

# Upravljanje u povratnoj sprezi sa kašnjenjem određene klase mehaničkih sistema necelog i celog reda: neka pitanja stabilnosti i stabilizacije na konačnom vremenskom intervalu

Mihailo P. Lazarević  
Darko Radojević  
Petar D. Mandić  
Stjepko Pišl  
Univerzitet u Beogradu  
Mašinski fakultet  
Beograd, Srbija  
[drmasf@yahoo.com](mailto:drmasf@yahoo.com)  
[mlazarevic@mas.bg.ac.rs](mailto:mlazarevic@mas.bg.ac.rs)  
[pmandic@mas.bg.ac.rs](mailto:pmandic@mas.bg.ac.rs)  
[mlazarevic@mas.bg.ac.rs](mailto:mlazarevic@mas.bg.ac.rs)  
[stjepko.pisl@gmail.com](mailto:stjepko.pisl@gmail.com)

Tomislav B. Šekara  
Univerzitet u Beogradu  
Elektrotehnički fakultet  
Beograd, Srbija  
tomi@etf.rs

*Sažetak*—U ovom radu prvo se razmatra jedan mehanički sistem gde je u cilju smanjenja neželjenih vibracija primenjen prigušni viskoelastični element tipa Scot-Blair-a frakcionog reda  $0 < \alpha \leq 1$ . Primenjeno je upravljanje u povratnoj sprezi sa kašnjenjem koji uključuje prvi i drugi izvod vektora stanja sa kašnjenjem. Posebno, razmatra se slučaj zatvorenog neutralnog sistema sa kašnjenjem frakcionog reda  $\alpha=1/2$ , gde su dobijeni dovoljni uslovi stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu. Takođe, razmatran je i slučaj potiskivanja samopobudnih (chattering) oscilacija u procesu rezanja metala. Predloženo je upravljanje u povratnoj sprezi sa kašnjenjem koji uključuje i drugi izvod vektora stanja sa kašnjenjem. Formiran je odgovarajući kriterijum stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu. Na kraju, efikasnost predloženog pristupa je ilustrovana na dva pogodno izabrana numerička primera.

*Ključne reči*- stabilnost na konačnom vremenskom intervalu; upravljanje; neutralni sistem sa kašnjenjem; frakcioni račun

## I. UVOD

Poznato je da prisustvo vremenskog kašnjenja, bez obzira da li je ono prisutno u upravljanju i/ili u stanju dinamičkog sistema može da proizvede neželjene prelazne karakteristike pa čak i do pojave nestabilnosti, [1],[2]. Prethodno pomenuti slučaj veoma je čest kada su u pitanju dinamički sistemi sa povratnom spregom, odnosno uočeno je da se to javlja i kod određene klase (elektro)-mehaničkih sistema. Naime, u praksi je često od posebnog interesa, ne samo ispitivati stabilnost sistema po Ljapunovu, već je od daleko većeg značaja utvrditi da li trajektorije sistema pri njegovom kretanju u prostoru stanja dosežu ili ostaju unutar ranije propisanih granica. Sistem može da bude stabilan u smislu Ljapunova a potpuno neupotrebljiv sa stanovišta njegovih pokazatelja kretanja u

prostoru stanja. Tu se u prvom redu misli na neprihvatljivo dugo vreme smirenja ili nedozvoljeni preskok. U tom smislu je od interesa da se dinamičko ponašanje sistema odnosno stabilnost posmatra na konačnom vremenskom intervalu (SKVI). Granice do kojih dostiže odziv sistema bilo u slobodnom bilo u prinudnom radnom režimu predstavlja veoma značajan problem sa inženjersko-tehničke tačke gledišta, [2],[3].

Nedavno, u literaturi proučavane su klase (elektro)-mehaničkih sistema čiji se dinamički modeli mogu opisati primenom savremene teorije frakcionog računa, (računa necelog reda), [4], [5]. Takođe, u radovima [6],[7] ispitivana je i SKVI frakcionih sistema necelog reda sa kašnjenjem, gde su dobijeni dovoljni uslovi stabilnosti SKVI. U radovima [8],[9] dobijeni su rezultati koji se odnose na SKVI složnije klase sistema tzv. neutralnih frakcionih sistema necelog reda sa kašnjenjem koji uključuju i kašnjenje koje se pojavljuje u prvom ili višim izvodima vektora stanja.

