,k}$  представљају  $k$ -те компоненте позиција  $i$ -тог и  $j$ -тог свица у популацији, респективно, док  $n$  означава димензију оптимизационог проблема.

Према томе, померањем свица  $i$  према светлијем свицу  $j$  добија се нова позиција свица у  $(G+1)$ -ој итерацији, која се дефинише следећим изразом

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + \beta(r_{i,j}) (\mathbf{x}_j^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(G)}, \quad (7.22)$$

где први члан означава тренутну позицију  $i$ -тог свица, други члан представља привлачност  $i$ -тог свица према светлијем  $j$ -том свицу, док трећи члан уводи случајно кретање  $i$ -тог свица. Према једначини (7.22), параметар случајности  $\alpha$  бира се из опсега  $[0,1]$ , док  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(G)}$  представља вектор случајних бројева дефинисан Гаусовом расподелом, односно

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(G)} = (\text{rand}_{i,j} - 0.5), \quad (7.23)$$

где  $rand_{i,j}$  означава генератор случајних бројева који имају униформну расподелу у интервалу  $[0,1]$ .

Псеудо-код FA алгоритма приказан је у Алгоритму 3.

---

### Алгоритам 3 Алгоритам свитаца

---

```

1: Генерисање почетне популације свитаца
2: Одредити интензитет светлости свица  $I_i, \forall i \in \{1, 2 \dots N_p\}$  на основу вредности функције циља
3: Поставити параметре  $G_{max}, \alpha, \beta_0, \gamma$ 
4:  $G = 0$ 
5: while  $G \leq G_{max}$  do
6:   for  $i = 1$  do  $N_p$  do
7:     for  $j = i$  do  $N_p$  do
8:       if  $I_j > I_i$  then
9:         Одредити Еуклидско растојање  $r_{i,j}$  између свитаца
10:        Израчунати нову привлачност  $\beta(r_{i,j})$ .
11:        Померити  $i$ -тог свица ка  $j$ -том свицу на основу израза
12:         $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + \beta(r_{i,j}) (\mathbf{x}_j^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + \alpha \epsilon_i^{(G)}$ 
13:       end if
14:     end for
15:   end for
16:   Одредити вредност функције циља за нове позиције свитаца
17:   Сортирај све свице и одредити тренутно најбоље решење
18:    $G++$ 
19: end while
20: Прикажи глобално оптимално решење

```

---

## 7.2 Детерминистичке методе оптимизације

У циљу одређивање правца кретања у допустивом простору, детерминистичке методе оптимизације захтевају познавање почетног решења, и користе велики број рачунских операција ради одређивања оптималног решења. Ове методе деле се у две групе: градијентне и директне методе [130]. Градијентне методе захтевају познавање извода или апроксимације извода функције циља ради решавања оптимизационог проблема. Из групе градијентних метода посебно се издвајају: метода најбржег спуста, Њутнова метода, Гаус-Њутнова метода, итд. С друге стране, директне методе у процесу оптимизације користе само вредности функције циља у чворним тачкама, па се могу применити и у случају недиференцијабилних

функција циља. Међу овим алгоритмима посебно се издвајају: Нелдер – Мид, Хук-Цевис и Флечер-Пауел методе.

Дакле, при решавању комплексних оптимизационих проблема, посебно у случају када је функција циља мултимодална, детерминистичке методе оптимизације сусрећу се са проблемима:

- конвергенција ка оптималном решењу зависи од адекватног избора почетног решења,
- заглављивања у неки од локалних оптимума, и
- могућност примене на узак скуп оптимизационих проблема.

Из наведених разлога, током последњих деценија долази до развоја хеуристичких и хибридних метода које успешно превазилазе ове проблеме. При томе хибридне методе, које су настале комбиновањем адекватних конвенционалних оптимизационих и хеуристичких метода, успешно елиминишу недостатке једних оптимизационих алгоритама и истовремено укључују предности других алгоритама.

У поглављу које следи дата је Нелдер – Мид метода, као најчешће коришћен оптимизациони алгоритам из групе детерминистичких метода директне претраге.

### 7.2.1 Нелдер – Мид симплекс метод

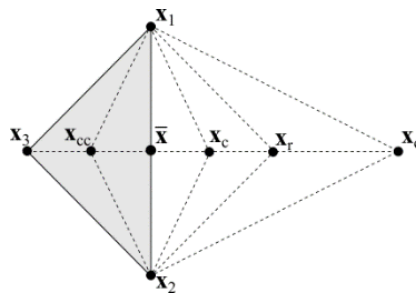
Нелдер – Мид симплекс метод спада у класу метода директне претраге које одређују оптимално решење функције циља без израчунавања њених извода [131, 132]. Оптимизациони процес NM методе започиње формирањем симплекс полиедра, који је дефинисан са  $n + 1$  тачком, односно  $\{\mathbf{x}_i : 1 \leq i \leq n\}$ , у  $n$  димензија (у две димензије то је троугао, у три димензије то је тетраедар). Заснива се на упоређивању вредности функције циља у тачкама симплекса, при чему је за свако побољшање функције циља неопходно познавати вредности функције циља у претходној итерацији. У свакој итерацији тачке симплекса сортирају се према вредности функције циља

$$f(\mathbf{x}_1) \leq \dots \leq f(\mathbf{x}_{n+1}), \quad (7.24)$$

при чему  $\mathbf{x}_1$  означава најбољу тачку, а  $\mathbf{x}_{n+1}$  означава најлошију тачку.

Нелдер – Мид (NM) симплекс метод замењује најлошији тачку са новом тачком на основу геометријских трансформација као што су: рефлексива, експанзија, контракција и сажимање. Према томе, итеративни поступак методе заснива се на трансформацији симплекса у простору решења, тако да се постигне смањење вредности функције циља у простору решења, односно док се тачке симплекса  $\{x_j\}_{j=1}^{n+1}$  не нађу у околини оптималног решења [131].

На слици 7.2 приказан је почетни симплекс, оивичен пуном линијом, као и тачке рефлексиве, експанзије, унутрашње и спољашње контракције означене са  $\mathbf{x}_r$ ,  $\mathbf{x}_e$ ,  $\mathbf{x}_c$  и  $\mathbf{x}_{cc}$ , респективно. У циљу одређивања тачака симплекса за следећу итерацију, потребно је одредити тачку  $\bar{\mathbf{x}}$  која означава центроид линијског сегмента који повезује две најбоље тачке.



Слика 7.2. Геометријске трансформације NM методе у  $\mathbb{R}^2$ .

Дакле, итеративни поступак одвија се тако да се тачка са највећом вредношћу функције циља замењује са тачком, која се добија на основу одговарајуће геометријске трансформације.

NM алгоритам може се приказати кроз следеће кораке:

*Корак 1. Иницијализација.* На основу почетне тачке  $\mathbf{x}_1^{(0)}$  преосталих  $n$  тачака симплекса  $\{\mathbf{x}_{i+1}^{(0)} : 1 \leq i \leq n\}$  одређују се према следећем изразу

$$\mathbf{x}_{i+1}^{(0)} = \mathbf{x}_1^{(0)} + \lambda \mathbf{e}_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (7.25)$$

при чему је са  $\mathbf{e}_i$  означен јединични вектор  $i$ -те координатне осе и  $\lambda$  представља почетни корак, где је  $\lambda = 1$  унапред задат.



*Корак 2. Сортирање.* Тачке симплекса се сортирају према вредности функције циља на следећи начин

$$f(\mathbf{x}_1^{(k)}) \leq \dots \leq f(\mathbf{x}_{n+1}^{(k)}), \quad (7.26)$$

где  $k$  означава тренутну итерацију NM методе.

*Корак 3. Рефлексија.* Тачка рефлексије  $\mathbf{x}_r^{(k)}$  одређује се на основу следећег израза

$$\mathbf{x}_r^{(k)} = \bar{\mathbf{x}}^{(k)} + \alpha(\bar{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{x}_{n+1}^{(k)}), \quad (7.27)$$

где  $\alpha > 0$  означава коефицијент рефлексије. У већини имплементација усваја се да је  $\alpha = 1$ . При томе, центроид  $n$  најбољих тачака одређује се на основу следећег израза

$$\bar{\mathbf{x}}^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^{(k)}. \quad (7.28)$$

Ако тачка рефлексије  $\mathbf{x}_r^{(k)}$  није боља од најбоље тачке симплекса  $\mathbf{x}_1$ , а боља је од друге најгоре тачке  $\mathbf{x}_n$ , односно  $f(\mathbf{x}_1^{(k)}) \leq f(\mathbf{x}_r^{(k)}) < f(\mathbf{x}_n^{(k)})$ , тада тачка рефлексије  $\mathbf{x}_r^{(k)}$  мења најгору тачку симплекса  $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)}$  чиме се завршава тренутна итерација. С друге стране, уколико је тачка рефлексије  $\mathbf{x}_r^{(k)}$  боља од најбоље тачке симплекса  $\mathbf{x}_1$ , тј.  $f(\mathbf{x}_r^{(k)}) < f(\mathbf{x}_1^{(k)})$ , примењује се експанзија, у супротном примењује се контракција.

*Корак 4. Експанзија.* Тачку експанзије  $\mathbf{x}_e^{(k)}$  у смеру тачке рефлексије  $\mathbf{x}_r^{(k)}$  одређује се према следећем изразу

$$\mathbf{x}_e^{(k)} = \bar{\mathbf{x}}^{(k)} + \beta(\mathbf{x}_r^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}^{(k)}), \quad (7.29)$$

где  $\beta > 1$  означава коефицијент експанзије. У већини имплементација усваја се да је  $\beta = 2$ . Уколико је тачка експанзије  $\mathbf{x}_e^{(k)}$  боља од тачке рефлексије  $\mathbf{x}_r^{(k)}$ , односно  $f(\mathbf{x}_e^{(k)}) < f(\mathbf{x}_r^{(k)})$ , тада тачка експанзије  $\mathbf{x}_e^{(k)}$  мења најгору тачку симплекса  $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)}$ ,

чиме се завршава тренутна итерација. У супротном, тачка рефлексије  $\mathbf{x}_r^{(k)}$  мења најгору тачку симплекса  $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)}$ , чиме се завршава итерација.

*Корак 5. Контракција.* После рефлексије, контракција у оквиру оптимизационог процеса може се реализовати кроз:

*Корак 5.1. Спољашња контракција.* Ако је  $f(\mathbf{x}_r^{(k)}) < f(\mathbf{x}_{n+1}^{(k)})$ , тада се тачка  $\mathbf{x}_c^{(k)}$  одређује на основу следећег израза

$$\mathbf{x}_c^{(k)} = \bar{\mathbf{x}}^{(k)} + \gamma(\mathbf{x}_r^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}^{(k)}), \quad (7.30)$$

где  $0 < \gamma < 1$  је коефицијент контракције. У већини имплементација усваја се да је  $\gamma = 0.5$ . Ако је  $f(\mathbf{x}_c^{(k)}) \leq f(\mathbf{x}_r^{(k)})$ , тада тачка  $\mathbf{x}_c^{(k)}$  мења најгору тачку симплекса  $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)}$ , чиме се завршава тренутна итерација, у супротном примењује се сажимање.

*Корак 5.2. Унутрашња контракција.* Ако је  $f(\mathbf{x}_r^{(k)}) \geq f(\mathbf{x}_{n+1}^{(k)})$ , тада се генерише тачка  $\mathbf{x}_{cc}^{(k)}$  према следећој формули

$$\mathbf{x}_{cc}^{(k)} = \bar{\mathbf{x}}^{(k)} - \gamma(\mathbf{x}_r^{(k)} - \bar{\mathbf{x}}^{(k)}). \quad (7.31)$$

Ако је  $f(\mathbf{x}_{cc}^{(k)}) < f(\mathbf{x}_{n+1}^{(k)})$ , тада тачка  $\mathbf{x}_{cc}^{(k)}$  мења најгору тачку симплекса  $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)}$ , чиме се завршава тренутна итерација, у супротном примењује се сажимање.

*Корак 6. Сажимање.* Сажимање се примењује тако што се замене све тачке симплекса  $\forall i \in \{2, \dots, n+1\}$  осим најбоље, на основу следећег израза

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \mathbf{x}_1^{(k)} + \delta(\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_1^{(k)}), \quad (7.32)$$

где је  $0 < \delta < 1$  коефицијент сажимања. У већини имплементација усваја се да је  $\delta = 0.5$ .

Поступак одређивања оптималног решења, којим се минимизира постављена функција циља, описан *Корацима 2-6*, итеративно се понавља све док се не испуни неки од унапред дефинисаних критеријума заустављања посматраног процеса.

## 8. Модификације хеуристичких алгоритама

При решавању комплексних оптимизационих проблема применом конвенционалних хеуристичких алгоритама у литератури је указано да перформансе ових алгоритама у великој мери зависе од адекватног одабира улазних параметара који контролишу оптимизациони процес. С тим у вези, у доступној литератури постоји стална потреба за унапређењем перформанси ових алгоритама [62-64]. Према томе, у овој дисертацији предложене су модификације хеуристичких алгоритама кроз: адаптивно подешавање параметара ради контроле процеса оптимизације, као и развој нових оператора мутације.

### 8.1 Модификације алгоритама диференцијалне еволуције

Перформансе алгоритама диференцијалне еволуције у великој мери зависе од адекватног одабира оператора мутације, као и од начина одабира три управљачка параметра: броја чланова популације ( $N_p$ ), фактора скалирања ( $F$ ) и фактора укрштања ( $CR$ ). У складу са тим, у релевантној литератури дат је велики број радова који указују на адекватан одабир вредности ових параметара за посматрани оптимизациони проблем [133-135]. Према томе, технике за промену управљачких параметара могу се поделити на: детерминистичке, адаптивне и самоадаптивне.

У циљу модификације вредности управљачких параметара, детерминистичке технике засноване су на унапред дефинисаним правилима и не користе повратне информације добијене из процеса оптимизације. У зависности од карактеристика функције циља у литератури дат је велики број емпиријских смерница за избор

најприкладнијих вредности управљачких параметара [136, 137]. Према томе, за решавање оптимизационих проблема код којих је функција циља сепарабилна функција препоручује се коришћење вредности  $CR \in [0, 0.2]$ , док се за несепарабилне и мултимодалне функције препоручује коришћење вредности  $CR \in [0.9, 1]$  [137]. Такође, у зависности од примењеног оператора укрштања у литератури су дата два скупа дозвољених вредности управљачких параметара и то:  $\{F = 0.5, CR = 0.2\}$  за биномно укрштање и  $\{F = 0.5, CR = 0.9\}$  за експоненцијално укрштање [138]. Поред овога, указано је да веће вредности фактора скалирања на почетку процеса оптимизације омогућавају бољу претрагу простора допустивих решења, чиме се избегава тенденција заглављивања у локални оптимум. С друге стране, у циљу брже конвергенције ка оптималном решењу потребно је да фактор скалирања, на крају процеса оптимизације, узима мање вредности. Такође, веће вредности  $CR$  на почетку процеса оптимизације омогућавају бољу разноликост популације и побољшавају глобалну претрагу. На крају процеса оптимизације, мале вредности  $CR$  побољшавају конвергенцију ка глобалном оптимуму [139].

Адаптивне технике за промену вредности управљачких параметара користе одређене повратне информације добијене из процеса оптимизације, у циљу ажурирања вредности параметара  $F$  и  $CR$ . Сходно овоме, у релевантној литератури дат је велики број техника за адаптивну промену параметара током оптимизационог процеса. Међу њима, посебно се истиче алгоритам адаптивне диференцијалне еволуције са опционом екстерном архивом – JADE (*Adaptive Differential Evolution with Optional External Archive*, JADE), који је представљен од стране Zhang-а и Sanderson-а [140]. Главни допринос у оквиру JADE алгоритма односи се на промену параметара  $F$  и  $CR$ , при чему се вредности ових параметара за сваки члан популације независно генеришу на основу Кошијеве и Гаусове расподеле, респективно. Захваљујући успешној примени JADE алгоритма, представљен је алгоритам адаптивне диференцијалне еволуције SHADE (*Success-History Based Parameter Adaptation for Differential Evolution*, SHADE), као побољшана верзија JADE алгоритма [141]. У оквиру SHADE алгоритма очекиване вредности параметара  $F$  и  $CR$  ажурирају се на основу скупа свих успешних вредности параметара из претходних генерација.

С друге стране, ради добијања оптималних вредности код самоадаптивних техника параметри  $F$  и  $CR$  директно се кодирају у оквиру сваког члана популације, а затим се развијају заједно са осталим решењима у популацији. Међу овим техникама посебно се издваја алгоритам самоадаптивне диференцијалне еволуције - SaDE (*Self-adaptive Differential Evolution*, SaDE) [142]. У оквиру SaDE алгоритма фактор скалирања  $F$  формира се на основу нормалне расподеле са очекиваном вредношћу 0.5 и стандардном девијацијом 0.3. С друге стране, фактор укрштања генерише се на основу нормалне расподеле са средњом вредношћу 0.5 и стандардним одступањем 0.1. У циљу адаптивне промене вредности ових параметара, у оквиру SaDE алгоритма вредности  $F$  и  $CR$  ажурирају се на основу меморисаних успешних вредности из претходних генерација.

Осим адекватног одабира вредности управљачких параметара, на оптимизациони процес DE алгоритма утиче и одговарајући одабир оператора мутације [119, 133]. У зависности од карактеристика функције циља, посматраног оптимизационог проблема, различити оператори мутације могу се са већим степеном успешности применити за решавање одређених врста проблема. Сходно томе, при решавању мултимодалних оптимизационих проблема, DE/rand/1 и DE/rand/2 имају изражену способност глобалне претраге и могу успешно да избегну заглављивање у локалне минимуме, док им је способност локалне претраге смањена. С друге стране, DE/best/1, DE/best/2 и DE/current-to-best/1 имају изражену способност локалне претраге и брзу конвергенцију при решавању оптимизационих проблема са унимодалном функцијом циља [133]. Поред овога, у оквиру JADE алгоритма предложен је нови мутациони оператор DE/current-to-pbest/1, који представља уопштење оператора DE/current-to-best/1. Такође, развијен је и нови алгоритам композитне диференцијалне еволуције - CoDE (*Composite Differential Evolution*, CoDE), који се заснива на коришћењу три стратегије за генерисање вектора мутације и то: DE/rand/1/bin/, DE/rand/2/bin, DE/current-to-rand/1 [143].

У наставку поглавља приказана су предложена побољшања DE алгоритма која се односе на адаптивни одабир управљачких параметара, као и развијене модификације мутационог оператора.

### 8.1.1 Адаптивни одабир управљачких параметара

У оквиру ове дисертације, у циљу побољшања оптимизационих перформанси алгоритма диференцијалне еволуције примењене су адаптивне технике за промену вредности управљачких параметара, које су дефинисане на основу JADE и SHADE алгоритама [140, 141]. Према томе, управљачки параметри  $F_i^{(G)}$  и  $CR_i^{(G)}$  за сваки члан популације  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  у свакој генерацији  $G$  независно се генеришу у складу са следећим изразима

$$F_i^{(G)} = \text{randc}_i(\mu_F^{(G)}, 0.1), \quad (8.1)$$

$$CR_i^{(G)} = \text{randn}_i(\mu_{CR}^{(G)}, 0.1), \quad (8.2)$$

где се  $\text{randc}_i(\mu_F^{(G)}, 0.1)$  користи за генерисање случајних бројева према Кошијевој расподели, док се  $\text{randn}_i(\mu_{CR}^{(G)}, 0.1)$  користи за генерисање случајних бројева у складу са нормалном расподелом, при чему је вредност стандардне девијације 0.1.

У почетној генерацији, очекиване вредности  $\mu_F^{(0)}$  и  $\mu_{CR}^{(0)}$  иницијализоване су на 0.5. У случају када је  $F_i^{(G)} > 1$ , тада се  $F_i^{(G)}$  поставља на вредност 1. С друге стране, уколико је  $F_i^{(G)} < 0$ , вредност параметра  $F_i^{(G)}$  се поново генерише на основу израза (8.1). На сличан начин врши се провера генерисаних вредности параметра  $CR_i^{(G)}$ , тако да, уколико је  $CR_i^{(G)} > 1$ , тада се  $CR_i^{(G)}$  поставља на вредност 1, у супротном ако је  $CR_i^{(G)} < 0$ , вредност параметра постаје  $CR_i^{(G)} = 0$ .

На крају сваке генерације, све успешне вредности управљачких параметара  $F_i^{(G)}$  и  $CR_i^{(G)}$  бележе се у скуповима  $S_F$  и  $S_{CR}$ , респективно. Дакле, на основу вредности из скупова  $S_F$  и  $S_{CR}$  у свакој генерацији очекиване вредности  $\mu_F^{(G)}$  и  $\mu_{CR}^{(G)}$  се ажурирају на основу следећих израза

$$\mu_F^{(G+1)} = \begin{cases} (1-c)\mu_F^{(G)} + c \cdot \text{mean}_{WL}(S_F) & \text{ако је } S_F \neq \emptyset \\ (1-c)\mu_F^{(G)} + c \cdot \text{rand}(0,1) & \text{у супротном} \end{cases}, \quad (8.3)$$

$$\mu_{CR}^{(G+1)} = \begin{cases} (1-c)\mu_{CR}^{(G)} + c \cdot \text{mean}_{WA}(S_{CR}) & \text{ако је } S_{CR} \neq \emptyset \\ (1-c)\mu_{CR}^{(G)} + c \cdot \text{rand}(0,1) & \text{у супротном} \end{cases}, \quad (8.4)$$

где је  $c$  константа која узима вредности из опсега  $[0,1]$ . У већини имплементација узима се да је  $c = 0.1$ . При чему,  $\text{mean}_{WL}(\cdot)$  и  $\text{mean}_{WA}(\cdot)$  означавају пондерисану аритметичку средњу вредност и пондерисану Lehmer-ову средњу вредност, респективно, које се могу одредити на основу следећих израза

$$\text{mean}_{WL}(S_F) = \frac{\sum_{k=1}^L w_k \cdot S_{F,k}^2}{\sum_{k=1}^L w_k \cdot S_{F,k}}, \quad (8.5)$$

$$\text{mean}_{WA}(S_{CR}) = \frac{\sum_{k=1}^L w_k \cdot S_{CR,k}^2}{\sum_{k=1}^L w_k \cdot S_{CR,k}}, \quad (8.6)$$

где је са  $L = |S_F| = |S_{CR}|$  означена величина скупова  $S_F$  и  $S_{CR}$ , респективно. Тада се тежински коефицијент  $w_k$  може одредити на основу вредности функције циља, у складу са следећим изразом

$$w_k = \frac{\Delta f_i}{\sum_{k=1}^L \Delta f_i}, \quad (8.7)$$

при чему  $\Delta f_i = \left| f(\mathbf{u}_i^{(G)}) - f(\mathbf{x}_i^{(G)}) \right|$  означава апсолутну разлику вредности функције циља између пробног вектора и базног вектора, респективно.

### 8.1.2 Адаптивно подешавање фактора скалирања $F$

Перформансе DE алгоритма у великој мери зависе од адекватног одабира вредности фактора скалирања. С тим у вези, указано је да веће вредности фактора скалирања на почетку процеса оптимизације омогућавају бољу претрагу простора допустивих решења и побољшавају разноликост популације, чиме се избегава тенденција заглављивања у локални оптимум. С друге стране, мање вредности фактора скалирања  $F$ , на крају процеса оптимизације омогућавају бољу локалну

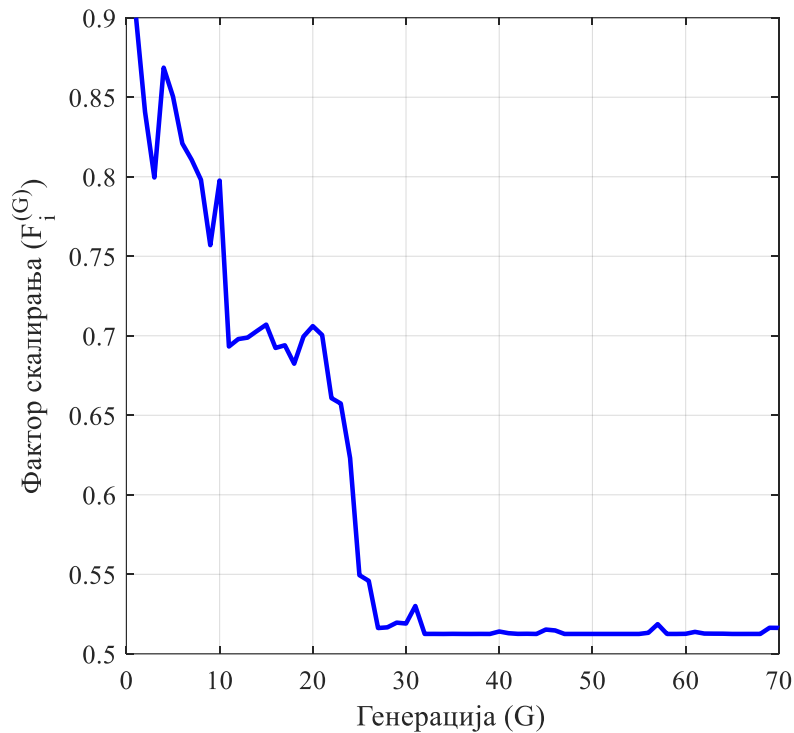
претрагу и побољшавају конвергенцију алгорита ка оптималном решењу [139, 144].

На основу спроведене анализе, у оквиру ове дисертације развијена је адаптивна техника за подешавање вредности фактора скалирања у току оптимизационог процеса, при чему се у свакој генерацији за сваки члан популације  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  формира вредност адаптивног фактора скалирања  $F_i^{(G)}$ , у складу са изразом

$$F_i^{(G)} = \frac{F_{max} - F_{min}}{\exp\left(-10G \frac{f_i^{(G)} - f_{best}^{(G)}}{f_{worst}^{(G)} - f_{best}^{(G)}}\right)}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\}, \quad (8.8)$$

где  $F_{min}$  и  $F_{max}$  означавају минималну и максималну вредност фактора скалирања  $F_i^{(G)}$ , респективно, при чему  $f_{best}^{(G)}$ ,  $f_{worst}^{(G)}$  и  $f_i^{(G)}$  представљају вредности функције циља најбољег, најгорег и  $i$ -тог члана популације, респективно.

Према томе, на слици 8.1 приказана је промена вредности предложеног фактора скалирања  $F_i^{(G)}$  током оптимизационог процеса, при чему су  $F_{max} = 0.9$  и  $F_{min} = 0.5$ .



Слика 8.1. Промена  $F_i^{(G)}$  током оптимизационог процеса.



Са слике 8.1 произилази да на почетку процеса оптимизације, предложени адаптивни фактор скалирања  $F_i^{(G)}$  узима веће вредности чиме се омогућава боља претрага простора допустивих решења. Са порастом броја генерација, на крају процеса оптимизације, предложени адаптивни фактор скалирања  $F_i^{(G)}$  опада, што омогућава бољу локалну претрагу као и бржу конвергенцију ка оптималном решењу.

