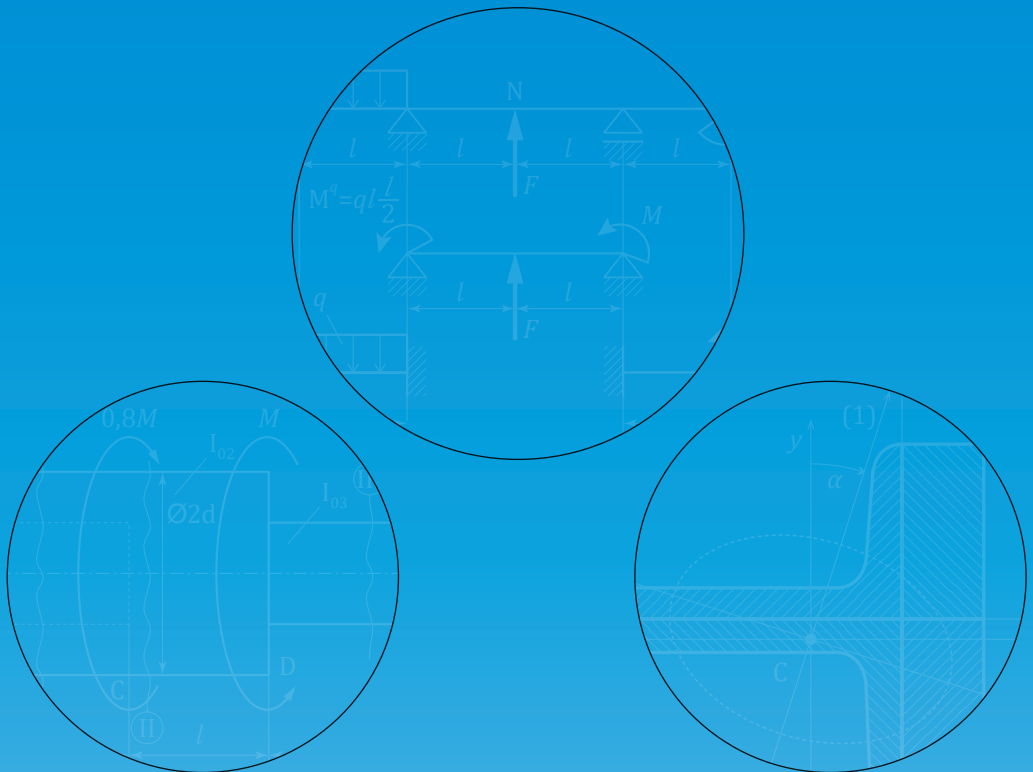


Ана Петровић • Милорад Милованчевић • Момчило Дуњић

# ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА

# ЗБИРКА ЗАДАТАКА

СА ДЕТАЉНИМ УПУТСТВИМА ЗА ЊИХОВО РЕШАВАЊЕ



Универзитет у Београду  
Машински факултет

*„Збирка задатака је добро организована. Задаци по тежини одговарају захтевима предмета Отпорност материјала. Коришћени математички апарат је углавном прилагођен предзнању просечног студента на нижим годинама студија. Начин излагања у збирци је јасан и разумљив.“*

проф. др Весна Милошевић-Митић

*„На основу свеобухватног сагледавања материјала, као и чињенице да су Аутори прихватили моје сугестије као рецензента, сматрам да је овакав уџбеник крајње потребан за успешну реализацију наставе на Машинском факултету у Београду, па предлажем да се прихвати и одобри његово објављивање и коришћење као универзитетског уџбеника.“*

проф. др Нина Анђелић

*„Ова збирка задатака може бити корисна и студентима на модулима који се баве структуралном анализом машина, а посебно у смислу усвајања знања за формирање прорачунских модела применом методе коначних елемената.“*

проф. др Влада Гашић

Универзитет у Београду

Ана Петровић

Милорад Милованчевић

Момчило Дуњић

**ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА**  
**ЗБИРКА ЗАДАТАКА**  
**СА ДЕТАЉНИМ УПУТСТВИМА ЗА ЊИХОВО**  
**РЕШАВАЊЕ**

Машински факултет

Београд, 2022.

др Ана Петровић, маг. инж. маш.  
доцент Машинског факултета, Универзитета у Београду  
др Милорад Милованчевић, дипл. инж. маш.  
редовни професор Машинског факултета, Универзитета у Београду  
др Момчило Дуњић, дипл. инж. маш.  
редовни професор Машинског факултета, Универзитета у Београду, у  
пензији

**ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА**  
**ЗБИРКА ЗАДАТАКА**  
**СА ДЕТАЉНИМ УПУТСТВИМА ЗА ЊИХОВО РЕШАВАЊЕ**  
прво издање

*Рецензенти:*

др Весна Милошевић-Митић, дипл. инж. маш.  
редовни професор Машинског факултета, Универзитета у Београду  
др Нина Анђелић, дипл. инж. маш.  
редовни професор Машинског факултета, Универзитета у Београду  
др Влада Гашић, дипл. инж. маш.  
ванредни професор Машинског факултета, Универзитета у Београду

*Издавач:*

**МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ**  
Краљице Марије 16, 11020 Београд  
тел: 011 3370 760  
факс: 011 3370 364

*За издавача:*

проф. др Владимир Поповић, декан

*Главни и одговорни уредник:*

проф. др Милан Лечић

*Одобрено за штампу одлуком Декана Машинског факултета у Београду,  
бр. 43/2021 од 27. 12. 2021. године.*

*Тираж:*

1000 примерака

*Штампа:*

ПЛАНЕТА ПРИНТ, Београд

ISBN 978-86-6060-074-7

## **ПРЕДГОВОР**

Ова збирка задатака је првенствено намењена студентима прве године Основних академских студија машинства Машинског факултета Универзитета у Београду. Настала је као последица дугогодишњег извођења наставе из области Отпорности материјала, а уједно и као скуп наставничких искустава аутора. Аутори су се у писању ове збирке руководили идејом да ово не буде збирка која у себи садржи велики број задатака са идејама за њихово решавање, већ збирка детаљно решених задатака. Савет студентима је да задатке решавају сукцесивно, како су дати у збирци, јер нешто што је објашњено у једном задатку, неће бити објашњавано у задацима који следе. Такође, напомињемо да је у првих неколико задатака из сваке области, дата методологија израде тог типа задатака.

Аутори посебну захвалност изражавају рецензентима на сугестијама, предлозима и коментарима који су допринели квалитету ове збирке.

У Београду, септембра 2021. године

Аутори

## **САДРЖАЈ**

1. МОМЕНТИ ИНЕРЦИЈЕ.....	1
2. АКСИЈАЛНО НАПРЕЗАЊЕ.....	58
2.1 ПЛАН ПОМЕРАЊА.....	82
3. УВИЈАЊЕ.....	95
4. САВИЈАЊЕ.....	128
4.1 ГРЕДЕ СА ГЕРБЕРОВИМ ЗГЛОБОМ.....	176
ЛИТЕРАТУРА.....	192

## 1. МОМЕНТИ ИНЕРЦИЈЕ

Методологија решавања задатака са генералном поставком која гласи: „За задати попречни пресек израчунати главне тежишне моменте инерције и скицирати елипсу инерције“, подразумева следеће:

1. Уочити од којих геометријски познатих „табличних“ фигура, или стандардних профила, се састоји задати попречни пресек. Означити те фигуре бројевима (1, 2, 3, ..., n), а затим и тежишта тих фигура и њихове тежишне координатне системе ( $x_1 C_1 y_1, x_2 C_2 y_2, \dots$ ).

2. Поставити „произвољни“ почетни координатни систем ( $\xi O \eta$ ), по могућности тако да саставни делови попречног пресека-фигуре заузимају што је могуће већи број табличних случајева положаја фигуре у односу на постављене осе почетног координатног система.

3. Израчунати површину попречног пресека:  $A = \sum_{i=1}^n A_i$ .

4. Израчунати координате тежишта попречног пресека:  $\xi_C = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i \cdot \xi_{Ci})}{\sum_{i=1}^n A_i}$ ,

$\eta_C = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i \cdot \eta_{Ci})}{\sum_{i=1}^n A_i}$ , и уцртати тежиште C и тежишни координатни систем xCy ( $\xi \parallel x, \eta \parallel y$ ).

5. Израчунати моменте инерције за осе  $\xi$  и  $\eta$ :  $I_\xi, I_\eta$  и  $I_{\xi\eta}$ . При одређивању центрифугалног момента инерције  $I_{\xi\eta}$  водити рачуна о следећем:

- Уколико је центрифугални момент инерције неке фигуре таблични случај, предзнак му се може одредити на основу предзнака квадранта система  $\xi O \eta$  у којем се фигура налази;

- Уколико то није случај, центрифугални момент инерције фигуре се израчунава локалном применом Штајнерове теореме, водећи рачуна о предзнаку сопственог тежишног центрифугалног момента инерције;

- За фигуру која има осу симетрије (када је једна од оса из пара међусобно управних оса, оса симетрије фигуре) центрифугални момент инерције је једнак нули, а за тај пар оса.

