

**dr Predrag Elek, dipl. inž.**  
**dr Slobodan Jaramaz, dipl. inž.**  
**dr Dejan Micković, dipl. inž.**

## Fragmentacija košuljice razornih projektila: Zakoni raspodele mase parčadi i fizički modeli fragmentacije

- kumulativna naučnotehnička informacija -

# FRAGMENTACIJA KOŠULJICE RAZORNIH PROJEKTILA: ZAKONI RASPODELE MASE PARČADI I FIZIČKI MODELI FRAGMENTACIJE

## Izvod:

Predmet istraživanja je modeliranje fragmentacija košuljice razornih projektila, kao fenomena od ključnog značaja za projektovanje i ocenu efikasnosti projektila parčadnog dejstva. Osnovni ciljevi istraživanja su: (i) formulisanje fizičkih zakonitosti koje definišu karakterističnu veličinu i masu formiranih parčadi, i (ii) određivanje zakona raspodele veličine i mase generisanih fragmenata.

U prvom poglavlju date su definicije osnovnih pojmova, ukazano je na ključne osobenosti dinamičke fragmentacije i dat je sažet prikaz različitih pristupa modeliranju procesa fragmentacije.

U drugom poglavlju razmatrani su empirijski zakoni raspodele veličine, odnosno mase parčadi koja predstavljaju rezultat dinamičke fragmentacije. Najpre je analizirana slučajna fragmentacija prostora zasnovana na primeni geometrijske statistike. Takođe su analizirani relevantni empirijski zakoni raspodele mase fragmenata – generalizovana Mott-ova raspodela, generalizovana Grady-Kipp raspodela, lognormalna raspodela, Weibull-ova i Held-ova raspodela. Formirani su kriterijumi za komparaciju različitih teorijskih pristupa, zasnovani na optimizaciji slobodnih parametara u navedenim raspedelama i međusobnom upoređivanju podešenog koeficijenta determinacije. Analiza ovih kriterijuma na dostupnoj bazi od 30 eksperimentalnih rezultata fragmentacije razornih projektila pokazala je da rezultate eksperimenata najbolje opisuje troparameterska generalizovana Grady-Kipp raspodela. Ovaj model se preporučuje za predikciju raspodele fragmenata razornih projektila.

Fizički zasnovani modeli procesa fragmentacije predmet su analize u trećem poglavlju. Najpre je detaljno razmotren Mott-ov jednodimenzioni model fragmentacije prstena (cilindra). Potom je razmotren analitički pristup Mott-ovom modelu fragmentacije, kao i energetska ograničenja ovog modela. Takođe su formulisane generalizacije objedinjenog modela za slučajeve dvodimenzione i trodimenzione fragmentacije. Razmotren je i Grady-jev čisto energetski model fragmentacije, kao i važna modifikacija Glenn-Chudnovsky. Analizirani modeli omogućavaju predikciju karakteristične veličine, odnosno mase fragmenta.

**Ključne reči:** projektil, razorni projektil, fragmentacija projektila, košuljica, parčadno dejstvo, zakon raspodele mase, statistička analiza

# **Fragmentation of HE projectile casings: Fragment mass distribution laws and physics based fragmentation models**

## **Abstract**

Subject of the present research is modeling of fragmentation of HE warheads casings, as the phenomenon of the utmost importance for fragmentation warheads design and efficiency analysis. Therefore, central objectives of the research are: (i) formulation the physical relations that enable determination of the characteristic fragment size and mass, and (ii) determination of the fragment mass distribution law.

In the first chapter, definitions of the basic concepts are given, the key characteristics of the dynamic fragmentation processes are indicated, and different approaches to the fragmentation modeling are reviewed.

In chapter two, empirical laws of fragment size and mass distribution have been considered. Random fragmentation of a space applying geometric statistics is analyzed first. The relevant empirical laws of fragment mass distribution are also analyzed: the generalized Mott law, the generalized Grady-Kipp distribution, the lognormal, the Weibull, and the Held distribution. The criteria for comparison of different theoretical distributions are established based on the optimization of the free parameters in analyzed models and computation of the adjusted coefficient of determination. Statistical analysis of these criteria on the available database of 30 experimental results of HE projectiles fragmentation has shown that three-parametric generalized Grady-Kipp distribution provides the best description of experimental data. This model is suggested for prediction of HE projectiles fragment mass distribution.

Physically based fragmentation models are the subject of analysis in chapter three. The Mott's one-dimensional fragmentation of the ring (cylinder) model is thoroughly analyzed first. Then, the analytical approach to this model is considered and energy-based constrains of the model has been introduced. The generalization of merged model is formulated for the cases of 2D and 3D fragmentation. Also, the Grady's pure energetic model has been considered as well as the important modification of Glenn-Chudnovsky. The analyzed models enable prediction of the characteristic size and mass of generated fragments.

**Keywords:** projectile, high explosive projectiles, projectile fragmentation, casings, fragmentation, mass distribution law, statistical analysis

# Fragmentation des enveloppes d'obus: Lois de distribution de mass et modèles de fragmentation basés sur la physique

## Résumé

Le sujet de la présente recherche est la modélisation de la fragmentation des enveloppes des obus, comme le phénomène de la plus haute importance pour la conception des ogives de fragmentation et pour l'analyse d'efficacité. Par conséquent, les objectifs centraux de la recherche sont les suivants: (i) la formulation des relations physiques qui permettent de déterminer la taille et la masse d'un fragment caractéristique, et (ii) la détermination de la loi de distribution de masse des fragments.

Dans le premier chapitre, les définitions des concepts de base sont données, les principales caractéristiques des processus de fragmentation dynamique sont indiqués, et différentes approches de la modélisation de fragmentation sont passés en revue.