### 8.1.3 Адаптивно подешавање фактора укрштања $CR$

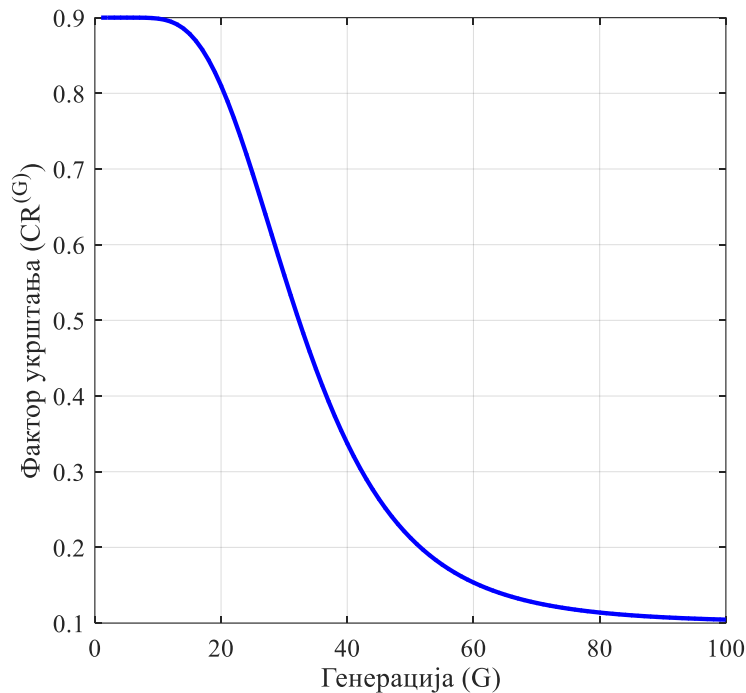
У релевантној литератури указано је да адекватан одабир вредности фактора укрштања  $CR$  утиче на разноликост популације и побољшава квалитет добијеног оптималног решења [119, 139]. На основу једначине (7.9) произилази да са повећањем вредности фактора укрштања  $CR$  расте вероватноћа придруживања параметра мутационог вектора  $v_{i,j}^{(G)}$  одговарајућем параметру пробног вектора  $u_{i,j}^{(G)}$ . На тај начин, веће вредности  $CR$  омогућавају бољу разноликост популације и побољшавају глобалну претрагу. С друге стране, при мањим вредностима  $CR$  повећава се вероватноћа задржавања параметара циљног вектора  $x_{i,j}^{(G)}$ , чиме се побољшава конвергенција ка глобалном оптималном решењу.

На основу спроведене анализе, у оквиру ове дисертације развијена је адаптивна техника за подешавање вредности фактора укрштања током оптимизационог процеса. У складу са тим, вредност фактора укрштања  $CR^{(G)}$  у свакој генерацији формира се према следећој једначини

$$CR^{(G)} = (CR_{max} - CR_{min}) \cdot 2^{-\exp\left(3 \frac{G_{max}}{G+1}\right)} + CR_{min}, \quad (8.9)$$

где је са  $G_{max}$  означен максимални број генерација,  $CR_{max}$  и  $CR_{min}$  представљају максималне и минималне вредности фактора укрштања  $CR^{(G)}$ , респективно.

Према томе, на слици 8.2 приказана је промена вредности предложеног адаптивног фактора укрштања  $CR^{(G)}$  током оптимизационог процеса, при чему су  $CR_{max} = 0.9$  и  $CR_{min} = 0.1$ .



Слика 8.2. Промена  $CR^{(G)}$  током оптимизационог процеса.

Са слике 8.2 произилази да предложени адаптивни фактор скалирања  $CR^{(G)}$  има веће вредности на почетку процеса оптимизације, док са порастом броја генерација вредност овог параметра опада. Према томе, већа вредност фактора скалирања  $CR^{(G)}$  на почетку процеса оптимизације омогућава бољу разноликост популације и побољшава глобалну претрагу. С друге стране, мања вредност адаптивног фактор скалирања  $CR^{(G)}$  на крају процеса оптимизације побољшава конвергенцију ка глобалном оптималном решењу.

#### 8.1.4 Мутациони оператор DE/current-to-pbest/1

Поред побољшања у виду адаптивних техника за постављање вредности управљачких параметара, у оквиру JADE алгоритма дата је формулација унапређеног мутационог оператора DE/current-to-pbest/1, који представља уопштење оператора DE/current-to-best/1 [140]. У литератури је указано да се применом мутационог оператора DE/current-to-pbest/1 побољшава конвергенција ка глобалном оптималном решењу посебно при крају процеса оптимизације. Према томе, у оквиру ове дисертације примењен је мутациони оператор DE/current-to-

pbest/1 ради ефикасније претраге простора допустивих решења током оптимizacionог процеса. Дакле, употребом мутационог оператора DE/current-to-pbest/1 одговарајући мутациони вектор  $\mathbf{v}_i^{(G)}$  формира се на основу следећег израза

$$\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + F_i^{(G)} \left( \mathbf{x}_{pbest}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)} \right) + F_i^{(G)} \left( \mathbf{x}_{r1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r2}^{(G)} \right), \quad (8.10)$$

где је са  $\mathbf{x}_{pbest}^{(G)}$  означен вектор случајно одабран из скупа ( $p \times 100\% \times NP$ ) најбољих чланова популације, при чему је  $p \in (0,1]$  и  $F_i^{(G)}$  представља фактор скалирања који је генерисан за сваки члан популације  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  у складу са изразом (7.3). На основу израза (8.10) произилази да мутациони вектор претражује простор допустивих решења у околини циљног вектора  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  усмерено ка вектору  $\mathbf{x}_{pbest}^{(G)}$  и тако побољшава конвергенцију ка глобалном оптимуму на крају процеса оптимизације.

### 8.1.5 Адаптивни мутациони оператор

Адекватан одабир оператора мутације у зависности од карактеристика функције циља посматраног оптимizacionог проблема значајан је за перформансе DE алгоритма, као што су брзина конвергенције и разноликост популације [145]. Према томе, у оквиру ове дисертације ради избегавања тенденција заглављивања у локални оптимум и спречавања појаве стагнације, предложен је адаптивни мутациони оператор. Дакле, применом предложеног оператора за сваку фазу оптимizacionог процеса бира се адекватан оператор мутације. Сходно томе, мутациони оператори DE/rand/1 и DE/rand/2 имају изражену способност глобалне претраге, док је мутациони оператор DE/best/1 погодан за локалну претрагу. У циљу додатног побољшања локалне претраге примењује се мутациони оператор DE/current-to-best/1 [133].

На основу горе наведених разматрања, ради успостављања равнотеже између фаза глобалне и локалне претраге, у оквиру ове дисертације предложен је адаптивни параметар  $\delta^{(G)}$  у складу са следећим изразом

$$\delta^{(G)} = \left| \frac{f_{best}^{(G)} - f_{mean}^{(G)}}{f_{best}^{(G)} - f_{worst}^{(G)}} \right|, \quad (8.11)$$

где је са  $f_{mean}^{(G)}$  означена средња вредност функције циља у текућој популацији. Према томе, псеудо-код предложеног адаптивног мутационог оператора дат је у Алгоритму 4.

---

**Алгоритам 4** Адаптивни мутациони оператор
 

---

```

1: if  $\delta^{(G)} > 0.5$  then
2:   if  $rand > 0.5$  then
3:      $\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{r1} + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r2} - \mathbf{x}_{r3})$ 
4:   else
5:      $\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{r1} + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r2} - \mathbf{x}_{r3}) + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r4} - \mathbf{x}_{r5})$ 
6:   end if
7: else if  $\delta^{(G)} \leq 0.5$  then
8:   if  $rand > 0.5$  then
9:      $\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{best} + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r1} - \mathbf{x}_{r2})$ 
10:  else
11:     $\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_i + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{best} - \mathbf{x}_i) + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r1} - \mathbf{x}_{r2})$ 
12:  end if
13: end if

```

---

На основу псеудо-кода датог у Алгоритму 4, произилази да адаптивни параметар  $\delta^{(G)} \in [0,1]$  утиче на одабир одговарајућег мутационог оператора у процесу претраге DE алгоритма. Дакле, на основу једначине (8.11) произилази да је вредност параметра  $\delta^{(G)}$  на почетку процеса оптимизације блиска 1, што указује да је популација удаљена од глобалног оптималног решења. Према томе, мутациони оператори DE/rand/1 и DE/rand/2 изабрани су насумично са вероватноћом 0.5, у циљу побољшања претраге простора допустивих решења и проналажења региона глобалног оптималног решења. На крају процеса оптимизације, вредност параметра  $\delta^{(G)}$  је блиска 0, што показује да је популација лоцирана у околини глобалног оптимума. Дакле, мутациони оператори DE/best/1 и DE/current-to-best/1 изабрани су насумично са вероватноћом 0.5, ради унапређења локалне претраге и побољшања конвергенције ка глобалном оптималном решењу.

## 8.2 Модификација алгоритма оптимизације роја честица

У релевантној литератури указано је да при решавању нелинеарних и мултимодалних оптимизационих проблема, конвенционални PSO алгоритам

показује преурањену конвергенцију ка оптималном решењу. У циљу превазилажења проблема PSO алгоритма, у литератури је дат велики број техника за адаптивну промену коефицијената убрзања током оптимизационог процеса [146-148].

На основу једначине (7.15), произилази да вредности коефицијента когнитивног и социјалног убрзања  $c_1$  и  $c_2$ , респективно, одређују смер претраге PSO алгоритма ка глобалном оптималном решењу. Према томе, већа вредност коефицијента  $c_1$  усмерава популацију ка најбољим позицијама које су остварене у току оптимизационог процеса  $\mathbf{p}_i^{(G)}$ , чиме се побољшава глобална претрага. С друге стране, већа вредност коефицијента  $c_2$  усмерава популацију ка глобално најбољој позицији свих честица, чиме се побољшава локална претрага у околини честице  $\mathbf{g}^{(G)}$ . Дакле, у циљу побољшања оптимизационих перформанси и одржавања равнотеже између глобалне и локалне претраге, у релевантној литератури дат је велики број радова на тему адаптивног ажурирања коефицијената  $c_1$  и  $c_2$  [124-126].

Према томе, ради побољшања глобалне претраге на почетку процеса оптимизације и унапређења локалне претраге на крају оптимизационог процеса, предложена је употреба временски променљивих коефицијента убрзања (*Time-Varying Acceleration Coefficients*, TVAC) [149] за промену вредности коефицијената  $c_1$  и  $c_2$ , која се може представити следећим изразима

$$c_1 = (c_{1f} - c_{1i}) \frac{G}{G_{\max}} + c_{1i}, \quad (8.12)$$

$$c_2 = (c_{2f} - c_{2i}) \frac{G}{G_{\max}} + c_{2i}, \quad (8.13)$$

где су са  $c_{1i}$  и  $c_{2i}$  означене почетне вредности, док су  $c_{1f}$  и  $c_{2f}$  означене крајње вредности коефицијената  $c_1$  и  $c_2$ , респективно. У већини имплементација узима се да је  $c_{1i} = 0.5$ ,  $c_{1f} = 2.5$ ,  $c_{2i} = 2.5$  и  $c_{2f} = 0.5$ . На основу израза (8.12) и (8.13), произилази да се вредности коефицијената  $c_1$  и  $c_2$  са порастом генерација мењају од 2.5 до 0.5, као и од 0.5 до 2.5, респективно.

Сходно томе, у циљу додатног побољшања оптимизационих перформанси, предложене је употреба нелинеарних динамичких коефицијената убрзања (*Nonlinear Dynamic Acceleration Coefficients*, NDAC) [150] за подешавање вредности коефицијената  $c_1$  и  $c_2$ , према следећим изразима

$$c_1 = -(c_{1f} - c_{1i}) \times \left( \frac{G}{G_{\max}} \right)^2 + c_{1f}, \quad (8.14)$$

$$c_2 = c_{1i} \times \left( 1 - \frac{G}{G_{\max}} \right)^2 + c_{1f} \times \left( \frac{G}{G_{\max}} \right). \quad (8.15)$$

У циљу успостављања равнотеже између фаза глобалне и локалне претраге, у оквиру ове дисертације предложено је адаптивно подешавање вредности коефицијената  $c_1^{(G)}$  и  $c_2^{(G)}$ , која се може представити следећим изразима

$$c_1^{(G)} = c_i \left( 1 + \left( \frac{c_i}{c_f} - 1 \right) \exp \left( - \frac{G}{G_{\max}} \right) \right)^{-1}, \quad (8.16)$$

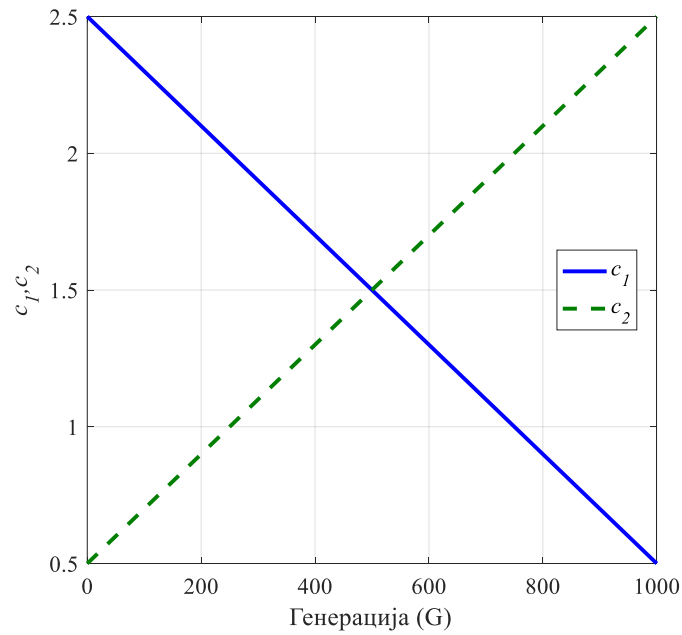
$$c_2^{(G)} = (c_f + c_i) - c_i \left( 1 + \left( \frac{c_i}{c_f} - 1 \right) \exp \left( - \frac{G}{G_{\max}} \right) \right)^{-1}, \quad (8.17)$$

где су са  $c_i$  и  $c_f$  означене почетна и крајња вредност когнитивног  $c_1$  и социјалног коефицијената  $c_2$ , респективно.

Према томе, уврштавањем ових израза у једначину (7.15), формира се нови израз за ажурирање вредности вектора брзине, који је дат следећом једначином

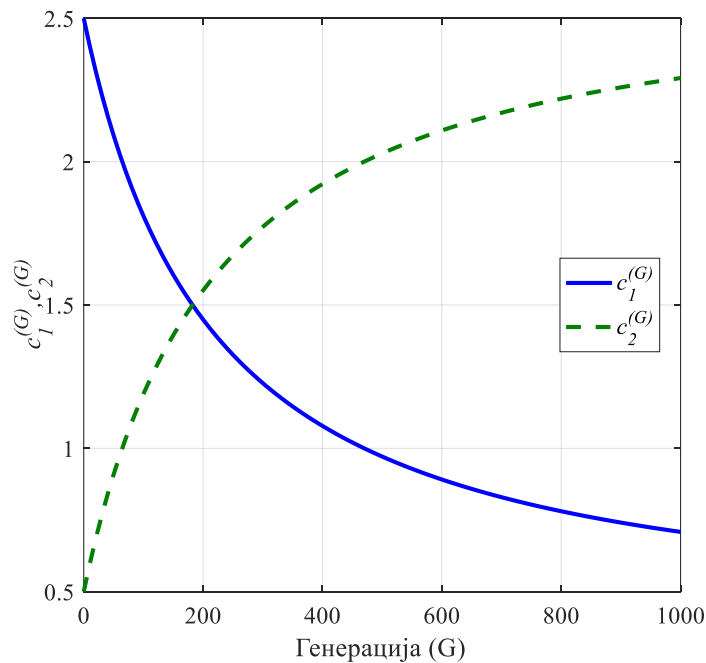
$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \omega^{(G)} \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1^{(G)} r_1 (\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + c_2^{(G)} r_2 (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}). \quad (8.18)$$

У циљу поређења коефицијената убрзања, на слици 8.3 приказана је промена вредности коефицијената  $c_1$  и  $c_2$  датих једначинама (8.14) и (8.15), током оптимизационог процеса.



Слика 8.3. Коефицијенти убрзања  $c_1$  и  $c_2$  с порастом генерација.

Поред овог, на слици 8.4 дата је и промена вредности предложене адаптивне технике за подешавање коефицијената  $c_1^{(G)}$  и  $c_2^{(G)}$  на основу израза (8.16) и (8.17), током оптимизационог процеса, при чему су  $c_i = 0.5$  и  $c_f = 2.5$ .



Слика 8.4. Адаптивно подешавање коефицијената  $c_1^{(G)}$  и  $c_2^{(G)}$  с порастом генерација.

Са слика 8.3 и 8.4, произилази да коефицијенти  $c_1$  и  $c_2$  генерисани на основу TVAC технике, са порастом генерација брзо мењају вредности при чему долази до смањења способности претраге PSO алгоритма. С друге стране, на почетку процеса оптимизације вредности коефицијената  $c_1^{(G)}$  и  $c_2^{(G)}$  добијених на основу предложене адаптивне технике за генерисање коефицијената постепено се мењају, чиме се омогућава боља претрага простора допустивих решења. Са порастом броја генерација, на крају процеса оптимизације, коефицијенти  $c_1^{(G)}$  и  $c_2^{(G)}$ , брже мењају вредности, што је погодно за побољшање конвергенције ка глобалном оптималном решењу. Према томе, предложена техника за адаптивно подешавање вредности коефицијената  $c_1^{(G)}$  и  $c_2^{(G)}$ , успоставља адекватну равнотежу између фаза глобалне и локалне претраге током процеса оптимизације.

### 8.3 Модификација алгоритма свитаца

У релевантној литератури уочени су недостаци конвенционалног FA алгоритма при решавању неконвексних оптимизационих проблема, као што је тенденција заглављивања у локални оптимум, када долази до проблема преурађене конвергенције. У циљу превазилажења ових проблема, у литератури је дат велики број модификација конвенционалног FA алгоритма [129, 151].

На основу једначине (7.20), уочава се да је вредност функције привлачности  $\beta(r_{i,j})$  блиска нули на почетку процеса оптимизације, када је растојање између свитаца у популацији изузетно велико. У овом случају, кретање свитаца у популацији је случајног карактера, тако да се не гарантује конвергенција ка глобалном оптималном решењу. С друге стране, са порастом броја генерација, растојање између свитаца постаје мање, и тада вредност функције привлачности  $\beta(r_{i,j})$  постаје константна и блиска  $\beta_0$ . У овом случају, врши се кретање свитаца по простору допустивих решења ка најсветлијем свицу у јату. Према томе, у циљу одржавања равнотеже између фаза глобалне и локалне претраге потребно је извршити модификацију механизма претраге FA алгоритма.



Дакле, на основу спроведене анализе, ради успостављања адекватне равнотеже између фаза глобалне и локалне претраге, у оквиру ове дисертације развијена је побољшана функција привлачности  $\tilde{\beta}(r_{i,j})$  у складу са изразом

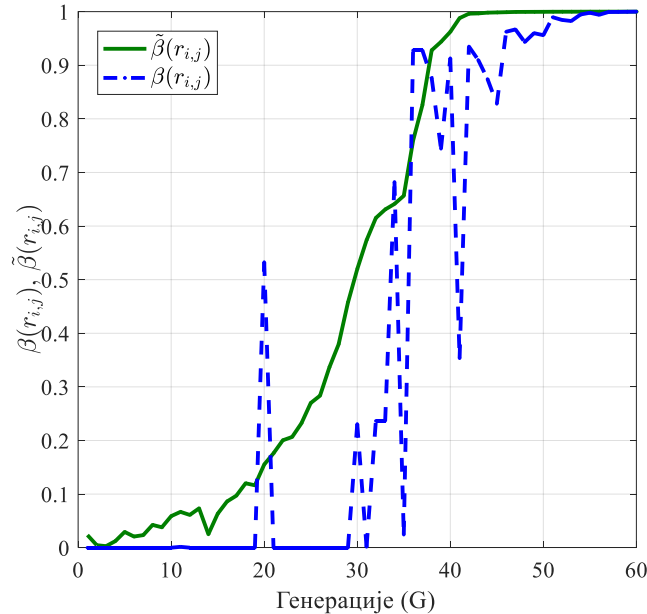
$$\tilde{\beta}(r_{i,j}) = \beta_0 e^{-\gamma r_{i,j}^2 \frac{G}{G_{\max}}} \frac{f_{best}}{f_{mean}}, \quad (8.19)$$

где су са  $f_{mean}$  и  $f_{best}$  означене средња и најбоља вредност функције циља, респективно.

Према томе, уврштавањем израза (8.19) у једначину (7.22), формира се нови израз за ажурирање позиције свица у  $(G+1)$ -ој итерацији, на следећи начин

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + \tilde{\beta}(r_{i,j})(\mathbf{x}_j^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + \alpha \boldsymbol{\epsilon}_i^{(G)}. \quad (8.20)$$

На основу тога, на слици 8.5 дата је промена вредности функције привлачности  $\beta(r_{i,j})$  дефинисана једначином (7.20) (приказана испрекиданом линијом), као и предложена функције привлачности  $\tilde{\beta}(r_{i,j})$ , која је дата једначином (8.19) (приказана пуном линијом), током оптимизационог процеса.



**Слика 8.5.** Упоредни приказ функција привлачности  $\beta(r_{i,j})$  и  $\tilde{\beta}(r_{i,j})$  током оптимизационог процеса.

Дакле, са слике 8.5, произилази да функција привлачности  $\beta(r_{i,j})$  дефинисана једначином (7.20) на почетку процеса оптимизације има вредност блиску нули. Међутим, са порастом броја генерација, вредност функције привлачности  $\beta(r_{i,j})$  варира између 0 и 1. На тај начин се успорава процес претраге тако да се не гарантује конвергенција ка оптималном решењу. У складу са тим, ради побољшања способности проналажења глобалног оптималног решења, предложена је функција привлачности  $\tilde{\beta}(r_{i,j})$  дефинисана једначином (8.19), која показује постепени пораст вредности са повећањем генерација. На почетку процеса оптимизације, предложена функција привлачности има вредности блиске 0, што је погодно за истраживање простора решења. Са порастом броја генерација, на крају процеса оптимизације, вредност  $\tilde{\beta}(r_{i,j})$  блиска је 1, чиме се побољшава локална претрага. Дакле, предложена модификација функције привлачности  $\tilde{\beta}(r_{i,j})$ , омогућава бољу разноликост популације и побољшава брзину конвергенције у циљу успостављања равнотеже између фаза глобалне и локалне претраге током оптимизационог процеса FA алгоритма.

## 9. Хибридизација алгоритама

Сваки од разматраних алгоритама у претходним поглављима има одређене предности и недостатке у процесу изналажења глобалног оптималног решења. Ради изналажења глобалног оптималног решења повишене тачности за постављени оптимизациони проблем, конструисан је хибридни алгоритам, који комбинује два или више оптимизационих алгоритама у циљу адекватног коришћења предности једних и истовремене елиминације недостатака других алгоритама. На тај начин, хибридни алгоритми остварују боље оптимизационе перформансе, које се првенствено огледају у побољшању квалитета оптималног решења. Велики број радова у литератури посвећен је формирању хибридних алгоритама за решавање комплексних оптимизационих проблема [152-154].

У наредним одељцима су описана три хибридна алгоритама за решавање проблема пасивног лоцирања.

### 9.1 Хибридизација алгоритама диференцијалне еволуције и Нелдер – Мид методе

У релевантној литератури велики број радова посвећен је развоју и примени хибридних алгоритама, где се еволутивни алгоритми комбинују са различитим методама локалне претраге. Према томе, показује се да хибридни алгоритми остварују боља решења у поређењу са конвенционалним еволутивним алгоритмима [86-89]. На тај начин, применом алгоритма локалне претраге у оквиру хибридног алгоритма могуће је побољшати квалитет добијених решења и убрзати конвергенцију ка глобалном оптималном решењу. У складу са тим, ради побољшања оптимизационих перформанси DE алгоритма, у оквиру ове

дисертацији предложена је хибридикација адаптивног алгоритма диференцијалне еволуције и Нелдер – Мид методе, у ознаци HADENM (*Hybrid Adaptive Differential Evolution Nelder Mead*), ради ефикасног решавања проблема пасивног лоцирања [86]. Током процеса оптимизације предложени хибридни алгоритам врши претрагу простора допустивих решења кроз две фазе. У првој фази примењује се DE алгоритам у циљу претраживања простора допустивих решења и проналажења региона глобалног оптимума. Такође, ради побољшања перформанси у оквиру алгоритма диференцијалне еволуције примењене су адаптивне технике за подешавање фактора скалирања и фактора укрштања у складу са изразима (8.8) и (8.9), респективно. Након одређивања региона глобалног оптимума, у другој фази алгоритма примењује се Нелдер – Мид метода, при чему се за почетну тачку симплекса користи најбоље решење добијено из DE алгоритма. На тај начин, применом NM алгоритма побољшава се тачност добијеног оптималног решења и постиже се бржа конвергенција ка глобалном оптимуму. Описани оптимизациони процес HADENM алгоритма итеративно се понавља све док се не испуни неки унапред дефинисан критеријум заустављања. Сходно овоме, псеудо-код предложеног хибридног HADENM алгоритма приказан је у Алгоритму 5.