6. Применом Штајнерове теореме израчунати моменте инерције  $I_x, I_y$  и  $I_{xy}$  за тежишне осе попречног пресека.

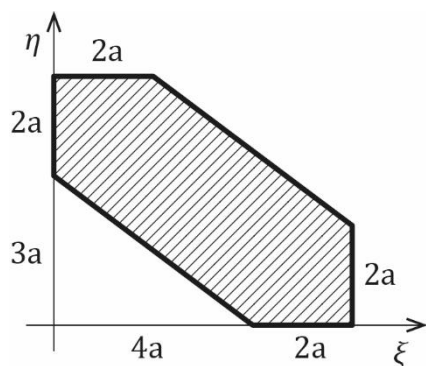
7. Одредити правце главних тежишних оса (осе (1) и (2)) израчунавањем угла  $\alpha$ ; то је угао за који треба ротирати тежишну осу пресека за коју је

израчунат већи аксијални момент инерције, да би се добио позитиван смер осе (1); позитиван смер осе (2) се добија ротацијом осе (1) за  $+\frac{\pi}{2}$ .

8. Израчунати вредности главних тежишних момената инерције  $I_1$  и  $I_2$ .

9. Израчунати полупречнике елипсе инерције  $i_1$  и  $i_2$  и скицирати елипсу инерције. Већи полупречник  $i_1$  се наноси на главну тежишну осу (2), а мањи  $i_2$  на главну тежишну осу (1).

**Задатак 1.1** За задати попречни пресек израчунати главне тежишне моменте инерције и скицирати елипсу инерције.



Слика 1.1 Поставка задатка, замишљени попречни пресек неког гредног носача

Прво је потребно размислити од којих то једноставних фигура се састоји ова сложена фигура (овај попречни пресек), а са циљем да се што боље искористе постојећи подаци дати у помоћном уџбенику Таблице из отпорности материјала [7]. Ови подаци су израчунати поступком интеграције једноставних геометријских фигура (правоугаоника, квадрата, правоуглог троугла, круга, ...), а представљају једноставне изразе, дате у општим бројевима, на основу којих је могуће брзо израчунати тражене геометријске карактеристике. Сложени попречни пресек добија се **сабирањем** или **одузимањем** елементарних фигура које га чине. За попречни пресек задат у овом задатку, од површине правоугаоника ( $6a \times 5a$ ) би се одузеле површине троуглова. Дакле, овај попречни пресек се добија када се из правоугаоника 1 (Сл. 1.3) уклоне троуглови 2 и 3.

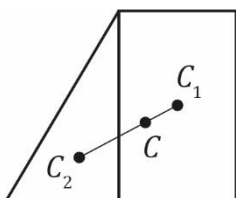


Одређивање површине попречног пресека

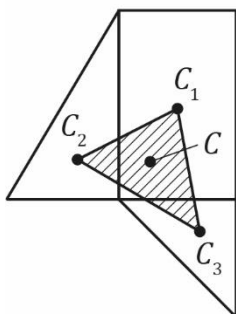
$$A = 30a^2 \Big|_1 - 2 \left( \frac{1}{2} 3a \cdot 4a \right) \Big|_{2,3} = 18a^2 = \sum_{i=1}^3 A_i$$

Одређивање координата тежишта попречног пресека

Познато је да се тежиште сложене фигуре налази између тежишта елементарних фигура од којих се сложена фигура састоји, а ближе тежишту фигуре веће површине (Сл.1.2). Јасно је да су за одређивање тежишта сложене фигуре значајне координате тежишта елементарних фигура и њихове површине.



(Подсећање: Тачка  $C_1$  је тежиште правоугаоника и налази се у пресеку дијагонале правоугаоника, а тачка  $C_2$  је тежиште правоуглог троугла и налази се у пресеку његових тежишних дужи, односно координате тежишта троугла деле катете троугла у односу 2:1.)



Слика 1.2 Илустрација положаја тежишта

Дакле, увек треба имати на уму да се тежиште сложене фигуре налази између тежишта елементарних фигура. Мало је теже замислити где се тежиште налази када се фигуре одузимају, јер одузимање фигуре помера тежиште ка површини фигуре која је преостала.

Дакле, у овом примеру, слика 1.3, одређују се координате тежишта фигуре која је добијена „уклањањем“ троуглова из правоугаоника, у координатном систему  $\xi\eta$ . Координатни систем  $\xi\eta$  је задати почетни координатни систем.

Одређивање  $\xi$  координате тежишта приказано је изразом:

$$\begin{aligned}\xi_c &= \frac{\sum_{i=1}^3 (A_i \cdot \xi_{ci})}{\sum_{i=1}^3 A_i} \\ &= \frac{(30a^2) \cdot 3a|_1 - \left(\frac{1}{2}3a \cdot 4a\right) \cdot \left(\frac{1}{3}4a\right)|_3 - \left(\frac{1}{2}3a \cdot 4a\right) \cdot \left(6a - \frac{1}{3}4a\right)|_2}{18a^2} \\ &= 3a\end{aligned}$$

У бројиоцу претходног израза је сума свих производа површине  $i$ -те фигуре и координате њеног тежишта (то је статички момент  $i$ -те фигуре за осу  $\eta$ ). Пошто су овде у питању **координате** тежишта, неопходно је да се упише њихов одговарајући предзнак у задатом координатном систему  $\xi\eta$ .

Све фигуре у овом задатку се налазе у првом квадранту система  $\xi\eta$ , тако да су све координате њихових тежишта позитивне:

$$C_1(3a; 2,5a) \quad C_2\left(\frac{14}{3}a; 4a\right) \quad C_3\left(\frac{4}{3}a; a\right)$$

Уочава се да су чланови претходног израза који се односе на фигуре 2 и 3, уврштени са предзнаком минус. Дакле, сви изрази у прорачуну који се тичу уклоњене (непостојеће) фигуре узимају се са предзнаком **минус** (једноставно, површине троуглова 2 и 3 се одузимају од површине правоугаоника 1).

Уочава се да добијено решење има димензију дужине, што је у складу са тим да је то координата тежишта, која и треба да има димензију дужине.

Сада треба израчунати и другу другу координату тежишта:

$$\begin{aligned}\eta_c &= \frac{\sum_{i=1}^3 (A_i \cdot \eta_{ci})}{\sum_{i=1}^3 A_i} \\ &= \frac{(30a^2) \cdot 2,5a|_1 - \left(\frac{1}{2}3a \cdot 4a\right) \cdot (4a)|_2 - \left(\frac{1}{2}3a \cdot 4a\right) \cdot (a)|_3}{18a^2} \\ &= 2,5a\end{aligned}$$

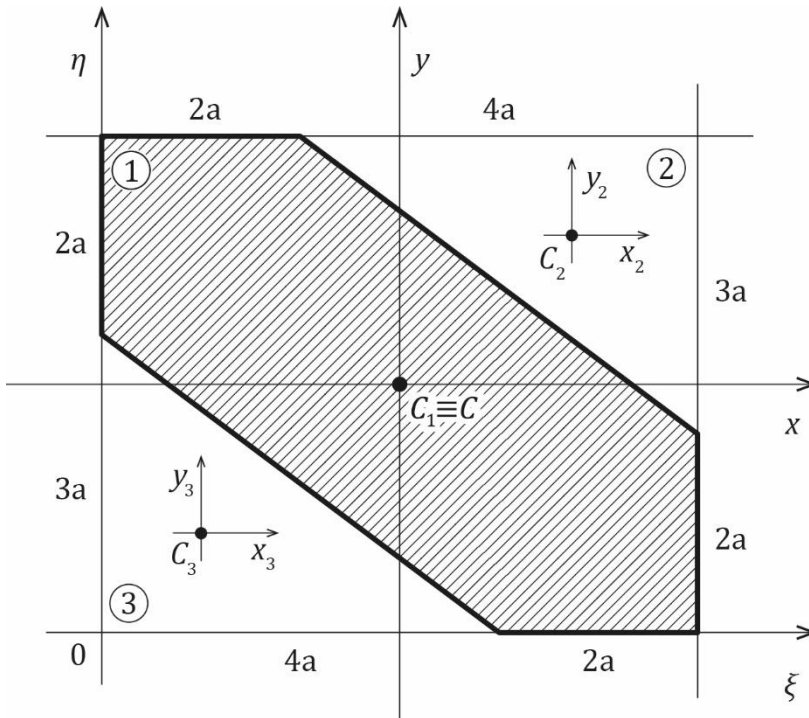
Тежиште целе фигуре  $C$  поклапа се са тежиштем правоугаоника, што је и очекивано, јер су троуглови 2 и 3 исти и исто су позиционирани у односу на осе  $x$  и  $y$ :

$$C(3a; 2,5a)$$

## Моменти инерције

У наставку, на скицу попречног пресека, уцрта се тежиште пресека, кроз тежиште се повуку осе  $x$  и  $y$ , које су паралелне осам  $\xi$  и  $\eta$ . Тако је добијен **тежишни** координатни систем задатог попречног пресека.

