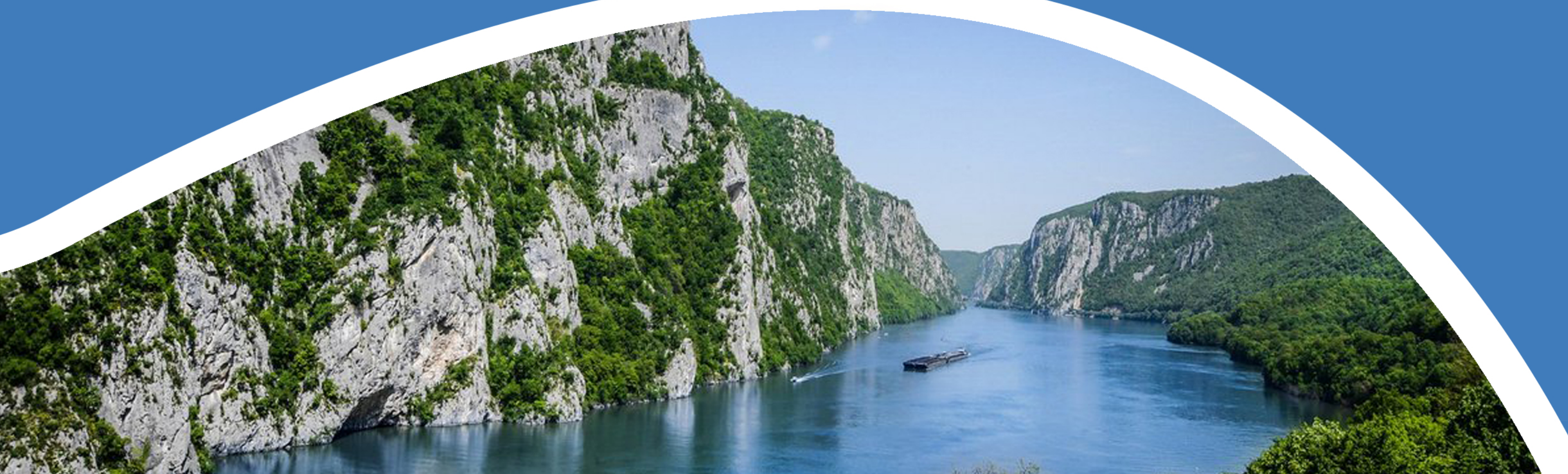
SYM-OP-IS
2019

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ORGANIZATIONAL SCIENCES

XLVI International Symposium on Operational Research

Conference Proceedings
(Zbornik radova)

Kladovo, September 15-18, 2019
Serbia



XLVI International Symposium on Operational Research

XLVI Simpozijum o operacionim istraživanjima

www.symopis2019.fon.bg.ac.rs

SYM-OP-IS 2019

Kladovo, September 15– 18, 2019

PROCEEDINGS
ZBORNIK RADOVA

Editors/Editori:

Prof. dr Milan Martić
Prof. dr Dragana Makajić-Nikolić
Prof. dr Gordana Savić

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ORGANIZATIONAL SCIENCES

PUBLISHER
University of Belgrade, Faculty of Organizational Sciences, Belgrade, Serbia
Jove Ilića 154, 11000 Belgrade, Serbia

YEAR
2019

ISBN: 978-86-7680-363-7

EXECUTIVE ORGANIZER/ORGANIZATOR

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ORGANIZATIONAL SCIENCES

CO-ORGANIZERS/ ORGANIZATORI

Visoka građevinsko-geodetska škola, Beograd

Ekonomski institut, Beograd

Ekonomski fakultet, Beograd

Institut "Mihajlo Pupin", Beograd

Matematički institut SANU, Beograd

Matematički fakultet, Beograd

Rudarsko-geološki fakultet, Beograd

Saobraćajni fakultet, Beograd

Vojska Srbije

Ministarstvo odbrane Republike Srbije

Univerzitet u Banjoj Luci

Društvo operacionih istraživača

SUPPORTED BY/ SYM-OP-IS PODRŽAVAJU

Република Србија
Министарство просвете, науке и технолошког развоја

АКАДЕМИЈА ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА СРБИЈЕ

XLVI Simpozijum o operacionim istraživanjima
SYM-OP-IS 2019
Kladovo, 15-18.9.2019.

REŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA GENETSKIM ALGORITMIMA

SOLVING FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GENETIC ALGORITHMS

ANDRIJA PETROVIĆ[1,2], SANDRO RADOVANOVIĆ[2], BORIS DELIBAŠIĆ[2], UGLJEŠA BUGARIĆ[1]

[1] Mašinski Fakultet, Beograd, aapetrovic@mas.bg.ac.rs
[2] Fakultet organizacionih nauka, Beograd, sandro.radovanovic@fon.bg.ac.rs

---

Rezime: *U radu su predstavljene dve metode za rešavanje Košijevog problema običnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Metode su bazirane na rešavanju običnih diferencijalnih jednačina prvog reda korišćenjem genetskih algoritama (GA). Metode su međusobno upoređene sa različitim načinama sparivanja populacije. Pored toga data su poređenja GA sa najprostijim i najčešće primenjivanim metodama za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina. Pokazuje se da GA daju zadovoljavajuće vrednosti rešenja diferencijalnih jednačina i da su efikasniji od određenih numeričkih metoda. Runge Kuta metod pokazuje najbolje vrednosti aproksimacije rešenja, dok Ojlerov metod sa korakom 0,1 pokazuje veće vrednosti relativnih grešaka aproksimativnih rešenja u odnosu na GA. Bez obzira na to primena GA je vrlo ograničena s obzirom na vreme izvršenja istih koje je nekoliko 1000 puta veće u odnosu na preostale metode.*

Ključne reči: *genetski algoritmi, diferencijalne jednačine, Runge Kuta, Ojlerova metoda.*

Abstract: *In this paper two different methods for solving Cauchy problem of first order differential equations are preseneted. Methods are based on implementation of genetic algorithms. Results of both methods are compared with the commonly used techniques for solving differential equations. It is shown that methods based on genetic algorithms achieved satisfactory results and better performances compared to Eulers method. 5th order Runge Kutta method obtained best approximation of real results, whereas Euler method with step 0,1 achieved the worst performances. Neverthless it is shown that application of genetic algorithms in solving first order differential equations is limited due to high computational costs.*

Keywords: *genetic algorithm, differential equations, Runge Kutta, Eulers method.*

1. UVOD

Veliki broj problema koji se tiču rešavanja običnih diferencijalnih jednačina obavlja se posredstvom različitih numeričkih metoda. Mnoge od njih nalaze rešenja Košijevog problema u relativno kratkom vremenskom periodu. Osnovni cilj numeričkog rešavanja običnih diferencijalnih jednačina zasniva se na rešavanju Košijevog problema sa što većom preciznošću u što kraćem intervalu vremena.

Runge Kuta metod kao i ostale visokokoračne linearne metode predstavljaju najčešće zastupljene metode koje se koriste za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina i sistema diferencijalnih jednačina, [1; 4]. Konvergencija i tačnost datih metoda prikazana je u [2].

Postavkom odgovarajuće funkcije cilja, obične diferencijalne jednačine prvog i višeg reda mogu se rešiti optimizacionim algoritmima. Sadollah et.al [9] je pokazao mogućnost rešavanja Košijevog problema koristeći metaheuristike kao što su PSO (eng. „*Particle Swarm Optimization*") i WCA (eng. „*Water Cycle Algorithm*").

Algoritmi bazirani na evolutivnim optimizacionim algoritmima pokazuju se uspešnim u rešavanju diferencijalnih jendačina na diskretnim intervalima [5]. Mnoge modifikacije ovih algoritama tiču se korišćenja genetskih algoritama u kombinaciji sa drugim algoritmima za pretraživanje lokalnih ekstremuma. Jedan od takvih primera je korišćenje genetskih algoritama sa Nelder-Mead algoritmima u cilju bržeg dolaženja do približnog tačnog rešenja diferencijalnih jednačina, što je prikazano u [7]. Pokušaji prikazivanja rešenja diferencijalne jednačine interpolacionom metodom konačnih elemenata i potom rešavanje optimizacionog problema genetskim algoritmima prikazano je u [6].