Dans le chapitre deux, les lois empiriques de la taille des fragments et de la distribution de masse ont été considérés. Fragmentation aléatoire d'un espace avec application des statistiques géométrique est analysée en premier lieu. Les lois empiriques pertinentes de la distribution de masse des fragments sont également analysées: la loi généralisée de Mott, la distribution généralisée de Grady-Kipp, la distribution log-normale, les distributions de Weibull, et de Held. Les critères de comparaison des différentes distributions théoriques sont établis en fonction de l'optimisation des paramètres libres dans les modèles analysés et le calcul du coefficient de détermination ajusté. L'analyse statistique de ces critères sur la base de données disponibles de 30 résultats expérimentaux de la fragmentation des obus a montré que la distribution trois-paramétrique, généralisée de Grady-Kipp assure la meilleure description des données expérimentales. Ce modèle est proposé pour la prédiction de la distribution de masse des fragments des projectiles.

Les modèles fondés sur la physique de fragmentation font l'objet d'analyse dans le chapitre trois. Le modèle de Mott de la fragmentation unidimensionnel de l'anneau (cylindre) est d'abord analysé en profondeur. Ensuite, l'approche analytique de ce modèle est considérée et les contraintes du modèle à base de l'énergie ont été introduites. La généralisation du modèle de fusion est formulé pour les cas de fragmentation 2D et 3D. En outre, le modèle de pure énergie de Grady a été considéré ainsi que l'importante modification de Glenn-Chudnovsky. Les modèles analysés permettent de prédire la taille caractéristique et la masse des fragments générés.

**Mots-clés:** ogives de fragmentation, fragmentation dynamique, distribution de la masse des fragments, l'analyse statistique

# SADRŽAJ

<b>OZNAKE</b> .....	<b>6</b>
<b>1. UVOD</b> .....	<b>8</b>
<b>1.1. Fragmentacija – pojam i primene</b> .....	<b>8</b>
<b>1.2. Podela fragmentacionih procesa</b> .....	<b>9</b>
<b>1.3. Osobnosti procesa dinamičke fragmentacije</b> .....	<b>9</b>
<b>1.4. Fragmentacija cilindra pod dejstvom produkata detonacije</b> .....	<b>12</b>
<b>1.5. Pristupi modeliranju dinamičke fragmentacije</b> .....	<b>13</b>
<b>1.6. Pregled razvoja teorije dinamičke fragmentacije</b> .....	<b>14</b>
<b>2. EMPIRIJSKI ZAKONI RASPODELE VELIČINE I MASE FRAGMENTATA</b> .....	<b>17</b>
<b>2.1. Uvod</b> .....	<b>17</b>
<b>2.2. Geometrijski pristup</b> .....	<b>19</b>
2.2.1. Jednodimenziona slučajna fragmentacija .....	19
2.2.2. Dvodimenziona fragmentacija .....	23
2.2.3. Trodimenziona fragmentacija .....	25
2.2.4. Poređenje sa rezultatima eksperimenata .....	27
<b>2.3. Statistički pristup</b> .....	<b>31</b>
<b>2.4. Ostali empirijski zakoni raspodele mase fragmenata</b> .....	<b>37</b>
2.4.1. Generalizovana Mott-ova raspodela .....	37
2.4.2. Raspodela Stromsoe-Ingebrigtsena .....	38
2.4.3. Generalizovana Grady-Kipp raspodela.....	38
2.4.4. Lognormalna raspodela.....	38
2.4.5. Weibull-ova raspodela .....	39
2.4.6. Held-ova raspodela .....	39
2.4.7. Stepni zakon raspodele.....	39
<b>2.5. Analiza i poređenje modela raspodele mase parčadi</b> .....	<b>40</b>
<b>3. FIZIČKI ZASNOVANI MODELI FRAGMENTACIJE</b> .....	<b>48</b>
<b>3.1. Uvod</b> .....	<b>48</b>
<b>3.2. Mott-ov model jednodimenzione fragmentacije</b> .....	<b>48</b>
3.2.1. Model loma materijala košuljice .....	48
3.2.2. Talas rasterećenja i generisanje fragmenata.....	50
3.2.3. Proračun dužina fragmenata.....	51
3.2.4. Analiza rezultata modela.....	53
3.2.5. Poređenje sa rezultatima eksperimenata .....	55
3.2.6. Analitičko rešenje Mott-ovog modela .....	56
<b>3.3. Energetski pristup modeliranju fragmentacije</b> .....	<b>60</b>
3.3.1. Energetska ograničenja Mott-ovog modela .....	60
3.3.2. Objedinjavanje Mott-ovog modela i energetskog ograničenja .....	62
3.3.3. Dvodimenziono uopštenje Mott-ovog modela.....	63
3.3.4. Trodimenziono uopštenje Mott-ovog modela.....	68
3.3.5. Grady-jev energetski pristup.....	70
3.3.6. Modifikacija Glenn-Chudnovsky .....	73
<b>4. ZAKLJUČAK</b> .....	<b>76</b>
<b>IZJAVA ZAHVALNOSTI</b> .....	<b>78</b>
<b>LITERATURA</b> .....	<b>79</b>