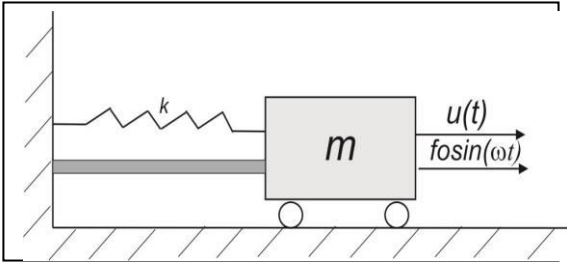
Isto tako, u naprednim algoritmima upravljanja u povratnoj sprezi sa kašnjenjem sve su više zastupljeni slučajevi koji uključuju drugi i viši izvodi vektora stanja sa kašnjenjem gde se koriste prednosti takvog upravljanja u smanjenju neželjenih vibracija [10]. Sa druge strane, zakasneli signal u povratnoj sprezi sa kašnjenjem može se tumačiti kao i kvalitetna predikcija trenutne pozicije, brzine i ubrzanja na osnovu njihovih zakasnelih vrednosti, [11],[12].

Predmet ovog rada je analiza stabilnosti SKVI za dva mehanička sistema necelog i celog reda gde je primenjeno upravljanje u povratnoj sprezi sa kašnjenjem diferencijalnog tipa koji uključuje prvi i drugi izvod celog reda (DD2 tip) i proporcionalno-diferencijalni sa drugim izvodom tip (PD2 tip). Osim uspešnog potiskivanja neželjenih vibracija u sistemu cilj je odrediti nove kriterijumie stabilnosti SKVI.

## II. STABILNOST JEDNOG MEHANIČKOG PRIGUŠNOG SISTEMA SA KAŠNJENJEM

### A. Model mehaničkog prigušnog sistema necelog reda

Dosta se često u inženjerstvu i tehnici sreće slučaj prigušnog mehaničkog sistema sa oprugom i prigušnog elementa sa jednim stepenom slobode koji je potvrđen harmonijskom pobudnom silom,[13],[14]. Ovde se razmatra slučaj gde je prigušni element sastavljen od viskoelastičnog materijala koji ima za cilj da smanji smanjenje neželjenih vibracija u datom sistemu. Posebno ovde se razmatra viskoelastični element koji se može opisati sa tzv. *Skot-Blerovim (Scot-Blair) modelom* [15], (sl.1) koji pretpostavlja da je prigušenje proporcionalno necelom (frakcionom) redu izvoda promenljive pomeranja.



Slika 1. Frakcioni mehanički prigušni sistem sa prigušnim viskoelastičnim materijalom

Prema tome, generalizovani model prigušnog mehaničkog sistema pod dejstvom harmonijske pobude i upravljanja je dat sa:

$$m\ddot{x}(t) + c {}^c D_t^\alpha x(t) + kx(t) = u(t) + f_0 \sin(\omega t) \quad (1)$$

gde je sa  ${}^c D_t^\alpha x(t)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  označen frakcioni Kaputov (*Caputo*) izvod koji je definisan sa [4]:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \left[ \frac{dx(s)}{ds} \right] ds, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

Kao što je predočeno u uvodnom delu prednosti uvođenja člana u povratnoj sprezi koji je dat u vidu drugog izvoda veličine stanja koja uključuje kašnjenje tj. ovde je primenjeno u cilju prigušenja neželjenih vibracija upravljanje u povratnoj sprezi koja uključuje članove vektora stanja sa kašnjenjem sa prvim i drugim izvodom  $\dot{x}(t-\tau)$ ,  $\ddot{x}(t-\tau)$  respektivno, tj. upravljanje je DD2 tip celog reda:

$$u(t) = -k_v \dot{x}(t-\tau) - k_a \ddot{x}(t-\tau), \quad (3)$$

Odgovarajući zatvoreni sistem je dat u vidu neutralnog sistema necelog reda sa kašnjenjem oblika:

$$m\ddot{x}(t) + k_a \ddot{x}(t-\tau) + k_v \dot{x}(t-\tau) + c {}^c D_t^\alpha x(t) + kx(t) = f_0 \sin(\omega t)$$