U okviru ovog rada prikazane su dve metode za rešavanje linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednačina prvog reda zasnovane na kontinualnim genetskim algoritmima. Različitim sparivanjem populacije (single point sparivanje i metodom razmene gena) poređene su tri različite kombinacije genetskih algoritama sa rešenjima dobijenim metodom Runge Kuta reda 4, 5, kao i sa najprostijim Ojlerovim eksplicitnim i implicitnim metodama. Tačnost navedenih rešenja je zatim izražena srednjom relativnom greškom u odnosu na analitičko rešenje datog Košijevog problema.

2. REŠAVANJE KOŠIJEVOG PROBLEMA GENETSKIM ALGORITMIMA

U ovom radu korišćene su dve metode rešavanja Košijevog problema genetskim algoritmima. Prvi metod prikazan u radu [8], zasniva se na postavci funkcije cilja čija rešenja direktno daju vrednosti diferencijalne jednačine prvog reda u vrednostima x koje su unapred odabrane. S obzirom da metod ima preciznost koja odgovara Ojlerovom metodu za numeričku integraciju običnih diferencijalnih jednačina nije od nekog posebnog značaja, ali tumačenje metoda je vrlo jednostavno stoga je navedeni metod i izabran radi implementacije i prikaza u okviru ovog rada.

Drugi metod rešavanja običnih diferencijalnih jednačina prikazan je u radu [3]. U okviru navedenog rada metod se zasniva na prikazu rešenja u obliku polinoma sa nepoznatim koeficijentima uz veličinu x. Jedinku stoga čine geni koji ne predstavljaju vrednosti funkcije cilja u diskretizovanim vrednostima kao u prvom metodu, već koeficijente polinoma. U radu je odgovarajući metod primenjen na obične diferencijalne jednačine drugog reda, primenom evolutivnih algoritama. U odnosu na prethodni rad [3] u ovom radu je uvedena modifikacija korišćenja metoda za obične diferencijalne jednačine prvog reda posredstvom genetskog algoritma.

Košijev problem u teoriji diferencijalnih jednačina se definiše u sledećem obliku:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

Funkcija $y = y(x)$ predstavlja nepoznatu funkciju, odnosno rešenje zadatog Košijevog problema. Pored toga predstavljen je i početni uslov koji obezbeđuje jedinstveno rešenje Košijevog problema. U cilju rešavanja Košijevog problema potrebno je dokazati da odgovarajući problem zadovoljava uslove egzistencije rešenja date Lipšicovim uslovom.

Funkcija cilja prvog metoda

U cilju izražavanja funkcije cilja koristiće se ideja Ojlerovog metoda. Polazeći od razvoja u Tejlorov red u okolini koraka h, Košijev problem se može predstaviti na sledeći način kao:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + R_2 \tag{2}$$

Ukoliko smatramo da je korak dovoljno mali može se pretpostaviti da se jednačinom (2) Košijev problem može predstaviti kao:

$$y`(x) \approx \frac{y(x+h) - y(\mathrm{x})}{h} \tag{3}$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), i = 1 \ldots n-1 \tag{4}$$

U opštem slučaju gornji sistem je nelinearan, a korak sistema određen je brojem tačaka u kome tražimo vrednost nepoznate funkcije y. Korak sistema je određen kao:

$$h = \frac{b - x_0}{n} \tag{5}$$

Cilj je minimizovati kvadratnu vrednost razlike između vrednosti Košijevog problema i vrednosti funkcije y nađene u diskretizovanim vrednostima, izraženo kao:

$$F(\mathrm{y}) = \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(x_i, y_i) \right)^2 \tag{6}$$

Stoga se traži vektor $y = (y_1, y_2., .., y_n)$, koji predstavlja jednu jedinku populacije, a čije vrednosti koordinata predstavljaju geni to jest vrednosti funkcije *y(x)* u diskretizovanim vrednostima x, predstavljenim kao:

$$x_i = a + ih, i = 1,...,n \tag{7}$$

Ovaj vektor treba da bude takav da suma njegovih koordinata minimizuje funkciju predstavljenu jednačinom (6).