---

**Алгоритам 5** HADENM алгоритам

---

```

1: Поставити параметре  $N_P$ ,  $G_{max}$ ,  $F_{max}$ ,  $F_{min}$ ,  $CR_{max}$ ,  $CR_{min}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 
2: Генерисање почетне популацију честица у домену  $[x_{i,j}^L, x_{i,j}^U]$ 
3: while  $G \leq G_{max}$  do
4:   for  $i = 1$  to  $N_P$  do
5:     Одредити вредност  $F_i^{(G)}$  помоћу (8.8)
6:     Израчунати  $CR_i^{(G)}$  према (8.9)
7:     Одредити вредност параметра  $\delta^{(G)}$ 
8:     if  $\delta^{(G)} > 0.5$  then
9:       if  $rand > 0.5$  then
10:         $\mathbf{v}_i^{(G)} \leftarrow \mathbf{x}_{r1} + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r2} - \mathbf{x}_{r3})$ 
11:       else
12:         $\mathbf{v}_i^{(G)} \leftarrow \mathbf{x}_{r1} + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r2} - \mathbf{x}_{r3}) + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r4} - \mathbf{x}_{r5})$ 
13:       end if
14:     else if  $\delta^{(G)} \leq 0.5$  then
15:       if  $rand > 0.5$  then
16:         $\mathbf{v}_i^{(G)} \leftarrow \mathbf{x}_{best} + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r1} - \mathbf{x}_{r2})$ 
17:       else
18:         $\mathbf{v}_i^{(G)} \leftarrow \mathbf{x}_i + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{best} - \mathbf{x}_i) + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r1} - \mathbf{x}_{r2})$ 
19:       end if
20:     end if

```

---

```

21:   if  $\text{rand}_{j,i} \leq CR \vee j = j_{\text{rand}}$  then
22:      $u_{i,j}^{(G)} \leftarrow v_{i,j}^{(G)}$ 
23:   else
24:      $u_{i,j}^{(G)} \leftarrow x_{i,j}^{(G)}$ 
25:   end if
26:   if  $f(\mathbf{u}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{x}_i^{(G)})$  then
27:      $\mathbf{x}_i^{(G+1)} \leftarrow \mathbf{u}_i^{(G)}$ 
28:   else
29:      $\mathbf{x}_i^{(G+1)} \leftarrow \mathbf{x}_i^{(G)}$ 
30:   end if
31: end for
32: end while
33: Иницијализовати NM алгоритам најбољим решењем из DE
    алгоритма
34: while  $k \leq k_{\text{max}}$  do
35:   Сортирати тачке према  $f(\mathbf{x}_1^{(k)}) \leq \dots \leq f(\mathbf{x}_{n+1}^{(k)})$ 
36:   Извршити рефлексију према (7.27)
37:   if  $f(\mathbf{x}_1^{(k)}) \leq f(\mathbf{x}_r^{(k)}) < f(\mathbf{x}_n^{(k)})$  then
38:      $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_r^{(k)}$ 
39:   end if
40:   Извршити експанзију помоћу (7.29)
41:   if  $f(\mathbf{x}_e^{(k)}) < f(\mathbf{x}_r^{(k)})$  then
42:      $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_e^{(k)}$ 
43:   else
44:      $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_r^{(k)}$ 
45:   end if
46:   if  $f(\mathbf{x}_n^{(k)}) \leq f(\mathbf{x}_r^{(k)}) < f(\mathbf{x}_{n+1}^{(k)})$  then
47:     Спољашња контракција према (7.30)
48:     if  $f(\mathbf{x}_c^{(k)}) \leq f(\mathbf{x}_r^{(k)})$  then
49:        $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_c^{(k)}$ 
50:     else
51:       Извршити сажимање у складу са (7.32)
52:     end if
53:   else if  $f(\mathbf{x}_r^{(k)}) \geq f(\mathbf{x}_{n+1}^{(k)})$  then
54:     Извршити унутрашњу контракцију према (7.31)
55:     if  $f(\mathbf{x}_{cc}^{(k)}) < f(\mathbf{x}_{n+1}^{(k)})$  then
56:        $\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}_{cc}^{(k)}$ 
57:     else
58:       Извршити сажимање у складу са (7.32)
59:     end if
60:   end if
61: end while
62: Приказати глобално оптимално решење

```

---

## 9.2 Хибридизација алгоритама свитаца и диференцијалне еволуције

Алгоритам свитаца може се успешно применити за решавање проблема изналажења глобалног оптимума различитих практичних оптимизационих проблема. Међутим, у поређењу са DE алгоритмом, конвенционалан FA алгоритам показује одређене недостатке при решавању комплексних оптимизационих проблема, као што су спора конвергенција и неусклађена равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге. Дакле, у циљу превазилажења ових проблема, у оквиру ове дисертације предложена је хибридизација алгоритама свитаца и диференцијалне еволуције, у ознаци AHFADE (*Adaptive Hybrid Firefly Differential Evolution*), за решавање проблема пасивног лоцирања. Основна идеја предложене хибридизације је побољшање перформанси модификовањем конвенционалног FA алгоритма: имплементацијом додатног адаптивног параметра за успостављање равнотеже између глобалне и локалне претраге, као и инкорпорирањем оператора мутације и селекције из DE алгоритма. Као што је указано у поглављу 7.1.1, мутациони оператор DE/rand/1 побољшава разноликост популације и има изражену способност глобалне претраге, док DE/current-to-pbest/1, побољшава локалну претрагу и показује брзу конвергенцију ка глобалном оптимуму. Дакле, ради побољшања разноликости популације, брже конвергенције као и избегавања тенденција заглављивања у локални оптимум предложене су две модификације.

Прва модификација односи се на инкорпорирање мутационог оператора DE/rand/1 у оквиру FA алгоритма, у циљу побољшања разноликости популације и унапређења способности глобалне претраге. У складу са тим, члан  $\alpha\epsilon_i$  у изразу (7.22) мења се чланом  $F_i^{(G)}(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)})$  из једначине (7.4). Такође, у циљу побољшања перформанси  $F_i^{(G)}$  дефинисан једначином (8.1) уврштава се у једначину (7.22). Тада се, након замене члана  $\mathbf{x}_j^{(G)}$  из израза (7.22) са вектором  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  из једначине (7.43), позиција  $i$ -тог свитаца може одредити на основу следећег израза

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + \tilde{\beta}(r_{i,r_1}) (\mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}). \quad (9.1)$$

Применом одговарајућих алгебарских трансформација израз (9.1) може се приказати у следећем облику

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \left(1 - \tilde{\beta}(r_{i,r_1})\right) \mathbf{x}_i^{(G)} + \tilde{\beta}(r_{i,r_1}) \mathbf{x}_{r_1}^{(G)} + F_i^{(G)} \left(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}\right), \quad (9.2)$$

где је са  $r_{i,r_1}$  означено растојање између свитаца  $i$  и  $r_1$  на позицијама  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  и  $\mathbf{x}_{r_1}^{(G)}$ , респективно.

Друга модификација односи се на инкорпорирање мутационог оператора DE/current-to-pbest/1 у оквиру FA алгоритма, ради побољшања способности локалне претраге и брже конвергенције ка глобалном оптималном решењу. У складу са тим, трећи члан из једначине (7.22) мења се са  $F_i^{(G)} \left(\mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)}\right)$ , при чему је  $\mathbf{x}_{r_1}^{(G)}$  замењено са  $\left(\mathbf{x}_{pbest}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}\right)$ . Дакле, на основу извршених модификација добија се нови израз за промену позиције  $i$ -тог свица, записан у следећем облику

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \left(1 - \tilde{\beta}(r_{i,pbest})\right) \mathbf{x}_i^{(G)} + \tilde{\beta}(r_{i,pbest}) \left(\mathbf{x}_{pbest}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}\right) + F_i^{(G)} \left(\mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)}\right) \quad (9.3)$$

где је са  $r_{i,pbest}$  означено растојање између свица  $i$  и  $pbest$  на позицијама  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  и  $\mathbf{x}_{pbest}^{(G)}$ , респективно.

Дакле, у циљу успостављања равнотеже између фаза глобалне и локалне претраге, у оквиру ове дисертације предложено је коришћење адаптивног параметра  $\Delta$ , који се може дефинисати у складу са следећим изразом

$$\Delta = 1 - \frac{\left|f_{mean}^{(G)} - f_{best}^{(G)}\right|}{\left|f_{worst}^{(G)} - f_{best}^{(G)}\right|}, \quad (9.4)$$

при чему  $f_{mean}^{(G)}$ ,  $f_{best}^{(G)}$  и  $f_{worst}^{(G)}$  означавају средњу, најбољу и најлошију вредност функције циља читаве популације, респективно.

На основу израза (9.4) произилази да се успостављање равнотеже између фаза глобалне и локалне претраге може остварити променом вредности параметра  $\Delta$ . Сходно овоме, када је вредност параметра  $\Delta$  блиска 0, разноликост популације је мала, чиме се указује на потребу побољшања глобалне претраге. Тада се, у циљу истраживања простора и проналажења региона оптималног решења примењује

израз (9.2). С друге стране, када је вредност параметра  $\Delta$  блиска 1, разноликост популације је велика, чиме се указује на потребу побољшања локалне претраге. У овом случају, примењује се једначина (9.3) ради брже конвергенције и ефикаснијег претраживања региона глобалног оптималног решења.

На основу спроведене анализе, у складу са променом вредности адаптивног параметра  $\Delta$  формира се нови израз за ажурирање позиције  $i$ -тог свица

$$\mathbf{v}_i^{(G+1)} = \begin{cases} (1 - \tilde{\beta}(r_{i,r_1}))\mathbf{x}_i^{(G)} + \tilde{\beta}(r_{i,r_1})\mathbf{x}_{r_1}^{(G)} + F_i(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}), & \Delta \leq p \\ (1 - \tilde{\beta}(r_{i,pbest}))\mathbf{x}_i^{(G)} + \tilde{\beta}(r_{i,pbest})(\mathbf{x}_{pbest}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + F_i(\mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)}), & \text{у супротоном} \end{cases}, \quad (9.5)$$

где је са  $p$  означена предефинисана критична вредност таква да је  $p = 0.5$ . Предложена модификација у великој мери утиче на побољшање разноликости популације и брзину конвергенције алгорита, чиме се остварује адекватна равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге.

Такође, у циљу додатног унапређења оптимизационих перформанси предложеног хибридног алгорита оператори укрштања и селекције из DE алгорита су инкорпорирани у оквиру FA алгорита. Сходно овоме, псеудо-код предложеног хибридног ANFADE алгорита приказан је у Алгоритму 6.

---

#### Алгоритам 6 ANFADE алгоритам

---

- 1: Генерисање почетне популације свицаца
- 2: Одредити интензитет светлости свица  $I_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\}$  на основу вредности функције циља
- 3: Поставити параметре  $G_{max}, \alpha, \beta_0, \gamma,$
- 4:  $G = 0$
- 5: **while**  $G \leq G_{max}$  **do**
- 6:     **for**  $i = 1$  **do**  $N_p$  **do**
- 7:         **for**  $j = i$  **do**  $N_p$  **do**
- 8:             **if**  $I_j > I_i$  **then**
- 9:                 Одредити Еуклидско растојање  $r_{i,j}$  између свицаца
- 10:                 Израчунати привлачност  $\tilde{\beta}(r_{i,j})$  према (8.19)
- 11:                 Одредити вредност  $F_i^{(G)}$  помоћу (8.1)
- 12:                 Израчунати  $CR_i^{(G)}$  према (8.2)
- 13:                 **if**  $\Delta < 0.5$  **then**
- 14:                     Померити  $i$ -тог свица ка  $j$ -том свицу на основу (9.2)
- 15:                 **else**
- 16:                     Померити  $i$ -тог свица ка  $j$ -том свицу на основу (9.3)

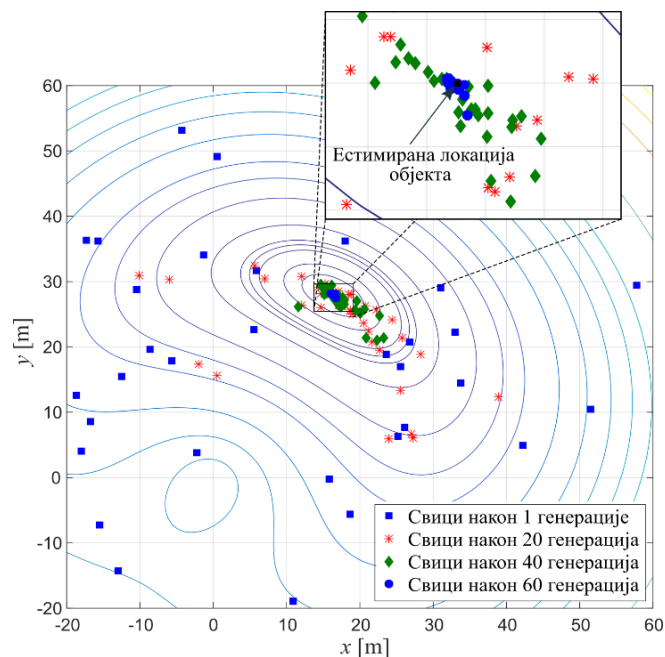


```

17:         end if
18:         Применили оператор укрштања
19:         if  $\text{rand}_{i,j} \leq CR_i^{(G)} \vee j = j_{\text{rand}}$  then
20:              $u_{i,j}^{(G)} = v_{i,j}^{(G)}$ 
21:         else
22:              $u_{i,j}^{(G)} = x_{i,j}^{(G)}$ 
23:         end if
24:         Применили оператор селекције
25:         if  $f(\mathbf{u}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{x}_i^{(G)})$  then
26:              $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{u}_i^{(G)}$ 
27:         else
28:              $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{v}_i^{(G)}$ 
29:         end if
30:     end if
31: end for
32: end for
33: Одредити вредност функције циља за нове позиције свитаца
34: Сортирај све свице и одредити тренутно најбоље решење
35:  $G++$ 
36: end while
37: Прикажи глобално оптимално решење

```

На слици 9.1 приказана је промена позиција свитаца током процеса оптимизације АНFADE алгоритма при решавању посматраног проблема пасивног лоцирања заснованог на мерењу ТОА параметра.



Слика 9.1. Промена позиција свитаца током процеса оптимизације.

Дакле, са слике 9.1 произилази да се иницијална популација ANFADE алгоритма, са порастом броја генерација, поступно усмерава тако да се свици на крају оптимизационог процеса нађу у околини глобалног оптималног решења. Према томе, уочава се да предложени ANFADE алгоритам испуњава услов заустављања и конвергира ка глобалном оптималном решењу постављене ML функције циља кроз 60 генерација.

### **9.3 Хибридизација алгоритма оптимизације ројем честица и диференцијалне еволуције**

PSO алгоритам се успешно примењује за решавање великог броја практичних оптимизационих проблема, првенствено услед ефикасности, као и једноставне структуре и имплементације. Анализом оптимизационог процеса PSO алгоритма уочено је да се при решавању комплексних оптимизационих проблема, са више локалних оптимума, овај алгоритам показује одређене недостатке, као што су спора конвергенција ка оптималном решењу и неодговарајућа равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге. Дакле, основни разлог за појаву ових проблема током оптимизационог процеса PSO алгоритма је одсуство оператора, као што су: мутација, укрштање и селекција. У циљу превазилажења ових проблема у оквиру ове дисертације предложена је хибридизација алгоритама оптимизације ројем честица и диференцијалне еволуције, у ознаци AHPSODE (*Adaptive Hybrid Particle Swarm Optimization Differential Evolution Algorithm*) ради решавања комплексног проблема пасивног лоцирања. Да би се превазишли наведени недостаци, предложеном хибридизацијом остварује се побољшање перформанси инкорпорирањем мутационих оператора DE алгоритма у изразе за ажурирање вредности вектора брзине и вектора позиције PSO алгоритма. Према томе, примењене су модификације PSO алгоритма инкорпорирањем мутационих оператора DE/rand/1 и DE/current-to-pbest/1 ради побољшања глобалне претраге и избегавања тенденција заглављивања у локални оптимум.

У циљу побољшања разноликости популације и унапређења способности глобалне претраге, прво се приступа модификацији PSO алгоритма применом

оператора DE/rand/1, где се члан  $c_2 r_2 (\mathbf{x}_{gbest}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)})$  у изразу (7.15) мења са  $F_i (\mathbf{x}_{r2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r3}^{(G)})$  из једначине (7.4). Такође, предложени адаптивни когнитивни параметар  $c_1^{(G)}$  из једначине (8.16) као и адаптивни фактор скалирања  $F_i^{(G)}$  дефинисан једначином (8.1) уврштени су у једначину (7.15). Тада се, након замене  $\mathbf{s}_i^{(G)}$  из једначине (7.15) вектором  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  из једначине (7.4) добија израз за ажурирање брзине  $i$ -те честице у следећем облику

$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_{r1}^{(G)} + c_1^{(G)} r_1 (\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_{r1}^{(t)}) + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r3}^{(G)}). \quad (9.7)$$

У оквиру друге модификације мутациони оператор DE/current-to-pbest/1 инкорпорира се у оквиру PSO алгоритма, ради побољшања способности локалне претраге и брже конвергенције ка глобалном оптималном решењу. Према томе, други члан из једначине (7.15) мења се изразом  $F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{pbest}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)})$  из једначине (8.10). Тада се, заменом члана  $\mathbf{s}_i^{(G)}$  из једначине (7.15) вектором  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  из израза (8.10) добија израз за ажурирање брзине  $i$ -те честице записан у следећем облику

$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{pbest}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + c_2^{(G)} r_2 (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}). \quad (9.8)$$

Да би се успоставила равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге, у оквиру ове дисертације предложен је адаптивни параметар  $\delta$ , дефинисан следећим изразом

$$\delta = \frac{|f_{mean}^{(G)} - f_{best}^{(G)}|}{|f_{worst}^{(G)} - f_{best}^{(G)}|}, \quad (9.9)$$

при чему  $f_{mean}^{(G)}$ ,  $f_{best}^{(G)}$  и  $f_{worst}^{(G)}$  означавају средњу, најбољу и најгору вредност функције циља читаве популације, респективно.

На основу израза (9.9) произилази да се променом вредности адаптивног параметра  $\delta$  може остварити равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге током оптимизационог процеса. Према томе, када је вредност параметра  $\delta$  блиска 1, потребно је применити израз (9.7) у циљу побољшања претраге простора допустивих решења и изналажења региона глобалног оптималног решења. С друге

стране, ако је вредност параметра  $\delta$  блиска 0, примењује се израз (9.8) ради побољшања локалне претраге и брже конвергенције ка оптималном решењу. Дакле, на основу спроведене анализе параметра  $\delta$ , брзина  $i$ -те честице у популацији може се ажурирати према следећем изразу

$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \begin{cases} \mathbf{x}_{r_1}^{(G)} + c_1^{(G)} r_1 (\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_{r_1}^{(G)}) + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}), & \delta \leq 0.5 \\ \mathbf{x}_i^{(G)} + F_i^{(G)} (\mathbf{x}_{pbest}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + c_2^{(G)} r_2 (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}), & \text{у супротном} \end{cases} \quad (9.10)$$

Дакле, модификације предложене у оквиру АНPSODE алгоритма утичу на остваривање адекватне равнотеже између фаза глобалне и локалне претраге, па самим тим и на разноликост популације, као и на побољшање брзине конвергенције ка оптималном решењу.

Такође, инкорпорирањем оператора укрштања и селекције из DE алгоритма остварује се додатно побољшање оптимизационих перформанси предложеног хибридног алгоритма.

Према томе, псеудо-код предложеног АНPSODE алгоритма приказан је у Алгоритму 7.

---

#### Алгоритам 7 АНPSODE алгоритам

---

- 1: Поставити параметре  $G_{max}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\omega_{max}$ ,  $\omega_{min}$
- 2: Генерисање почетне популацију честица у домену  $[x_{i,j}^L, x_{i,j}^U]$
- 3: Поставити почетне вредности брзине  $\mathbf{v}_i^{(0)}$ ,  $\forall i \in \{1, 2 \dots N_p\}$
- 4: Одредити вредност функције циља целе популације
- 5: Поставити иницијалне вредности  $\mathbf{p}_i^{(0)}$ ,  $\forall i \in \{1, 2 \dots N_p\}$  и  $\mathbf{g}^{(0)}$
- 6:  $G = 0$
- 7: **while**  $G \leq G_{max}$  **do**
- 8:     Одредити вредност фактора инерције  $\omega^{(G)}$
- 9:     Израчунати вредности адаптивних фактора  $c_1^{(G)}$  и  $c_2^{(G)}$
- 10:    **for**  $i = 1$  **do**  $N_p$  **do**
- 11:       Одредити вредност  $F_i^{(G)}$  помоћу (8.1)
- 12:       Израчунати  $CR_i^{(G)}$  према (8.2)
- 13:       **if**  $\Delta < 0.5$  **then**
- 14:          Ажурирати вредност вектора брзине према (9.7)
- 15:       **else**
- 16:          Ажурирати вредност вектора брзине према (9.8)
- 17:       **end if**
- 18:       Ажурирати вектор позиције
- 19:        $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + \mathbf{s}_i^{(G+1)}$

---

```

20:   Применити оператор укрштања
21:   if  $\text{rand}_{i,j} \leq CR_i^{(G)} \vee j = j_{\text{rand}}$  then
22:      $u_{i,j}^{(G)} = v_{i,j}^{(G)}$ 
23:   else
24:      $u_{i,j}^{(G)} = x_{i,j}^{(G)}$ 
25:   end if
26:   Применити оператор селекције
27:   if  $f(\mathbf{u}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{x}_i^{(G)})$  then
28:      $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{u}_i^{(G)}$ 
29:   else
30:      $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{v}_i^{(G)}$ 
31:   end if
32:   Одредити вредност функције циља за нове позиције честица
33:   if  $f(\mathbf{x}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{p}_i^{(G)})$  then
34:     Поставити  $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{x}_i$ 
35:   end if
36:   if  $f(\mathbf{x}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{g}^{(G)})$  then
37:     Поставити  $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{x}_i$ 
38:   end if
39: end for
40:  $G++$ 
41: end while
42: Прикажи глобални оптимум

```

---

## 10. Нумерички резултати

У оквиру овог поглавља дата је анализа перформанси разматраних алгорита за одређивање непознате позиције посматраног пасивног објекта кроз симулације у програмском окружењу MATLAB. Применом непараметарских статистичких тестова извршено је поређење перформанси модификованих и конвенционалних оптимизационих алгоритама [155, 156]. Поред овога, разматрана је и осетљивост пасивног модела позиционирања, с обзиром на промену топологије у посматраној бежичној сензорској мрежи, као и комплексност и време извршавања предложених алгоритама.

### 10.1 Анализа побољшања хеуристичких алгоритама

У оквиру овог поглавља, извршено је поређење перформанси конвенционалних оптимизационих алгоритама и разматраних алгоритама модификованих кроз: адаптивно подешавање вредности управљачких параметара, увођење адаптивног оператора мутације, као и хибридизацију алгоритама. У складу са тим, поређење перформанси извршено је применом два непараметарска статистичка теста, Вилкоксеновог теста ранга (*Wilcoxon signed-rank*) и Фридмановог теста (*Friedman*) [155, 157].

При формирању узорака за сваки разматрани алгоритам одређује се одступање вредности функције циља процењене локације и вредности функције циља стварне локације пасивног објекта, односно

$$f(\hat{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{x}^*) \quad (10.1)$$

где је са  $\hat{x}$  означена процењена локација добијена у току једног извршавања алгоритма, док  $x^*$  представља унапред познато глобално оптимално решење посматране ML функције циља. Дакле, у циљу поређења перформанси, сваки алгоритам покренут је 30 пута за сваку разматрану анализу, при чему су на основу добијених вредности формирану узорци применом израза (10.1).

### 10.1.1 Вилкоксонов тест ранга

Вилкоксонов тест ранга представља један од често коришћених непараметарских тестова за поређење перформанси два оптимизациона алгоритма. Овај статистички тест примењује се за тестирање да ли постоји значајна статистичка разлика између два независна узорка [155]. Претпоставимо да су узорци који се користе за тестирање извучени из две популације, и формирану на основу једначине (10.1), тако да узорке из прве популације означимо са  $X$ , а из друге популације са  $Y$ . Тада се нулта  $H_0$  и алтернативна  $H_1$  хипотеза Вилкоксоновог теста могу формулисати на следећи начин:

$H_0$  : не постоји разлика између два узорка,

$H_1$  : постоји значајна статистичка разлика између два узорка.

Према томе, Вилкоксонов тест може се дефинисати на следећи начин. Нека је са  $d_i$  означена разлика између два узорка, односно

$$d_i = X - Y. \quad (10.2)$$

Дакле, у циљу примене овог тест потребно је прво уредити разлике  $d_i$  у растући низ према њиховим апсолутним вредностима. Након тога сваком  $d_i$  придружује се ознака (+/-) у зависности да ли је разлика позитивна или негативна. Према томе, одређују се одговарајуће суме рангова у складу са изразима

$$R^+ = \sum_{d_i > 0} \text{rank}(d_i) + \frac{1}{2} \sum_{d_i = 0} \text{rank}(d_i), \quad (10.3)$$

$$R^- = \sum_{d_i < 0} \text{rank}(d_i) + \frac{1}{2} \sum_{d_i = 0} \text{rank}(d_i), \quad (10.4)$$

где је са  $R^+$  означена сума рангова за узорке код којих је први алгоритам остварио боље перформансе него други алгоритам,  $R^-$  представља суму рангова за узорке код којих је први алгоритам остварио лошије перформансе од другог алгоритма, док је са  $rank(d_i)$  означен ранг разлике  $d_i$ . У случају када је разлика једнака нули, односно  $d_i = 0$ , ранг за ове вредности равномерно се распоређује између сума  $R^+$  и  $R^-$ . Дакле, на основу срачунатих сума рангова приступа се одређивању статистике Вилкоксоновог теста  $T$ , односно

$$T = \min(R^+, R^-). \quad (10.5)$$

За велике узорке ( $n > 25$ ), статистика  $T$  има приближно нормалну расподелу са математичким очекивањем  $n(n+1)/4$  и стандардном девијацијом  $\sqrt{(n(n+1)(2n+1))/24}$ . У том случају се одлучивање о прихватању или одбацивању хипотеза базира на статистици, која је дефинисана следећим изразом

$$z = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}, \quad (10.6)$$

где  $n$  означава број елемената у узорку. Према томе, користећи прорачунату статистику  $z$  на основу таблица за функцију нормалне расподеле добија се одговарајућа  $p$  вредност. Одлуку о прихватању или одбацивању хипотезе доносимо на следећи начин:

- ако је  $p \leq \alpha$  хипотезу  $H_0$  одбацујемо,
- ако је  $p > \alpha$  хипотезу  $H_0$  не одбацујемо,

при чему  $\alpha$  представља дефинисани праг значајности. У оквиру дисертације, Вилкоксонов непараметарски статистички тест примењен је са прагом значајности  $\alpha = 0.05$ . Такође, анализом резултата добијених применом статистичког теста на основу поређења перформанси разматраних алгоритама придружује се један од три симбола (+, -,  $\approx$ ). Према томе, симбол (+) означава да први алгоритам остварује знатно боље перформансе од другог, симбол (-) означава да први алгоритам има



значајно лошије перформансе од другог, док симбол ( $\approx$ ) означава непостојање разлике у перформансама два упоређена алгорита.

### 10.1.2 Фридманов тест

Фридманов тест припада групи непараметарских статистичких тестова који се може применити на више независних узорака у циљу проналажења значајне разлике између перформанси два или више алгоритама [155]. Овај статистички тест заснива се на рангирању узорака добијених на основу извршавања алгоритама, при чему алгоритам са најмањим рангом представља алгоритам који има најбоље резултате, док алгоритам са највећим рангом представља алгоритам са најлошијим перформансама. Дакле, нулта  $H_0$  и алтернативна  $H_1$  хипотеза Фридмановог теста могу се формулисати на следећи начин:

$H_0$  : не постоји разлика између перформанси разматраних алгоритама,

$H_1$  : постоји значајна статистичка разлика између перформанси разматраних алгоритама.