Posebno, u cilju jednostavnosti i ilustracije samog pristupa bez gubitka opstosti, ovde se razmatra slučaj sistema kada je neceli red  $\alpha = 1/2$ , gde se uvode veličine pseudo stanja na sledeći način:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= {}^c D_t^{1/2} x(t), \\ x_2(t) &= \dot{x}(t) = {}^c D_t^{1/2} ({}^c D_t^{1/2} x(t)) = {}^c D_t^{1/2} x_1(t), \\ x_3(t) &= {}^c D_t^{3/2} x(t) = {}^c D_t^{1/2} (x_2(t)) \\ \ddot{x}(t) &= {}^c D_t^{4/2} x(t) = D_t^{1/2} (x_3(t)) \end{aligned} \quad (5)$$

gde se zamenom u (3) dobija, [3]:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^{1/2} x(t) &= x_1(t) \\ {}^c D_t^{1/2} x_1(t) &= x_2(t) \\ {}^c D_t^{1/2} x_2(t) &= x_3(t) \\ {}^c D_t^{1/2} x_3(t) &= \ddot{x}(t) = -\frac{c}{m} x_1(t) - \frac{k}{m} x(t) \\ &\quad - \frac{k_v}{m} x_2(t-\tau) - \frac{k_a}{m} {}^c D_t^{1/2} x_3(t-\tau) + \frac{f_0}{m} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (6)$$

Ako se uvedu sledeći vektori koji su oblika:

$$\tilde{x}(t) = [x(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T, \quad \tilde{f}(t) = [0, 0, 0, f_0 \sin(\omega t)]^T$$

zatvoreni sistem (3) se može prikazati sada kao jedan neutralni frakcioni sistem necelog reda sa kašnjenjem oblika:

$${}^c D_t^\alpha \tilde{x}(t) = A_1 \tilde{x}(t) + A_2 \tilde{x}(t-\tau) + A_3 {}^c D_t^\alpha \tilde{x}(t-\tau) + \tilde{f}(t) \quad (7)$$

gde su matrice sistema  $A_1, A_2, A_3$  definisane sa:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_v}{m} & 0 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_a}{m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

sa odgovarajućom početnom funkcijom oblika:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi}_x(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (9)$$

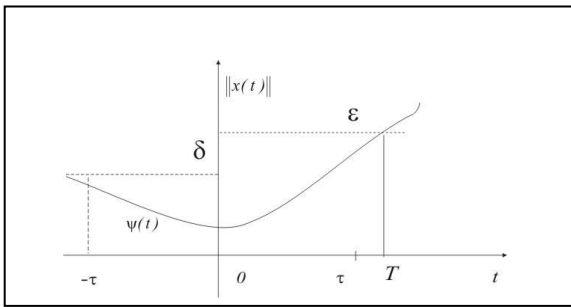
**B. Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu mehaničkog prigušnog sistema necelog reda**

Ovde je od interesa ispitati stabilnost na konačnom vremenskom intervalu (SKVI) zatvorenog sistema (7) u prisistvu poremećaja oblika  $f_0 \sin(\omega t)$ . Pre toga, navodi se sledeća definicija SKVI.

*Definicija 1.* [2],[3] Neutralni sistem sa kašnjenjem necelog reda dat sa (6), koji zadovoljava početnu funkciju (8) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na  $\{\delta, \varepsilon, t_0, J, \|(\cdot)\|\}$ ,  $\delta < \varepsilon$ , ako i samo ako je

$$\|\psi_x\|_C < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J. \quad (10)$$

Grafička ilustracija prethodne definicije, data je na sl. 2



Slika 2. Grafička ilustracija prethodne definicije

Formuliše se sledeća teorema kojom je određen novi kriterijum stabilnosti SKVI.

*Teorema 1.* Neutralni sistem kašnjenja (7) koji zadovoljava početnu funkciju (9) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na  $\{\delta, \varepsilon, t_0, J, \|(\cdot)\|\}$ ,  $\delta < \varepsilon$ , ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\frac{(1+a_3)}{(1-a_3)} E_\alpha \left( \frac{a_\Sigma}{(1-a_3)} t^\alpha \right) + \frac{f_{op}}{(1-a_3) \cdot \Gamma(\alpha+1)} |t|^\alpha \leq \varepsilon / \delta \quad (11)$$

gde su  $f_{op} = |f_0| / \delta$ ,  $a_\Sigma = a_1 + a_2$ ,  $a_3 < 1$  a  $E_\alpha$  predstavlja Mittag-Lefrevovu funkciju, a  $\Gamma(\alpha)$  gama funkciju.