## OZNAKE

$a$	(m <sup>2</sup> )	– površina fragmenta
$B$		– parametar u Held-ovoj raspodeli
$C$	(kg)	– masa eksplozivnog punjenja
$c$	(m/s)	– brzina prostiranja elastičnih talasa u materijalu
$d$	(m)	– prečnik fragmenta
$D$	(m/s)	– brzina detonacije
$E_G$	(J/kg)	– Gurney-jeva energija
$E_k$	(J)	– kinetička energija fragmenta
$f$		– parametar u modifikovanoj Grady-Kipp raspodeli
$f(l)$		– funkcija gustine raspodele dužine fragmenata
$f_M(m)$		– funkcija gustine raspodele mase fragmenata
$f_N(m)$		– funkcija gustine raspodele broja fragmenata
$K$	(Pa)	– zapreminski modul elastičnosti materijala
$K_f$	(Pa·m <sup>1/2</sup> )	– žilavost fragmentacije
$l$	(m)	– dužina fragmenta
$M$	(kg)	– masa metala
$m$	(kg)	– masa fragmenta
$\bar{m}$	(kg)	– srednja masa fragmenata
$\tilde{m}_N$	(kg)	– medijana u odnosu na broj fragmenata
$\tilde{m}_M$	(kg)	– medijana u odnosu na masu fragmenata
$M(m)$	(kg)	– kumulativna masa fragmenata
$n$		– dimenzionalnost procesa
$N(m)$		– kumulativni broj fragmenata
$N_0$		– ukupan broj fragmenata
$p$		– verovatnoća loma materijala
$P(l)$		– kumulativni zakon raspodele dužine fragmenata
$r$	(m)	– radijus prstena (cilindra)
$r$		– izduženost fragmenta
$\bar{R}^2$		– korigovani koeficijent determinacije
$s_0$	(m)	– nominalna dužina fragmenta
$s_{\min}$	(m)	– minimalna dužina fragmenta
$t$	(s)	– vreme
$v$	(m/s)	– brzina materijala
$v$	(m <sup>3</sup> )	– zapremina fragmenta
$W$		– broj rasporeda prslina
$x$	(m)	– položaj fronta talasa rasterećenja
$x_0$	(m)	– nominalna dužina fragmenta
$y$	(m)	– otvor prsline
$\alpha$		– parametar u 1D zakonu raspodele
$\beta$		– parametar u 2D zakonu raspodele
$\gamma$		– parametar u 3D zakonu raspodele
$\varepsilon$		– relativna deformacija
$\dot{\varepsilon}$	(1/s)	– brzina deformacija
$\bar{\varepsilon}$		– srednja vrednost relativne deformacije pri kojoj dolazi do loma
$\Gamma$	(J/m <sup>2</sup> )	– specifična energija loma

$\Gamma_s$	(J)	–	površinska energija fragmenata
$\theta$	(°)	–	ugao odbacivanja obloge
$\lambda$	(1/m)	–	gustina tačaka loma po jedinici dužine
$\lambda$		–	parametar u Held-ovoj raspodeli
$\mu$	(kg)	–	parametar u Mott-ovoj raspodeli
$\mu_1,$		–	parametri u modifikovanom Grady-Kipp zakonu raspodele
$\mu_2$			
$\rho$	(kg/m <sup>3</sup> )	–	gustina
$\sigma$	(Pa)	–	napon

# 1. UVOD

## 1.1. Fragmentacija – pojam i primene

Fragmentacija je proces strukturne dezintegracije tela, tj. formiranja izvesnog broja parčadi usled višestrukog loma materijala fragmentacionog tela. Reč je o fundamentalnoj pojavi koja može da se odigrava u različitim prostornim i vremenskim razmerama. Fragmentacija karakteriše veliki broj raznovrsnih fizičkih procesa u prirodnim i tehničkim sistemima, kao što su: sudari različitih objekata (od elementarnih čestica, udara probojnih projektila u prepreku, pa do kosmičkih tela), kontrolisani procesi drobljenja/mlevenja materijala, različite vrste procesa indukovanih eksplozijom i sl.

Primene kontrolisane fragmentacije su brojne i mogu se s obzirom na namenu klasifikovati u dve grupe: vojne i civilne primene.

Vojne primene su u pravilu vezane za oblast balistike na cilju – reč je o grani balistike koja se bavi mehanizmima delovanja projektila i njegovom interakcijom sa ciljem. Prirodna i kontrolisana fragmentacija predstavljaju ključne mehanizme delovanja projektila parčadnog dejstva. Takođe, fragmentacija probojnog projektila, kao i same napadnute prepreke, predstavlja jedan od mogućih ishoda penetracionog procesa. Izučavanje fragmentacije kumulativnog mlaza je veoma važno za ocenu efikasnosti ove vrste projektila probojnog dejstva. Fragmentacija materijala prepreke na njenoj zadnjoj površini usled dejstva udara ili kontaktne detonacije (*spalling*) takođe je važan mehanizam probojnog dejstva. Konačno, proučavanje navedenih vidova fragmentacije značajno je sa stanovišta analize otpornosti i optimizacije zaštite potencijalnih ciljeva koji mogu biti izloženi parčadnom dejstvu. Najznačajnija istraživanja u domenu eksperimentalne fragmentacije, kao i najveći broj teorijskih modela fragmentacije bili su motivisani primenama u domenu odbrambenih tehnologija.

Tradicionalne civilne primene vezane su za fragmentaciju geoloških materijala u rudarstvu, naftnoj industiji i građevinarstvu. Modeliranje procesa fragmentacije značajno je i sa aspekta strukturnog integriteta i sigurnosti rezervoara sa visokoenergetskim materijama. Aktuelna su istraživanja u domenu nuklearne fizike koja su usmerena na bombardovanje i posledičnu fragmentaciju teških atomskih jezgara. Mnogi astrofizički i kosmološki modeli zasnovani su na zakonitostima procesa fragmentacije. Posebno su zanimljiva istraživanja fragmentacije metalnih prstenova i cilindara sa aspekta primene u generatorima elektromagnetnog impulsa putem sabijanja magnetnog fluksa primenom eksploziva. Ovako proizvedeni izuzetno snažni elektromagnetni impulsi (snage reda  $10^{13}$  W) koriste se za ubrzavanje objekata do veoma velikih brzina u cilju različitih eksperimetalnih istraživanja, ali i kao sredstvo elektronskog ratovanja.