Према томе, Фридманов тест може се дефинисати на следећи начин:

1. Подаци за Фридманов тест дати су матрицом  $[m_{ij}]_{k \times n}$  од  $k$  редова и  $n$  колона. Матрица  $[m_{ij}]_{k \times n}$  се попуњава тако што се у  $i$ -ти ред смештају узорци добијени на основу извршавања једног алгорита за  $n = 30$  понављања, који су формиранли применом израза (10.1). Према томе, у свакој колони  $j$  елементе треба уредити у растући редослед према рангу. Означимо тада са  $[r_{ij}]_{k \times n}$  матрицу код које сваки члан  $r_{ij}$  представља ранг елемента  $m_{ij}$ .
2. За сваки ред матрице  $i$  одредити средњу вредност ранга на основу израза

$$R_i = \frac{1}{n} \sum_j r_{ij} \quad (10.7)$$

3. На основу средње вредности ранга, Фридманова статистика  $F$  може се одредити применом следећег израза

$$F = \frac{12n}{k(k+1)} \left[ \sum_i R_i^2 - \frac{k(k+1)^2}{4} \right], \quad (10.8)$$

која се подвргава Хи-квадрат расподели са  $(k-1)$  степени слободе када величина узорка расте.

Према томе, за израчунату статистику  $F$  на основу таблице за функцију Хи-квадрат расподеле добија се одговарајућа  $p$  вредност. Према томе, одлука о прихватању или одбацивању нулте хипотезе доноси се на следећи начин и то:

- ако је  $p \leq \alpha$  хипотезу  $H_0$  одбацујемо,
- ако је  $p > \alpha$  хипотезу  $H_0$  не одбацујемо,

где  $\alpha$  представља дати праг значајности. У даљим разматрањима Фридманов тест примењен је са прагом значајности  $\alpha = 0.05$ .

### 10.1.3 Анализа предложених модификација HADENM алгоритма

У оквиру овог поглавља представљени су резултати симулације извршени ради анализе перформанси имплементираних модификација HADENM алгоритма и то кроз: адаптивна подешавања вредности фактора скалирања и фактора укрштања, адаптивни мутациони оператор, као и хибридизацију између DE и NM алгоритма.

#### 10.1.3.1 Анализа оптимизационих перформанси предложених фактора скалирања и фактора укрштања

Применом Вилкоксоновог непараметарског статистичког теста, у оквиру овог поглавља, извршено је поређење перформанси предложених фактора скалирања  $F_i^{(G)}$  и фактора укрштања  $CR^{(G)}$ , датих једначинама (8.8) и (8.9) респективно, са фиксним вредностима ових параметара.

Према томе, у циљу поређења перформанси предложеног адаптивног фактора скалирања  $F_i^{(G)}$  са фиксним вредностима фактора скалирања  $F$ , разматрају се

следећа два алгоритма, и то:

1.  $\text{HADENM}_{F=0.5}$ , који је идентичан предложеном  $\text{HADENM}$  алгоритму, осим фактора скалирања који је постављен на фиксну вредност  $F=0.5$ .
2.  $\text{HADENM}_{F=0.9}$ , који је идентичан предложеном  $\text{HADENM}$  алгоритму, осим фактора скалирања који је постављен на фиксну вредност  $F=0.9$ .

Табела 10.1 приказује статистичке резултате примене Вилкоксоновог теста поређења између предложеног  $\text{HADENM}$  алгоритма, као и алгоритама  $\text{HADENM}_{F=0.5}$  и  $\text{HADENM}_{F=0.9}$ .

**Табела 10.1.** Резултати Вилкоксоновог теста за  $\text{HADENM}$ ,  $\text{HADENM}_{F=0.5}$  и  $\text{HADENM}_{F=0.9}$  за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .

Алгоритам	$R^+$	$R^-$	$p$ вредност	Симбол
$\text{HADENM}$ наспрам $\text{HADENM}_{F=0.5}$	346	119	0.0177	+
$\text{HADENM}$ наспрам $\text{HADENM}_{F=0.9}$	282	183	0.3207	$\approx$

На основу резултата у Табели 10.1 произилази да предложени  $\text{HADENM}$  алгоритам остварује значајно боље резултате у поређењу са  $\text{HADENM}_{F=0.5}$  алгоритмом. С друге стране, поређењем  $\text{HADENM}$  алгоритма са  $\text{HADENM}_{F=0.9}$  указује се да предложени алгоритам остварује веће вредности  $R^+$  у односу на  $R^-$ . Дакле, на основу добијених резултата закључује се да предложени адаптивни фактор скалирања  $F_i^{(G)}$ , дат једначином (8.8), постиже боље перформансе и успоставља ефективну равнотежу између фаза глобалне и локалне претраге у поређењу са фиксним вредностима параметара скалирања  $F$ .

Такође, ради поређења перформанси предложеног адаптивног фактора укрштања  $CR^{(G)}$  са фиксним вредностима фактора укрштања  $CR$ , разматрају се следећи алгоритми, и то:

1.  $\text{HADENM}_{CR=0.1}$ , који је идентичан предложеном  $\text{HADENM}$  алгоритму, осим фактора укрштања који је постављен на фиксну вредност  $CR=0.1$ .

2.  $HADENM_{CR=0.5}$ , који је идентичан предложеном  $HADENM$  алгоритму, осим фактора укрштања који је постављен на фиксну вредност  $CR=0.5$ .
3.  $HADENM_{CR=0.9}$ , који је идентичан предложеном  $HADENM$  алгоритму, осим фактора укрштања који је постављен на фиксну вредност  $CR=0.9$ .

У оквиру табеле 10.2 приказани су статистички резултати поређења оптимизационих перформанси применом Вилкоксоновог теста између предложеног  $HADENM$  алгоритма, као и алгоритама  $HADENM_{CR=0.1}$ ,  $HADENM_{CR=0.5}$  и  $HADENM_{CR=0.9}$ .

**Табела 10.2.** Резултати Вилкоксоновог теста за  $HADENM$ ,  $HADENM_{CR=0.1}$ ,  $HADENM_{CR=0.5}$  и  $HADENM_{CR=0.9}$  за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .

Алгоритам	$R^+$	$R^-$	$p$ вредност	Симбол
$HADENM$ наспрам $HADENM_{CR=0.1}$	264.5	150	0.7761	$\approx$
$HADENM$ наспрам $HADENM_{CR=0.5}$	253	72	0.0135	+
$HADENM$ наспрам $HADENM_{CR=0.9}$	259	66	0.0079	+

На основу резултата приказаних у табели 10.2 произилази да предложени  $HADENM$  алгоритам остварује боље оптимизационе перформансе у поређењу са алгоритмима  $HADENM_{CR=0.5}$  и  $HADENM_{CR=0.9}$ . Осим тога, поређењем  $HADENM$  са  $HADENM_{CR=0.1}$  алгоритмом, уочава се да предложени алгоритам остварује веће вредности  $R^+$  у односу на  $R^-$ . На основу ових резултата произилази да  $HADENM$  алгоритам са адаптивним фактором укрштања  $CR^{(G)}$  омогућава бољу разноликост популације и побољшава конвергенцију ка глобалном оптималном решењу.

### 10.1.3.2 Анализа оптимизационих перформанси предложеног адаптивног оператора мутације

У оквиру овог одељка приказани су резултати нумеричке симулације у циљу анализе оптимизационих перформанси предложеног адаптивног оператора мутације. У складу са тим, извршено је поређење оптимизационих перформанси

HADENM алгоритма са следећим алгоритмима, и то:

1. HADENM-1, који је идентичан предложеном HADENM алгоритму, при чему су из предложеног мутационог оператора примењени само оператори за глобалну претрагу, односно, примењени су DE/rand/1 и DE/rand/2 са вероватноћом 0.5,
2. HADENM-2, који је идентичан предложеном HADENM алгоритму, при чему су из предложеног мутационог оператора примењени само оператори за локалну претрагу, односно, примењени су DE/best/1 и DE/current-to-best/1 са вероватноћом 0.5.

Према томе, у Табели 10.3 дати су резултати статистичке анализе поређења оптимизационих перформанси применом Вилкоксоновог теста, између предложеног HADENM алгоритма, као и HADENM-1 и HADENM-2 алгоритама.

*Табела 10.3. Резултати Вилкоксоновог теста за HADENM, HADENM-1 и HADENM-2 алгоритме за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .*

Алгоритам	$R^+$	$R^-$	$p$ вредност	Симбол
HADENM наспрам HADENM-1	314.5	105.5	0.1019	$\approx$
HADENM наспрам HADENM-2	283	182	0.2915	$\approx$

На основу резултата поређења применом Вилкоксоновог теста, датих у табели 10.3, произилази да предложени HADENM алгоритам остварује веће вредности  $R^+$  у односу на  $R^-$ , за оба разматрана случаја. Дакле, добијени резултати показују да предложени адаптивни мутациони оператор може да успостави ефективну равнотежу између фаза глобалне и локалне претраге, чиме се побољшавају оптимизационе перформансе HADENM алгоритма.

### 10.1.3.3 Анализа оптимизационих перформанси хибридизације између DE и NM алгоритама

У оквиру овог одељка приказани су нумерички резултати у циљу анализе оптимизационих перформанси предложене хибридизације између DE и NM

алгоритама. У складу са тим, извршено је поређење оптимизационих перформанси између HADENM алгоритма без фазе локалне претраге NM алгоритма, са предложеним HADENM алгоритмом.

У Табели 10.4 дати су резултати статистичке анализе поређења оптимизационих перформанси применом Вилкоксоновог теста између два разматрана алгоритма.

**Табела 10.4.** Резултати Вилкоксоновог теста за HADENM без NM локалне претраге и предложеног HADENM алгоритма за праг значајности  $\alpha = 0.05$ .

Алгоритам	$R^+$	$R^-$	$p$ вредност	Симбол.
HADENM наспрам HADENM без NM	465	0	0.000	+

На основу резултата статистичке анализе приказаних у Табели 10.4, произилази да предложени HADENM алгоритам остварује боље оптимизационе перформансе у поређењу са истим алгоритмом без фазе NM локалне претраге. Дакле, на основу резултата нумеричке симулације произилази да се применом NM алгоритма у оквиру фазе локалне претраге остварују побољшања у погледу квалитета добијеног глобалног оптималног решења HADENM алгоритма.

#### 10.1.3.4 Компаративна анализа предложених модификација

У циљу компаративне анализе оптимизационих перформанси предложених модификација HADENM алгоритма, у овом одељку дати су нумерички резултати статистичке анализе. Према томе, ради одређивања статистичке значајности добијених резултата, при вишеструким поређењима, примењује се Фридманов непараметарски статистички тест. Сходно овоме, у табели 10.5 приказана је компаративна анализа оптимизационих перформанси предложених модификација над којима је извршен Фридманов тест, за различите вредности варијансе шума. Такође, најбоља решења из сваке категорије у табели 10.5 означена су масним словима, док је друго најбоље решење подвучено.

**Табела 10.5.** Резултати примене Фридмановог теста за разматране алгоритме при различитим вредностима  $10\log(\sigma_{ni}^2)$  за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .

Алгоритам	$10\log(\sigma_{ni}^2)$				Средњи ранг	Ранг
	-40	-20	20	40		
HADENM	<b>3.07</b>	<b>3.30</b>	<b>3.37</b>	<b>2.98</b>	<b>3.18</b>	1
HADENM-2	<u>3.87</u>	<u>3.70</u>	<u>3.47</u>	<u>3.02</u>	<u>3.51</u>	2
HADENM-1	4.00	3.93	4.10	4.67	4.17	3
HADENM <sub>CR=0.1</sub>	4.73	4.53	3.80	4.28	4.33	4
HADENM <sub>F=0.9</sub>	4.03	5.07	4.80	4.68	4.64	5
HADENM <sub>CR=0.5</sub>	4.80	4.87	5.33	5.08	5.02	6
HADENM <sub>F=0.5</sub>	5.57	5.00	5.47	5.35	5.34	7
HADENM <sub>CR=0.9</sub>	5.93	5.60	5.67	5.93	5.78	8
<b><i>p</i>-вредност</b>	0.000	0.000	0.000	0.000		

Из резултата датих у табели 10.5 произилази да су  $p$ -вредности добијене применом Фридмановог теста, мање од датог прага значајности  $\alpha = 0.05$ , за све разматране вредности варијансе шума  $10\log(\sigma_{ni}^2)$ . Дакле,  $p \leq \alpha$  упућује на одбацивање нулте хипотезе и прихватање алтернативне хипотезе. Према томе, може се закључити да постоји значајна статистичка разлика између перформанси разматраних алгоритама. Такође, на основу добијених резултата следи да предложени HADENM алгоритам показује боље оптимизационе перформансе у поређењу са свим другим алгоритмима који су узети за компаративну анализу, чиме се потврђује ефикасност и значај предложених модификација.

#### 10.1.4 Анализа предложених модификација AHFADE алгоритма

У оквиру овог поглавља представљени су резултати статистичке анализе применом Вилкоксоновог и Фридмановог непараметарског статистичког теста извршени у циљу анализе оптимизационих перформанси имплементираних модификација AHFADE алгоритма, и то: адаптивног фактора скалирања, адаптивног фактора укрштања, као и побољшане функције привлачности.

### 10.1.4.1 Анализа оптимизационих перформанси адаптивних фактора скалирања и фактора укрштања

У овом одељку извршено је поређење оптимизационих перформанси фактора скалирања  $F_i^{(G)}$  и фактора укрштања  $CR_i^{(G)}$ , датих једначинама (8.1) и (8.2) респективно, са фиксним вредностима ових параметара.

Према томе, у циљу поређења перформанси адаптивног фактора скалирања  $F_i^{(G)}$  са фиксним вредностима фактора скалирања  $F$ , разматрају се следећа два алгоритма, и то:

1. АНFADE<sub>F=0.5</sub>, који је идентични АНFADE алгоритму, осим фактора скалирања који је постављен на  $F=0.5$ .
2. АНFADE<sub>F=0.9</sub>, који је идентични АНFADE алгоритму, осим фактора скалирања који је постављен на  $F=0.9$ .

Табела 10.6. приказује статистичке резултате поређења оптимизационих перформанси применом Вилкоксеновог теста између предложеног АНFADE алгоритма, као и алгоритма АНFADE<sub>F=0.5</sub> и АНFADE<sub>F=0.9</sub>.

**Табела 10.6.** Резултати Вилкоксеновог теста за АНFADE, АНFADE<sub>F=0.5</sub> и АНFADE<sub>F=0.9</sub> за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .

Алгоритам	$R^+$	$R^-$	$p$ вредност	Симбол
АНFADE наспрам АНFADE <sub>F=0.5</sub>	356	109	0.01001	+
АНFADE наспрам АНFADE <sub>F=0.9</sub>	382	83	0.00163	+

На основу резултата приказаних у Табели 10.6, произилази да предложени АНFADE алгоритам остварује значајно боље резултате у поређењу са АНFADE<sub>F=0.5</sub> и АНFADE<sub>F=0.9</sub> алгоритмима. Према томе, предложени адаптивни фактор скалирања  $F_i^{(G)}$  дат једначином (8.1) постиже боље оптимизационе перформансе у поређењу са истим алгоритмом који има фиксну вредност параметра скалирања  $F$ .



Дакле, закључује се да предложени адаптивни фактор скалирања  $F_i^{(G)}$  остварује ефективну равнотежу између фаза глобалне и локалне претраге.

Такође, ради поређења оптимизационих перформанси адаптивног фактора укрштања  $CR_i^{(G)}$  са фиксним вредностима фактора укрштања  $CR$ , разматрају се следећи алгоритми, и то:

1. АНFADE<sub>CR=0.1</sub>, који је идентични АНFADE алгоритму, осим фактора укрштања који је постављен на  $CR=0.1$ .
2. АНFADE<sub>CR=0.5</sub>, који је идентични АНFADE алгоритму, осим фактора укрштања који је постављен на  $CR=0.5$ .
3. АНFADE<sub>CR=0.9</sub>, који је идентични АНFADE алгоритму, осим фактора укрштања који је постављен на  $CR=0.9$ .

Табела 10.7 приказује статистичке резултате поређења оптимизационих перформанси применом Вилкоксоновог теста између предложеног АНFADE алгоритма, као и алгоритама АНFADE<sub>CR=0.1</sub>, АНFADE<sub>CR=0.5</sub> и АНFADE<sub>CR=0.9</sub>.

**Табела 10.7.** Резултати Вилкоксоновог теста за АНFADE, АНFADE<sub>CR=0.1</sub>, АНFADE<sub>CR=0.5</sub> и АНFADE<sub>CR=0.9</sub> за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .

Алгоритам	$R^+$	$R^-$	$p$ вредност	Симбол
АНFADE наспрам АНFADE <sub>CR=0.1</sub>	264.5	150	0.7761	$\approx$
АНFADE наспрам АНFADE <sub>CR=0.5</sub>	349.5	115.5	0.0153	+
АНFADE наспрам АНFADE <sub>CR=0.9</sub>	437	28	0.0000	+

Анализом резултата приказаних у табели 10.7, произилази да предложени АНFADE алгоритам са адаптивним фактором укрштања остварује боље оптимизационе перформансе у поређењу са АНFADE<sub>CR=0.5</sub> и АНFADE<sub>CR=0.9</sub>. Са друге стране, поређењем резултата између АНFADE и АНFADE<sub>CR=0.1</sub> алгоритама, уочава се да предложени алгоритам остварује веће вредности  $R^+$  у односу на  $R^-$ . Према томе, на основу добијених резултата закључује се да предложени АНFADE

алгоритам са адаптивним фактором укрштања  $CR_i^{(G)}$  постиже бољу разноликост популације и побољшава конвергенцију ка глобалном оптималном решењу.

#### 10.1.4.2 Анализа оптимизационих перформанси модификоване функције привлачности

У оквиру овог одељка приказани су резултати нумеричке симулације извршене у циљу поређења оптимизационих перформанси између предложене модификоване функције привлачности  $\tilde{\beta}(r_{i,j})$ , дате једначином (8.19), и оригиналне функције привлачности  $\beta(r_{i,j})$ , дефинисане једначином (7.20). Према томе, у табели 10.8 приказани су резултати статистичке анализе поређења оптимизационих перформанси применом Вилкоксоновог теста.

**Табела 10.8.** Резултати Вилкоксоновог теста поређења АНFAДЕ алгоритма са  $\tilde{\beta}(r_{i,j})$  и АНFAДЕ алгоритма са  $\beta(r_{i,j})$ , за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .

Алгоритам	$R^+$	$R^-$	$p$ вредност	Симбол.
АНFAДЕ наспрам АНFAДЕ са $\beta(r_{i,j})$	465	0	0.000	+

Према томе, на основу резултата приказаних у Табели 10.8, произилази да предложени АНFAДЕ алгоритам остварује боље оптимизационе перформансе у поређењу са АНFAДЕ алгоритмом који примењује оригиналну функцију привлачности  $\beta(r_{i,j})$ . Дакле, модификована функција привлачности  $\tilde{\beta}(r_{i,j})$  остварује бољу равнотежу између фаза глобалне и локалне претраге.

#### 10.1.4.3 Компаративна анализа предложених модификација

У циљу међусобног поређења оптимизационих перформанси предложених модификација АНFAДЕ алгоритма, у оквиру овог одељка дати су нумерички резултати компаративне анализе применом Фридмановог непараметарског статистичког теста. Према томе, у табели 10.9 приказана је компаративна анализа

разматраних алгоритама за различите вредности варијансе шума, при чему су најбоља решења из сваке категорије у табели 10.9 означена масним словима, док су друга најбоља решења подвучена.

**Табела 10.9.** Резултати примене Фридмановог теста за разматране алгоритме при различитим вредностима  $10\log(\sigma_{ni}^2)$  за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .

Алгоритам	$10\log(\sigma_{ni}^2)$				Средњи ранг	Ранг
	-40	-20	20	40		
АНFADE	<b>2.43</b>	<b>2.4</b>	<b>2.25</b>	<b>2.15</b>	<b>2.3</b>	1
АНFADE са $\beta(r_{i,j})$	<u>2.85</u>	<u>2.63</u>	<u>2.59</u>	<u>2.25</u>	<u>2.58</u>	2
АНFADE <sub>CR=0.1</sub>	3.33	2.78	2.59	2.4	2.77	3
АНFADE <sub>F=0.9</sub>	3.6	3.18	2.73	2.53	3.01	4
АНFADE <sub>CR=0.5</sub>	3.9	3.73	3.4	3.13	3.54	5
АНFADE <sub>F=0.5</sub>	5.7	5.03	4.98	4.4	5.02	6
АНFADE <sub>CR=0.9</sub>	6.9	6.9	6.8	6.76	6.84	7
<b><i>p</i>-вредност</b>	0.000	0.000	0.000	0.000		

На основу резултата приказаних у табели 10.9 произилази да су  $p$ -вредности добијене на основу Фридмановог теста, мање од датог прага значајности за све разматране вредности варијансе шума  $10\log(\sigma_{ni}^2)$ . Према томе, за  $p \leq \alpha$  одбацује се нулта хипотеза и закључује се да постоји значајна разлика између перформанси разматраних алгоритама. Нумерички резултати указују да предложени АНFADE алгоритам остварује боље перформансе у поређењу са свим другим разматраним алгоритмима, чиме се потврђује ефикасност предложених модификација.

### 10.1.5 Анализа предложених модификација АНPSODE алгоритма

У оквиру овог одељка приказани су резултати статистичке анализе применом Вилкоксеновог и Фридмановог непараметарског статистичког теста извршени у циљу поређења оптимизационих перформанси имплементираних модификација АНPSODE алгоритма, и то: адаптивног фактора скалирања, адаптивног фактора укрштања, као и предложених адаптивних коефицијента убрзања

### 10.1.5.1 Анализа оптимизационих перформанси адаптивних фактора скалирања и фактора укрштања

У циљу анализе оптимизационих перформанси фактора скалирања  $F_i^{(G)}$  и фактора укрштања  $CR_i^{(G)}$ , датих једначинама (8.1) и (8.2), респективно, извршено је поређење са фиксним вредностима ових параметара применом Вилкоксоновог непараметарског статистичког теста.

Према томе, у циљу поређења оптимизационих перформанси адаптивног фактора скалирања  $F_i^{(G)}$  са фиксним вредностима фактора скалирања  $F$ , разматрају се следећа два алгоритма, и то:

1. АНPSODE $_{F=0.5}$ , који је идентични АНPSODE алгоритму, осим фактора скалирања који је постављен на  $F=0.5$ .
2. АНPSODE $_{F=0.9}$ , који је идентични АНPSODE алгоритму, осим фактора скалирања који је постављен на  $F=0.9$ .

Табела 10.10 приказује статистичке резултате поређења оптимизационих перформанси применом Вилкоксоновог теста између предложеног АНPSODE алгоритма, са алгоритмима АНPSODE $_{F=0.5}$  и АНPSODE $_{F=0.9}$ .

**Табела 10.10.** Резултати Вилкоксоновог теста за АНPSODE, АНPSODE $_{F=0.5}$  и АНPSODE $_{F=0.9}$  за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .

Алгоритам	$R^+$	$R^-$	$p$ вредност	Симбол
АНPSODE наспрам АНPSODE $_{F=0.5}$	264	201	0.58953	$\approx$
АНPSODE наспрам АНPSODE $_{F=0.9}$	333.5	131.5	0.01418	+

Резултати приказани у Табели 10.10 указују да предложени АНPSODE алгоритам остварује значајно боље резултате у поређењу са алгоритмом АНPSODE $_{F=0.9}$ . С друге стране, на основу резултата нумеричке симулације произилази да предложени алгоритам остварује веће вредности  $R^+$  у односу на  $R^-$ , при поређењу са алгоритмом АНPSODE $_{F=0.5}$ . Дакле, на основу резултата закључује се да

предложени адаптивни фактор скалирања  $F_i^{(G)}$ , дат једначином (8.1), постиже боље перформансе и остварује ефикасну равнотежу између фаза глобалне и локалне претраге, у поређењу са фиксним вредностима параметра скалирања  $F$ .

Такође, ради поређења перформанси адаптивног фактора укрштања  $CR_i^{(G)}$  са фиксним вредностима фактора укрштања  $CR$ , разматрају се следећи алгоритми:

1. АНPSОDE<sub>CR=0.1</sub>, који је идентични АНPSОDE алгоритму, осим фактора укрштања који је постављен на  $CR=0.1$ .
2. АНPSОDE<sub>CR=0.5</sub>, који је идентични АНPSОDE алгоритму, осим фактора укрштања који је постављен на  $CR=0.5$ .
3. АНPSОDE<sub>CR=0.9</sub>, који је идентични АНPSОDE алгоритму, осим фактора укрштања који је постављен на  $CR=0.9$ .

У табели 10.11 дати су резултати статистичке анализе поређења оптимизационих перформанси применом Вилкоксеновог теста између предложеног АНPSОDE алгоритма, као и алгоритама АНPSОDE<sub>CR=0.1</sub>, АНPSОDE<sub>CR=0.5</sub> и АНPSОDE<sub>CR=0.9</sub>.

**Табела 10.11.** Резултати Вилкоксеновог теста за АНPSОDE, АНPSОDE<sub>CR=0.1</sub>, АНPSОDE<sub>CR=0.5</sub> и АНPSОDE<sub>CR=0.9</sub> за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .

Алгоритам	$R^+$	$R^-$	$p$ вредност	Симбол
АНPSОDE наспрам АНPSОDE <sub>CR=0.1</sub>	276	185	0.36285	$\approx$
АНPSОDE наспрам АНPSОDE <sub>CR=0.5</sub>	379.5	85.5	0.00184	+
АНPSОDE наспрам АНPSОDE <sub>CR=0.9</sub>	404	61	0.0000	+

Анализом резултата приказаних у табели 10.11 закључује се да предложени АНPSОDE алгоритам остварује боље оптимизационе перформансе у поређењу са алгоритмима АНPSОDE<sub>CR=0.5</sub> и АНPSОDE<sub>CR=0.9</sub>. Поред овога, поређењем резултата АНPSОDE алгоритма са АНPSОDE<sub>CR=0.1</sub> алгоритмом произилази да предложени алгоритам остварује веће вредности  $R^+$  у односу на  $R^-$ . Према томе на основу приказаних резултата, закључује се да адаптивни фактор укрштања  $CR_i^{(G)}$  остварује

бољу разноликост популације и побољшава конвергенцију ка глобалном оптималном решењу током оптимизационог процеса АНPSODE алгоритма.

### 10.1.5.2 Анализа оптимизационих перформанси адаптивних коефицијента убрзања

У оквиру овог одељка приказани су резултати нумеричке симулације извршене у циљу поређења оптимизационих перформанси предложених адаптивних коефицијената убрзања  $c_1^{(G)}$  и  $c_2^{(G)}$ , датих једначинама (8.16) и (8.17), са фиксним вредностима коефицијената  $c_1$  и  $c_2$ .

У складу са тим, у табели 10.12 приказани су резултати статистичке анализе поређења оптимизационих перформанси применом Вилкоксеновог теста.