*Dokaz:* Rešenje neutralnog frakcionog sistema necelog reda (7) je dat u vidu ekvivalentne Volterove integralne jednačine ( $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$ ):

$$x(t) = \psi_x(0) - A_3 \psi_x(-\tau) + A_3 x(t-\tau) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [A_1 x(s) + A_2 x(s-\tau) + f(s)] ds \quad (12)$$

Primenom norme  $\|(\cdot)\|$  na (12) može se dobiti procena rešenja  $x(t)$

$$\|x(t)\| \leq \|\psi_x(0)\| + \|A_3\| \|\psi_x(-\tau)\| + \|A_3\| \|x(t-\tau)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [\|A_1 x(s) + A_2 x(s-\tau) + f(s)\|] ds \quad (13)$$

Dalje, uvodi se sledeća promenljiva  $y(t) = \sup_{\mu \in [-\tau, t]} \|x(\mu)\|$ ,  $\forall t \in [0, T]$  gde se za  $\forall t^* \in [0, t]$  važe sledeće nejednakosti  $\|x(t^* - \tau)\| \leq y(t^*)$ ,

$$\|x(t^*)\| \leq \sup_{t^* \in [-\tau, t]} \{\|x(t^*)\|\} \leq y(t^*) \quad (14)$$

Isto tako, u važnosti je i (15)

$$\|A_1 x(t) + A_2 x(t-\tau) + f(t)\| \leq a_1 \|x(t)\| + a_2 \|x(t-\tau)\| + |f_0|$$

Na osnovu (14), (1) i zamenom u (13) sledi,  $a_i = \|A_i\|$ ,  $i = 1, 2, 3$ : (16)

$$\|x(t)\| \leq [1 + a_3] \|\psi_x\|_C + a_3 y(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (a_1 y(s) + a_2 y(s)) ds + \frac{|f_0|}{\Gamma(\alpha+1)} |t|^\alpha$$

odnosno uzimajući da je  $a_\Sigma = a_1 + a_2$ ,  $a_3 < 1$  sledi:

$$y(t) \leq [1 + a_3] \|\psi_x\|_C + a_3 y(t) + \frac{a_\Sigma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds + \frac{|f_0|}{\Gamma(\alpha+1)} |t|^\alpha \quad (17)$$

$$y(t) \leq \frac{(1+a_3)}{(1-a_3)} \|\psi_x\|_C + \frac{a_\Sigma}{(1-a_3) \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds + \frac{|f_0|}{(1-a_3) \cdot \Gamma(\alpha+1)} |t|^\alpha \quad (18)$$

Uvodi se sledeća neopadajuća funkcija  $\beta(t)$  na  $J_0 = [0, T]$

$$\beta(t) = \frac{(1+a_3)}{(1-a_3)} \|\psi_x\|_C \text{ tako da se (17) dobija kao:}$$

$$y(t) \leq \beta(t) + \frac{a_\Sigma}{(1-a_3) \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds + \frac{|f_0|}{(1-a_3) \cdot \Gamma(\alpha+1)} |t|^\alpha \quad (19)$$

Primenjujući generalizovanu Gronvalovu nejednakost [16] na (19) ima se: (20)

$$x(t) \leq y(t) \leq \beta(t) E_\alpha \left( \frac{a_\Sigma}{(1-a_3)} t^\alpha \right) + \frac{|f_0|}{(1-a_3) \cdot \Gamma(\alpha+1)} |t|^\alpha$$

Imajući u vidu definiciju i kriterijum stabilnosti (10) konačno se dobija da je  $\|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \in J$ . Specijalno, za  $\alpha = 1/2$  dobija se sledeći kriterijum stabilnosti za sistem (6),

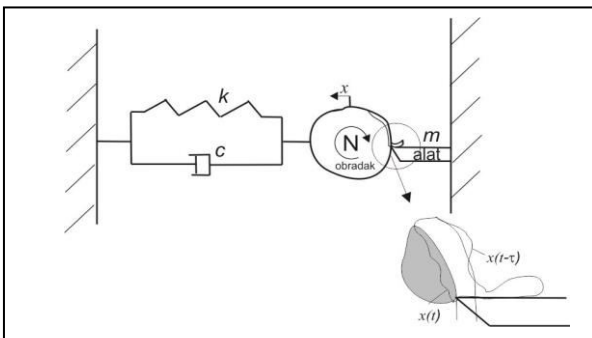
$$\frac{(1+a_3)}{(1-a_3)} E_{1/2} \left( \frac{a_\Sigma}{(1-a_3)} t^{1/2} \right) + \frac{f_{op}}{(1-a_3) \cdot \Gamma(3/2)} |t|^{1/2} \leq \varepsilon / \delta \quad (21)$$

### III. STABILNOST SISTEMA UPRAVLJANJA U PROCESU POTISKIVANJA SAMOPOBUDNIH (CHATTERING) OSCILACIJA U PROCESU REZANJA METALA.

#### C. Mehanički model samopobudnih oscilacija u procesu rezanja metala

U sadašnjoj proizvodnoj industriji, *samopobudne* oscilacije igraju važnu ulogu, jer su jedno od glavnih ograničenja u sposobnosti rezanja mašina alatki. Samopobudne oscilacije nastaju interakcijom alat/obradak i izazivaju lošu završnu obradu površine, prekomerno habanje alata, dimenzionalnu tačnost radnog predmeta, vek trajanja alata, pa čak i vek mašine. Značajan broj istraživanja je bio urađen na raznim mehanizmima i karakteristikama chattering fenomena, [17].