На Сл.1.3 цео правоугаоник ( $6a \times 5a$ ) је фигура 1 са тежиштем  $C_1(3a; 2,5a)$ .



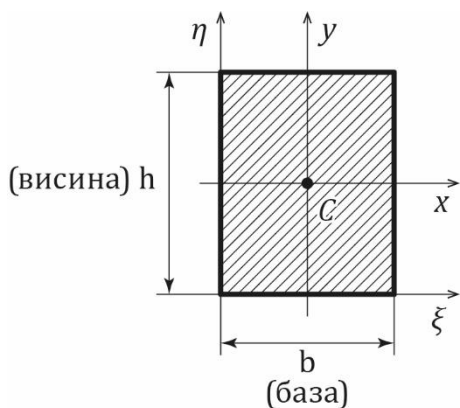
Слика 1.3 Замислијени попречни пресек неког гредног носача

Одређивање момената инерције за задати почетни координатни систем  $\xi 0 \eta$

Величина  $I_\xi$  је аксијални момент инерције за осу  $\xi$  (грчка реч „axis“ значи „оса“). Моменти инерције су геометријске карактеристике попречног пресека (као и површина пресека, статички момент за осу,...), па се стога приликом њиховог израчунавања примењује иста идеја поделе сложене фигуре на елементарне.

У Таблицама [7] су дати подаци за правоугаоник и правоугли троугао:

Отпорност материјала, збирка задатака



Слика 1.4 Правоугаоник, таблични подаци

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

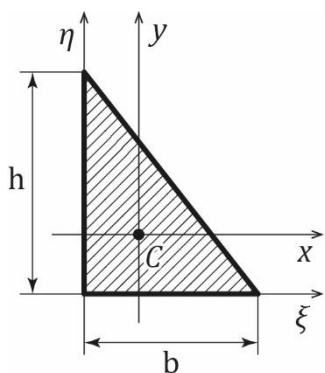
$$I_y = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

$$I_\xi = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_\eta = \frac{b^3h}{3}$$

$$|I_{\xi\eta}| = \frac{b^2h^2}{4}$$



Слика 1.5 Троугао, таблични подаци

$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{b^3h}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{72}$$

$$I_\xi = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_\eta = \frac{b^3h}{12}$$

$$|I_{\xi\eta}| = \frac{b^2h^2}{24}$$

Применом ових (табличних) података за задати попречни пресек, за осу  $\xi$  се добија момент инерције приказан следећим изразом:

$$I_\xi = \frac{6a \cdot (5a)^3}{3} \Big|_1 - \frac{4a \cdot (3a)^3}{12} \Big|_3 - \left[ \frac{4a \cdot (3a)^3}{36} + \left( \frac{1}{2} 3a \cdot 4a \right) (4a)^2 \right] \Big|_2$$

$$= 142 a^4$$

Први члан претходног израза односи се на правоугаоник (фигура 1). Оса  $\xi$  правоугаоника са Сlike 1.3, слична је оси  $\xi$  правоугаоника у таблицама, јер обе пролазе кроз базе својих правоугаоника.

Други члан односи се на фигуру 3, која се одузима и зато тај члан прочитан као податак у таблицама, овде има предзнак минус. И овде оса  $\xi$  пролази кроз базу троугла 3, као што оса  $\xi$  у таблицама пролази кроз базу „табличног“ троугла.

Трећи члан односи се на фигуру 2, која се такође одузима. У односу на троугао 2 почетна оса  $\xi$  није „таблична“ оса, јер је удаљена од ове фигуре (дакле, не пролази кроз базу или теме троугла 2). Оса фигуре 2 за коју се зна момент инерције је тежишна оса троугла 2 (локална тежишна оса  $x_2$ ) која је паралелна оси  $\xi$  целе фигуре. Тако се на основу табличног податка прво израчунава момент инерције за тежишну осу троугла 2 (**сопствени тежишни** момент инерције) и на њега се додаје **положајни** момент инерције троугла 2, а по Штајнеровој теореми. Штајнерова теорема каже да, ако се зна момент инерције за сопствену (тежишну) осу инерције, може се израчунати момент инерције за било коју њој паралелну осу, тако што се на сопствени момент инерције додаје и положајни момент инерције. Положајни момент инерције је једнак производу површине фигуре (овде је то троугао 2) и квадрата растојања између њене тежишне осе и осе за коју се рачуна момент инерције, при чему су дакле, ове две осе међусобно паралелне. Једноставно, у овом примеру троугао 2 није таблични случај за осу  $\xi$ , па се за израчунавање његовог момента инерције за осу  $\xi$  примењује Штајнерова теорема.

Уочава се да је јединица за моменте инерције „дужина на 4. степен“, што нема јасну физикалност (подсећање: „дужина на 2. степен“ је димензија површине, а „дужина на 3. степен“ је димензија запремине). Аксијалне моменте инерције треба схватити као замишљени „отпор савијању“. Што се знака аксијалних момената инерције тиче, аксијални моменти инерције су **увек позитивни**.

Аксијални момент инерције за осу  $\eta$  приказан је следећим изразом:

$$I_{\eta} = \frac{(6a)^3 \cdot 5a}{3} \Big|_1 - \left[ \frac{(4a)^3 \cdot 3a}{36} + \left( \frac{1}{2} 3a \cdot 4a \right) \left( \frac{14}{3} a \right)^2 \right] \Big|_2 - \frac{(4a)^3 \cdot 3a}{12} \Big|_3$$

$$= 208 a^4$$

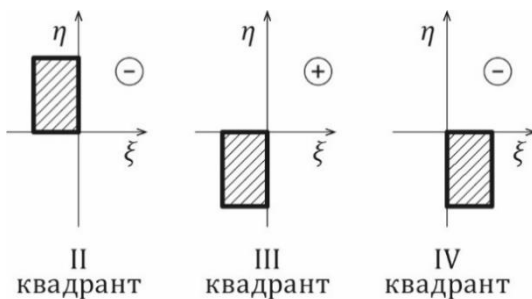
Центрифугални момент инерције, за разлику од аксијалних момената инерције, везује се за пар међусобно управних оса, у овом случају  $\xi$  и  $\eta$ , а

осликава како је попречни пресек постављен у односу на осе. Сходно томе, ако је једна оса од ове две осе  $\xi$  и  $\eta$ , оса симетрије фигуре, тада је центрифугални момент инерције те фигуре **за тај пар оса** једнак нули (ово важи и када су обе осе осе симетрије фигуре). Тако је центрифугални момент инерције за правоугаоник једнак нули за његове сопствене тежишне осе  $x_1C_1y_1$ , док за осе  $\xi$  и  $\eta$  неће бити нула (јер постоји положајни момент инерције):

$$I_{\xi\eta} = [0 + (6a \cdot 5a) \cdot (3a) \cdot (2,5a)] \Big|_1 - \left[ \frac{(4a)^2(3a)^2}{24} \right] \Big|_3 - \left[ -\frac{(4a)^2(3a)^2}{72} + \left(\frac{1}{2}4a \cdot 3a\right)(4a)\left(\frac{14}{3}a\right) \right] \Big|_2 = 109 a^4$$

Прва заграда у претходном изразу односи се на правоугаоник. Сопствени тежишни момент инерције правоугаоника је нула. Положајни момент инерције је производ површине правоугаоника и растојања од осе  $x_1$  до осе  $\xi$ , и растојања од осе  $y_1$  до осе  $\eta$ . Овде треба водити рачуна да поменута растојања, нису само растојања, него координате тачке у координатном систему  $\xi O\eta$ , па их је потребно читати са одговарајућим предзнаком.

Центрифугални момент инерције за правоугаоник је могао да се израчуна и применом табличног податка, као  $\frac{(6a)^2(5a)^2}{4}$ , јер правоугаоник лежи на осама  $\xi$  и  $\eta$ , као и правоугаоник у таблицама (једна оса му пролази кроз базу, друга кроз висину, дакле то је „таблични случај“). Предзнак овако прочитаног центрифугалног момента инерције правоугаоника 1 је плус, јер се цео овај правоугаоник налази у првом квадранту координатног система  $\xi O\eta$ , који је позитиван.