*Табела 10.12. Резултати поређења оптимизационих перформанси применом Вилкоксеновог теста између АНPSODE алгоритма и АНPSODE алгоритма са фиксним вредностима коефицијената  $c_1$  и  $c_2$ , за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .*

Алгоритам	$R^+$	$R^-$	$P$ вредност	Симбол.
АНPSODE наспрам АНPSODE са фиксним $c_1$ и $c_2$	249.5	215.5	0.69737	$\approx$

Анализом резултата приказаних у Табели 10.12, произилази да предложени АНPSODE остварује веће вредности  $R^+$  према  $R^-$ , у поређењу са АНPSODE са фиксним вредностима коефицијената  $c_1$  и  $c_2$ . Дакле, применом адаптивних коефицијента убрзања  $c_1^{(G)}$  и  $c_2^{(G)}$  може се остварити боља равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге.

### 10.1.5.3 Компаративна анализа предложених модификација

У циљу међусобног поређења оптимизационих перформанси предложених модификација АНPSODE алгоритма, у оквиру овог одељка дати су нумерички резултати компаративне анализе применом Фридмановог непараметарског

статистичког теста. У складу са тим, у табели 10.13 приказани су резултати компаративне анализе разматраних алгоритама за различите вредности варијансе шума. Најбоља решења из сваке категорије у табели 10.13 означена су масним словима, док су друга најбоља решења подвучена.

**Табела 10.13.** Резултати компаративне анализе оптимизационих перформанси применом Фридмановог теста за разматране алгоритме при различитим вредностима  $10\log(\sigma_{ni}^2)$  за дати праг значајности  $\alpha = 0.05$ .

Алгоритам	$10\log(\sigma_{ni}^2)$				Средњи ранг	Ранг
	-40	-20	20	40		
АНPSODE	<b>3.56</b>	<b>3.5</b>	<b>3.46</b>	<b>3.3</b>	<b>3.45</b>	1
АНPSODE са фиксним $c_1$ и $c_2$	<u>3.83</u>	<u>3.53</u>	<u>3.63</u>	<u>3.51</u>	<u>3.62</u>	2
АНPSODE <sub>CR=0.1</sub>	3.9	3.9	3.83	3.63	3.81	3
АНPSODE <sub>F=0.9</sub>	4.16	4	4.03	3.93	4.03	4
АНPSODE <sub>CR=0.5</sub>	4.2	4.06	4.1	4.03	4.09	5
АНPSODE <sub>F=0.5</sub>	4.43	4.3	4.2	4.2	4.28	6
АНPSODE <sub>CR=0.9</sub>	5	4.93	4.46	4.33	4.68	7
<b><i>p</i>-вредност</b>	0.000	0.000	0.000	0.000		

Анализом резултата датих у табели 10.13 произилази се да су  $p$ -вредности добијене на основу Фридмановог теста, мање од датог прага значајности  $\alpha = 0.05$ , за све разматране вредности варијансе шума  $10\log(\sigma_{ni}^2)$ . Према томе, одбацује се нулта хипотеза и закључује се да постоји значајна разлика између перформанси разматраних алгоритама. Дакле, на основу добијених резултата уочава се да предложени АНFADE алгоритам остварује боље оптимизационе перформансе у поређењу са разматраним алгоритмима, чиме се потврђује ефикасност предложених модификација.

## 10.2 Анализа перформанси алгоритама

У оквиру овог одељка дати су резултати нумеричке симулације пасивног модела позиционирања заснованог на мерењу времена пропагације сигнала и временске разлике пропагације сигнала у условима директне оптичке видљивости. За посматрани модел позиционирања извршена је анализа перформанси предложених алгоритама у погледу тачности позиционирања, утицаја улазних параметара, осетљивости на промену топологије, комплексности, као и брзине извршавања. Такође, ради поређења варијанси разматраних алгоритама, примењена је и Крамер-Раова граница за одговарајуће моделе позиционирања.

Метрика која је коришћена за исказивање прецизности алгоритама дефинисана је као грешка средњег квадратног корена (*Root Mean Squared Error*, RMSE), записана следећим изразом

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \|\hat{\mathbf{x}}^{(n)} - \mathbf{x}\|_2^2}, \quad (10.9)$$

где је са  $\mathbf{x}$  означена тачна локација пасивног објекта,  $\hat{\mathbf{x}}^{(n)}$  представља естимирану вредност локације пасивног објекта и  $N_m = 1000$  означава број Монте-Карло симулација за дату вредност варијансе шума  $\sigma_{ni}^2$ .

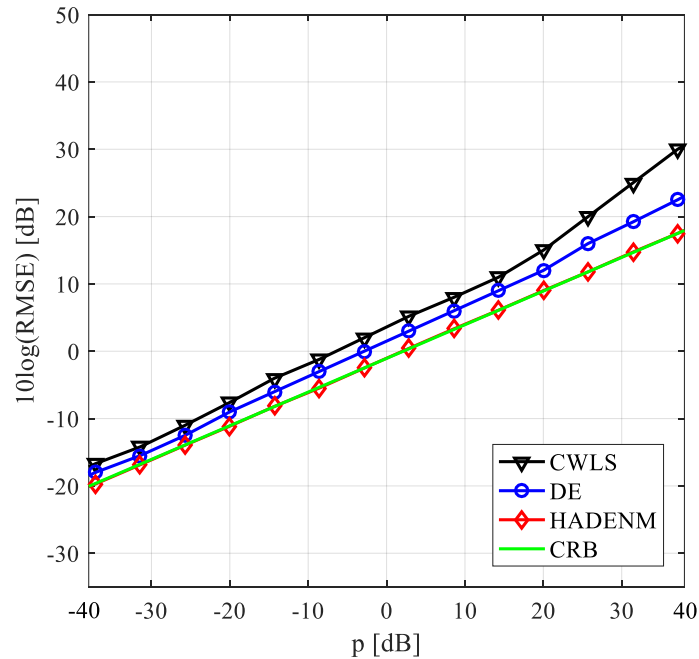
### 10.2.1 Анализа перформанси HADENM алгоритама

Ради анализе тачности позиционирања HADENM алгоритама дати су нумерички резултати Монте-Карло симулација за пасивни модел позиционирања базиран на мерењу TOA параметра у присуству шума у LOS окружењу. Разматрана су три сценарија, где је за сваки сценарио коришћен просторни распоред који се састоји од једног предајника и четири пријемника на познатим локацијама, при чему је позиција пасивног објекта различита за сваки сценарио. Према томе, референтни пријемници имају следеће координате и то:  $\mathbf{x}_1^r = [60 \ 60]^T$  m,  $\mathbf{x}_2^r = [60 \ -60]^T$  m,  $\mathbf{x}_3^r = [-60 \ -60]^T$  m, и  $\mathbf{x}_4^r = [-60 \ 60]^T$  m, док се предајник налази у  $\mathbf{x}_T = [0 \ 0]^T$  m. У циљу анализе тачности позиционирања CWLS, DE и HADENM алгоритама



разматрају се следећа три сценарија: i) позиција пасивног објекта је одабрана тако да је објекат окружен пријемницима, тј.  $\mathbf{x} = [5 \ 25]^T$  m ; ii) позиција пасивног објекта је постављена тако да пасивни објекат није окружен пријемницима, тј.  $\mathbf{x} = [80 \ 50]^T$  m ; iii) за сваки корак симулације позиција пасивног објекта се поставља насумично у области  $80 \times 80 \text{m}^2$ .

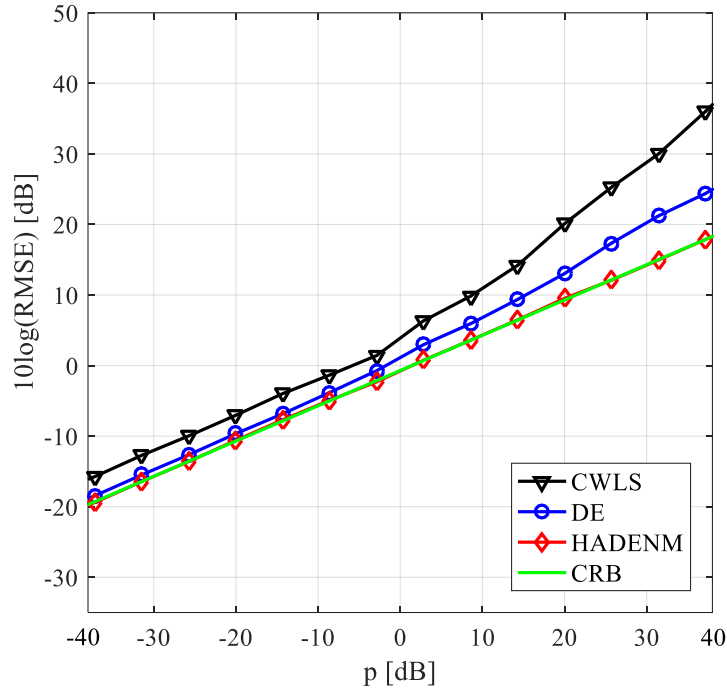
Резултати нумеричке симулације за први сценарио дати су на слици 10.1, где је приказана зависност RMSE у односу на варијансу шума  $p = 10 \log(\sigma_{ni}^2)$ . Такође, у циљу поређења перформанси разматраних алгоритама приказана је и Крамер-Раова граница прецизности позиционирања.



Слика 10.1. Зависност RMSE од  $p$  за позицију објекта  $\mathbf{x} = [5 \ 25]^T$  m.

На основу резултата приказаних на слици 10.1 произилази да предложени HADENM алгоритам остварује боље перформансе у поређењу са DE и CWLS алгоритмима. Такође, резултати показују да HADENM достиже Крамер-Раову границу за све разматране вредности варијансе шума. С друге стране, DE и CWLS алгоритми остварују перформансе блиске Крамер-Раовој граници при ниским вредностима варијансе шума, док са порастом  $p$  ( $p \geq 20 \text{dB}$ ) CWLS алгоритам показује веће одступање од Крамер-Раове границе.

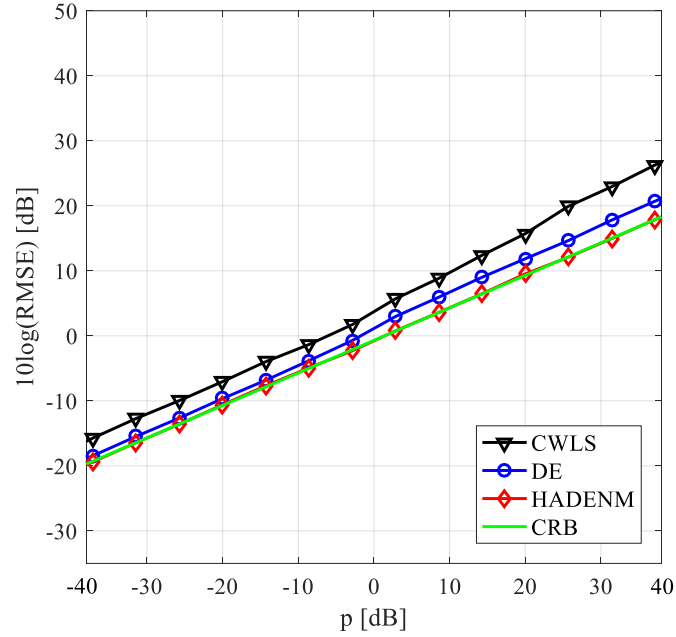
Резултати нумеричке симулације за други сценарио илустровани су на слици 10.2. Такође, на слици 10.2 дата је зависност RMSE од варијансе шума  $p = 10\log(\sigma_{ni}^2)$  за све разматране алгоритме, при чему је приказана Крамер-Раова граница у циљу поређења перформанси позиционирања разматраних алгоритама.



Слика 10.2. Зависност RMSE од  $p$  за позицију објекта  $\mathbf{x} = [80 \ 50]^T$  m.

На основу резултата приказаних на слици 10.2 следи да предложени HADENM алгоритам достиже Крамер-Раову границу и показује боље перформансе позиционирања у односу на алгоритме који су узети за анализу. У поређењу са првим сценариом, уочава се значајано погоршање тачности позиционирања CWLS и DE алгоритама. Такође, произилази да са порастом варијансе шума,  $p \geq 5\text{dB}$ , CWLS алгоритам остварује веће одступање од Крамер-Раове границе.

Поред овог, на слици 10.3 приказани су резултати нумеричке симулације за трећи сценарио, где се за сваки корак симулације позиција пасивног објекта поставља насумично у области  $80 \times 80\text{m}^2$ . Такође, на слици 10.3 приказана је зависност RMSE од варијансе шума  $p = 10\log(\sigma_{ni}^2)$  за све разматране алгоритме.



Слика 10.3. Зависност RMSE од  $p$  за насумично одабрану позицију објекта.

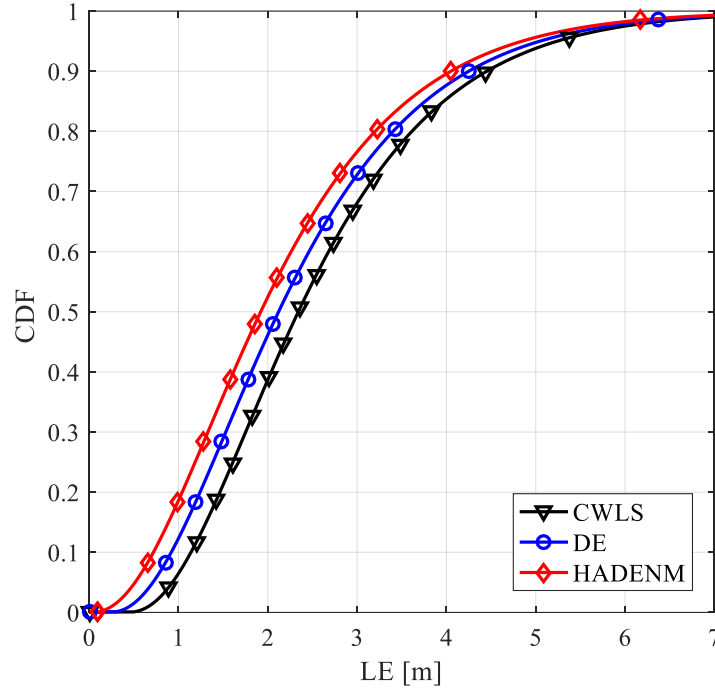
Са слике 10.3 произилази да HADENM алгоритам и у овом случају достиже Крамер-Раову границу и показује бољу тачност позиционирања у поређењу са CWLS и DE алгоритмима. Према томе, упоредном анализом резултата приказаних на сликама 10.1, 10.2 и 10.3, закључује се да предложени HADENM алгоритам има већу тачност позиционирања у поређењу са осталим алгоритмима, и успешно достиже Крамер-Раову границу у свим разматраним сценаријима за све разматране вредности варијансе шума. Такође, нумерички резултати показују мању осетљивост предложеног HADENM алгоритма на промену у просторном распореду пријемника и предајника у мрежи.

У циљу компаративне анализе перформанси позиционирања разматраних алгоритама примењује се кумулативна функција расподеле (*Cumulative Distribution Function*, CDF) вредности грешке позиционирања. Дакле, ради одређивања грешке позиционирања (*Location Error*, LE) примењена је метрика која је дефинисана као Еуклидско растојање између процењене и стварне позиције пасивног објекта, односно

$$LE = \left\| \hat{\mathbf{x}}^{(n)} - \mathbf{x} \right\|_2, \forall n \in \{1, \dots, N_m\}. \quad (10.10)$$

Према томе, на слици 10.4 приказане су кумулативне функције расподеле (CDF)

вредности грешке позиционирања разматраних алгоритама за други сценарио при вредности варијансе шума  $\sigma_{ni}^2 = 10\text{m}^2$ .



Слика 10.4. CDF за разматране алгоритме.

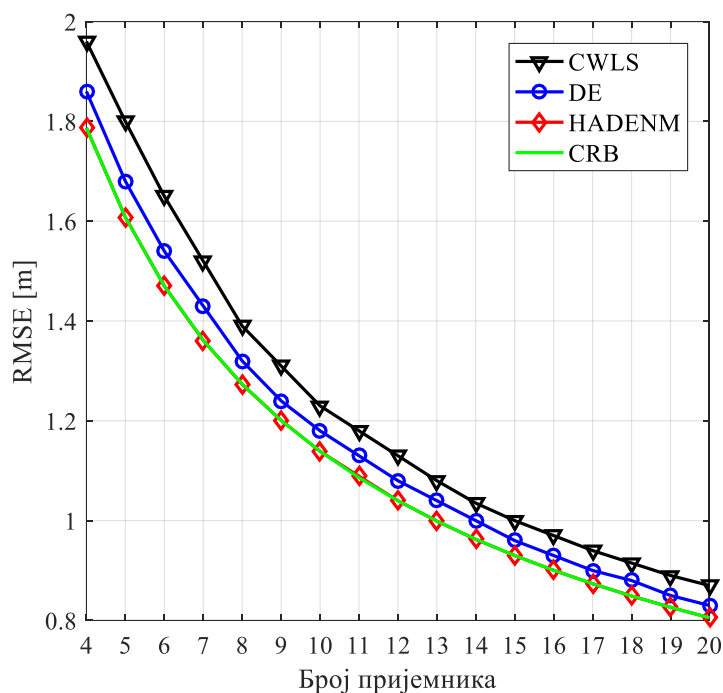
На основу CDF функција, приказаних на слици 10.4 произилази да у случају  $CDF = 0.9$  при вредности варијансе шума  $\sigma_{ni}^2 = 10\text{m}^2$ , предложени HADENM алгоритам остварује најмању грешку позиционирања од 3.8m, док алгоритми DE и CWLS остварују грешку од 3.9m и 4.2m, респективно. Из добијених резултата нумеричке симулације закључује се да предложени HADENM алгоритам остварује бољу тачност позиционирања у односу на остале алгоритме узете за анализу.

Такође, у циљу анализе утицаја повећања броја пријемника на тачност позиционирања разматраних алгоритама, посматра се распоред пријемника равномерно распоређених по кругу полупречника  $R = 60\sqrt{2}\text{m}$ , при чему су координате  $i$ -тог пријемника генерисане помоћу следеће једначине

$$\mathbf{x}_i^r = [R\cos\varphi_i \quad R\sin\varphi_i]^T, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (10.11)$$

где  $\varphi_i$  означава угао између два суседна предајника. Према томе, на

слици 10.5 приказана је зависност RMSE разматраних алгоритама у односу на број пријемника, за први сценарио, при чему је варијанса шума  $\sigma_{ni}^2 = 1\text{m}^2$ .



Слика 10.5. Зависност RMSE од броја пријемника  $N$  за  $\sigma_{ni}^2 = 1\text{m}^2$ .

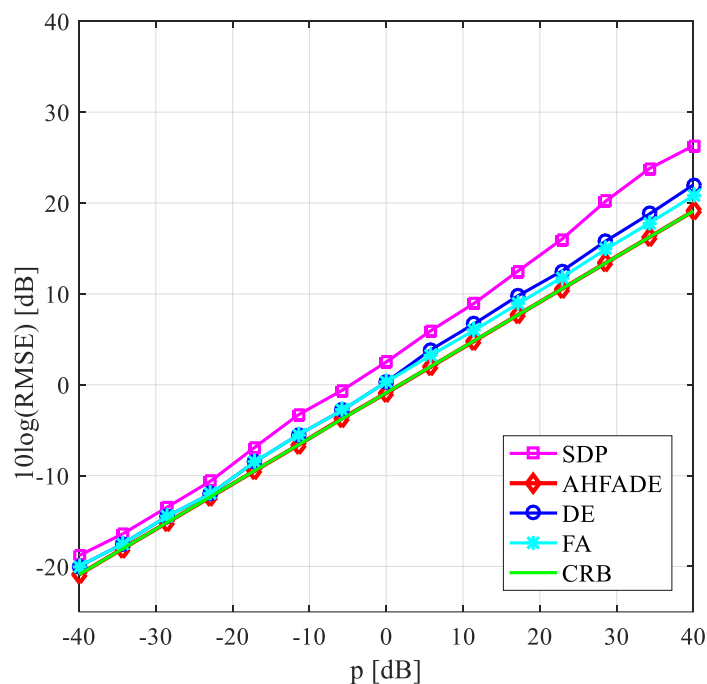
На основу резултата приказаних на слици 10.5 произилази да са порастом броја пријемника од 4 до 15 долази до значајног побољшања тачности позиционирања CWLS, DE и HADENM алгоритама. С друге стране, закључује се да даље повећање броја пријемника не доводи до значајног побољшања у тачности позиционирања разматраних алгоритама. Дакле, на основу добијених резултата произилази да предложени HADENM алгоритам остварује значајно бољу тачност позиционирања у поређењу са осталим разматраним алгоритмима. На основу овог, потврђује се прилагодљивост предложеног алгоритма различитим променама у просторном распореду пријемника у мрежи.

### 10.2.2 Анализа перформанси ANFADE алгоритма

У оквиру овог одељка дати су резултати Монте-Карло симулација за пасивни модел позиционирања базиран на мерењу TOA параметра у LOS окружењу, ради анализе перформанси позиционирања ANFADE алгоритма. Дакле, у циљу

поређења перформанси SDP, DE, FA и AHFADE алгоритама, разматрају се три сценарија, где је за сваки сценарио коришћен просторни распоред који се састоји од једног предајника, и четири пријемника на познатим локацијама, при чему је позиција пасивног објекта различита за сваки сценарио. Према томе, референтни пријемници имају следеће координате и то:  $\mathbf{x}_1^r = [100 \ 100]^T$  m,  $\mathbf{x}_2^r = [100 \ -100]^T$  m,  $\mathbf{x}_3^r = [-100 \ -100]^T$  m, и  $\mathbf{x}_4^r = [-100 \ 100]^T$  m, док се предајник налази на координатама  $\mathbf{x}_t = [0 \ 0]^T$  m. У зависности од позиције пасивног објекта, разматрају се следећа три сценарија: i) позиција пасивног објекта је одабрана тако да је објекат окружен пријемницима, тј.  $\mathbf{x} = [20 \ 30]^T$  m; ii) позиција пасивног објекта је постављена тако да пасивни објекат није окружен пријемницима, тј.  $\mathbf{x} = [120 \ 100]^T$  m; iii) за сваки корак симулације пасивни објекат је постављен насумично у области  $120 \times 120 \text{m}^2$ .

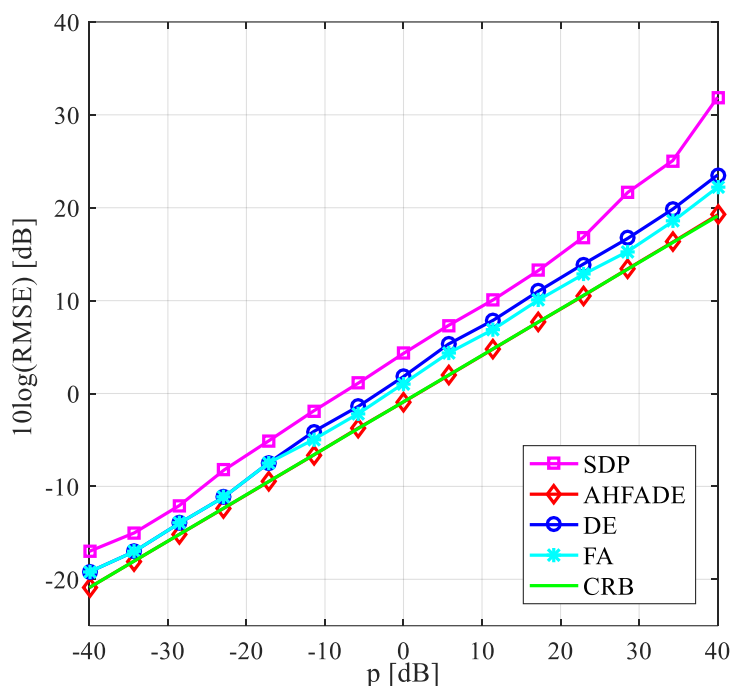
Према томе, на слици 10.6 представљени су резултати нумеричких симулација за први сценарио, при чему је дата зависност RMSE у односу на варијансу шума  $p = 10 \log(\sigma_{ni}^2)$ . Такође, на слици 10.6 приказана је Крамер-Раова граница у циљу поређења перформанси разматраних алгоритама.



Слика 10.6. Зависност RMSE од  $p$  за позицију објекта  $\mathbf{x} = [20 \ 30]^T$  m.

На основу резултата приказаних на слици 10.6 произилази да предложени АНFADE алгоритам достиже Крамер-Раову границу за све разматране вредности варијансе шума  $p$ . Такође, резултати показују да SDP, FA и DE алгоритми остварују перформансе неколико dB изнад CRB границе. С друге стране, на основу нумеричких резултата уочава се да перформансе SDP алгоритма значајно одступају од Крамер-Раове границе, посебно за веће вредности варијансе шума  $p > 20\text{dB}$ .

Резултати нумеричке симулације за други сценарио илустровани су на слици 10.7. Такође, на слици 10.7 дата је зависност RMSE од варијансе шума  $p = 10\log(\sigma_{ni}^2)$  за све разматране алгоритме, при чему је приказана Крамер-Раова граница у циљу поређења перформанси позиционирања.

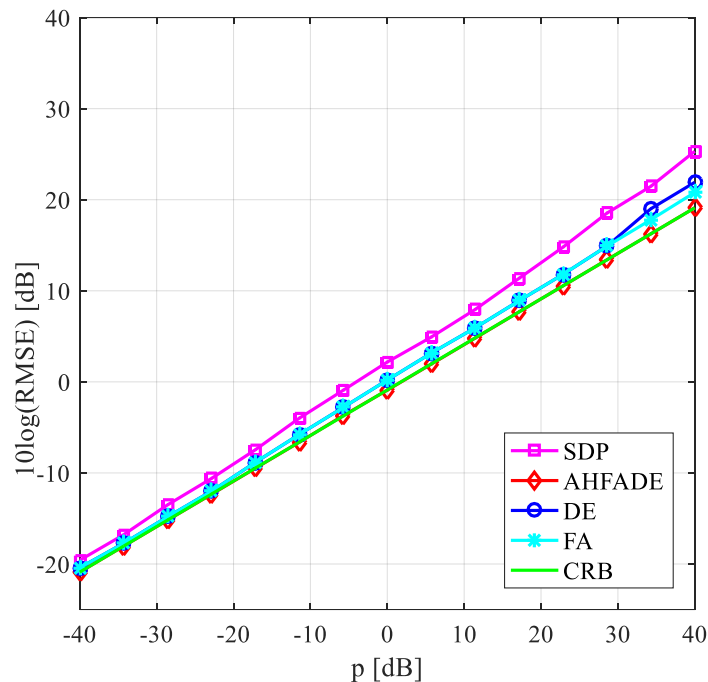


Слика 10.7. Зависност RMSE од  $p$  за позицију пасивног објекта  $\mathbf{x} = [120\ 100]^T$  m.