Fundamentalnu teoriju samopobudnih oscilacija razvili su autori [18],[19], koji su identifikovali regenerativni efekat kao glavni mehanizam samopobude, sl.3. Kasnije je autor Merit [20] predstavio sistematsku teoriju za analizu stabilnosti koristeći teoriju upravljanja povratnom spregom.



Slika 3. Samopobudne oscilacije u procesu ortogonalnog rezanja

Rešavanje problema potiskivanja samopobude preko pogona nije trivijalna. Pre svega, trebalo bi ubrzanje blizu vrha alata biti izmereni ili procenjeni. Pri tome, signal ubrzanja je potrebno filtrirati u cilju izdvajanja korisnog signala i

eliminisanje šuma primenom analognog Buttervorto-vog filtra 2 reda se mogu rešiti prethodni zadaci.

Dakle, u dizajnu robusnog i stabilnog kontrolera za mašinu koja se koristi u procesu rezanja metala i ovde se predlaže i uvodi zakasneli signal ubrzanja u povratnoj sprezi. Upravljanje u povratnoj sprezi zasnovanoj na zakasnelom signalu ubrzanja (*Delayed Acceleration Feedback*) u cilju potiskivanja samopobudnih oscilacija je nedavno uvedeno i predloženo od strane autora [21].

Sa druge strane, na upravljanje povratnom spregom može imati negativne efekte zbog inherentnog kašnjenja kontrolera, energetske elektronike i aktuatora. Tako, kašnjenje koje unosi sam kontroler se može uzeti da je jednako periodu semplovanja (Ts) [22],[23]. Isto tako, sistem sastavljen od aktuatora i njegove energetske elektronike dodaje još jedno kašnjenje  $\tau_{akt}$  vezano za njegov propusni opseg, koji se može unapred identifikovati [24].

U nekim slučajevima, zbir ovih kašnjenja je prevelik da bi se zanemario i strategije upravljanja ne funkcionišu ispravno ako se ova kašnjenja ne kompezuju. Međutim, ukupno kašnjenje je obično manje od  $\tau$  kašnjenja usled perioda okretanja obradka. Dakle, ako je poznata tačna vrednost kašnjenja, ona se može kompenzovati korišćenjem sledećeg izraza u algoritmu upravljanja u povratnoj sprezi sa kašnjenjem  $\tau_{fd}$ :

$$\tau_{fd} \approx \tau - T_s - \tau_{akt} \quad (22)$$

Odgovarajuća diferencijalna jednačina koja opisuje ponašanje razmatranog sistema je:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \quad (23)$$

gde je upravljanje sada oblika, PD2 tipa:

$$u(t) = -k_p x(t - \tau_{fd}) - k_a \ddot{x}(t - \tau_{fd}) \quad (24)$$

Zatvoreni sistem upravljanja je opisan sa neutralnom jednačinom sa kašnjenjem celog reda, tj.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -k_p x(t - \tau_{fd}) - k_a \ddot{x}(t - \tau_{fd}) \quad (25)$$

odnosno: (26)

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\frac{k}{m} x(t) - \frac{k_p}{m} x(t - \tau_{fd}) - \frac{c}{m} \dot{x}(t) - \frac{k_a}{m} \ddot{x}(t - \tau_{fd}) = \\ &= a'_1 x(t) + a'_2 x(t - \tau_{fd}) + a'_3 \dot{x}(t) + a'_4 \ddot{x}(t - \tau_{fd}) \end{aligned}$$

sa pridruženim početnim funkcijama: (27)

$$x(t) = \psi_x(t), t \in [-\tau_{fd}, 0], \dot{x}(t) = \varphi_x(t), t \in [-\tau_{fd}, 0],$$

*D. Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu mehaničkog prigušnog sistema celog reda -proces rezanja*

Takođe i ovde se ispituje stabilnost na konačnom vremenskom intervalu (SKVI) zatvorenog sistema (26). Pre toga, navodi se sledeća definicija SKVI.

**Definicija 2.** [3], Neutralni sistem sa kašnjenjem celog reda dat sa (26), koja zadovoljava početne funkcije (27) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na  $\{\delta, \varepsilon, t_0, J, \|\cdot\|\}$ ,  $\delta < \varepsilon$ , ako i samo ako je:

$$\rho < \delta, \quad \forall t \in J \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J, \quad (28)$$

gde je  $\rho = \max\{\|\psi\|_C, \|\phi\|_C\}$  i  $\delta, \varepsilon$  su pozitivne konstante. Sledećom teoremom dobijeni su dovoljni uslovi stabilnosti SKVI.