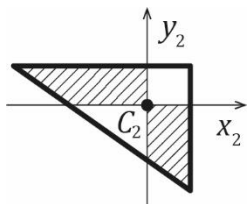
Слика 1.6 Предзнак центрифугалног момента инерције правоугаоника у односу на координатни систем  $\xi O\eta$

## Моменти инерције

На Слици 1.6 приказан је знак центрифугалног момента инерције у зависности од тога у којем квадранту правоугаоник лежи на осам.

Други сабирак (заграда) у претходном изразу односи се на троугао 3. Троугао 3 се цео налази у првом квадранту, па је његов центрифугални момент инерције позитиван, а предзнак минус испред заграде значи да је троугао „уклоњен“.

Последњи члан претходног изрази представља центрифугални момент инерције троугла 2. По Штајнеровој теорему, он је збир сопственог центрифугалног момента инерције и положајног момента инерције фигуре број 2. Сопствени тежишни момент инерције троугла 2 је негативан, јер је троугао 2 постављен у односу на сопствене (тежишне) осе тако, да је већи део његове површине у 2. и 4. квадранту његовог сопственог тежишног координатног система  $x_2 C_2 y_2$ . (Касније ће се видети да није битно само где је већа површина фигуре, него и каквог је облика та фигура.)

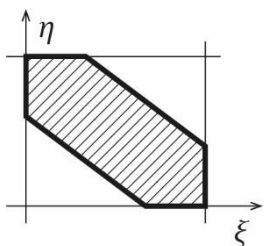


Слика 1.7 Појашњење знака центрифугалног момента инерције троугла у односу на тежишни координатни систем троугла

Треба обратити пажњу да се при израчунавању израза у загради која се односи на троугао 2, добија позитиван резултат, што је у складу са чињеницом да се цео троугао 2 ипак налази у позитивном првом квадранту координатног система  $\xi O \eta$ .

Иначе, центрифугални момент инерције може бити и позитиван и негативан (у зависности од тога како фигура стоји у односу на осе), као и једнак нули.

Што се знака добијеног резултата за центрифугални момент инерције целе фигуре тиче, цела фигура је у 1. квадранту координатног система  $\xi O \eta$ , па је и центрифугални момент инерције целе фигуре позитиван (Сл. 1.8).



Слика 1.8 Појашњење знака центрифугалног момента инерције задатог попречног пресека у односу на координатни систем  $\xi O\eta$

Овиме је завршен прорачун момената инерције за осе почетног координатног система  $\xi O\eta$ .

Циљ овог задатка је да се израчунају главни тежишни моменти инерције ове фигуре  $I_1$  и  $I_2$ , а да би то било урађено, прво је потребно израчунати моменте инерције за тежишне осе попречног пресека  $I_x$ ,  $I_y$  и  $I_{xy}$ .

#### Одређивање момената инерције за тежишне осе попречног пресека $x$ и $y$

У претходном делу задатка попречни пресек је подељен на елементарне фигуре, а све што се у наставку ради, односи се на цео попречни пресек (израчунати су аксијални моменти инерције и центрифугални момент инерције целог пресека, за осе  $\xi$  и  $\eta$ ).

При преласку на тежишне осе, користи се опет Штајнерова теорема, али написана у другачијој форми, јер се сада зна момент инерције (целог попречног пресека) за произвољну осу, од којег се потом одузима положајни момент инерције, да би се добио момент инерције за тежишну осу:

$$I_x = I_\xi - A \cdot \eta_c^2 = 142a^4 - 18a^2(2,5a)^2 = 29,5 a^4$$

$$I_y = I_\eta - A \cdot \xi_c^2 = 208a^4 - 18a^2(3a)^2 = 46 a^4$$

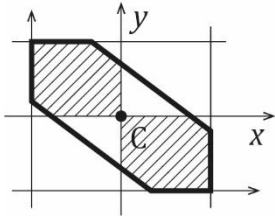
$$I_{xy} = I_{\xi\eta} - A \cdot \eta_c \cdot \xi_c = 109a^4 - 18a^2(3a)(2,5a) = -26 a^4$$

У претходно примењеним изразима, растојање између оса  $x$  и  $\xi$  је управо координата тежишта  $\eta_c$ , односно између  $y$  и  $\eta$  је координата тежишта  $\xi_c$ .

Што се знака добијеног центрифугалног момента инерције овог попречног пресека тиче, он је негативан, јер се гледано у односу на координатни систем  $xSy$ , већи део овог попречног пресека налази у негативним квадрантима.



## Моменти инерције



Слика 1.9 Појашњење знака центрифугалног момента инерције задатог попречног пресека у односу на тежишни координатни систем целог пресека

### Израчунавање главних тежишних момената инерције и скицирање елипсе инерције

Главни тежишни координатни систем (осе (1) и (2)) је у односу на тежишни координатни систем  $xSy$  заротиран за угао  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-26a^4)}{29,5a^4 - 46a^4} = -3,1515$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-3,1515) = -36,2^\circ$$

Овај израз за угао ротације добија се математичком процедуром тражења екстрема функције (за који то угао треба заротирати тежишни координатни систем, тако да се добију осе за које су аксијални моменти инерције екстремних вредности-највећи и најмањи). Момент инерције  $I_1$  је највећи тежишни аксијални момент инерције, а  $I_2$  је најмањи (центрифугални момент инерције за пар главних тежишних оса (1) и (2), је нула), а израчунавају се по изразу:

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = 37,75a^4 \pm 27,28a^4$$

Момент инерције  $I_1$  се добија када се у претходном изразу користи (у двознаку  $\pm$ ) предзнак плус, а  $I_2$  када се користи предзнак минус.

На основу главних тежишних момената инерције пресека могуће је израчунати и полупречнике елипсе инерције пресека:

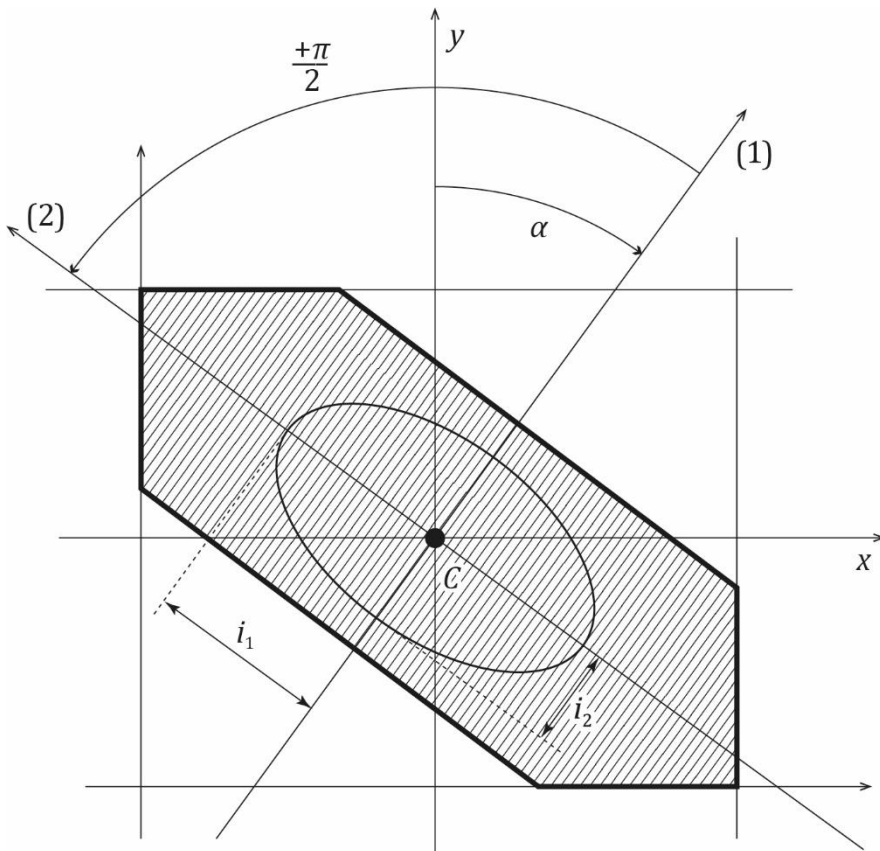
$$I_1 = 65,03 a^4 \rightarrow i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{65,03a^4}{18a^2}} = 1,9 a$$

$$I_2 = 10,47 a^4 \rightarrow i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{10,47a^4}{18a^2}} = 0,76 a$$