Анализом резултата приказаних на слици 10.7, произилази да АНFADE алгоритам достиже Крамер-Раову границу и да са порастом варијансе шума  $p$  предложени алгоритам остварује боље перформансе у поређењу са SDP, DE и FA алгоритмима. Такође, са слике 10.7 уочава се да DE и FA алгоритми показују значајно лошије перформансе позиционирања у односу на АНFADE алгоритмом. Компаративном анализом разматраних алгоритама, уочава се да SDP алгоритам

остварује најлошије резултате при одређивању позиције пасивног објекта, посебно за високе вредности варијансе шума, односно за  $p \geq 30\text{dB}$ .

На слици 10.8 приказани су резултати нумеричке симулације за трећи сценарио где се за сваки корак симулације позиција пасивног објекта поставља насумично у области  $120 \times 120\text{m}^2$ . Такође, на слици 10.8 дата је зависност RMSE од варијансе шума  $p = 10\log(\sigma_{ni}^2)$  за све разматране алгоритме, при чему је приказана и Крамер-Раова граница прецизности позиционирања.



**Слика 10.8.** Зависност RMSE од  $p$  за насумично одабрану позицију објекта.

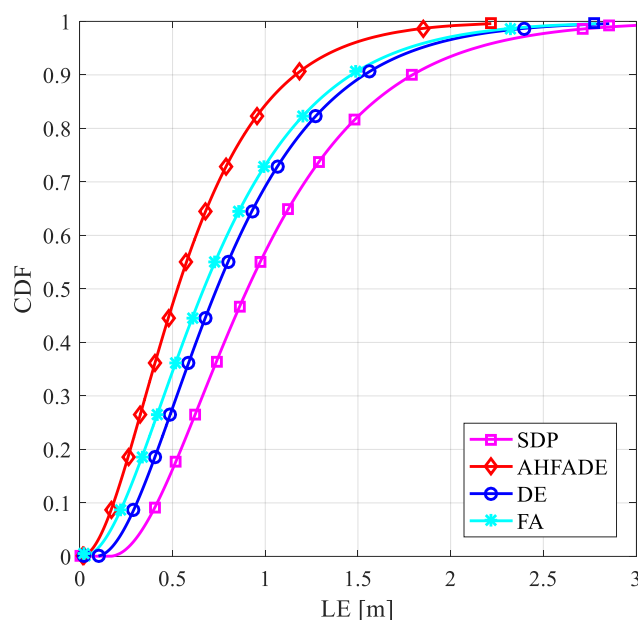
Са слике 10.8 закључује се да предложени AHFADE алгоритам достиже Крамер-Раову границу за све разматране вредности варијансе шума  $p$  и остварује бољу тачност позиционирања у поређењу са FA, DE, и SDP алгоритмима.

Према томе, упоредном анализом резултата приказаних на сликама 10.6, 10.7 и 10.8, закључује се да разматрани алгоритми остварује ниже RMSE вредности када је позиција пасивног објекта одабрана тако да је објекат окружен пријемницима (први сценарио). С друге стране, разматрани алгоритми показују веће RMSE вредности, када је објекат постављен тако да није окружен пријемницима (други сценарио). Треба приметити да предложени AHFADE алгоритам остварује бољу



тачност позиционирања у поређењу са осталим алгоритмима, и успешно достиже Крамер-Раову границу у свим разматраним сценаријима. С друге стране, перформансе SDP алгоритма значајно одступају од Крамер-Раове границе, посебно у присуству високог шума. Према томе, закључује се да предложени AHFADE алгоритам показује мању осетљивост на промену у просторном распореду пријемника и предајника у мрежи.

На слици 10.9 приказане су кумулативне функције расподеле вредности грешке позиционирања разматраних алгоритама за други сценарио при вредности варијансе шума  $\sigma_{ni}^2 = 1\text{m}^2$ .

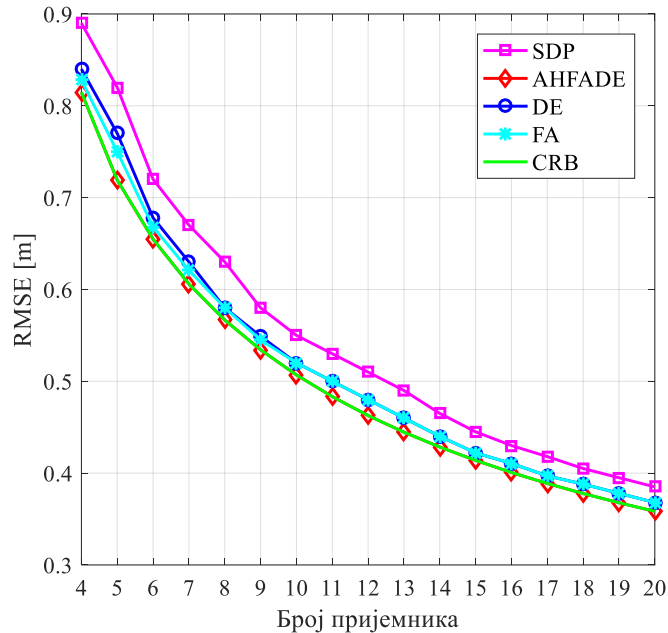


Слика 10.9. CDF за разматране алгоритме.

На основу CDF функција, приказаних на слици 10.9 произилази да предложени AHFADE алгоритам остварује најмању грешку позиционирања у поређењу са осталим алгоритмима који су узети за компаративну анализу. У складу са тим, за вредност кумулативне функција расподеле грешке позиционирања  $CDF = 0.9$ , предложени AHFADE алгоритам остварује грешку позиционирања мању од 1,2m, док алгоритми FA, DE и SDP имају грешке позиционирања мање од 1,5 m, 1,55 m и 1,8m, респективно.

Ради анализе утицаја повећања броја пријемника на тачност позиционирања разматраних алгоритама, посматра се распоред пријемника равномерно

распоређених по кругу полупречника  $R = 100\sqrt{2}\text{m}$ , при чему су координате  $i$ -тог пријемника генерисане на основу једначине (10.11). С тим у вези, на слици 10.10 дата је зависност RMSE разматраних алгоритама у односу на број пријемника  $N$ , за варијансу шума  $\sigma_{ni}^2 = 1\text{m}^2$ .



Слика 10.10. Зависност RMSE од броја пријемника  $N$  за  $\sigma_{ni}^2 = 1\text{m}^2$ .

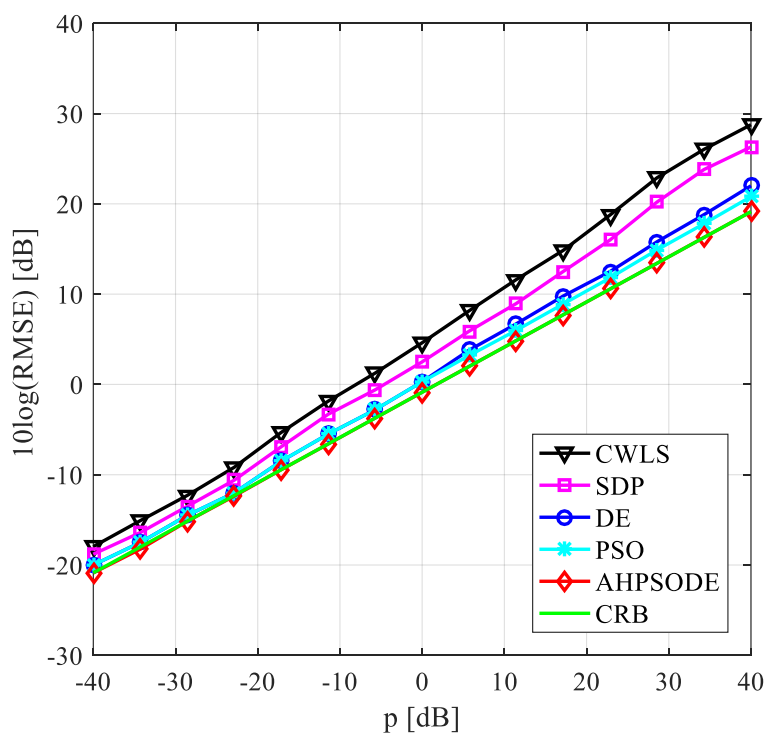
Са слике 10.10 уочава се да RMSE вредности свих разматраних алгоритама опадају са повећањем броја пријемника од 4 до 10. С друге стране, закључје се да даље повећање броја пријемника не доводи до побољшања тачности позиционирања разматраних алгоритама. На основу добијених резултата са слике 10.10 произилази да предложени AHFADE алгоритам остварује бољу тачност позиционирања у поређењу са другим разматраним алгоритмима при решавању проблема пасивног лоцирања. Дакле, потврђује се да се предложени алгоритам успешно прилагођава променама у просторном распореду пријемника у мрежи.

### 10.2.3 Анализа перформанси AHPSODE алгоритма

У циљу анализе тачности позиционирања предложеног AHPSODE алгоритма, у оквиру овог одељка дати су резултати нумеричке Монте-Карло симулације за пасивни модел позиционирања базиран на мерењу TDOA параметра у LOS

окружењу. С тим у вези, у циљу поређења перформанси CWLS, SDP, PSO, DE и AHPSODE алгоритама разматрају се три сценарија. Према томе, за сваки разматрани сценарио коришћен је просторни распоред који се састоји од једног пријемника, и четири предајника на познатим локацијама, при чему је позиција пасивног објекта различита за сваки разматрани сценарио. Према томе, референтни предајници имају следеће координате и то:  $\mathbf{x}'_1 = [80 \ 80]^T$  m,  $\mathbf{x}'_2 = [80 \ -80]^T$  m,  $\mathbf{x}'_3 = [-80 \ 80]^T$  m, и  $\mathbf{x}'_4 = [-80 \ -80]^T$  m, при чему су координате пријемника  $\mathbf{x}_r = [0 \ 0]^T$  m. Дакле, у зависности од позиције пасивног објекта, разматрају се следећа три сценарија: i) позиција пасивног објекта је одабрана тако да је објекат окружен пријемницима, тј.  $\mathbf{x} = [20 \ 30]^T$  m; ii) позиција објекта је постављена тако да пасивни објекат није окружен пријемницима, тј.  $\mathbf{x} = [100 \ 80]^T$  m; iii) за сваки корак симулације позиција пасивног објекта поставља се насумично у области  $80 \times 80 \text{m}^2$ .

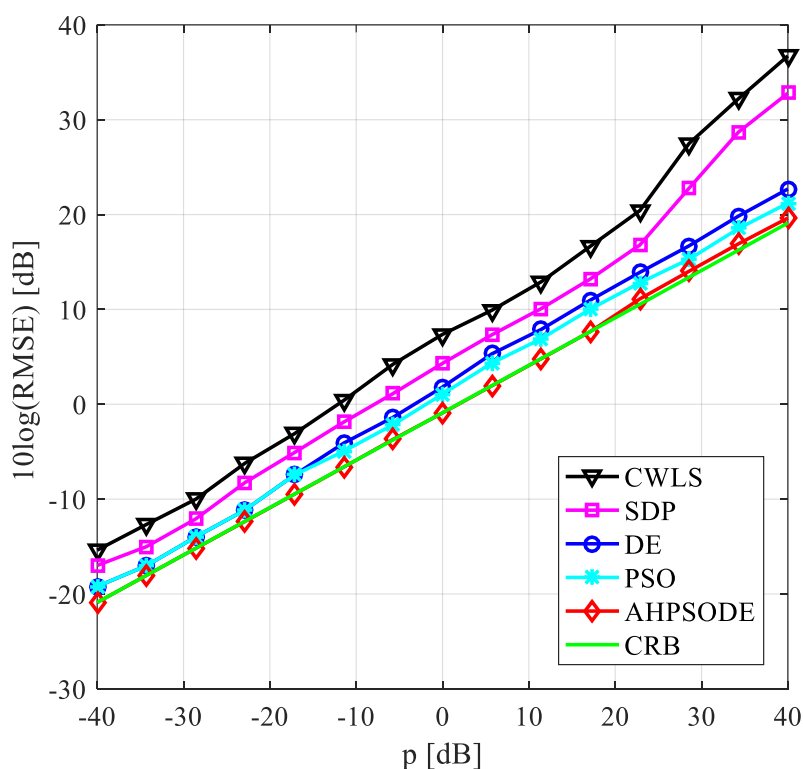
Према томе, на слици 10.11 дата је зависност RMSE у односу на варијансу шума  $p = 10 \log(\sigma_{ni}^2)$ , као и Крамер-Раова граница симулација за први сценарио.



Слика 10.11. Зависност RMSE од  $p$  за позицију пасивног објекта  $\mathbf{x} = [20 \ 30]^T$  m.

Са слике 10.11 произилази да предложени АНPSODE достиже Крамер-Раову границу за све разматране вредности варијансе шума  $p$ . Такође, добијени резултати указују да CWLS, SDP, DE и PSO алгоритми остварују перформансе неколико dB изнад CRB границе. С друге стране, резултати показују да за високе вредности варијансе шума ( $p > 20\text{dB}$ ), SDP и CWLS алгоритми показују одступање од Крамер-Раове границе, у поређењу са осталим посматраним алгоритмима.

На слици 10.12 приказани су нумерички резултати за други сценарио, где је дата зависност RMSE у односу на варијансу шума  $p = 10\log(\sigma_{ni}^2)$ , као и Крамер-Раова граница прецизности.

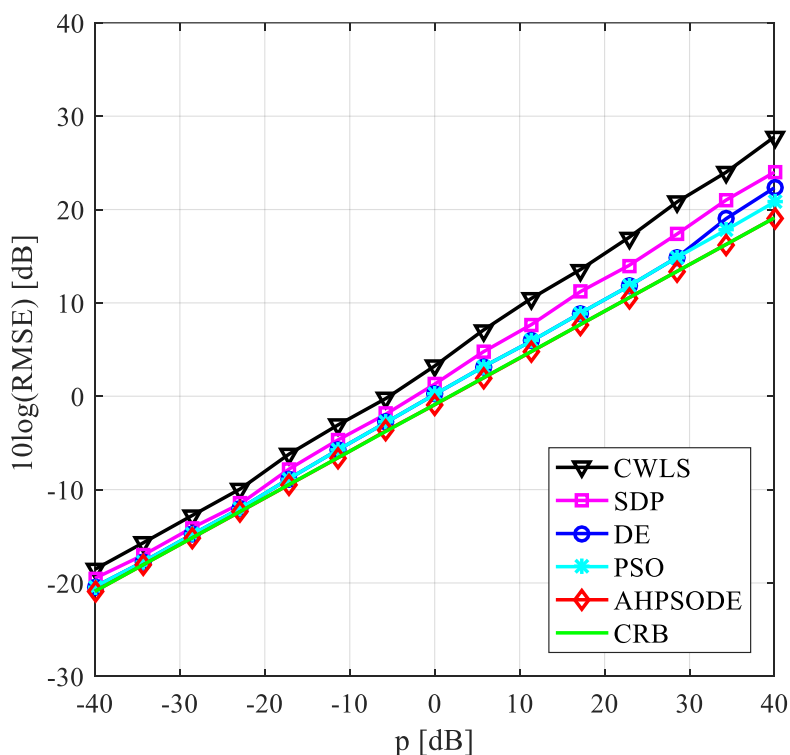


Слика 10.12. Зависност RMSE од  $p$  за позицију пасивног објекта  $\mathbf{x} = [100 \ 80]^T$  m.

На основу резултата приказаних слици 10.12 произилази да АНPSODE алгоритам достиже Крамер-Раову границу за све разматране вредности варијансе шума. Такође, уочава се да са порастом варијансе шума предложени алгоритам остварује боље перформансе у поређењу са осталим разматраним алгоритмима. Поред овог, добијени резултати указују на смањење тачности позиционирања DE и PSO алгоритма, у поређењу са АНPSODE алгоритмом. С друге стране, произилази

да SDP и CWLS алгоритми показују најлошије перформансе, посебно при високим вредностима варијансе шума, односно при  $p > 20\text{dB}$ .

Резултати нумеричке симулације за трећи сценарио илустровани су на слици 10.13, где се за сваки корак симулације позиција пасивног објекта поставља насумично у области  $80 \times 80\text{m}^2$ . Такође, на овој слици приказана је зависност RMSE од варијансе шума  $p = 10\log(\sigma_{ni}^2)$  за све разматране алгоритме, као и Крамер-Раова граница прецизности позиционирања.



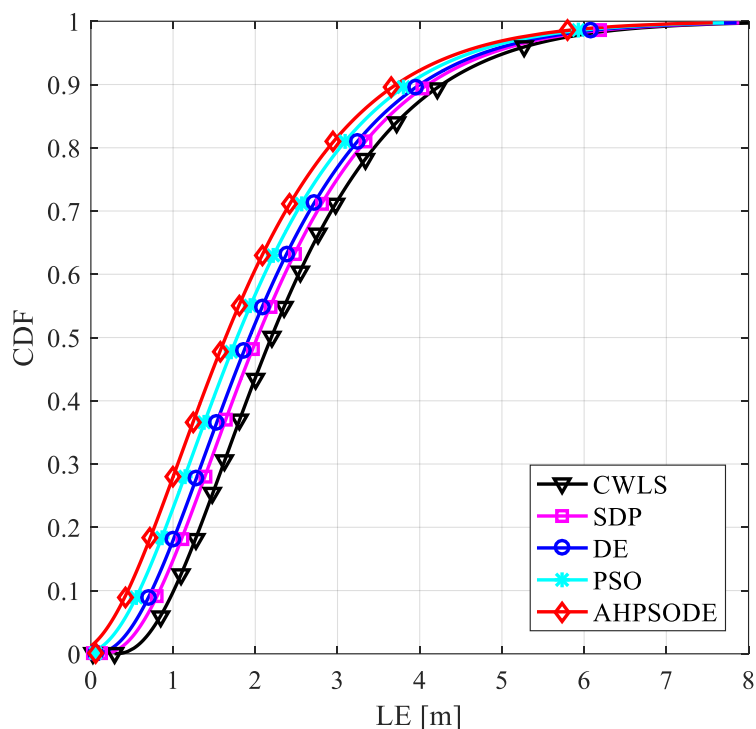
Слика 10.13. Зависност RMSE од  $p$  за насумично одабрану позицију објекта.

Анализом резултата приказаних на слици 10.13 закључује се да предложени AHPSODE алгоритам достиже Крамер-Раову границу за све разматране вредности варијансе шума и остварује бољу тачност позиционирања у поређењу са CWLS, SDP, DE и PSO алгоритмима.

У складу са тим, упоредном анализом резултата приказаних на сликама 10.11, 10.12 и 10.13, закључује се да сви разматрани алгоритми остварују бољу тачност позиционирања када је позиција пасивног објекта одабрана тако да је објекат окружен пријемницима (први сценарио). С друге стране, разматрани алгоритми

остварују лошије перформансе када је објекат постављен тако да није окружен пријемницима (други сценарио). Такође, закључује се да предложени АНPSODE алгоритам има бољу тачност позиционирања у поређењу са осталим алгоритмима, и успешно достиже Крамер-Раову границу у свим разматраним сценаријима. Према томе, закључује се да АНPSODE алгоритам остварује мању осетљивост на промену у просторном распореду пријемника и предајника у мрежи.

На слици 10.14 приказане су кумулативне функције расподеле вредности грешке позиционирања разматраних алгоритама за други сценарио при вредности варијансе шума  $\sigma_{ni}^2 = 10\text{m}^2$ .



Слика 10.14. CDF за разматране алгоритме.

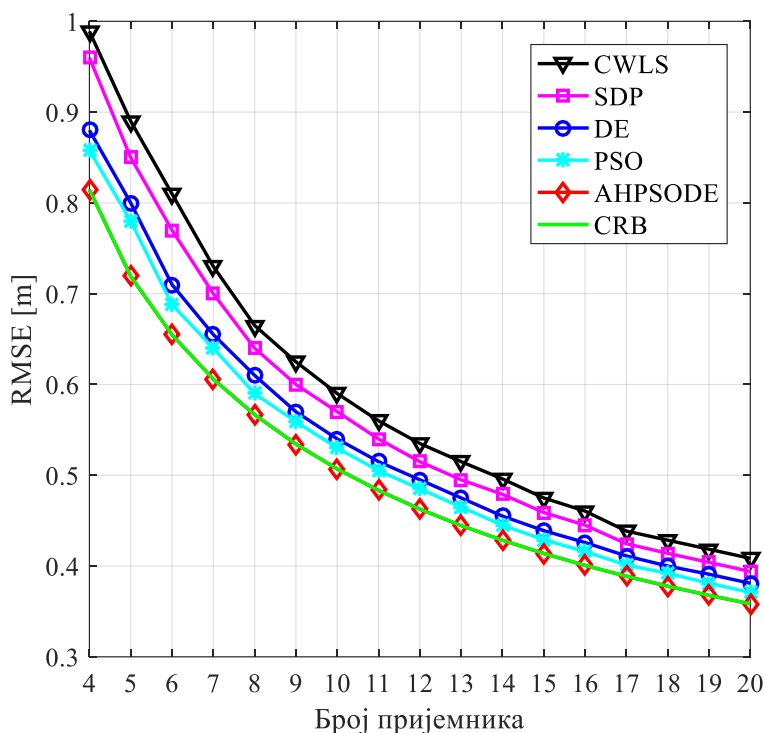
Анализом CDF функција приказаних на слици 10.14 произилази да АНPSODE алгоритам показује најмању вредност грешке позиционирања у поређењу са осталим разматраним алгоритмима. Према томе, у случају  $CDF = 0.9$  за вредности варијансе шума  $\sigma_{ni}^2 = 10\text{m}^2$  уочава се да предложени АНPSODE алгоритам остварује грешку позиционирања мању од 3.66 m, док алгоритми CWLS, SDP, DE и PSO остварују грешку мерења мању од 4.28m, 4.1m, 4.0 m и 3.86 m, респективно. У складу са тим, из резултата добијених на основу анализе CDF функција

произилази да предложени AHPSODE остварује бољу тачност позиционирања у односу на остале разматране алгоритме.

У циљу анализе утицаја повећања броја предајника на тачност позиционирања разматраних алгоритама, у наставку се разматра распоред предајника равномерно распоређених по кругу полупречника  $R = 80\sqrt{2}\text{m}$ , при чему се координате предајника формиране на основу израза

$$\mathbf{x}'_i = [R\cos 2\pi/i \quad R\sin 2\pi/i]^T, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_t\}, \quad (10.12)$$

Према томе, на слици 10.15 приказана је зависност RMSE разматраних алгоритама у односу на број предајника  $N_t$ , за варијансу шума  $\sigma_{ni}^2 = 1\text{m}^2$ .



Слика 10.15. Зависност RMSE од броја пријемника  $N_t$  за  $\sigma_{ni}^2 = 1\text{m}^2$ .

Са резултата приказаних на слици 10.15 уочава се да долази до значајног побољшања тачности позиционирања свих разматраних алгоритама са повећањем броја пријемника од 4 до 10. С друге стране, закључује се да даље повећање броја пријемника не доводи до значајног побољшања тачности позиционирања разматраних алгоритама. Дакле, на основу добијених резултата са слике 10.15 произилази да предложени AHPSODE алгоритам остварује већу тачност

позиционирања у поређењу са осталим разматраним алгоритмима. На тај начин, потврђује се прилагодљивост предложеног алгоритма променама у просторном распореду пријемника у мрежи.

### **10.3 Комплексност алгоритама**

Поред тачности позиционирања, један од примарних критеријума при одабиру алгоритма је његова ефикасност. У складу са тим, ефикасност алгоритма изражава се потрошњом рачунарских ресурса при извршавању, при чему је најзначајнији параметар време извршавања (временска сложеност). Испитивање временске сложености алгоритма састоји се од анализе улазних података и броја корака које треба извршити. Такође, временска сложеност зависи и од конкретне рачунарске платформе на којој се алгоритам извршава. Према томе, одређивање перформанси алгоритма своди се на израчунавање временске сложености у зависности од димензије проблема. Дакле, означимо са  $g(n)$  сложеност као меру којом се изражава колико алгоритам користи меморијског простора или процесорског времена у зависности од димензије проблема  $n$ . Уобичајени начин за изражававање сложености алгоритама је  $O$ -нотација, којом се изражава асимптотска сложеност алгоритма. Дакле, за функцију  $f(n)$  каже се да је  $O(g(n))$ , ако постоје позитивне константе  $c$  и  $n_0$ , тако да је  $f(n) \leq cg(n)$  за свако  $n \geq n_0$ . На овај начин налази се горња граница сложености, јер је  $f(n)$  асимптотски ограничено са  $g(n)$  и гарантовано нема већи ред величине пораста са порастом димензије проблема [158].

Такође, у циљу компаративне анализе перформанси разматраних алгоритама дато је и поређење времена извршавања алгоритама потребно за решавање постављеног оптимизационог проблема. Времена извршавања алгоритама одређена су на рачунару са процесором *Intel Core i7 3,2GHz* и 16 GB RAM меморије.



### 10.3.1 Комплексност HADENM алгоритма

У оквиру овог одељка разматрана је сложеност предложеног HADENM алгоритма, као и CWLS, DE и NM алгоритама, при чему је у циљу компаративне анализе дато поређење времена извршавања.

У релевантној литератури указано је да CWLS алгоритам има сложеност  $O(G_{\max}(n+1))$  [43], док конвенционални DE алгоритам остварује сложеност  $O(G_{\max} N_p n)$  [159]. Током извршавања једне генерације HADENM алгоритма, сви чланови у популацији сортирају се према вредности функције циља, при чему је просечна сложеност овог процеса  $O(N_p \log(N_p))$ . Затим, сви чланови популације пролазе кроз оперatore мутације, укрштања и селекције, при чему је сложеност ових оператора заједно једнака  $O(N_p(n + C_{oc} + C_{os}))$  [85], где је са  $C_{oc}$  и  $C_{os}$  означена димензија операција укрштања и селекције, респективно. Затим се тачност најбољег решења, добијеног на основу DE алгоритма, побољшава применом NM алгоритма, чија рачунска сложеност износи  $O(n \log n)$  [131]. Дакле, на основу спроведене анализе сложеност предложеног HADENM алгоритма може се поједноставити на  $O(G_{\max} N_p n + n \log n)$ .

Такође, у циљу компаративне анализе разматра се просечно време потребно за решавање постављеног оптимизационог проблема применом разматраних алгоритама. Дакле, у табели 10.14 приказана су просечна времена извршавања CWLS, DE и HADENM алгоритама за разматране сценарије.

**Табела 10.14.** Упоредни приказ времена извршавања разматраних алгоритама.

	CWLS [ms]	DE [ms]	HADENM [ms]
Сценарио 1	0.567	7.1	8.3
Сценарио 2	0.466	6.4	7.8
Сценарио 3	0.926	8.6	8.7

На основу резултата приказаних у Табели 10.14 произилази да CWLS алгоритам постиже оптимално решење у кратком временском интервалу у поређењу са осталим разматраним алгоритмима. С друге стране, HADENM и DE алгоритми остварују сличне перформансе у погледу времена извршавања. Такође, резултати у табели 10.14 показују да предложени HADENM алгоритам постиже најбољи компромис између тачности позиционирања и времена извршавања при решавању проблема пасивног позиционирања.