## 1.2. Podela fragmentacionih procesa

Postoje brojne klasifikacije procesa fragmentacije koje su zasnovane na različitim kriterijumima.

Osnovna podela fragmentacionih procesa vezana je za karakter opterećenja koja izazivaju fragmentaciju. Naprezanje, deformisanje i lom materijala mogu biti izazvani kvazistatičkim silama ili dinamičkim opterećenjem, tako da razlikujemo dva osnovna tipa procesa:

- kvazistatičke procese fragmentacije, kao što je drobljenje materijala, karakteriše ponovljeno dejstvo ustaljenih opterećenja koje dovodi do sekvencijalne fragmentacije, tj. ponovljene fragmentacije već formiranih fragmenata;
- dinamičku fragmentaciju, koja je posledica delovanja snažnih impulsnih opterećenja koja praktično izazivaju jednovremeno formiranje izvesnog broja fragmenata; dve osnovne vrste procesa koje izazivaju dinamičku fragmentaciju su udari i eksplozije.

Sa aspekta porekla fragmenata, njihovog dejstva i zaštite od posledica fragmentacije razlikuju se:

- primarna fragmentacija, koja je posledica inicijalne (osnovne) eksplozije ili udara; primarni fragmenti nastaju kao rezultat procesa primarne fragmentacije;
- sekundarna fragmentacija, koja nastaje usled naknadnog dejstva primarne fragmentacije, npr. dejstvo udarnog talasa ili primarnih fragmenata može da izazove sekundarnu fragmentaciju objekata koji se nalaze u okolini.

S obzirom na vrstu materijala fragmentacionog tela, sa stanovišta primene su interesantni: metali, geološki materijali, keramika i staklo. Suštinski se razlikuju procesi fragmentacije krutih i žilavih materijala.

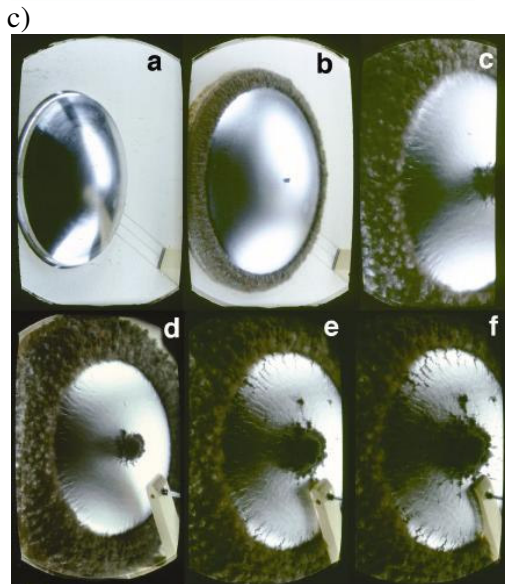
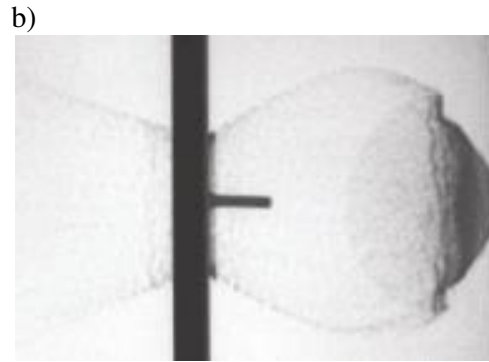
U zavisnosti od broja prostornih dimenzija koje karakterišu fragmentacioni proces, razlikujemo jednodimenzionu (1D), dvodimenzionu (2D) i trodimenzionu (3D) fragmentaciju. Na slici 1.1 prikazani su primeri fragmentacionih procesa različite dimenzionalnosti.

U ovom radu biće razmotrena 1D, 2D i 3D dinamička primarna fragmentacija metalnih struktura.

## 1.3. Osobnosti procesa dinamičke fragmentacije

Osnovna osobnost dinamičke fragmentacije i dinamičkog loma materijala u odnosu na kvazistatičke uslove je prisustvo udarnih talasa u opterećenom fragmentacionom telu. Udarni talasi nastaju kao posledica delovanja impulsnih opterećenja – udara i eksplozija. Da bi došlo do loma neophodno je da ovi talasi izazovu naprezanja, odnosno deformacije materijala koje prevazilaze kritične vrednosti.

Postavlja se pitanje koja je osnovna razlika u mehanizmima koji sa jedne strane dovode do tipičnog kvazistatičkog loma materijala, a sa druge strane do fragmentacije u uslovima dinamičkog loma.

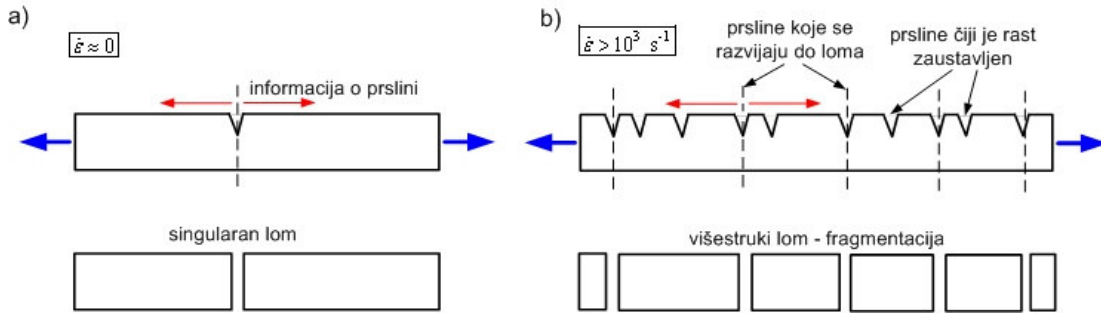


**Sl. 1.1.** Primeri procesa dinamičke fragmentacije različite dimenzionalnosti:

- a) jednodimenziona fragmentacija prstena, prikaz nefragmentisanog prstena i fragmenata generisanih putem elektromagnetnog opterećenja [4],
- b) radiografski snimak trodimenzionone fragmentacije usled udara aluminijumskog projektila u tanku aluminijumsku prepreku pri brzini od  $\sim 7\text{km/s}$  [49],
- c) dvodimenziona fragmentacija dela tanke sfere pod dejstvom produkata detonacije, snimci dobijeni ultrabrzom fotografijom [5]