Дакле, координатни систем  $xCy$  се заротира за угао  $\alpha$  тако што, она од ове две осе ( $x$  или  $y$ ) за коју је тежишни аксијални момент инерције већи, ротацијом постаје оса (1):

$$I_y > I_x \left[ y \xrightarrow{+\alpha} (1) \right]$$

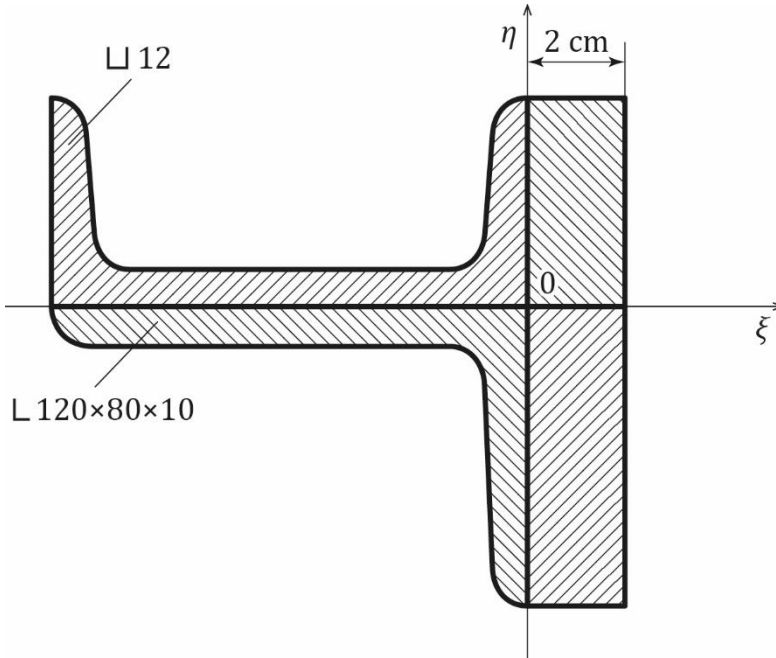
Пошто је угао  $\alpha$  добијен као негативан, оса  $y$  се ротира у смеру кретања казаљке часовника (негативан математички смер). Позитиван смер осе (2) се добија тако што се на позитиван смер осе (1) дода угао  $+\frac{\pi}{2}$ , слика 1.10.



Слика 1.10 Положај главних тежишних оса и елипсе инерције, у односу на пресек носача

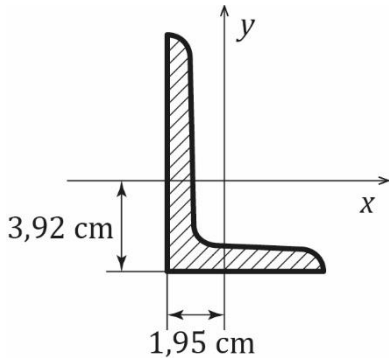
Отпорност материјала, збирка задатака

доноси одлука да све величине буду у N и mm, или kN и cm, јер је јединица за напон  $\frac{N}{\text{mm}^2} = \text{MPa}$  или  $\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ ,  $10 \text{ MPa} = 1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ .)



Слика 1.30 Поставка задатка, замишљени попречни пресек неког гредног носача

Подаци прочитани из таблица:



$$A = 19,1 \text{ cm}^2$$

$$I_x = 276 \text{ cm}^4$$

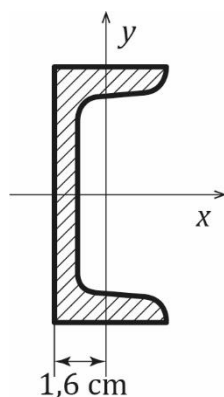
$$I_y = 98,1 \text{ cm}^4$$

$$I_u = 318 \text{ cm}^4$$

$$I_v = 56,1 \text{ cm}^4$$

Слика 1.31 L профил JUS C.B3.111, таблични подаци

### Моменти инерције



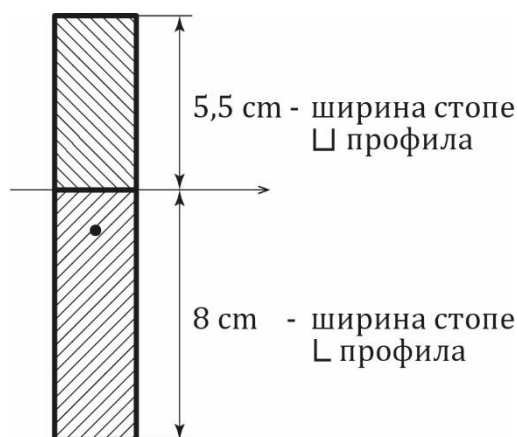
$$A = 17 \text{ cm}^2$$

$$I_x = 364 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 43,2 \text{ cm}^4$$

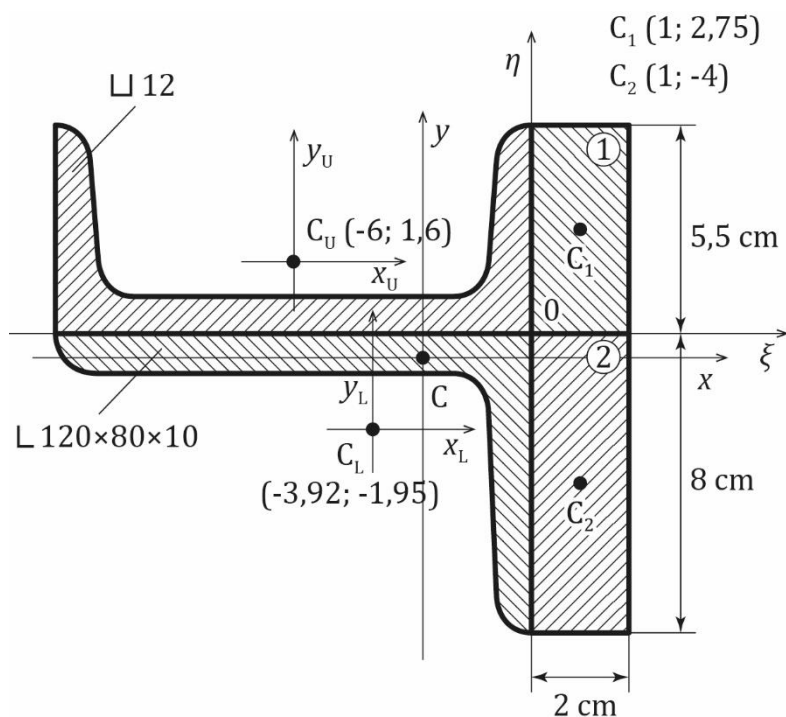
Слика 1.32 U профил JUS C.B3.141, таблични подаци

Што се задатог правоугаоника тиче, дата је само ширина (база) правоугаоника, а његова висина (висине) се читају из таблица (као ширина стопе U и L профила, сумарно).



Слика 1.33 Одређивање висине правоугаоника

Са претходне скице се види „непогодан“ положај целог правоугаоника ( $\xi$  оса не пролази ни кроз тежиште правоугаоника, ни кроз његову базу), па је донета одлука да се тај правоугаоник подели на правоугаонике 1 и 2. То је у складу са претходно изнетим, да се попречни пресек дели на фигуре које су у „што повољнијем“ („табличном“) положају у односу на осе. Овако оса  $\xi$  пролази кроз „базе“ оба правоугаоника. Међутим, када год је могуће (у случају израчунавања  $\xi$  координате тежишта пресека, као и момента инерције  $I_\eta$ ) фигуре 1 и 2 (Сл. 1.34) ће бити посматране заједно.



Слика 1.34 Замишљени попречни пресек неког гредног носача

$$A = 17|_U + 19,1|_L + 2 \cdot 13,5|_{1,2} = 63,1 \text{ cm}^2$$

$$\xi_c = \frac{\sum(A_i \xi_{ci})}{\sum A_i} = \frac{17(-6)|_U + 19,1 \cdot (-3,92)|_L + 27 \cdot (1)|_{1,2}}{63,1} = -2,37 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \eta_c &= \frac{\sum(A_i \eta_{ci})}{\sum A_i} \\ &= \frac{17(1,6)|_U + 19,1 \cdot (-1,95)|_L + (55,2) \cdot (2,75)|_1 + (8 \cdot 2) \cdot (-4)|_2}{63,1} \\ &= -0,695 \text{ cm} \end{aligned}$$

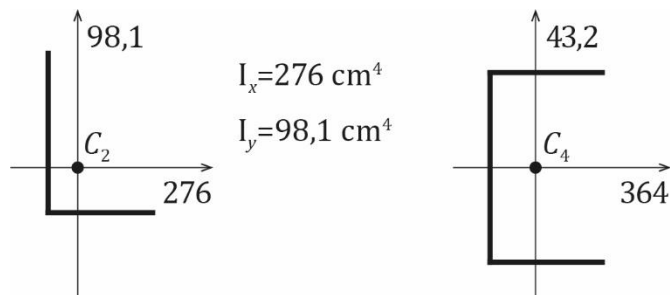
Приликом уцртавања тежишта попречног пресека, треба водити рачуна о томе да је дебљина ребра  $L$  профила 1 cm, а  $\eta$  координата тежишта целог попречног пресека је  $-0,695$  cm, па треба пажљиво уцртати тачку која означава тежиште „унутар“ ребра  $L$  профила.