**Teorema 2.** Neutralni sistem sa kašnjenjem celog reda dat sa (26), koja zadovoljava početne funkcije (26) je stabilan SKVI u odnosu na  $\{\delta, \varepsilon, t_0, J, \|\cdot\|\}$ ,  $\delta < \varepsilon$ , ako i samo ako je ispunjen sledeći uslov: (29)

$$\frac{1}{1-a_4} \left[ (1+a_4)(1+|t|) + a_3|t| \right] \exp\left(a_\Sigma(t+t^2)/(1-a_4)\right) < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

gde su  $a_i = |a'_i|, i=1,2,3,4$   $a_\Sigma = (a_1 + a_2 + a_3)$  i  $a_4 < 1$ .

**Dokaz:** Ovde se dokaz izostavlja a sam postupak dokaza koji je sličan dokazu koji se može naći u [3].

**Primerba 1.** U [23] je pokazano da je potreban uslov stabilnosti je da je ispunjeno  $\left|\frac{k_a}{m}\right| < 1$  a što se u našem slučaju svodi  $a_4 < 1$  tj.  $1-a_4 > 0$  koji figuriše u kriterijumu stabilnosti.

#### IV. NUMERIČKI PRIMERI

Razmatra se sledeći frakcioni prigušeni prinudni oscillator (1)

gde su: masa sistema  $m = 2 \text{ kg}$ , prigušenje sistema  $c = 0.8 \text{ kg/s}$ , krutost sistema  $k = 8 \text{ N/m}^2$ ,  $k_v = 1$ ,  $k_a = 0.2$ ,  $\tau = 0.1 \text{ sec}$ , gde je ispunjen uslov ograničenosti koeficijenta prigušenja  $0 \leq \xi \leq 0.2$ , kao i da je sopstvena kružna frekvencija u opsegu  $0.5 \leq \omega_0 \leq 100$ , [26].

Odgovarajući zatvoreni sistem upravljanja je  $\alpha = 1/2$  dat sa:

$${}^c D_t^{1/2} \tilde{x}(t) = A_1 \tilde{x}(t) + A_2 \tilde{x}(t-\tau) + A_3 {}^c D_t^{1/2} \tilde{x}(t-\tau) + \tilde{f}(t) \quad (30)$$

gde su matrice sistema  $A_1, A_2, A_3$  definisane sa:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

sa odgovarajućom početnom funkcijom oblika:

$$x(t) = 0.01, t \in [-0.1, 0] \quad (31)$$

$$i \quad \tilde{f}(t) = [0, 0, 0, 0.05 \sin(10\pi t)]^T$$

Odgovarajuće  $\infty$  norme matrica su sada:  $a_1 = \|A_1\| = 4.4$ ,  $a_2 = \|A_2\| = 0.5$ ,  $a_3 = \|A_3\| = 0.1$  kao i  $a_\Sigma = (a_1 + a_2 + a_3) = 4.9$ . Kako je  $\rho = \max\{\|\psi\|_C\} = 0.01$  u usvajanjem  $\delta = 0.02 > \rho = 0.01$  i  $\varepsilon = 50$  može se na osnovu datog kriterijuma (21) dobiti estimovano vreme stabilnosti SKVI  $T_e \approx 0.234 \text{ sec}$ . Uočava se da je dobijeni kriterijum SKVI (21) nezavistan od vremenskog kašnjenja.

**Drugi primer** koji se ovde prikazuje se odnosi na potiskivanje samopobudnih oscilacija u procesu rezanja metala opisan sa:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{k_p}{m}x(t-\tau_{fd}) - \frac{c}{m}\dot{x}(t) - \frac{k_a}{m}\ddot{x}(t-\tau_{fd}) \quad (32)$$

i gde su dati sledeći podaci: *ekv. masa sistema*  $m = 20 \text{ kg}$ , *ekv. prigušenje sistema*  $c = 100 \text{ kg/s}$ , *ekv. krutost sistema*  $k = 5 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$ ,  $k_p = 10$ ,  $k_a = 5$ ,  $\tau_{fd} = 0.1 \text{ sec}$ , odnosno

$$\ddot{x}(t) = -25x(t) - 0.5x(t-0.1) - 5\dot{x}(t) - 0.25\ddot{x}(t-\tau_{fd}) \quad (33)$$

uz poznate početne funkcije

$$x(t) = 0.01, t \in [-0.1, 0], \quad \dot{x}(t) = 0, t \in [-0.1, 0], \quad (34)$$