$$\min \sum_i \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(x_i, y_i) \right)^2, i = 1,...,n-1 \tag{8}$$

Kriterijum konvergencije odgovarajuće metode je zasnovan na funkciji (8) i zavisi od vrednosti greške koju unosi korisnik. Jednačinom (9) prikazan je kriterijum konvergencije odgovarajuće metode:

$$\sum_i \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(x_i, y_i) \right)^2 < e \tag{9}$$

Gde je $e>0$ gornja granica pri kojoj se algoritam zaustavlja.

Funkcija cilja drugog metoda

Za razliku od prvog metoda koji eksplicitno traži vrednosti *y* kao rešenja problema minimizacije funkcije cilja, drugi metod pretpostavlja da se funkcija $y=y(x)$ može prikazati kao polinomijalna funkcija prikazana kao:

$$y(\mathrm{x}) = \sum_{i=0}^{k} C_i x^i \tag{10}$$

Gde su C_i koeficijenti koji idu uz odgovarajuće članove polinoma x^i. Ukoliko se pronađe prvi izvod jednačine, dobija se rešenje u obliku:

$$y'(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{k} iC_i x^{i-1} \tag{11}$$

U opštem slučaju obična diferencijalna jednačina zadata jednačinom (1) se može zapisati zamenom izraza (10) i (11) u sledećem obliku:

$$\sum_{i=1}^{k} iC_i x^{i-1} = f\left(x, \sum_{i=0}^{k} C_i x^i \right) \tag{12}$$

$$\sum_{i=0}^{k} C_i x_o{}^i = y_0 \tag{13}$$

Na osnovu prethodno zadatog uslova sledi da je potrebno odrediti takav polinom da je u svakoj tački zadovoljen uslov:

$$F_n = \sum_{i=1}^{k} iC_i x_n{}^{i-1} - f\left(x_n, \sum_{i=0}^{k} C_i x_n{}^i \right) = 0 \tag{14}$$

Navedenu pretpostavku nije moguće ostvariti u slučaju aproksimacije polinoma sa konačnim brojem elemenata: samim tim potrebno je izabrati takve koeficijente polinoma koji će minimizovati zbir vrednosti funkcije F_n u svim zadatim tačkama:

$$\min F = \sum_{n=1}^{N} F_n{}^2 \tag{15}$$

gde $N = \dfrac{b - x_0}{h}$ predstavlja broj tačaka zadat korakom *h*.

Iz navedenog se može zaključiti da populaciju čine jedinke čiji geni predstavljaju vrednosti koeficijenata uz polinome. Najbolja jedinka predstavlja jedinku čija je vrednost funkcije *F* minimalna odnosno čiji koeficijenti polinoma zadaju minimalnu vrednost funkcije *F*. Potrebno je napomenuti da od *k*+1 zadatih polinoma jedinka sadrži k nezavisnih koeficijenata dok je jedan koeficijent polinoma određen ograničenjem (14). Kao i u prethodnom slučaju kriterijum konvergencije datog metoda zadat je kao:

$$\sum_{n=1}^{N} F_n^{\ 2} < e \tag{16}$$

3. EKSPERIMENTI

Implementacijom navedenih metoda posredstvom izrađenog softvera kontinualnih genetskih algoritama za rešavanje Košijevog problema običnih diferencijalnih jednačina prvog reda, izvršeno je poređenje navedene dve metode sa sparivanjem jedinki prostom razmenom gena (1) i sparivanjem rangiranjem (2). Rezultati su zatim poređeni sa dobijenim rezultatima numeričkih metoda, izrađenim softverom za rešavanje obične diferencijalne jednačine eksplicitnim i modifikovanim implicitnim Ojlerovim metodom [2] sa rešavanjem nelinearnih jednačina metodom polovljenja intervala. Pored toga korišćen je i Runge Kuta metod reda 5 sa mogućnošću promene vrednosti koraka. Numerički eksperiment je izvršen u softveru Matlab. Pozivanjem funkcije „*ode45*“ [10], pozivan je solver za rešavanje diferencijalne jednačine Runge Kuta metodom reda 4, 5.