У наставку прорачуна се „локално“ примењује Штајнерова теорема, као и таблични подаци:

### Моменти инерције

$$I_{\xi} = [43,2 + 17 \cdot (1,6)^2] \Big|_U + [98,1 + 19,1 \cdot (1,95)^2] \Big|_L + \frac{2 \cdot (5,5)^3}{3} \Big|_1 + \frac{2 \cdot 8^3}{3} \Big|_2 = 709,698 \text{ cm}^4$$

Прва заграда у претходном изразу је аксијални момент инерције  $U$  профила за задату осу  $\xi$ . То је збир сопственог момента инерције за осу  $x_U$  профила која је паралелна  $\xi$  оси и положајног момента инерције ((површина  $U$  профила)  $\times$  (растојање од осе  $x_U$  до осе  $\xi$ )<sup>2</sup>). У таблицама су сви подаци за профиле везани за скице профила и на њима обележене осе. Уколико је, као у овом задатку, профил заокренут за  $90^\circ$  у односу на његов положај приказан у таблицама, мора се водити рачуна при читању вредности момената инерције из таблица и њиховом везивању за „наше“ осе у примеру који се решава.



Слика 1.35 Повезивање табличних података са одговарајућим осама

Тако сада, када се тражи момент инерције за осу  $\xi$ , чита се из таблица момент инерције за осу која је паралелна оси  $\xi$ , а то је оса која иде дуж ребра  $U$  профила и управна је на стопе, а то је оса за коју је момент инерције  $43,2 \text{ cm}^4$ .

Друга заграда у претходном изразу односи се на  $L$  профил. Први члан у тој загради је сопствени аксијални момент инерције  $L$  профила за осу која је паралелна оси  $\xi$ , а то је оса која иде дуж дуже странице  $L$  профила. Други члан је положајни момент инерције ((површина  $L$  профила)  $\times$  (растојање од осе  $x_L$  до осе  $\xi$ )<sup>2</sup>).

Последњи члан у претходном изразу је аксијални момент инерције за осу  $\xi$  правоугаоника 2. Не треба се збуњивати што тај правоугаоник „лежи“ на оси са њене доње стране, јер је аксијални момент инерције увек позитиван.

Аксијални момент инерције за осу  $\eta$  је:

$$I_{\eta} = [364 + 17 \cdot (6)^2]_{|U} + [276 + 19,1 \cdot (3,92)^2]_{|L} + \frac{13,5 \cdot 2^3}{3} \Big|_{1,2}$$

$$= 1581,498 \text{ cm}^4$$

Приликом исписивања претходног израза, правоугаоници 1 и 2 су посматрани као једна фигура.

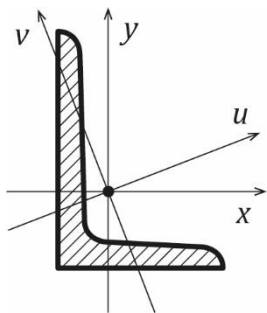
Центрифугални момент инерције за осе  $\xi$  и  $\eta$  дат је изразом:

$$I_{\xi\eta} = [0 + 17 \cdot (1,6) \cdot (-6)]_{|U} + [-96,103 + 19,1 \cdot (-3,92) \cdot (-1,95)]_{|L}$$

$$+ \frac{2^2 \cdot (5,5)^2}{4} \Big|_1 + \left[ -\frac{2^2 \cdot 8^2}{4} \right] \Big|_2 = -147,053 \text{ cm}^4$$

Прва заграда у претходном изразу односи се на  $U$  профил. Сопствени центрифугални момент инерције  $U$  профила је нула, јер профил има осу симетрије.

Друга заграда у претходном изразу односи се на  $L$  профил. У таблицама не постоји податак за сопствени центрифугални момент инерције  $L$  профила. Он се рачуна на основу израза који представља Другу инваријанту момената инерције. Тако се из таблица прочитају аксијални моменти инерције за главне тежишне осе  $L$  профила (то су у таблицама осе  $u$  и  $v$ ) и аксијални моменти инерције за тежишне осе  $L$  профила ( $x_L$  и  $y_L$ ) и израчуна се  $I_{xy}$   $L$  профила.



$$I_x I_y - I_{xy}^2 = I_1 I_2 - I_{12}^2 \quad (I_{12} = 0)$$

$$I_{xy} = \pm \sqrt{I_x I_y - I_1 I_2}$$

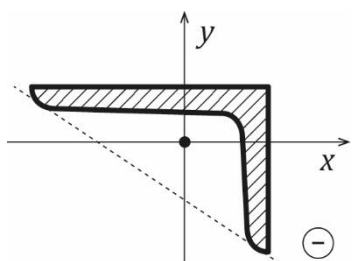
$$I_{xy}|_L = \pm \sqrt{I_x I_y - I_u I_v}$$

$$= \pm \sqrt{276 \cdot 98,1 - 318 \cdot 56,1}$$

$$= \pm 96,103 \text{ cm}^4$$

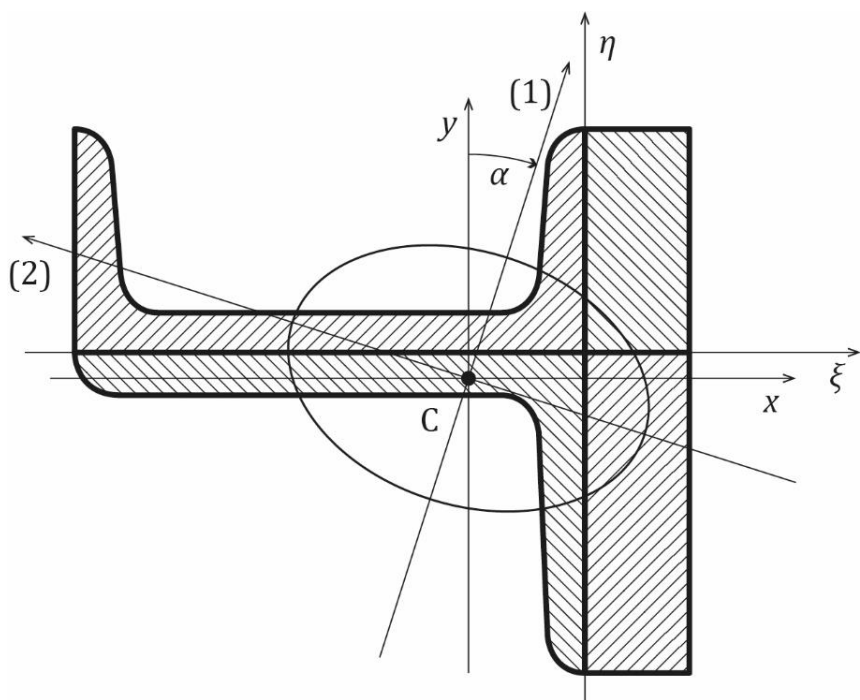
### 1.36 $L$ профил, тежишне и главне тежишне осе

Предзнак тако израчунатог момента инерције зависи од положаја  $L$  профила у односу на сопствене тежишне осе. По аналогији са троуглом, гледа се у којим квадрантима су краци  $L$  профила (Сл. 1.37). Дакле, овде већи део површине  $L$  профила „лежи“ у другом и четвртном квадранту његовог сопственог тежишног координатног система и предзнак сопственог центрифугалног момента инерције овог профила је минус.



1.37 Знак центрифугалног момента инерције  $L$  профила

Што се правоугаоника тиче, центрифугални момент инерције  $I_{\xi\eta}$  правоугаоника 1 је позитиван, јер је правоугаоник у првом квадранту, а правоугаоника 2 негативан, јер је у четвртном квадранту.