Uočava se da je uslov  $a_4 < 1$  ispunjen tj.  $\left|-\frac{k_a}{m}\right| = \frac{5}{20} < 1$ , i

$a_\Sigma = (a_1 + a_2 + a_3) = 30.5$ . Kako je  $\rho = \max\{\|\psi\|_C, \|\phi\|_C\} = 0.01$  i usvajanjem  $\delta = 0.02 > \rho = 0.01$  kao i  $\varepsilon = 100$  može se na osnovu datog kriterijuma (28) izračunati estimovano vreme stabilnosti na SKVI  $T_e \approx 0.145 \text{ sec}$ . Isto tako, dobijeni kriterijum stabilnosti SKVI je nezavistan od vremenskog kašnjenja. Dalja istraživanja biće usmerena da dobijanje kriterijuma stabilnosti zavisnih od vremenskog kašnjenja.

#### V. ZAKLJUČAK

Uočava se da u određenim slučajevima opravdano korišćenje upravljanja u povratnoj sprezi sa kašnjenjem koji uključuje i drugi izvod vektora stanja sa kašnjenjem gde se koriste prednosti takvog upravljanja u smanjenju neželjenih kao i samopobudnih oscilacija u elektro-mehaničkim sistemima. Rešavanje pitanja stabilnosti, gde je posebna

pažnja bila usmerena na stabilnost na konačnom vremenskom interval, je uspešno sprovedena i to prvo za klasu frakcionog mehaničkog sistema necelog reda  $0 < \alpha \leq 1$  sa kašnjenjem koji je bio predstavljen u vidu jednog neutralnog frakcionog sistema necelog reda  $\alpha = 1/2$  sa kašnjenjem. Takođe, proučavan je slučaj potiskivanja samopobudnih oscilacija u procesu rezanja metala. Predloženo je upravljanje u povratnoj sprezi sa kašnjenjem koji uključuje i drugi izvod vektora stanja sa kašnjenjem. Za oba sistema formirani su odgovarajući kriterijum stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu. Efikasnost procedure ispitivanja stabilnosti SKVI je potvrđena na dva numerička primera.

#### ZAHVALNICA

Autori se zahvaljuju Ministarstvu nauke, tehnološkog razvoja i inovacija Republike Srbije za finansijsku podršku za projekte po Ugovoru 451-03-47/2023-01/ 200105 od 03.02.2023. god (M.P.Lazarević), (P.D. Mandić) kao i TR33020 (T.B. Šekara).