Razmotrimo najpre kvazistatički lom (sl.1.2a). Pri postepenom povećavanju opterećenja u slučaju zategnutog štapa, pri određenoj kritičnoj vrednosti napona dolazi do formiranja inicijalne prsline (u slučaju krutih materijala) ili lokalizovanog tečenja materijala koje dovodi su kontrakcije poprečnog preseka štapa (za slučaj žilavih materijala). S obzirom da je brzina povećavanja opterećenja mala, informacija o formiranom “slabom” preseku stiže u sve druge preseke opterećenog uzorka pre nego što dođe do značajnog povećanja opterećenja i stvaranja novih prsline ili kontrakcija. Na taj način, dolazi do koncentracije napona na inicijalno formiranom oslabljenom preseku. Rezultat je klasičan kvazistatički lom materijala koji rezultira formiranjem dva fragmenta.

U slučaju impulsnih opterećenja, odnosno dinamičkog loma materijala (sl. 1.2b), brzina porasta opterećenja je znatno veća od brzine prostiranja informacije o inicijalno oslabljenom preseku (brzina tzv. Mott-ovog talasa koja je definisana u odeljku 3.2). Zbog toga dolazi do stvaranja veoma velikog broja oslabljenih preseka opterećenog materijala u veoma kratkom vremenskom intervalu. Zavisno od broja ovakvih preseka, intenziteta i brzine opterećenja, karaktera deformacije, kao i komunikacije između ovih oslabljenih preseka, jedan broj započetih procesa loma se zaustavlja, dok se izvestan broj oslabljenih preseka do kraja razvije do konačnog loma materijala. Tako dolazi do višestrukog loma materijala, odnosno fragmentacije.



**Sl. 1.2.** Fenomenologija nastanka loma materijala: a) kvazistatičko opterećenje dovodi do klasičnog singularnog loma, b) impulsno opterećenje izaziva dinamička naprezanja i dovodi do višestrukog loma materijala, odnosno fragmentacije

Za proces fragmentacije su od ključnog značaja dve grupe ulaznih parametara: karakter opterećenja i osobine materijala. Jedna od najvažnijih fizičkih karakteristika procesa je brzina nastalih deformacija  $\dot{\epsilon}$  materijala fragmentacionog tela, koja zavisi od dve pomenute grupe parametara. U tabeli 1.1 je predstavljena klasifikacija opterećenja i odgovarajućih metoda njihovog kreiranja i ispitivanja upravo u zavisnosti od brzine deformacija.

**Tabela 1.1.** Klasifikacija opterećenja s obzirom na karakterističnu brzinu deformacija i odgovarajuće metode ispitivanja; prema [41]

Brzina deformacije $\dot{\epsilon}$ ( $s^{-1}$ )	Kategorija	Metoda ispitivanja
$10^{-9} - 10^{-5}$	Relaksacija napona, puzanje	Konvencionalne metode
$10^{-5} - 10^0$	Kvazistatička opterećenja	Hidraulične mašine
$10^0 - 10^3$	Dinamička opterećenja (male brzine deformacija)	Visokobrzinske mašine
$10^3 - 10^5$	Dinamička opterećenja (velike brzine deformacija)	Primena eksploziva
$10^5 - 10^7$	Dinamička opterećenja (ultrabrze deformacije)	Eksplozivi, udari ultra-brzinama, laseri

Procesi dinamičkog loma i fragmentacije materijala koji će se dalje razmatrati spadaju u grupu dinamičkih procesa koje karakterišu velike deformacije i velike brzine deformacija, koje pripadaju intervalu  $\dot{\epsilon} = 10^3 \dots 10^5 s^{-1}$ .

Iz navedenog je jasno da su zakonitosti ponašanja razmatranog materijala fragmentacionog tela u uslovima dinamičkih opterećenja od ključnog značaja za modeliranje dinamičke fragmentacije.

Za dinamičku fragmentaciju je od posebnog značaja proučavanje tri osnovna mehanizma koja dovode do dinamičkog loma materijala [60]:

- brzo prostiranje prslina u materijalu, što karakteriše lom dominantno krutih materijala,
- brzo stvaranje, rast i spajanje mikro-šupljina u opterećenom materijalu predstavlja važan mehanizam koji dovodi do loma žilavih materijala,

- formiranje zona (pojaseva) adijabatskog smicanja predstavlja poseban slučaj loma materijala usled smicanja koji takođe karakteriše dinamička naprezanja žilavih materijala.

U praksi se često istovremeno sreću dve ili sve tri prethodno navedene pojave.