Prvi Košijev problem koji je rešavan predstavljen je u sledećem obliku:

$$y'(x) = 2 \cdot x^3 \cdot y^3 - 2 \cdot x \cdot y, \quad y(1) = \frac{1}{2} \tag{17}$$

Analitičko rešenje ovog Košijevog problema je:

$$y = \frac{1}{x(\ln x + 2)} \tag{18}$$

Drugi Košijev problem koji je rešavan zadat je kao:

$$y'(\mathrm{x}) = 2 \cdot (\mathrm{x}^3 - \mathrm{x}^2), \quad y(1) = 0 \tag{19}$$

Analitičko rešenje ovog Košijevog problema je:

$$y = \frac{x^4}{2} - \frac{2 \cdot x^3}{3} + \frac{1}{6} \tag{20}$$

U oba Košijeva problema rešenja se traže na intervalu x od $[1,\ 2]$. Vrednosti funkcije y se nalazi u sledećim tačkama:

$$x_i = 1 + i \cdot 0{,}1 \qquad i = 1, 2, \ldots, 10 \tag{21}$$

Parametri GA za prvi metod rešavanja u oba slučaja sparivanja su:

- Broj jedinki u populaciji je 51; Broj gena u jedinki je 10;
- Mutacioni faktor je 20%; Procenat populacije koji se odstranjuje je 50%;
- Granice u kojima se traži rešenje su [0,3].

Parametri GA za drugi metod rešavanja i drugi metod sparivanja su:

- Broj jedinki u populaciji je 20 (za slučaj k=6 uzet je 51); Broj gena u jedinki je k=4,5,6;
- Mutacioni faktor je 20%; Procenat populacije koji se odstranjuje je 50%;
- Granice u kojima se traže koeficijenti polinoma su [-1,1].

Nakon obavljenih eksperimenata GA, prvi metod od 10 slučajeva zaustavljen je 4 puta kriterijumom konvergencije, koji se odnosi na tačnost rešenja, metodom sparivanja 1, dok je 5 od 10 puta zaustavljen istim kriterijumom konvergencije metodom sparivanja 2. Za razliku od prvog tipa GA, drugi tip je kriterijumom konvergencije, koji se odnosi na tačnost rešenja od 10 puta iskonvergirao 10 i 8 puta za polinome reda 4 i 5, dok je za k=6 iskonvergirao 6 puta, pri čemu je uzeta populacija od 51 jedinke. Sva izračunavanja su vršena na računaru sa CPU Intel Core i7-4710HQ procesorom. Prosečna vremena trajanja algoritma do zadovoljenja kriterijuma konvergencije koji se odnosi na tačnost rešenja prvog Košijevog problema data su u tabeli 1. U tabeli 2 i 3 prikazane su diskretizovane vrednosti funkcija koje se odnose na svaku od metode pojedinačno

Tabela 1. Vreme trajanja eksperimenta prvog Košijevog problema

Tabela 1. Vreme trajanja eksperimenta prvog Košijevog problema

	GA prva metoda - 1	GA prva Metoda - 2	GA druga metoda – sparivanje 2			Ojlerov metod		Implicitni Ojlerov metod		Runge Kutta 4,5
			k=4	*k* =5	*k* =6	*h*=0.1	*h* =0.01	*h* =0.1	*h* =0.01	
Vreme [sek]	43,512	57,984	34,56	109,66	201,88	0,001	0,011	0,003	0,009	0,002