#### LITERATURA

- [1] F. Amato Roberto Ambrosino Marco Ariola Carlo Cosentino Gianmaria De Tommas, *Finite-Time Stability and Control*, Springer-Verlag London 2014.
- [2] С. Стојановић, М. Лазаревић, Д. Љ. Дебељковић, Д. Антић, Стабилност и робустност посебних класа аутоматског управљања на коначном временском интервалу, II део, 2019, Технолошки факултет у Лесковцу, Универзитет у Нишу
- [3] D. Radojević, *Stabilnost posebnih klasa mehaničkih sistema necelog i celog reda sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu*, Doktorska disertacija, 2022, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu.
- [4] Podlubny I. *Fractional differential equations*. New York: Academic Press; 1999.
- [5] A. Kochubei, Y.Luchko, Eds, *Handbook of Fractional Calculus with Applications, Volume 1: Basic Theory*, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2019.
- [6] M.Lazarević, „Finite Time Stability Analysis of PD<sup>α</sup> Fractional Control of Robotic Time Delay Systems”, *Journal of Mechanics Research Communications*, Vol. 33, Iss.2, March-Apr., 2006, pp.269-279.
- [7] M.Lazarević, A.Spasić, “Finite-Time Stability Analysis of Fractional Order Time Delay Systems:Gronwall’s Approach”, *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, 49,(2009), 475-481.
- [8] D. M. Radojević, M. P. Lazarević, “Further results on finite-time stability of neutral nonlinear multi-term fractional order time-varying delay systems”, *Filomat* 36:5 (2022), 1775–1787.
- [9] Lazarević P.M., D. M. Radojević, S. Pišl, G. Maione, „Robust finite-time stability of uncertain neutral nonhomogeneous fractional-order systems with time-varying delays“, *Theoretical and Applied Mechanics*, Serbia, 2020. Vol.47 (2020) Issue 2, 241–255.
- [10] I. Mancisidor, A. Pena-Sevillano, Z. Dombovari, R. Barcena J. Munoa, „Delayed feedback control for chatter suppression in turning machines“, *Mechatronics* 63 (2019) 102276.
- [11] T. Insperger, J.G. Milton and G. Stepan, „Acceleration feedback improves balancing against reflex delay“. *J. R. Soc. Interface* 10 (2013) 20120763. <https://doi.org/10.1098/rsif.2012.0763>
- [12] A. Domoshnitsky, S. Levi, R. H. Kappel, E. Litsyn, R. Yavich, „Stability of neutral delay differential equations with applications in a model of human balancing“, *Math. Model. Nat. Phenom.* 16 (2021) 21 <https://doi.org/10.1051/mmnp/2021008>
- [13] Zorica D., Žigić M., Grahovac N., *Viscoelastic body colliding against a rigid wall with and without dry friction effects*, *Applied Mathematical Modelling* Vol.45, May 2017, Pages 365-382
- [14] M. Alexander Gousskov, A. Sergey Voronov, V. Vadim Novikov, I. Ilya Ivanov, *Chatter suppression in boring with tool position feedback control*. *Journal of Vibroengineering*. Aug 2017, vol. 19, issue 5, 3512-3521.
- [15] F. Mainardi, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity* (Imperial College Press, London, 2010).
- [16] Sheng J., W. Jiang, „Existence and uniqueness of the solution of fractional damped dynamical systems, *Advances in Difference Equations*, (2017) 1-16, 2017.
- [17] W. A. Knight, „Chatter in turning: some effects of tool geometry and cutting conditions“, *Int. J.Mach.Tool Des. Res.*, vol 12, pp. 201-220, 1972.
- [18] Tlustý J, Poláček M. „The stability of machine tools against self-excited vibrations in machining“. In: *Proceedings of the ASME international research in production engineering*; 1963. p. 465–74.
- [19] Tobias SA. *Machine-tool vibration*. London: Blackie & Sons Ltd.; 1965
- [20] Merritt HE. „Theory of self-excited machine-tool chatter: contribution to machine tool chatter research“. *ASME J Eng Ind* 1965;87(4):447–54. doi: 10.1115/1.3670861.
- [21] Munoa J, Beudaert X, Erkorkmaz K, Iglesias A, Barrios A, Zatarain M. „Active suppression of structural chatter vibrations using machine drives and accelerometers“. *CIRP Ann* 2015;64(1):385–8. doi: 10.1016/j.cirp.2015.04.106.
- [22] Gross H, Hamann J, Wiegärtner G. „Electrical feed drives in automation: basics, computation, dimensioning“. New York: John Wiley & Sons, Inc.; 2001.
- [23] M. Č. Bošković, T. B. Šekara, M.R. Rapaić, M. P. Lazarević, P.Mandić, „A novel ARX-based discretization method for linear non-rational systems“, *International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA 2016)*, Vol. 1, pp. 343-352, July 18-20, 2016, Novi Sad, Serbia, ISBN 978-86-7892-830-7.
- [24] Mancisidor I, Munoa J, Barcena R, Beudaert X, Zatarain M. „Coupled model for simulating active inertial actuators in milling processes“. *Int J Adv. Manuf. Tech.* 2015;77(1–4):581–95.
- [25] Insperger T, Stepan G. *Semi-discretization for time-delay systems: Stability and engineering applications*. Springer; 2011.
- [26] Preumont A. *Twelve lectures on structural dynamics*. Springer; 2013.

#### ABSTRACT

First, a mechanical system is considered where, in order to reduce unwanted vibrations, a damping viscoelastic element of the Scot-Blair type with a fractional order of  $0 < \alpha \leq 1$  is applied. Delayed feedback control involving the first and second derivatives of the state vector with delay is applied. In particular, the case of a closed neutral system with a delay of fractional order  $\alpha = 1/2$  is considered, where sufficient stability conditions are obtained at a finite time interval. Also, the case of suppressing chattering oscillations in the metal cutting process is considered. A delay feedback control involving the second derivative of the state vector with delay is proposed. A suitable criterion of stability at the final time interval was formed. Finally, the effectiveness of the proposed approach is illustrated in two conveniently chosen numerical examples.

#### DELAY FEEDBACK CONTROL OF A CERTAIN CLASS OF NON-INTEGERS AND INTEGER ORDER MECHANICAL SYSTEMS: SOME ISSUES OF STABILITY AND STABILIZATION ON A FINITE TIME INTERVAL

Mihailo P. Lazarević, Darko Radojević,  
Petar D. Mandić, Stjepko Pišl, Tomislav B. Šekara,