### 10.3.2 Комплексност ANFADE алгоритма

У наставку разматрана је сложеност предложеног ANFADE алгоритма, и дата је компаративна анализа поређења овог алгоритма са осталим разматраним алгоритмима. У литератури указано је да SDP алгоритам има сложеност  $O(16(N^2n + Nn^2) + G_{\max}(n+1)^3 + 4(2n+3)^{3.5})$  [49]. За дати оптимизациони проблем са функцијом циља  $J_{ML,TOA}(\mathbf{x})$ , означимо са  $O(f)$  сложеност рачунања вредности функције циља. У складу са тим, конвенционални FA алгоритам остварује сложеност  $O(G_{\max}N_p^2(n+f))$  [129]. У оквиру ANFADE алгоритма једна генерација популације сортира се према вредности функције циља, при чему је сложеност овог процеса  $O(N_p \log(N_p))$ . Затим, сви чланови популације најпре пролазе кроз оператор мутације чија сложеност зависи од сложености процеса претраге FA алгоритма која износи  $O(N_p^2(n+f))$ . Тако добијена решења пролазе кроз операторе укрштања и селекције, при чему је сложеност ових оператора једнака  $O(N_p(Cos + Cos))$  [85], где је са  $Cos$  и  $Cos$  означена димензија операција укрштања и селекције, респективно. На основу спроведене анализе, произилази да је сложеност предложеног ANFADE алгоритма једнака  $O(N_p \log(N_p) + N_p^2(n+f) + N_p(Cos + Cos))$ .

Дакле, ради компаративне анализе извршено је поређење просечног времена потребног за решавање постављеног оптимизационог проблема применом разматраних алгоритама. У складу са тим, у табели 10.15 приказана су просечна времена извршавања FA, DE, SDP и ANFADE алгоритама за разматране сценарије.

Табела 10.15. Упоредни приказ времена извршавања разматраних алгоритама.

	SDP [ms]	FA [ms]	DE [ms]	AHFADE [ms]
Сценарио 1	0.737	0.0116	0.0117	0.0389
Сценарио 2	0.7751	0.0092	0.0091	0.027
Сценарио 3	0.79	0.011	0.011	0.0419

На основу резултата приказаних у Табели 10.15 произилази да DE и FA алгоритми имају приближно иста времена извршавања и постижу оптимално решење у кратком временском интервалу, у односу на остале разматране алгоритме. С друге стране, SDP алгоритму је потребно највише времена за решавање разматраног проблема лоцирања у поређењу са осталим разматраним алгоритмима. Такође, на основу резултата у табели 10.15 закључује се да предложени AHFADE алгоритам постиже најбољи компромис између тачности позиционирања и времена извршавања при решавању проблема пасивног лоцирања.

### 10.3.3 Комплексност AHPSODE алгоритама

У оквиру овог одељка разматра се сложеност извршавања AHPSODE алгоритама, као и компаративна анализа поређења времена извршавања овог алгоритама са постојећим алгоритмима CWLS, SDP, DE и PSO.

У релевантној литератури указано је да PSO алгоритам има сложеност  $O(G_{\max} N_p (n + f))$ , при чему је са  $O(f)$  означена комплексност израчунавања функције циља  $J_{ML, TDOA}(\mathbf{x})$ . У претходним под поглављима приказана је сложеност алгоритама CWLS, SDP, DE. Током једне генерације AHPSODE алгоритама популација се сортира у растући низ према вредности функције циља, при чему је сложеност овог процеса  $O(N_p \log(N_p))$ . Затим, примењује се оператор мутације чија сложеност зависи од сложености израза за ажурирање вредности вектора

брзине и вектора позиције PSO алгоритма, односно  $O(N_p(n+f))$ . Решења добијена кроз оператор мутације пролазе и кроз операторе укрштања и селекције, при чему је сложеност ових оператора једнака  $O(N_p(Coc + Cos))$  [85], где је са  $Coc$  и  $Cos$  означена димензија операција укрштања и селекције, респективно. Према томе, произилази да је укупна сложеност предложеног АНPSОДЕ алгоритма  $O(N_p \log(N_p) + N_p(n+f) + N_p(Coc + Cos))$ .

Ради компаративне анализе извршено је поређење просечног времена потребног за решавање постављеног оптимизационог проблема применом разматраних алгоритама. У складу са тим, у табели 10.16 приказана су просечна времена извршавања CWLS, SDP, PSO, DE и АНPSОДЕ алгоритама за разматране сценарије.

**Табела 10.16.** Упоредни приказ времена извршавања разматраних алгоритама.

	CWLS [ms]	SDP [ms]	PSO [ms]	DE [ms]	АНPSОДЕ [ms]
Сценарио 1	$6.45 \times 10^{-4}$	10.03	$3.02 \times 10^{-2}$	$1.46 \times 10^{-2}$	$2.06 \times 10^{-1}$
Сценарио 2	$5.85 \times 10^{-4}$	9.96	$1.03 \times 10^{-2}$	$1.13 \times 10^{-2}$	$2.07 \times 10^{-1}$
Сценарио 3	$6.19 \times 10^{-4}$	14.55	$1.17 \times 10^{-2}$	$1.46 \times 10^{-2}$	$2.48 \times 10^{-1}$

На основу резултата приказаних у Табели 10.16 произилази да CWLS алгоритам проналази оптимално решење у кратком временском интервалу у односу на остале разматране алгоритме. С друге стране, за достизање оптималног решења SDP алгоритму је неопходно веће време извршавања. Такође, на основу резултата у табели 10.16 закључује се да предложени АНPSОДЕ алгоритам остварује најбољи компромис између тачности позиционирања и времена извршавања при решавању проблема пасивног лоцирања.

## 11. Закључак

Приступајући изради ове докторске дисертације пошло се од веома строгих захтева у погледу ефикасности, тачности и робусности одређивања непознате локације неког објекта, коју треба да испуне оптимизациони и естимациони алгоритми, као и технологије лоцирања. Током претходних година развијен је изузетно велики број метода и технологија лоцирања у бежичним сензорским мрежама, које су значајно утицале на имплементацију низа сервиса у научне и комерцијалне сврхе. Постављени захтеви у погледу перформанси лоцирања, као и имплементација нових сервиса сталан су изазов за истраживаче о чему сведочи изузетно велики број објављених научно-стручних радова у релевантним часописима.

Циљ ове докторске дисертације је реализација пасивног модела лоцирања, заснованог на мерењу времена пропагације сигнала или временске разлике пропагације сигнала, у условима директне оптичке видљивости услед присуства Гаусовог шума. Посебно је указано на неопходност увођења функције циља као додатног критеријума оптималности у циљу одређивања позиције пасивног објекта. Према томе, ради процене непознате локације објекта, формирана је функција максималне веродостојности за познату функцију густине вероватноће грешке мерења. Функција циља постављеног естимационог модела за разматрани проблем локализације је нелинеарна и неконвексна, односно мултимодална функција.

У оквиру ове дисертације приказани су апроксимативни приступи решавању проблема естимације кроз линеаризацију на основу примене WLS и CWLS метода, које су услед једноставности у погледу имплементације и ефикасности веома

заступљене за решавање проблема лоцирања. Детаљно је приказана формулација SDP методе, за постављени пасивни модел лоцирања, која се заснива на трансформацији неконвексног оптимизационог проблема у конвексни, и не захтева познавање почетног решења. У условима присуства високог шума у радио каналу, WLS, CWLS и SDP методе не остварују захтеване перформансе у погледу високе тачности одређивања непознате локације објекта. Сходно овоме, ради решавања комплексних оптимизационих проблема, развијен је велики број оптимизационих метода, које се могу поделити на: класичне (конвенционалне) и хеуристичке алгоритме оптимизације. Метода директне претраге Нелдер – Мид посебно се издваја из групе конвенционалних метода, будући да не захтева познавање извода функције циља за решавање оптимизационог проблема. Међутим, конвенционалне методе оптимизације захтевају познавање почетног решења у циљу конвергенције ка глобалном оптималном решењу. Дакле, произилази да је за решавање неконвексних оптимизационих проблема, са више локалних оптимума, неопходно применити стохастичке хеуристичке оптимизационе методе, које одликује:

- ефикасност и поузданост у погледу одређивања глобалног оптимума мултимодалних оптимизационих проблема,
- могућност решавања недиференцијабилних и прекидних функција циља, и
- одсуство захтева у погледу познавања почетног решења.

Према томе, у циљу остваривања високе тачности лоцирања, у оквиру ове докторске дисертације детаљно су разматрани стохастички хеуристички алгоритми инспирисани биолошким системима, као што су: оптимизација ројем честица, алгоритам свитаца, као и алгоритам диференцијалне еволуције. Разматрани хеуристички алгоритми показују одређене предности и недостатке у процесу изналажења глобалног оптималног решења. У том контексту, посебан допринос ове дисертације односи се на модификацију постојећих хеуристичких алгоритама кроз: адаптивно подешавање параметара, развој нових оператора мутације, као и хибридизацију алгоритама у циљу решавања комплексног проблема лоцирања и елиминисања недостатака у процесу оптимизације.

При решавању комплексних оптимизационих проблема применом конвенционалних хеуристичких алгоритама, перформансе у великој мери зависе од

адекватног одабира улазних параметара који контролишу оптимизациони процес, као и од примењеног мутационог оператора. Ради превазилажења наведених недостатка, у овој дисертацији извршене су модификације хеуристичких алгоритама развојем адаптивних техника за подешавање параметара, ради контроле процеса оптимизације, као и имплементација нових оператора мутације. У складу са тим, модификација алгорита диференцијалне еволуције извршена је у два корака, при чему се први корак односи на адаптивно подешавање фактора скалирања и фактора укрштања. Према томе, у дисертацији су извршене модификације предложених фактора на два начина. Први начин примењује адаптивне технике промене вредности управљачких параметара, дефинисане на основу JADE и SHADE алгоритама, при чему се вредности предложених фактора скалирања и фактора укрштања независно генеришу за сваки члан популације на основу Кошијеве и Гаусове расподеле. Други начин односи се на адаптивне технике за подешавање предложених фактора, код којих се вредности генеришу на основу повратних информација из процеса оптимизације. Модификација мутационог оператора извршена је у другом кораку, при чему је у оквиру дисертације имплементиран адаптивни параметар ради одабира одговарајућег мутационог оператора за тренутни стадијум оптимизације.

Такође, у оквиру ове дисертације извршена је модификација алгорита оптимизације ројем честица. Сходно овоме, ради побољшања глобалне претраге на почетку процеса оптимизације и унапређења локалне претраге на крају оптимизационог процеса, развијене су технике за адаптивно подешавање вредности коефицијената когнитивног и социјалног убрзања.

Осим модификација DE и PSO алгоритама, у дисертацији је указано на значај функције привлачности алгорита свитаца на одржавања равнотеже између фаза глобалне и локалне претраге. Према томе, извршено је унапређење механизма претраге FA алгорита увођењем модификоване функције привлачности, при чему се вредност ове функције адаптивно мења на основу повратних информација добијених из процеса оптимизације.

Дакле, предложене адаптивне технике за промену вредности управљачких параметара, као и предложен адаптивни мутациони оператор представљају један од

основних доприноса ове дисертације. На тај начин, применом предложених модификација успостављена је равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге, чиме је отклоњен један од основних недостатака разматраних хеуристичких алгоритама.

С друге стране, ради даљег побољшања оптимизационих перформанси намеће се потреба за развојем хибридних алгоритама, у циљу адекватног искоришћења предности једних и истовремене елиминације недостатака других алгоритама. Сходно овоме, у дисертацији су предложене хибридизације следећих оптимизационих алгоритама и то: алгорита диференцијалне еволуције и Нелдер – Мид методе (HADENM), алгорита диференцијалне еволуције и алгорита свитаца (AHFADE), као и алгорита оптимизације ројем честица и диференцијалне еволуције (AHPSODE).

Ради побољшања оптимизационих перформанси DE алгоритама, у оквиру ове дисертације извршена је хибридизација алгоритама диференцијалне еволуције и Нелдер – Мид методе. Формирани хибридни алгоритам састоји се од две фазе, тако да се у првој фази примењује DE алгоритам у циљу претраживања простора допустивих решења и проналажења региона глобалног оптимума. Друга фаза односи се на примену Нелдер – Мид методе, ради побољшања тачности глобалног оптималног решења и брже конвергенције ка глобалном оптимуму. На тај начин, хибридизацијом DE алгоритама са NM методом локалне претраге, побољшава се квалитет добијеног глобалног оптималног решења и убрзава се конвергенција.

За разлику од DE алгоритама, уочено је да конвенционални FA алгоритам показује одређене недостатке при решавању комплексних оптимизационих проблема, као што су спора конвергенција и неусклађена равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге. Ради превазилажења ових недостатака, у дисертацији је предложена хибридизација алгоритама свитаца и алгоритама диференцијалне еволуције. Дата хибридизација извршена је ради унапређење перформанси инкорпорирањем мутационих оператора DE алгоритама у једначину претраге FA алгоритама. Такође, ради побољшања разноликости популације и превазилажења проблема преурањене конвергенције, оператори укрштања и селекције примењени су у оквиру FA алгоритама.



Анализом оптимизационог процеса PSO алгоритма, у оквиру ове дисертације, уочено је да при решавању мултимодалних оптимизационих проблема PSO алгоритам показује недостатке, као што су спора конвергенција ка оптималном решењу и неодговарајућа равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге. Ради превазилажења ових недостатака, у оквиру дисертације предложена је хибридизација алгоритама оптимизације ројем честица и алгоритма диференцијалне еволуције. На тај начин, остварено је побољшање оптимизационих перформанси инкорпорирањем мутационих оператора DE алгоритма у израз за ажурирање вредности вектора брзине PSO алгоритма. Такође, ради додатног побољшања перформанси, оператори укрштања и селекције из DE алгоритма примењени су у оквиру PSO алгоритма.

Дакле, основни допринос ове дисертације представља примена предложених модификованих хибридних алгоритама на решавање постављеног пасивног модела лоцирања, у циљу унапређења тачности одређивања непознате локације објекта, у условима присуства високог шума.

У оквиру ове дисертације извршено је поређење оптимизационих перформанси модификованих хеуристичких алгоритама са перформансама конвенционалних оптимизационих алгоритама, применом два непараметарска статистичка теста: Вилкоксоновог теста ранга и Фридмановог теста. На основу резултата статистичке анализе произилази да предложени модификовани хеуристички алгоритми остварују боље оптимизационе перформансе у поређењу са конвенционалним алгоритмима. На тај начин, применом непараметарских статистичких тестова верификоване су предложене модификације хеуристичких алгоритама дате у оквиру ове дисертације.

Поред овог, у дисертацији је посебна пажња посвећена анализи утицаја адитивног шума на перформансе разматраних оптимизационих алгоритама, у односу на:

- средњу квадратну грешку,
- промену топологије мреже, као и
- нумеричку сложеност и време извршавања.

У циљу анализе прецизности локализације примењено је теоријско ограничење које не зависи од алгоритма за естимацију, већ је везано за постављени математички модел позиционирања. Према томе, ради поређења варијанси разматраних оптимизационих алгоритама, у дисертацији је примењена Крамер–Раова граница, односно најмања варијанса за постављене пасивне моделе лоцирања. Резултати нумеричких Монте-Карло симулација, за све нивое шума при пропагацији сигнала, показују да предложени развијени адаптивни хибридни хеуристички алгоритми остварују боље перформансе у погледу тачности позиционирања, у поређењу са постојећим алгоритмима. Такође, извршена је анализа осетљивости пасивног модела лоцирања, с обзиром на промене у просторном распореду између предајника и пријемника у мрежи. На основу резултата добијених кроз нумеричке симулације произилази да су предложени хибридни хеуристички алгоритми мање осетљиви на промену у просторном распореду пријемника и предајника у мрежи, у поређењу са конвенционалним алгоритмима. Поред овог, на основу резултата анализе комплексности и времена извршавања разматраних алгоритама закључује се да предложени адаптивни хибридни хеуристички алгоритми остварују најбољи компромис између тачности лоцирања и времена извршавања. Дакле, на основу спроведених нумеричких анализа произилази да адаптивне хеуристичке алгоритме, одликује повишена тачност, робусност и ефикасност у изналажењу непознате локације објекта за постављени пасивни проблем позиционирања.

Пасивни модели лоцирања, постављени у оквиру ове дисертације, засновани на мерењу ТОА и TDOA параметара формирани су за случај простирања сигнала у условима директне оптичке видљивости услед присуства Гаусовог шума. Један од могућих даљих праваца истраживања је надоградња постављених модела, тако да се могу применити на услове пропагације сигнала без директне оптичке видљивости.

Други правац у будућем истраживању је формирање вишекритеријумског оптимизационог модела при чему би се формулисали критеријуми оптималности у погледу тачности одређивања непознате локације објекта, као и оптималног распореда пријемника и предајника у мрежи.

## Литература

- [1] R. Zekavat and R. M. Buehrer, *Handbook of position location: Theory, practice and advances*. John Wiley & Sons, 2011, vol. 27.
- [2] A. Redondi, M. Chirico, L. Borsani, M. Cesana, and M. Tagliasacchi, “An integrated system based on wireless sensor networks for patient monitoring, localization and tracking,” *Ad Hoc Networks*, vol. 11, no. 1, pp. 39–53, 2013.
- [3] M. S. Pejovic, *Principi pozicioniranja u celijskim radio sistemima*, 2016.
- [4] S. Frattasi and F. Della Rosa, *Mobile positioning and tracking: from conventional to cooperative techniques*. John Wiley & Sons, 2017.
- [5] M. B. Rosic, M. I. Simic, and P. V. Pejovic, “Optimal source localization in a real radio channel,” in *2015 23rd Telecommunications Forum Telfor (TELFOR)*. IEEE, 2015, pp. 212–215.
- [6] G. Xu and Y. Xu, *GPS: theory, algorithms and applications*. Springer, 2016.
- [7] A. G. Dempster and E. Cetin, “Interference localization for satellite navigation systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 104, no. 6, pp. 1318–1326, 2016.
- [8] M. A. K. Jaradat and M. F. Abdel-Hafez, “Enhanced, delay dependent, intelligent fusion for INS/GPS navigation system,” *IEEE Sensors Journal*, vol. 14, no. 5, pp. 1545–1554, 2014.
- [9] T. M. Bojan, U. R. Kumar, and V. M. Bojan, “An internet of things based intelligent transportation system,” in *2014 IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety*. IEEE, 2014, pp. 174–179.

- [10] S. Costa, D. Ogilvie, A. Dalton, K. Westgate, S. Brage, and J. Panter, “Quantifying the physical activity energy expenditure of commuters using a combination of global positioning system and combined heart rate and movement sensors,” *Preventive medicine*, vol. 81, pp. 339–344, 2015.
- [11] T. Song, N. Capurso, X. Cheng, J. Yu, B. Chen, and W. Zhao, “Enhancing gps with lane-level navigation to facilitate highway driving,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 66, no. 6, pp. 4579–4591, 2017.
- [12] G. Han, J. Jiang, L. Shu, Y. Xu, and F. Wang, “Localization algorithms of underwater wireless sensor networks: A survey,” *Sensors*, vol. 12, no. 2, pp. 2026–2061, 2012.
- [13] Z. Farid, R. Nordin, and M. Ismail, “Recent advances in wireless indoor localization techniques and system,” *Journal of Computer Networks and Communications*, vol. 2013, 2013.
- [14] A. Yassin, Y. Nasser, M. Awad, A. Al-Dubai, R. Liu, C. Yuen, R. Raulefs, and E. Aboutanios, “Recent advances in indoor localization: A survey on theoretical approaches and applications,” *IEEE Communications Surveys Tutorials*, vol. 19, no. 2, pp. 1327–1346, 2017.
- [15] T. J. Chowdhury, C. Elkin, V. Devabhaktuni, D. B. Rawat, and J. Oluoch, “Advances on localization techniques for wireless sensor networks: A survey,” *Computer Networks*, vol. 110, pp. 284–305, 2016.
- [16] S. Halder and A. Ghosal, “A survey on mobility-assisted localization techniques in wireless sensor networks,” *Journal of Network and Computer Applications*, vol. 60, pp. 82–94, 2016.
- [17] R. F. Brena, J. P. Garcá-Vázquez, C. E. Galván-Tejada, D. Muñoz-Rodríguez, C. Vargas-Rosales, and J. Fangmeyer, “Evolution of indoor positioning technologies: A survey,” *Journal of Sensors*, vol. 2017, 2017.
- [18] J. Sachs, *Handbook of Ultra-Wideband Short-Range Sensing: Theory, Sensors, Applications*. John Wiley & Sons, 2013.

- [19] A. Noroozi and M. A. Sebt, "Weighted least squares target location estimation in multi-transmitter multi-receiver passive radar using bistatic range measurements," *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 10, no. 6, pp. 1088–1097, 2016.
- [20] N. Wu, W. Yuan, H. Wang, and J. Kuang, "TOA-based passive localization of multiple targets with inaccurate receivers based on belief propagation on factor graph," *Digital Signal Processing*, vol. 49, pp. 14–23, 2016.
- [21] W. Yuan, N. Wu, B. Etxlinger, Y. Li, C. Yan, and L. Hanzo, "Expectation–maximization-based passive localization relying on asynchronous receivers: Centralized versus distributed implementations," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 67, no. 1, pp. 668–681, 2018.
- [22] K. H. Choi, W.-S. Ra, S.-Y. Park, and J. B. Park, "Robust least squares approach to passive target localization using ultrasonic receiver array," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 4, pp. 1993–2002, 2014.
- [23] J. Xiao, Z. Zhou, Y. Yi, and L. M. Ni, "A survey on wireless indoor localization from the device perspective," *ACM Computing Surveys (CSUR)*, vol. 49, no. 2, p. 25, 2016.
- [24] A. Noroozi and M. A. Sebt, "Target localization in multistatic passive radar using SVD approach for eliminating the nuisance parameters," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 53, no. 4, pp. 1660–1671, 2017.
- [25] J. Yan, X. Zhang, X. Luo, Y. Wang, C. Chen, and X. Guan, "Asynchronous localization with mobility prediction for underwater acoustic sensor networks," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 67, no. 3, pp. 2543–2556, 2018.
- [26] K. Finkenzer, *RFID handbook: fundamentals and applications in contactless smart cards, radio frequency identification and near-field communication*. John Wiley & sons, 2010.
- [27] J. Han, C. Qian, X. Wang, D. Ma, J. Zhao, W. Xi, Z. Jiang, and Z. Wang, "Twins: Device-free object tracking using passive tags," *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 24, no. 3, pp. 1605–1617, 2015.

- [28] N. A. Alrajeh, M. Bashir, and B. Shams, "Localization techniques in wireless sensor networks," *International Journal of Distributed Sensor Networks*, vol. 9, no. 6, p. 304628, 2013.
- [29] S. Xu and K. Dogançay, "Optimal sensor placement for 3-D angle-of-arrival target localization," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 53, no. 3, pp. 1196–1211, 2017.
- [30] M. R. Gholami, R. M. Vaghefi, and E. G. Ström, "RSS-based sensor localization in the presence of unknown channel parameters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, no. 15, pp. 3752–3759, 2013.
- [31] M. Rosic, M. Simic, P. Pejovic, and M. Bjelica, "Optimal source localization problem based on toa measurements," *Serbian Journal of Electrical Engineering*, vol. 14, no. 1, pp. 161–176, 2017.
- [32] M. Rosic, M. Simic, and P. Lukic, "TDOA approach for target localization based on improved genetic algorithm," in *Telecommunications Forum (TELFOR), 2016 24th. IEEE*, 2016, pp. 1–4.
- [33] M. Shalaby, M. Shokair, and N. W. Messiha, "Performance enhancement of TOA localized wireless sensor networks," *Wireless Personal Communications*, vol. 95, no. 4, pp. 4667–4679, 2017.
- [34] J. Shen, A. F. Molisch, and J. Salmi, "Accurate passive location estimation using TOA measurements," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 11, no. 6, pp. 2182–2192, 2012.
- [35] M. Rosic, M. Simic, and P. Pejovic, "Performance evaluation of nonlinear optimization methods for TOA localization techniques," in *7th International Scientific Conference on Defensive Technologies, OTEH 2016. IEEE*, 2016, pp. 1–4.
- [36] Y. Wang, S. Ma, and C. P. Chen, "TOA-based passive localization in quasi-synchronous networks," *IEEE Communications Letters*, vol. 18, no. 4, pp. 592–595, 2014.

- [37] A. Noroozi and M. A. Sebt, "Target localization from bistatic range measurements in multi-transmitter multi-receiver passive radar," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22, no. 12, pp. 2445–2449, 2015.
- [38] W. Li, P. Wei, and X. Xiao, "A robust TDOA-based location method and its performance analysis," *Science in China Series F: Information Sciences*, vol. 52, no. 5, pp. 876–882, 2009.
- [39] Y. Wang, "Linear least squares localization in sensor networks," *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, vol. 2015, no. 1, p. 51, 2015.
- [40] M. Einemo and H. C. So, "Weighted least squares algorithm for target localization in distributed MIMO radar," *Signal Processing*, vol. 115, pp. 144–150, 2015.
- [41] K. W. Cheung, H.-C. So, W.-K. Ma, and Y.-T. Chan, "A constrained least squares approach to mobile positioning: algorithms and optimality," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2006, no. 1, p. 020858, 2006.
- [42] L. Lin, H.-C. So, F. K. Chan, Y.-T. Chan, and K. Ho, "A new constrained weighted least squares algorithm for TDOA-based localization," *Signal Processing*, vol. 93, no. 11, pp. 2872–2878, 2013.
- [43] X. Qu and L. Xie, "An efficient convex constrained weighted least squares source localization algorithm based on TDOA measurements," *Signal Processing*, vol. 119, pp. 142–152, 2016.
- [44] D. Wang, J. Yin, T. Tang, X. Chen, and Z. Wu, "Quadratic constrained weighted least-squares method for TDOA source localization in the presence of clock synchronization bias: Analysis and solution," *Digital Signal Processing*, vol. 82, pp. 237–257, 2018.
- [45] Y.-T. Chan, H. Y. C. Hang, and P.-c. Ching, "Exact and approximate maximum likelihood localization algorithms," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 55, no. 1, pp. 10–16, 2006.
- [46] G. Destino and G. Abreu, "On the maximum likelihood approach for source and network localization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 10, pp. 4954–4970, 2011.