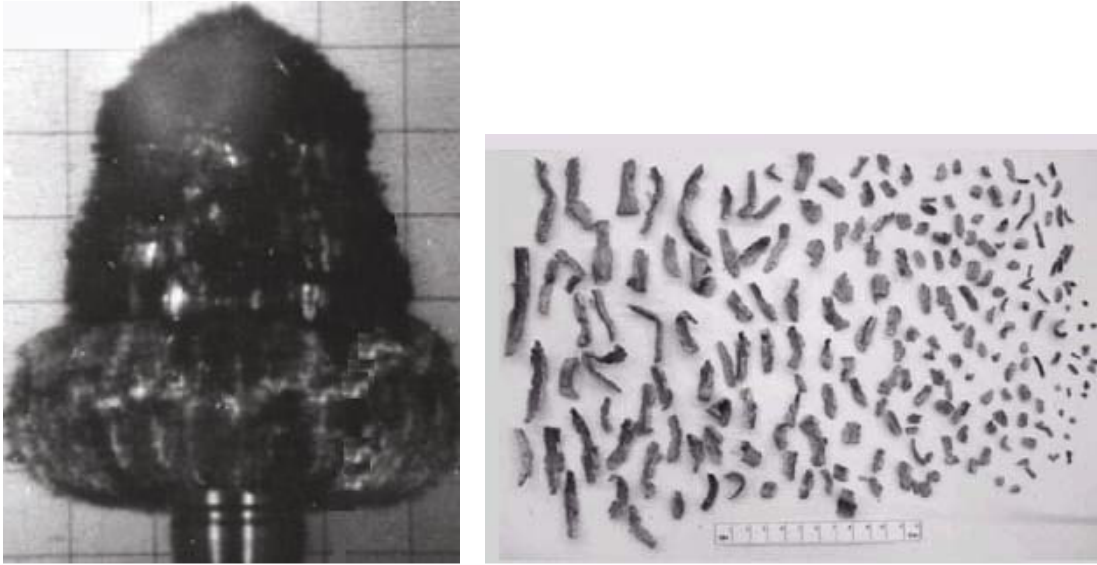
U fokusu ove naučnotehničke informacije je jedna klasa problema dinamičke fragmentacije tela do koje dolazi pod dejstvom snažnog impulsnog opterećenja i koja je od interesa za analizu problema balistike na cilju. Reč je o fragmentacija cilindra pod dejstvom unutrašnjeg pritiska koji stvaraju gasoviti produkti detonacije eksploziva.

#### **1.4. Fragmentacija cilindra pod dejstvom produkata detonacije**

Modeliranje fragmentacije košuljice razornih projektila od ključnog je značaja za projektovanje, redizajniranje i ocenu efikasnosti projektila parčadnog dejstva. Treba istaći da u novije vreme sve značajnije mesto u klasi projektila parčadnog dejstva imaju konstrukcije sa prefragmentisanim parčadima, kao i košuljice kod kojih se ostvaruje tzv. kontrolisana fragmentacija. Na ovaj način se obezbeđuje optimizacija mase i oblika formiranih fragmenata. Međutim, klasično rešenje košuljica koje se rasprskavaju putem prirodne fragmentacije i dalje predstavlja dominantan pristup iz više razloga, od kojih su najznačajniji: (i) strukturna otpornost u uslovima velikih ubrzanja u fazi kretanja kroz cev, odnosno lansiranja projektila, (ii) jednostavnost i tehnološkičnost konstrukcije, te njena pouzdanost i cena.

Detonacijom eksploziva u košuljici projektila formiraju se gasoviti produkti čiji pritisak iznosi nekoliko stotina hiljada bara. Ovaj pritisak izaziva izuzetno snažna impulsna naprezanja i deformacije materijala košuljice i konačno dovodi do gubitka strukturne celovitosti košuljice, tj. do njene fragmentacije. Sam proces traje veoma kratko – od trenutka inicijacije detonacije do formiranja parčadi prođe vreme reda nekoliko desetina mikrosekundi. Usled dejstva udarnih talasa i pritiska košuljica se najpre plastično deformiše poprimajući karakterističan kruškast oblik, pri čemu se prečnik košuljice značajno povećava (približno se udvostručava). Ovi procesi imaju kompleksnu talasnu prirodu i dovode do stvaranja složenog, prostorno nehomogenog naponsko-deformacionog polja u materijalu košuljice. Pri dovoljno velikim vrednostima napona, odnosno deformacija, praktično istovremeno, dešavaju se dva procesa: (i) usled zateznih napona dolazi do formiranja aksijalnih prslina, odnosno do objedinjavanja mikro-šupljina na spoljašnjoj površini košuljice, i (ii) usled snažnog sabijanja na unutrašnjem delu košuljice formiraju se zone smicanja. U zavisnosti od debljine košuljice presudnu ulogu na iniciranje prslina i zona smicanja imaju intenzitet i frekvencija oscilacija napona (deblje košuljice), odnosno strukturna nehomogenost materijala (tanke košuljice). Broj prslina, odnosno objedinjenih mikro-šupljina, kao i zona smicanja raste progresivno i to po različitim pravcima – po dužini košuljice, njenom obimu, u pravcu pod uglom od  $45^\circ$  u odnosu na prethodna dva. Na taj način karakter, raspored i broj krutih i plastičnih prslina, odnosno zona smicanja na košuljici određuju veličinu, masu i oblik formiranih fragmenata.

Na slici 1.3 predstavljena je ekspanzirana košuljica razornog projektila u toku procesa fragmentacije, kao i izgled dela generisanih fragmenata.



**Sl. 1.3.** Snimak ultrabrzom kamerom ekspanzirane košuljice razornog projektila u toku procesa fragmentacije koji karakteriše početak isticanja gasovitih produkata detonacije (levo), [20] i izgled dela fragmenata dobijenih fragmentacijom cilindra (desno), [8]

S obzirom da su vrednosti energije koja se predaje materijalu u toku procesa širenja košuljice značajno veće od energije koja se utroši na deformisanje materijala i formiranje fragmenata, fragmenti nakon formiranja raspolažu značajnom kinetičkom energijom, odnosno brzinom (vrednosti reda 1000 m/s). Ova kinetička energija omogućava dejstvo fragmenata na cilju.