Tabela 2. Vrednosti izračunatih funkcija prvog Košijevog problema

X	GA prva metoda		GA druga metoda -			Ojlerov metod		Implicitni Ojlerov metod		Runge Kuta 4, 5	Analitičko rešenje
	1	2	*k*=4	*k* =5	*k* =6	*h* =0,1	*h* =0,01	*h* =0,1	*h* =0,01		
1	0,413	0,401	0,429	0,446	0,426	0,425	0,426	0,428	0.426	0,426	0,426
1.1	0,336	0,329	0,364	0,359	0,355	0,374	0,354	0,384	0,355	0,354	0,354
1.2	0,271	0,256	0,292	0,297	0,287	0,283	0,287	0,287	0,287	0,287	0,287
1.3	0,224	0,205	0,228	0,230	0,227	0,219	0,226	0,221	0,226	0,226	0,226
1.4	0,182	0,174	0,178	0,174	0,174	0,163	0,173	0,168	0,173	0,174	0,174
1.5	0,134	0,131	0,133	0,138	0,130	0,117	0,128	0,121	0,129	0,129	0,129
1.6	0,100	0,100	0,096	0,101	0,094	0,081	0,093	0,083	0,093	0,094	0,094
1.7	0,063	0,047	0,071	0,076	0,067	0,054	0,066	0,058	0,066	0,067	0,067
1.8	0,032	0,037	0,055	0,046	0,047	0,035	0,045	0,043	0,045	0,046	0,046
1.9	0,017	0,030	0,037	0,040	0,032	0,022	0,030	0,027	0,031	0,031	0,031
2	0,413	0,401	0,429	0,446	0,426	0,425	0,426	0,428	0,426	0,426	0,426

Tabela 3. Vrednosti izračunatih funkcija drugog Košijevog problema

X	GA prva metoda		GA druga metoda -			Ojlerov metod		Implicitni Ojlerov metod		Runge Kuta 4, 5	Analitičko rešenje
	1	2	*k*=4	*k* =5	*k* =6	*h* =0.1	*h* =0.01	*h* =0.1	*h* =0.01		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.1	0,011	0,016	0,009	0,015	0,015	0	0,010	0,024	0,012	0,011	0,011
1.2	0,046	0,058	0,048	0,058	0,056	0,024	0,048	0,081	0,054	0,051	0,051
1.3	0,088	0,124	0,128	0,138	0,131	0,081	0,125	0,183	0,135	0,130	0,130
1.4	0,173	0,234	0,259	0,265	0,265	0,183	0,250	0,340	0,266	0,258	0,258
1.5	0,331	0,391	0,452	0,452	0,449	0,340	0,436	0,564	0,459	0,447	0,447
1.6	0,555	0,616	0,721	0,714	0,711	0,564	0,697	0,872	0,728	0,712	0,712
1.7	0,859	0,913	1,078	1,065	1,063	0,872	1,047	1,276	1,087	1,067	1,067
1.8	1,251	1,306	1,539	1,523	1,521	1,276	1,501	1,795	1,553	1,527	1,527
1.9	1,772	1,824	2,121	2,104	2,103	1,795	2,077	2,444	2,142	2,110	2,110
2	2,420	2,471	2,840	2,830	2,828	2,444	2,793	2,999	2,873	2,833	2,833

U tabeli 4 i 5 prikazane su prosečne vrednosti relativnih grešaka za svaku od navedenih metoda u poređenju sa analitičkim rešenjem.

Tabela 4. Relativne greške pri rešavanju prvog Košijevog problema

	GA prva metoda		GA druga metoda			Ojlerov Metod		Implicitni Ojlerov metod		Runge Kuta 4, 5
Rel Greška %	1	2	*k*=4	*k* =5	*k* =6	*h*=0.1	*h* =0.01	*h*=0.1	*h* =0.01	
	11,08%	9,49%	5,37%	6,77%	0,52%	11,47%	1,05%	6,76%	0,57%	0

Tabela 5. Relativne greške pri rešavanju drugog Košijevog problema

	GA prva metoda		GA druga metoda			Ojlerov Metod		Implicitni Ojlerov metod		Runge Kuta 4, 5
Rel Greška %	1	2	*k*=4	*k* =5	*k* =6	*h*=0.1	*h* =0.01	*h*=0.1	*h* =0.01	
	19,82%	15,78%	3,11%	6,55%	5,05%	32,73%	3,42%	35,15%	3,47%	0