Слика 1.38 Положај главних тежишних оса и елипсе инерције, у односу на пресек носача

У наставку следе уобичајени кораци:

$$I_x = I_{\xi} - A \cdot \eta_C^2 = 679,31 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{\eta} - A \cdot \xi_C^2 = 1225,57 \text{ cm}^4$$



$$I_{xy} = I_{\xi\eta} - A \cdot \xi_C \cdot \eta_C = -251,057 \text{ cm}^4$$

$$\tan 2\alpha = \frac{-2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} = -0,919 \rightarrow \alpha = -21,99^\circ$$

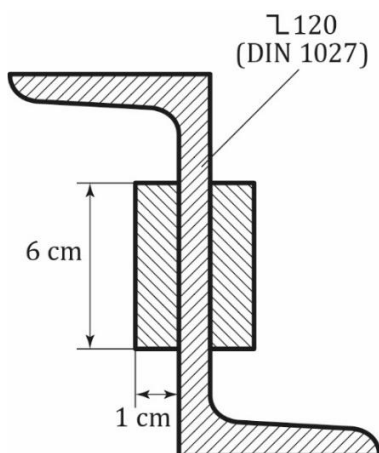
$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_1 = 1323,428 \text{ cm}^4 \quad i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = 4,58 \text{ cm} \rightarrow (2)$$

$$I_2 = 581,45 \text{ cm}^4 \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = 3,03 \text{ cm} \rightarrow (1)$$

Завршна скица елипсе инерције приказана је на Сл. 1.38. Као што је већ речено, елипса инерције прати пружање попречног пресека и не „напушта“ спољашње габарите попречног пресека (нема везе што излази ван површине „материјала“ пресека).

**Задатак 1.8** За попречни пресек приказан скицом, израчунати главне тежишне моменте инерције и скицирати елипсу инерције. Попречни пресек се састоји од Z профила и два правоугаоника (1 x 6 cm) симетрично постављена у односу на тежиште профила.



Слика 1.39 Поставка задатка, попречни пресек неког гредног носача

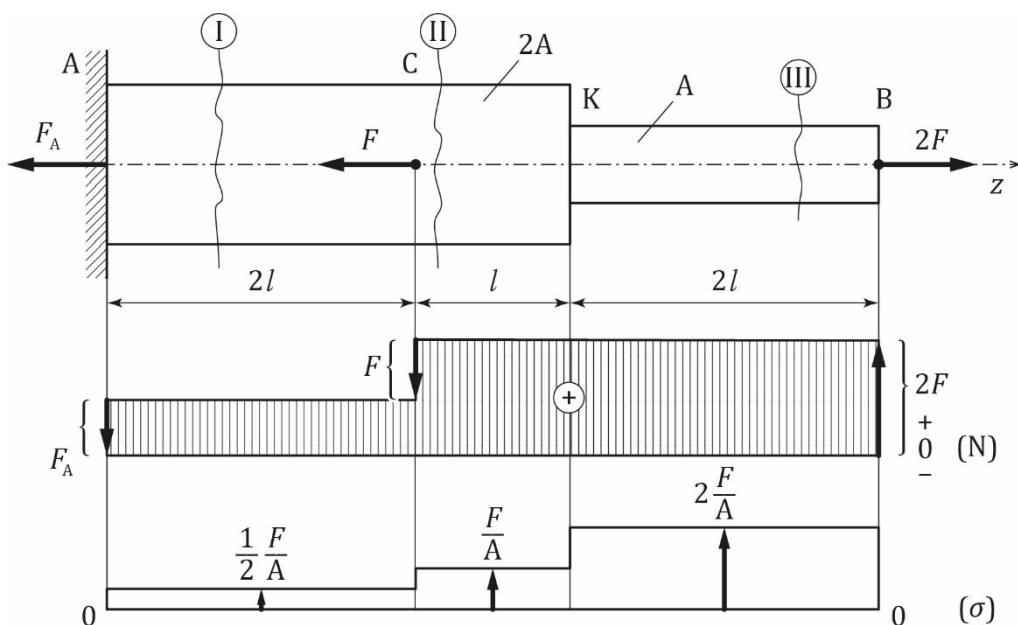
## 2. АКСИЈАЛНО НАПРЕЗАЊЕ

Издужење штапа оптерећеног аксијалном силом је сразмерно сили која делује на крај штапа и дужини штапа, а обрнуто сразмерно Јанговом модулу еластичности (карактеристика материјала) и површини попречног пресека штапа:  $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ .

Нормални напон код аксијалног напрезања константан је по поречном пресеку. Нормални напон се добија тако што се сила у пресеку, у којем се тражи напон, подели површином попречног пресека:  $\sigma = \frac{N}{A}$ .

У наредним задацима разматрају се танки штапови (дужина штапа је бар 10 пута већа од највеће димензије попречног пресека), а скице су због прегледности нацртане увећано.

**Задатак 2.1** Степенасти штап кружног попречног пресека, оптерећен је као на скици. Одредити померање пресека  $B$ . Одредити померање пресека  $K$ . Нацртати дијаграм аксијалних (подужних) сила. Одредити највећи нормални напон.



Слика 2.1 Поставка задатка, аксијално напрегнут степенести штап

### 3. УВИЈАЊЕ

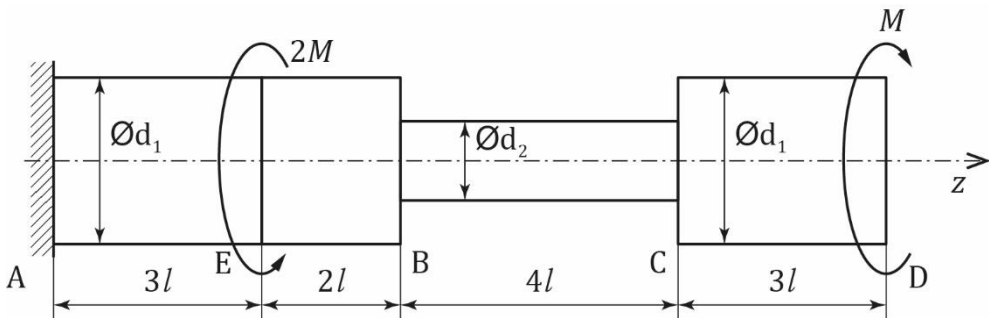
Постоји одређена аналогија између израза за напон и деформацију код аксијалног (подужног) напрезања и увијања (торзије). Код аксијалног напрезања нападна величина у пресеку је аксијална сила  $N$ , а код увијања то је момент увијања (момент торзије)  $M_t$ . Код аксијалног напрезања је утицајна физичка карактеристика материјала била Јангов модул еластичности  $E$ , а код увијања је то модул клизања  $G$ . Значајна карактеристика попречног пресека код аксијалног напрезања је површина попречног пресека  $A$ , а код увијања **штапова кружног и прстенастог попречног пресека** су то поларни момент инерције  $I_0$  и поларни отпорни момент  $W_0$ :

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \qquad \theta = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_0}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad \tau = \frac{M_t}{W_0} = \frac{M_t}{I_0} \cdot \rho_{max}$$

Расподела напона код увијања по попречном пресеку зависи линеарно од потега-променљивог полупречника  $\rho$  кружног пресека, који је у распону  $0 \leq \rho \leq r$ ,  $2r = d$  (односно,  $2R = D$ ). Тако је у тежишту пресека напон једнак нули, а на ободу пресека је највећи.

**Задатак 3.1** Нацртати дијаграм момента увијања. Одредити потребне пречнике вратила на основу вредности допушеног тангенцијалног (смичућег) напона  $\tau_d$ . Одредити углове увијања пресека  $E$  и  $D$  ( $\theta_E$  и  $\theta_D$ ). Дато је:  $\frac{d_1}{d_2} = 2$ ,  $l = 20$  cm,  $\tau_d = 5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ ,  $M = 50$  kNcm,  $G = 8080 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ .



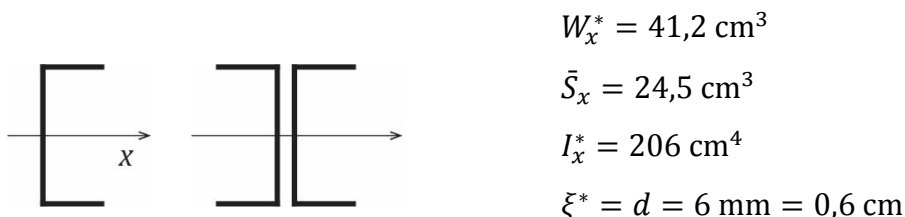
Слика 3.1 Поставка задатка, челично вратило оптерећено моментима увијања

Када су дијаграми трансверзалних сила ( $F_t$ ) и момената савијања ( $M_f$ ) нацртани (Сл. 4.27), са њих се читају максимална вредност трансверзалне силе  $(T_y)_{max}$  и максимална вредност момента флексије  $(M_f)_{max}$ :

$$(M_f)_{max} = ql^2$$

$$(T_y)_{max} = \frac{5}{4}ql$$

Из Таблица се читају подаци за  $U$  профил и израчунавају се нормални и смичући напони:



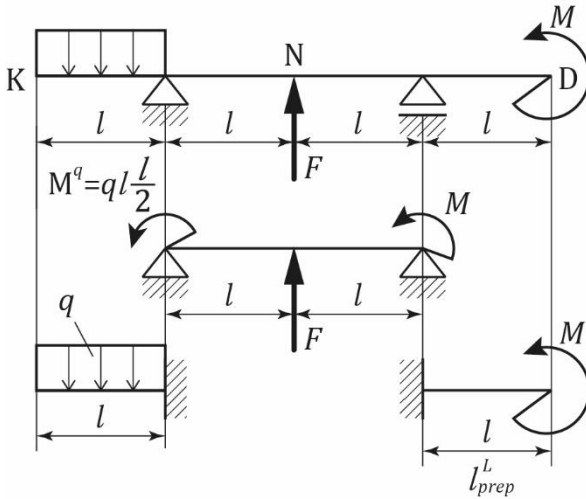
Слика 4.35 Одређивање карактеристика пресека који чине два  $U$  профила, један поред другог

$$\sigma_{max} = \frac{M_{fmax}}{W_x} = \frac{ql^2}{2W_x^*} = \frac{10 \cdot 50}{2 \cdot 41,2} = 6,068 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{ymax}}{I_x} \left( \frac{\bar{S}_x}{\xi} \right)_{max} = \frac{\frac{5}{4} \cdot 10}{2 \cdot 206} \left( \frac{2 \cdot 24,5}{2 \cdot 0,6} \right) = 1,24 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Уочава се да су тангенцијални напони, који се јављају услед дејства трансверзалних сила, знатно мањи него нормални напони, који се јављају услед дејства момента савијања.

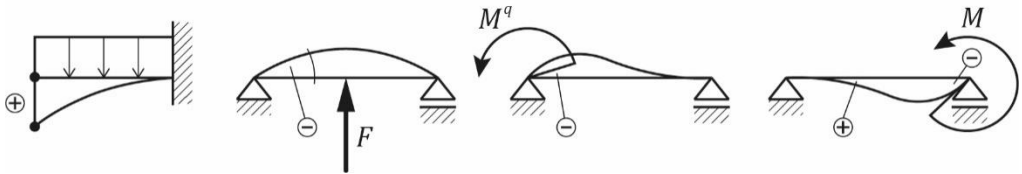
У наставку се израчунавају угиби тачака  $K$  (тачка на крају левог препуста),  $D$  (тачка на крају десног препуста) и  $N$  (тачка на половини распона греде  $AB$ ), а почетне скице за израчунавања угиба су дате на Слици 4.36.



Слика 4.36 Греда са препустима оптерећена моментом, силом и континуалним оптерећењем, припрема за израчунавање угиба

Приликом израчунавања угиба тачке  $K$  на левом препусту посматрају се средња скица и скица у доњем реду лево (оптерећење са десног препуста утиче преко момента  $M$  редукованог на ослонац  $B$ ):

$$\begin{aligned}
 f_K &= f_K^{konz} - \left( \sum \alpha \right) l_{prep}^L \\
 &= \frac{ql^4}{8EI} - l \cdot \left[ -\frac{(ql) \cdot (2l)^2}{16EI} - \frac{\left(\frac{ql^2}{2}\right) \cdot (2l)}{3EI} + \frac{(ql^2)(2l)}{6EI} \right] \\
 &= \frac{ql^4}{EI} \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{3ql^4}{8EI}
 \end{aligned}$$



Слика 4.37 Еластична линија савијене греде под дејством задатог оптерећења

Први члан претходног израза је угиб тачке на крају конзоле на коју делује континуално оптерећење целом дужином конзоле.

## Савијање

Први члан заграде која представља  $(\sum \alpha)$  потиче од силе на половини распона. Види се да су нагиби  $\alpha$  и  $\beta$  једнаки по величини, а супротног су знака. Сила у Таблицама је супротног смера, у односу на смер силе у задатку, па је неопходно водити рачуна о знаку  $\alpha$  и  $\beta$ .



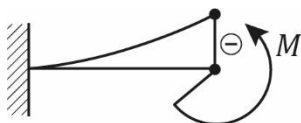
Слика 4.38 Предзнак за нагибе  $\alpha$  и  $\beta$  на еластичној линији савијене греде под дејством силе

Дужина греде у таблицама је  $l$ , а дужина греде у задатку је  $2l$ , зато се у изразу пише  $(2l)^2$  (исто је и у случају момента).

Под дејством момента, крај конзоле  $BD$  (десног препуста) иде нагоре, и зато је у првом члану наредног израза знак минус (Сл. 4.39).

Угиб тачке  $D$  је:

$$\begin{aligned} f_D &= f_D^{konz} + \left( \sum \beta \right) \cdot l_{prep}^D \\ &= -\frac{(ql^2) \cdot l^2}{2EI} + \left[ \frac{(ql) \cdot (2l^2)}{16EI} + \frac{\left(\frac{ql^2}{2}\right) \cdot (2l)}{6EI} - \frac{(ql) \cdot (2l)}{3EI} \right] \cdot l \\ &= \frac{ql^4}{EI} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{3ql^4}{4EI} \end{aligned}$$



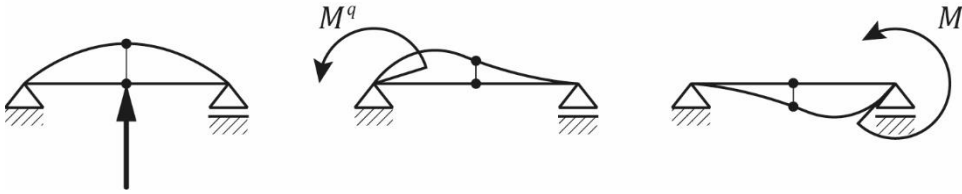
Слика 4.39 Еластична линија савијене конзоле под дејством момента

Добијено је да је угиб тачке  $D$  негативан, што значи да се тачка померила нагоре.

На померање тачака на распону, оптерећења са препуста утичу преко редукованих момената (гледа се само средња скица, Сл. 4.36). Директно из таблица се чита померање тачке на средини распона за свако од појединачних оптерећења:

$$f_N = f_N(F) + f_N(M^q) + f_N(M)$$

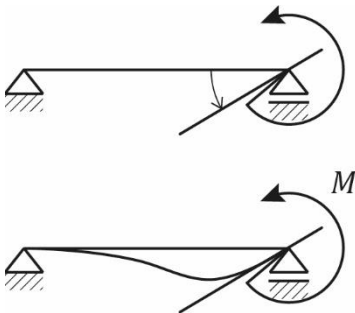
$$f_N = -\frac{1}{48} \frac{F(2l)^3}{EI} - \frac{\left(\frac{ql^2}{2}\right)(2l)^2}{16EI} + \frac{(ql^2) \cdot (2l)^2}{16EI} = \frac{ql^4}{EI} \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{24} \frac{ql^4}{EI}$$



Слика 4.40 Еластична линија савијене греде под дејством задатог оптерећења

Што се тиче момената над ослоњцима, у таблицама дато је померање тачке на средини распона по апсолутној вредности, па је неопходно погледати претходне скице и одредити одговарајући предзнак тог померања.

Момент тежи да заротира греду око тачке ослоњца у којој делује (Сл. 4.41), па је еластична линија савијене греде приказана скицом, а у складу са тим су одређени предзнаци угиба у изразу за угиб тачке  $N$ .



Слика 4.41 Еластична линија савијене греде под дејством момента

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bassin M.G., Brodsky S.M.: Statics and Strength of Materials, McGraw Hill, New York 1960.
- [2] Брчић В.: Отпорност материјала, 6. издање, Грађевинска књига, Београд 1985.
- [3] Милованчевић М., Анђелић Н.: Отпорност материјала, Машински факултет, Београд 2006.
- [4] Рашковић Д.: Отпорност материјала, Грађевинска књига, Београд 1990.
- [5] Ружић Д., Чукић Р.: Отпорност материјала (2), 3. издање, Машински факултет, Београд 2001.
- [6] Ружић Д., Чукић Р.: Отпорност материјала (3), Упутство за израду графичких радова, 3. прер. и доп. изд., Машински факултет, Београд 2000.
- [7] Ружић Д., Чукић Р., Дуњић М., Милованчевић М., Анђелић Н., Милошевић-Митић В.: Отпорност материјала, Таблице, Машински факултет, Београд 2007.
- [8] Тимошенко S.P.: Strength of Materials Part I, Elementary Theory and Problems, 3rd ed., - Van Nostrand Comp., Princeton 1958.
- [9] Тимошенко S.P.: Strength of Materials Part II, Advanced Theory and Problems, 2nd ed., - Van Nostrand Comp., Princeton 1941.
- [10] Чукић Р., Ружић Д.: Отпорност материјала (1), 2. издање, Машински факултет, Београд 1995.
- [11] Чукић Р., Ружић Д.: Отпорност материјала (4), Упутство за израду графичких радова, 5. прер. и доп. изд., Машински факултет, Београд 2000.