Osnovni zadaci pri modeliranju fragmentacije košuljice projektila (kao i modeliranje fragmentacionih procesa uopšte) podrazumevaju:

- utvrđivanje raspodele mase (odnosno veličine) fragmenata,
- određivanje raspodele oblika parčadi,
- definisanje raspodele fragmenata u prostoru, kao i
- određivanje brzine razletanja fragmenata.

Ovde će detaljno biti razmotreno rešavanje prvog od navednih zadataka. Različiti pristupi rešavanju ostalih zadataka dati su u [10] i [53].

### **1.5. Pristupi modeliranju dinamičke fragmentacije**

Proučavanja dinamičke fragmentacije u osnovi pripada domenu primenjene mehanike čvrstog tela u uslovima velikih brzina deformacije. Reč je o suštinski interdisciplinarnoj oblasti koja pored mehanike deformabilnog tela zahteva primenu rezultata iz mnogih naučnih domena: mehanike loma, teorije udarnih talasa, fizike eksplozije, dinamike gasova, nauke o materijalima, termodinamike, primenjene matematike, itd.

Eksperimentalni pristup predstavlja osnovni izvor kvalitativnih i kvantitativnih informacija o dinamičkoj fragmentaciji. Najčešće se izvode eksperimentalna ispitivanja fragmentacije materijala jednostavnih geometrijskih oblika (uglavnom prstenova, cilindara i sfera) u cilju određivanja mehaničkih karakteristika i fragmentacionih svojstava materijala. U cilju utvrđivanja fragmentacionih karakteristika materijala obavljaju se i ispitivanja primenom različitih metoda udara hiperbrzinama. Pri tome se najčešće koriste tehnike zasnovane na

primeni eksploziva i impulsnih elektromagnetnih opterećenja koja neposredno dovode do fragmentacije ili se primenjuju gasni topovi za ubrzavanje materijala do čije fragmentacije dolazi pri udaru u definisanu prepreku. Za beleženje i merenje relevantnih parametara procesa fragmentacije koriste se brojne dijagnostičke i merne tehnike, kao što su: različite tehnike detekcije udarnog talasa, ultrabrza digitalna fotografija, impulsna radiografija i laserska interferometrija. Primena ovih mernih tehnika u eksperimentima omogućava sa jedne strane vizuelizaciju izuzetno brzih pojava (npr. pojava, karakter i širenje prslina, oblik deformisanog cilindra i sl.) i njihovo kvalitativno opisivanje. Sa druge strane, moguće je i merenje parametara procesa, kao što su npr. vreme trajanja procesa, pomeranja i brzine fragmentacionog tela i sl. Za prikupljanje generisanih fragmenata uz što manja sekundarna oštećenja koristi se veliki broj tehnika zasnovanih na pogodnoj primeni različitih barijera sa materijalima koji omogućavaju "mekano" zaustavljanje fragmenata (nabijeni pesak, drvena strugotina, seno, sneg, voda). Detaljan pregled mernih tehnika značajnih za proučavanje veoma brzih pojava u koje spada i dinamička fragmentacija dat je u [6].

Na bazi rezultata eksperimentalnih istraživanja formirani su brojni empirijski modeli, posebno kada je u pitanju raspodela mase generisanih fragmenata. S obzirom na složenost opisanih pojava koje prate fragmentaciju, analiziranje statističkih zakonomernosti raspodele mase fragmenata dobijenih na osnovu velikog broja izvršenih eksperimenata pokazalo se kao veoma racionalan pristup. Empirijski zakoni raspodele mase fragmenata detaljno su analizirani u drugom poglavlju.

Postoje takođe i brojni fizički zasnovani modeli fragmentacije koji omogućavaju analitički pristup rešavanju problema dinamičke fragmentacije. Modeli se zasnivaju na različitim teorijskim pristupima: statističko-mehanički, energetski, pristupi zasnovani na mehanici loma, termodinamici, itd. U trećem poglavlju temeljno je analizirana ova klasa modela.

Modeliranju dinamičke fragmentacije moguće je pristupiti uz primenu numeričkih metoda koje se zasnivaju na osnovnim zakonitostima fizike eksplozije i mehanike deformabilnog tela primenjenim na diskretizovan sistem eksploziv-obloga. Primena komercijalnih ili specijalnih numeričkih kodova najčešće podrazumeva klasičnu analizu kretanja i deformisanja sistema do određenog trenutka kada se dostignu kritične vrednosti napona i deformacija koje definišu početak fragmentacije. Hidrokodovi u pravilu ne tretiraju masivnu separaciju materijala koja je imanentna višestrukome lomu, odnosno fragmentaciji. Dalje deformisanje materijala se ne razmatra, već se program spreže sa analitičkim ili empirijskim modelima dinamičke fragmentacije. Referentan i savremen numerički pristup analizi fragmentacije košuljice razornih projektila koji podrazumeva korišćenje specijalno razvijenih hidrokodova (CTH) dat je u [20]. Sa druge strane, pristup dinamičkoj fragmentaciji prstena u [48] je zasnovan na korišćenju komercijalnog softvera (ABAQUS/Explicit).

## **1.6. Pregled razvoja teorije dinamičke fragmentacije**

Početak razvoja teorija fragmentacije vezuje se za Drugi svetski rat. Praktično paralelno i nezavisno kreirana su tri važna teorijska pristupa koja se i danas primenjuju kao veoma pouzdani modeli fragmentacije.