Može se zaključiti da je Runge Kuta najbolja numerička metoda za određivanje rešenja obične diferencijalne jednačine. Najlosiju tačnost rešenja daju Ojlerove metode metod za korak 0,1. GA prvog tipa pokazuje veće vrednosti grešaka u odnosu na GA drugog tipa. Sparivanjem 1 dobijaju se nepreciznija rešenja u odnosu na sparivanjem 2 pri korišćenju GA prvog tipa. GA drugog tipa pokazuje najmanju grešku pri konstrukciji polinoma 6 reda. Primećuje se da povećanje reda polinoma ne garantuje da će do smanjenja vrednosti relativne greške, nego se i produžava prosečno vreme izračunavanja usled povećanja populacije čime se ne garantuje konvergencija metode. Metoda GA drugog tipa pokazuje podjednaku vrednost greške kao pri korišćenju Ojlerove metode i implicitne Ojlerove metode sa korakom 0,01. Prosečno vreme izračunavanja GA prvog tipa je veće u odnosu na GA drugog tipa za k=4. GA pokazuju potrebu za mnogo dužim prosečnim vremenom izračunavanja u odnosu na ostale numeričke metode čime oni praktično postaju neupotrebljivi. Veliki udeo u vremenu izračunavanja GA se tiče početnog izbora populacije, stoga da bi se dobila rešenja sa većom preciznošću kod GA prvog tipa preporučuje se određivanje jedinke populacije Ojlerovim metodom, a zatim nastavljanje pretrage na način koji je opisan u tekstu.

4. ZAKLJUČAK

Na osnovu izložene teorije i izvršenih eksperimenata može se izvesti nekoliko bitnih zaključaka:

- Primenom GA prvog tipa i drugog tipa mogu se dobiti zadovoljavajuća rešenja diferencijalnih jednačina. Pored toga GA drugog tipa daje manje vrednosti relativnih grešaka aproksimativnog rešenja u odnosu na GA prvog tipa.
- GA drugog tipa pokazuju bolje vrednosti aproksimacije od Ojlerovog metoda za vrednosti koraka 0,1, i slične greške aproksimacija za vrednost koraka 0,01.
- Bez obzira na vrednost greške GA se pokazuju kao vrlo neefikasan aparat u rešavanju običnih diferencijalnih jednačina prvog reda usled dugačkog vremena izvršavanja.

LITERATURA

[1] Butcher, J. C. (1987). *The numerical analysis of ordinary differential equations: Runge-Kutta and general linear methods*: Wiley-Interscience.

[2] Cvetković, A., & Spalević, M. (2013). *Numeričke metode*: Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet.

[3] Fatimah, B. O., Senapon, W. A., & Adebowale, A. M. (2015). Solving Ordinary Differential Equations with Evolutionary Algorithms. *Open Journal of Optimization, 4*(03), 69.

[4] Ixaru, L. G. (2013). *Runge-Kutta methods of special form.* Paper presented at the Journal of Physics: Conference Series.

[5] Mastorakis, N. E. (1996). Solving differential equations via genetic algorithms. *Proceedings of the Circuits, Systems and Computers, 96*, 15-17.

[6] Mastorakis, N. E. (2005). Numerical solution of non-linear ordinary differential equations via collocation method(finite elements) and genetic algorithms. *WSEAS Transactions on Information Science and Applications, 2*(5), 467-473.

[7] Mastorakis, N. E. (2006). Unstable ordinary differential equations: solution via genetic algorithms and the method of Nelder-Mead. *WSEAS Transactions on Mathematics, 5*(12), 1276.

[8] Mateescu, G. D. (2006). On the application of genetic algorithms to differential equations. *Romanian Journal of Economic Forecasting, 7*(2).

[9] Sadollah, A., & Kim, J. H. (2016). Imprecise Solutions of Ordinary Differential Equations for Boundary Value Problems Using Metaheuristic Algorithms. *Handbook of Research on Modern Optimization Algorithms and Applications in Engineering and Economics*, 401.

[10] Yang, W. Y., Cao, W., Chung, T.-S., & Morris, J. (2005). *Applied numerical methods using MATLAB*: John Wiley & Sons.