- [47] C. Jia, J. Yin, D. Wang, Y. Wang, and L. Zhang, "Semidefinite relaxation algorithm for multisource localization using TDOA measurements with range constraints," *Wireless Communications and Mobile Computing*, vol. 2018, 2018.
- [48] P. Biswas, T.-C. Liang, K.-C. Toh, Y. Ye, and T.-C. Wang, "Semidefinite programming approaches for sensor network localization with noisy distance measurements," *IEEE transactions on automation science and engineering*, vol. 3, no. 4, pp. 360–371, 2006.
- [49] G. Wang, Y. Li, and N. Ansari, "A semidefinite relaxation method for source localization using TDOA and FDOA measurements," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 62, no. 2, pp. 853–862, 2013.
- [50] F. K. Chan, H.-C. So, W.-K. Ma, and K. W. Lui, "A flexible semi-definite programming approach for source localization problems," *Digital Signal Processing*, vol. 23, no. 2, pp. 601–609, 2013.
- [51] M. Grant and S. Boyd, "Graph implementations for nonsmooth convex programs," in *Recent Advances in Learning and Control*, V. Blondel, S. Boyd, and H. Kimura, Eds. Springer-Verlag Limited, 2008, pp. 95–110.
- [52] M. Grant, S. Boyd, and Y. Ye, "CVX: Matlab software for disciplined convex programming," 2009.
- [53] B. K. Chalise, Y. D. Zhang, M. G. Amin, and B. Himed, "Target localization in a multi-static passive radar system through convex optimization," *Signal Processing*, vol. 102, pp. 207–215, 2014.
- [54] Z. W. Mekonnen and A. Wittneben, "Robust TOA based localization for wireless sensor networks with anchor position uncertainties," in *2014 IEEE 25th Annual International Symposium on Personal, Indoor, and Mobile Radio Communication (PIMRC)*. IEEE, 2014, pp. 2029–2033.
- [55] A. W. Mohamed, "An improved differential evolution algorithm with triangular mutation for global numerical optimization," *Computers & Industrial Engineering*, vol. 85, pp. 359–375, 2015.



- [56] L. Zhang, L. Liu, X.-S. Yang, and Y. Dai, “A novel hybrid firefly algorithm for global optimization,” *PLoS one*, vol. 11, no. 9, p. e0163230, 2016.
- [57] Y. Zhang, S. Wang, and G. Ji, “A comprehensive survey on particle swarm optimization algorithm and its applications,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, 2015.
- [58] S. Yu, S. Zhu, Y. Ma, and D. Mao, “A variable step size firefly algorithm for numerical optimization,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 263, pp. 214–220, 2015.
- [59] S. Hui and P. N. Suganthan, “Ensemble and arithmetic recombination-based speciation differential evolution for multimodal optimization,” *IEEE transactions on cybernetics*, vol. 46, no. 1, pp. 64–74, 2015.
- [60] M. Rosic, M. Simic, P. Pejovic, and M. Bjelica, “Optimal source localization problem based on TOA measurements,” *Proceedings of the IcETran*, 2016.
- [61] M. Mavrovouniotis, C. Li, and S. Yang, “A survey of swarm intelligence for dynamic optimization: Algorithms and applications,” *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 33, pp. 1–17, 2017.
- [62] H. Wang, W. Wang, H. Sun, and S. Rahnamayan, “Firefly algorithm with random attraction,” *International Journal of Bio-Inspired Computation*, vol. 8, no. 1, pp. 33–41, 2016.
- [63] W. Yi, Y. Zhou, L. Gao, X. Li, and J. Mou, “An improved adaptive differential evolution algorithm for continuous optimization,” *Expert Systems with Applications*, vol. 44, pp. 1–12, 2016.
- [64] M. Taherkhani and R. Safabakhsh, “A novel stability-based adaptive inertia weight for particle swarm optimization,” *Applied Soft Computing*, vol. 38, pp. 281–295, 2016.
- [65] X.-S. Yang, *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms*. Luniver Press, 2008.
- [66] I. Boussaid, J. Lepagnot, and P. Siarry, “A survey on optimization metaheuristics,” *Information Sciences*, vol. 237, pp. 82 – 117, 2013, prediction, Control and Diagnosis using Advanced Neural Computations.

- [67] I. Fister, I. Fister Jr, X.-S. Yang, and J. Brest, “A comprehensive review of firefly algorithms,” *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 13, pp. 34–46, 2013.
- [68] S. Sengupta, S. Basak, and R. A. Peters, “Particle swarm optimization: A survey of historical and recent developments with hybridization perspectives,” *Machine Learning and Knowledge Extraction*, vol. 1, no. 1, pp. 157–191, 2019.
- [69] K. R. Opara and J. Arabas, “Differential evolution: A survey of theoretical analyses,” *Swarm and evolutionary computation*, vol. 44, pp. 546–558, 2019.
- [70] M. Rosic, M. Simic, and P. Pejovic, “A hybrid genetic optimization method for accurate target localization,” *Scientific Technical Review*, vol. 68, no. 3, pp. 50–55, 2018.
- [71] R. Storn and K. Price, “Differential evolution—A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces,” *Journal of global optimization*, vol. 11, no. 4, pp. 341–359, 1997.
- [72] D. Wang, D. Tan, and L. Liu, “Particle swarm optimization algorithm: an overview,” *Soft Computing*, vol. 22, no. 2, pp. 387–408, 2018.
- [73] D. Karaboga and B. Basturk, “A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm,” *Journal of global optimization*, vol. 39, no. 3, pp. 459–471, 2007.
- [74] M. Dorigo, M. Birattari, and T. Stutzle, “Ant colony optimization,” *IEEE computational intelligence magazine*, vol. 1, no. 4, pp. 28–39, 2006.
- [75] X.-S. Yang, “Firefly algorithm, stochastic test functions and design optimisation,” *International Journal of Bio-Inspired Computation*, vol. 2, no. 2, pp. 78–84, 2010.
- [76] S. Goyal and M. S. Patterh, “Wireless sensor network localization based on cuckoo search algorithm,” *Wireless Personal Communications*, vol. 79, no. 1, pp. 223–234, 2014.
- [77] I. Fister, X.-S. Yang, J. Brest, and I. J. Fister, “4 - Memetic Self-Adaptive Firefly Algorithm,” in *Swarm Intelligence and Bio-Inspired Computation*, X.-S. Yang, Z. Cui, R. Xiao, A. H. Gandomi, and M. Karamanoglu, Eds. Oxford: Elsevier, 2013, pp. 73 – 102.

- [78] M. Crepinšek, S.-H. Liu, and M. Mernik, “Exploration and exploitation in evolutionary algorithms: A survey,” *ACM computing surveys (CSUR)*, vol. 45, no. 3, pp. 1–33, 2013.
- [79] A. W. Mohamed, “A novel differential evolution algorithm for solving constrained engineering optimization problems,” *Journal of Intelligent Manufacturing*, vol. 29, no. 3, pp. 659–692, 2018.
- [80] R. A. Sarker, S. M. Elsayed, and T. Ray, “Differential evolution with dynamic parameters selection for optimization problems,” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 18, no. 5, pp. 689–707, 2013.
- [81] H. Wang, X. Zhou, H. Sun, X. Yu, J. Zhao, H. Zhang, and L. Cui, “Firefly algorithm with adaptive control parameters,” *Soft computing*, vol. 21, no. 17, pp. 5091–5102, 2017.
- [82] G.-G. Wang, A. H. Gandomi, X.-S. Yang, and A. H. Alavi, “A novel improved accelerated particle swarm optimization algorithm for global numerical optimization,” *Engineering Computations*, 2014.
- [83] S. S. Jadon, R. Tiwari, H. Sharma, and J. C. Bansal, “Hybrid artificial bee colony algorithm with differential evolution,” *Applied Soft Computing*, vol. 58, pp. 11–24, 2017.
- [84] I. B. Aydilek, “A hybrid firefly and particle swarm optimization algorithm for computationally expensive numerical problems,” *Applied Soft Computing*, vol. 66, pp. 232–249, 2018.
- [85] H. Jia, C. Lang, D. Oliva, W. Song, and X. Peng, “Hybrid grasshopper optimization algorithm and differential evolution for multilevel satellite image segmentation,” *Remote Sensing*, vol. 11, no. 9, p. 1134, 2019.
- [86] M. B. Rosic, M. I. Simic, and P. V. Pejovic, “Passive target localization problem based on improved hybrid adaptive differential evolution and Nelder-Mead algorithm,” *Journal of Sensors*, vol. 2020, 2020.
- [87] W. Qian, J. Chai, Z. Xu, and Z. Zhang, “Differential evolution algorithm with multiple mutation strategies based on roulette wheel selection,” *Applied Intelligence*, pp. 1–18, 2018.

- [88] C. Zhang, J. Chen, and B. Xin, "Distributed memetic differential evolution with the synergy of Lamarckian and Baldwinian learning," *Applied Soft Computing*, vol. 13, no. 5, pp. 2947–2959, 2013.
- [89] J. Zhong and W. Cai, "Differential evolution with sensitivity analysis and the Powell's method for crowd model calibration," *Journal of Computational Science*, vol. 9, pp. 26–32, 2015.
- [90] M. Rosic, M. Simic, and P. Pejovic, "Hybrid genetic optimization method for accurate target localization," in *8th International Scientific Conference on Defensive Technologies, OTEH 2018*. IEEE, 2018, pp. 1–4.
- [91] M. Rosic, M. Simic, and P. Pejovic, "Hybrid genetic optimization algorithm for target localization using TDOA measurements," *Proceedings of the IcETran*, 2017.
- [92] S. Arora and S. Singh, "Node localization in wireless sensor networks using butterfly optimization algorithm," *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 42, no. 8, pp. 3325–3335, 2017.
- [93] V. R. Kulkarni, V. Desai, and R. V. Kulkarni, "A comparative investigation of deterministic and metaheuristic algorithms for node localization in wireless sensor networks," *Wireless Networks*, vol. 25, no. 5, pp. 2789–2803, Jul 2019.
- [94] O. Cakir, I. Kaya, A. Yazgan, O. Cakir, and E. Tugcu, "Emitter location finding using particle swarm optimization," *Radioengineering*, vol. 23, no. 1, pp. 252–258, 2014.
- [95] Y. Jiang, M. Liu, T. Chen, and L. Gao, "TDOA passive location based on cuckoo search algorithm," *Journal of Shanghai Jiaotong University (Science)*, vol. 23, no. 3, pp. 368–375, 2018.
- [96] R. Harikrishnan, V. J. S. Kumar, and P. S. Ponmalar, "A comparative analysis of intelligent algorithms for localization in wireless sensor networks," *Wireless Personal Communications*, vol. 87, no. 3, pp. 1057–1069, 2016.
- [97] P. Wu, S. Su, Z. Zuo, X. Guo, B. Sun, and X. Wen, "Time difference of arrival (TDoA) localization combining weighted least squares and firefly algorithm," *Sensors*, vol. 19, no. 11, p. 2554, 2019.

- [98] J. Shen and A. F. Molisch, "Passive location estimation using TOA measurements," in *Ultra-Wideband (ICUWB), 2011 IEEE International Conference on*. IEEE, 2011, pp. 253–257.
- [99] P. Venkataraman, *Applied optimization with MATLAB programming*. John Wiley & Sons, 2009.
- [100] Y. Zhang, D. Wei, W. Fu, and B. Yang, "Target positioning with GDOP assisted nodes selection algorithm in wireless sensor networks," *International Journal of Distributed Sensor Networks*, vol. 10, no. 6, p. 404812, 2014.
- [101] K. Yang, G. Wang, and Z.-Q. Luo, "Efficient convex relaxation methods for robust target localization by a sensor network using time differences of arrivals," *IEEE transactions on signal processing*, vol. 57, no. 7, pp. 2775–2784, 2009.
- [102] E. Xu, Z. Ding, and S. Dasgupta, "Source localization in wireless sensor networks from signal time-of-arrival measurements," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 6, pp. 2887–2897, 2011.
- [103] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [104] E. J. Candès and B. Recht, "Exact matrix completion via convex optimization," *Foundations of Computational mathematics*, vol. 9, no. 6, p. 717, 2009.
- [105] J. Dattorro, *Convex optimization & Euclidean distance geometry*. Lulu. com, 2010.
- [106] A. N. Bishop, B. Fidan, B. D. Anderson, P. N. Pathirana, and K. Dogancay, "Optimality analysis of sensor-target geometries in passive localization: Part 2-time-of-arrival based localization," in *2007 3rd International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information*. IEEE, 2007, pp. 13–18.
- [107] K. Ho and M. Sun, "Passive source localization using time differences of arrival and gain ratios of arrival," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 2, pp. 464–477, 2008.

- [108] S. K. Goudos, C. Kalialakis, and R. Mittra, “Evolutionary algorithms applied to antennas and propagation: A review of state of the art,” *International Journal of Antennas and Propagation*, vol. 2016, 2016.
- [109] S. S. Rao and S. S. Rao, *Engineering optimization: theory and practice*. John Wiley & Sons, 2009.
- [110] S. Sivakumar and R. Venkatesan, “Meta-heuristic approaches for minimizing error in localization of wireless sensor networks,” *Applied soft computing*, vol. 36, pp. 506–518, 2015.
- [111] M. R. Tanweer, S. Suresh, and N. Sundararajan, “Dynamic mentoring and self-regulation based particle swarm optimization algorithm for solving complex real-world optimization problems,” *Information Sciences*, vol. 326, pp. 1–24, 2016.
- [112] A. Yelghi and C. Köse, “A modified firefly algorithm for global minimum optimization,” *Applied Soft Computing*, vol. 62, pp. 29–44, 2018.
- [113] N. H. Awad, M. Z. Ali, R. Mallipeddi, and P. N. Suganthan, “An improved differential evolution algorithm using efficient adapted surrogate model for numerical optimization,” *Information Sciences*, vol. 451, pp. 326–347, 2018.
- [114] G. Wu, X. Shen, H. Li, H. Chen, A. Lin, and P. N. Suganthan, “Ensemble of differential evolution variants,” *Information Sciences*, vol. 423, pp. 172–186, 2018.
- [115] R. Mallipeddi, P. N. Suganthan, Q.-K. Pan, and M. F. Tasgetiren, “Differential evolution algorithm with ensemble of parameters and mutation strategies,” *Applied soft computing*, vol. 11, no. 2, pp. 1679–1696, 2011.
- [116] S. Das and P. N. Suganthan, “Differential evolution: A survey of the state-of-the-art,” *IEEE transactions on evolutionary computation*, vol. 15, no. 1, pp. 4–31, 2010.
- [117] E.-N. Dragoi and V. Dafinescu, “Parameter control and hybridization techniques in differential evolution: a survey,” *Artificial Intelligence Review*, vol. 45, no. 4, pp. 447–470, 2016.
- [118] A. W. Mohamed and P. N. Suganthan, “Real-parameter unconstrained optimization based on enhanced fitness-adaptive differential evolution algorithm with novel mutation,” *Soft Computing*, vol. 22, no. 10, pp. 3215–3235, 2018.

- [119] G. Wu, R. Mallipeddi, P. N. Suganthan, R. Wang, and H. Chen, “Differential evolution with multi-population based ensemble of mutation strategies,” *Information Sciences*, vol. 329, pp. 329–345, 2016.
- [120] R. Eberhart and J. Kennedy, “A new optimizer using particle swarm theory,” in *MHS’95. Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*, Oct 1995, pp. 39–43.
- [121] Q. Yang, W.-N. Chen, J. Da Deng, Y. Li, T. Gu, and J. Zhang, “A level-based learning swarm optimizer for large-scale optimization,” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 22, no. 4, pp. 578–594, 2017.
- [122] Y. Chen, L. Li, J. Xiao, Y. Yang, J. Liang, and T. Li, “Particle swarm optimizer with crossover operation,” *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 70, pp. 159–169, 2018.
- [123] J. Gou, Y.-X. Lei, W.-P. Guo, C. Wang, Y.-Q. Cai, and W. Luo, “A novel improved particle swarm optimization algorithm based on individual difference evolution,” *Applied Soft Computing*, vol. 57, pp. 468–481, 2017.
- [124] K. R. Harrison, A. P. Engelbrecht, and B. M. Ombuki-Berman, “Self-adaptive particle swarm optimization: A review and analysis of convergence,” *Swarm Intelligence*, vol. 12, no. 3, pp. 187–226, 2018.
- [125] K. Chen, F. Zhou, L. Yin, S. Wang, Y. Wang, and F. Wan, “A hybrid particle swarm optimizer with sine cosine acceleration coefficients,” *Information Sciences*, vol. 422, pp. 218–241, 2018.
- [126] G. Ardizzon, G. Cavazzini, and G. Pavesi, “Adaptive acceleration coefficients for a new search diversification strategy in particle swarm optimization algorithms,” *Information Sciences*, vol. 299, pp. 337–378, 2015.
- [127] Y. Shi and R. Eberhart, “A modified particle swarm optimizer,” in *1998 IEEE international conference on evolutionary computation proceedings. IEEE world congress on computational intelligence (Cat. No. 98TH8360)*. IEEE, 1998, pp. 69–73.
- [128] X.-S. Yang, “Firefly algorithms for multimodal optimization,” in *International symposium on stochastic algorithms*. Springer, 2009, pp. 169–178.

- [129] H. Wang, Z. Cui, H. Sun, S. Rahnamayan, and X.-S. Yang, “Randomly attracted firefly algorithm with neighborhood search and dynamic parameter adjustment mechanism,” *Soft Computing*, vol. 21, no. 18, pp. 5325–5339, 2017.
- [130] J. S. Arora, *Introduction to optimum design*. Elsevier, 2004.
- [131] Q. H. Zhao, D. Urosevic, N. Mladenovic, and P. Hansen, “A restarted and modified simplex search for unconstrained optimization,” *Computers & Operations Research*, vol. 36, no. 12, pp. 3263–3271, 2009.
- [132] P. Shemi, M. Jibukumar, and M. Ali, “Nelder-Mead-based power optimization for secrecy enhancement in amplify-and-forward cooperative relay networks,” *International Journal of Communication Systems*, vol. 32, no. 11, p. e3965, 2019.
- [133] L. Cui, G. Li, Q. Lin, J. Chen, and N. Lu, “Adaptive differential evolution algorithm with novel mutation strategies in multiple sub-populations,” *Computers & Operations Research*, vol. 67, pp. 155 – 173, 2016.
- [134] V. Ho-Huu, T. Nguyen-Thoi, T. Truong-Khac, L. Le-Anh, and T. Vo-Duy, “An improved differential evolution based on roulette wheel selection for shape and size optimization of truss structures with frequency constraints,” *Neural computing and applications*, vol. 29, no. 1, pp. 167–185, 2018.
- [135] L. Cui, G. Li, Z. Zhu, Q. Lin, K.-C. Wong, J. Chen, N. Lu, and J. Lu, “Adaptive multiple-elites-guided composite differential evolution algorithm with a shift mechanism,” *Information Sciences*, vol. 422, pp. 122–143, 2018.
- [136] S. Das, S. S. Mullick, and P. N. Suganthan, “Recent advances in differential evolution-An updated survey,” *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 27, pp. 1–30, 2016.
- [137] A. W. Mohamed and A. K. Mohamed, “Adaptive guided differential evolution algorithm with novel mutation for numerical optimization,” *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, vol. 10, no. 2, pp. 253–277, 2019.
- [138] S.-Z. Zhao, P. N. Suganthan, and S. Das, “Self-adaptive differential evolution with multi-trajectory search for large-scale optimization,” *Soft Computing*, vol. 15, no. 11, pp. 2175–2185, 2011.



- [139] A. W. Mohamed, A. A. Hadi, and K. M. Jambi, “Novel mutation strategy for enhancing SHADE and LSHADE algorithms for global numerical optimization,” *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 50, p. 100455, 2019.
- [140] J. Zhang and A. C. Sanderson, “JADE: adaptive differential evolution with optional external archive,” *IEEE Transactions on evolutionary computation*, vol. 13, no. 5, pp. 945–958, 2009.
- [141] R. Tanabe and A. Fukunaga, “Success-history based parameter adaptation for differential evolution,” in *Evolutionary Computation (CEC), 2013 IEEE Congress on. IEEE*, 2013, pp. 71–78.
- [142] A. K. Qin, V. L. Huang, and P. N. Suganthan, “Differential evolution algorithm with strategy adaptation for global numerical optimization,” *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, vol. 13, no. 2, pp. 398–417, 2009.
- [143] Y. Wang, Z. Cai, and Q. Zhang, “Differential evolution with composite trial vector generation strategies and control parameters,” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 15, no. 1, pp. 55–66, 2011.
- [144] S. Wang, Y. Li, H. Yang, and H. Liu, “Self-adaptive differential evolution algorithm with improved mutation strategy,” *Soft Computing*, vol. 22, no. 10, pp. 3433–3447, 2018.
- [145] V. Ho-Huu, T. Nguyen-Thoi, T. Vo-Duy, and T. Nguyen-Trang, “An adaptive elitist differential evolution for optimization of truss structures with discrete design variables,” *Computers & Structures*, vol. 165, pp. 59–75, 2016.
- [146] K. R. Harrison, A. P. Engelbrecht, and B. M. Ombuki-Berman, “Inertia weight control strategies for particle swarm optimization,” *Swarm Intelligence*, vol. 10, no. 4, pp. 267–305, 2016.
- [147] D. Tian and Z. Shi, “MPSO: Modified particle swarm optimization and its applications,” *Swarm and evolutionary computation*, vol. 41, pp. 49–68, 2018.
- [148] D. Tian, X. Zhao, and Z. Shi, “Chaotic particle swarm optimization with sigmoid-based acceleration coefficients for numerical function optimization,” *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 51, p. 100573, 2019.

- [149] A. Ratnaweera, S. K. Halgamuge, and H. C. Watson, “Self-organizing hierarchical particle swarm optimizer with time-varying acceleration coefficients,” *IEEE Transactions on evolutionary computation*, vol. 8, no. 3, pp. 240–255, 2004.
- [150] K. Chen, F. Zhou, Y. Wang, and L. Yin, “An ameliorated particle swarm optimizer for solving numerical optimization problems,” *Applied Soft Computing*, vol. 73, pp. 482–496, 2018.
- [151] H. Wang, W. Wang, X. Zhou, H. Sun, J. Zhao, X. Yu, and Z. Cui, “Firefly algorithm with neighborhood attraction,” *Information Sciences*, vol. 382, pp. 374–387, 2017.
- [152] G. Wu, D. Qiu, Y. Yu, W. Pedrycz, M. Ma, and H. Li, “Superior solution guided particle swarm optimization combined with local search techniques,” *Expert Systems with Applications*, vol. 41, no. 16, pp. 7536–7548, 2014.
- [153] Q. X. Lieu, D. T. T. Do, and J. Lee, “An adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm for shape and size optimization of truss structures with frequency constraints,” *Computers & Structures*, vol. 195, pp. 99–112, 2018.
- [154] S. Wang, Y. Li, and H. Yang, “Self-adaptive mutation differential evolution algorithm based on particle swarm optimization,” *Applied Soft Computing*, vol. 81, p. 105496, 2019.
- [155] J. Derrac, S. Garcá, D. Molina, and F. Herrera, “A practical tutorial on the use of nonparametric statistical tests as a methodology for comparing evolutionary and swarm intelligence algorithms,” *Swarm and Evolutionary Computation*, vol. 1, no. 1, pp. 3–18, 2011.
- [156] A. W. Mohamed and A. S. Almazayad, “Differential evolution with novel mutation and adaptive crossover strategies for solving large scale global optimization problems,” *Applied Computational Intelligence and Soft Computing*, vol. 2017, 2017.
- [157] B. Trawinski, M. Smétek, Z. Telec, and T. Lasota, “Nonparametric statistical analysis for multiple comparison of machine learning regression algorithms,” *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 22, no. 4, pp. 867–881, 2012.

- [158] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to algorithms*. MIT press, 2009.
- [159] Y. Cai and J. Wang, “Differential evolution with neighborhood and direction information for numerical optimization,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 43, no. 6, pp. 2202–2215, 2013.

## Биографија

Маја Росић је рођена 09.06.1990. године у Београду. Основну школу и „Трећу београдску гимназију“ природно-математички смер завршила је са одличним успехом. Основне академске студије на Електротехничком факултету у Београду уписала је 2009. године. Дипломирала је на одсеку за Телекомуникације и информационе технологије, смер Радио комуникације 2013. године, са просечном оценом 8,31. Дипломски рад на тему „Принципи кооперативног позиционирања у радио системима“ одбранила је са оценом 10. Ментор дипломског рада била је Др Мирјана Симић-Пејовић, ванредни професор. Мастер академске студије уписала је 2013. године на Електротехничком факултету, модул Системско инжењерство и радио комуникације, и завршила је 2014. године са просечном оценом 9,80. Мастер рад одбранила је са оценом 10 на тему „Одређивање локације предајника применом оптимизационих метода“. Ментор мастер рада била је Др Мирјана Симић – Пејовић, ванредни професор.

Докторске академске студије на Електротехничком факултету у Београду, модул Телекомуникације, уписала је 2014. године, где је положила све испите са просечном оценом 10. Област истраживања током студија обухватала је позиционирање у бежичним сензорским мрежама, лоцирање применом пасивних радарских система, хеуристичке, еволуционе, оптимизационе и естимационе методе.

Освојила је награду за најбољег младог истраживача на међународној научној конференцији IсETRAН 2016 у организацији друштва ETRAН, а под покровитељством Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије и уз подршку међународног удружења IEEE, за рад на тему „Optimal source localization problem based on TOA measurements“.

Маја Росић је запослена као асистент на Машинском факултету у Београду од октобра 2015. године на Катедри за ваздухопловство, при модулу Машинство и информационе технологије. Од избора у звање асистента на Машинском факултету, ангажована је на извођењу рачунских и лабораторијских вежби на Основним и Мастер студијама из предмета Инжењерске комуникације, Основе рачунарске технике, Основи рачунарских система, Пројектовање база података, Алгоритми и структуре података, Методи оптимизације и Статистичка обрада података у машинству.

Маја Росић је аутор рада објављеног у научном часопису међународног значаја са SCI листе категорије M22. Аутор је и два рада објављена у часописима од националног значаја, као и шест радова на конференцијама од међународног значаја.

## Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Маја Росић

Број индекса 5040/2014

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Пасивни модел позиционирања у бежичним сензорским мрежама заснован на адаптивним хибридном хеуристичким алгоритмима

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

### Потпис аутора

У Београду, 16.10.2020

Маја Росић

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Маја Росић

Број индекса 5040/2014

Студијски програм Телекомуникације

Наслов рада Пасивни модел позиционирања у бежичним сензорским мрежама заснован на адаптивним хибридном хеуристичким алгоритмима

Ментор др Мирјана Симић-Пејовић, вандредни професор

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис аутора**

У Београду, 16.10.2020

Maја Rosić

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Пасивни модел позиционирања у бежичним сензорским мрежама заснован на адаптивним хибридном хеуристичким алгоритмима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.  
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

**Потпис аутора**

У Београду, 16.10.2020

Марија Росић

1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.