U SAD R.W. Gurney se bavio problemom eksplozivne propulzije, tj. određivanja brzine odbacivanja metalne obloge (ili razletanja parčadi) usled dejstva ekspandirajućih produkata detonacije. Koristeći pretpostavke o: (i) raspodeli fiksnog dela unutrašnje energije eksploziva na kinetičku energiju obloge i samih produkata detonacije, (ii) homogenosti

produkata detonacije i (iii) linearnoj raspodeli brzine produkata detonacije, dolazi se do brzine odbacivanja obloge u obliku:

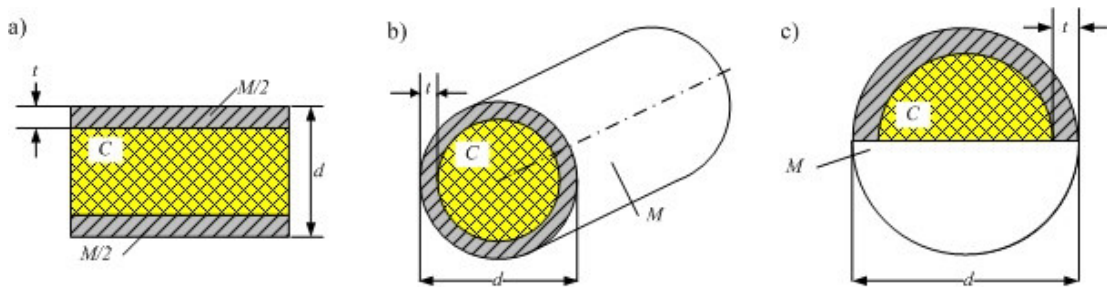
$$v = \frac{\sqrt{2E_G}}{\sqrt{\frac{n}{n+2} + \frac{M}{C}}} \quad (1.1)$$

U poslednjem izrazu  $E_G$  predstavlja tzv. Gurney-jevu energiju – deo ukupnog energetskog potencijala eksploziva (60%...70%) koji definiše sposobnost ubrzavanja obloge i koji predstavlja karakteristiku eksplozivne materije;  $M/C$  predstavlja odnos masa metalne obloge i eksplozivnog punjenja, dok se vrednosti parametra  $n=1,2,3$  odnose na ravansku, cilindričnu i sfernu geometriju sistema eksploziv-obloga (sl. 1.4).

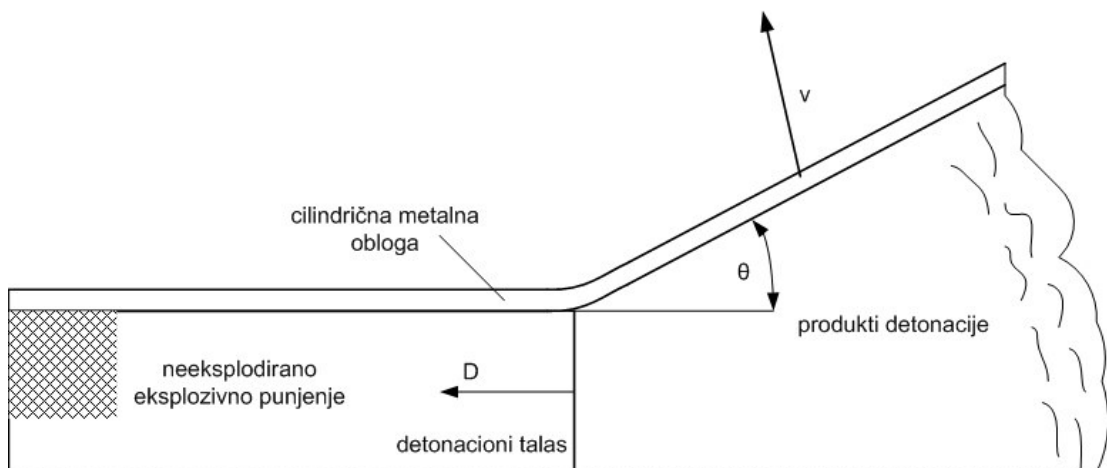
Paralelno, u Velikoj Britaniji G.I. Taylor se bavio određivanjem brzine odbacivanja obloge  $v$  pod dejstvom bočnog ravanskog detonacionog talasa i došao do poznatog izraza (rad je u otvorenoj literaturi objavljen znatno kasnije [51]):

$$v = 2D \sin \frac{\theta}{2}, \quad (1.2)$$

gde  $D$  označava brzinu detonacije korišćenog eksploziva, dok je  $\theta$  ugao odbacivanja obloge (sl. 1.5)



Sl. 1.4. Gurney-jev model eksplozivne propulzije: a) ravanska (sendvič), b) cilindrična, i c) sferna geometrijska konfiguracija sistema eksploziv-obloga



Sl. 1.5. Taylor-ov model odbacivanja metalne obloge pod dejstvom bočnog (čeonog) detonacionog talasa

Istražujući u isto vreme takođe u V. Britaniji, N.F. Mott se prvenstveno bavio raspodelom veličine i mase parčadi koja nastaju kao posledica fragmentacije cilindra usled dejstva produkata detonacije. Kombinovanjem teorijskog i empirijskog pristupa došao je (zajedno sa E.H. Linfoot-om) do poznatog izraza za raspodelu mase fragmenata u obliku [45]:

$$N(m) = N_0 \exp \left[ - \left( \frac{m}{\mu} \right)^{1/2} \right]. \quad (1.3)$$

U prethodnom izrazu  $N(m)$  je ukupan (kumulativni) broj parčadi čija je (pojedinačna) masa veća od  $m$ ,  $N_0$  je ukupan broj fragmenata, dok je  $\mu$  parametar koji je povezan sa srednjom masom parčadi. Formula (1.3) se i danas primenjuje za određivanje raspodele mase fragmenata pri modeliranju efekata na cilju projektila parčadnog dejstva.

Mott je iste godine [42-43] takođe formulisao fizički zasnovan model fragmentacije koji omogućava određivanje raspodele veličine fragmenata u slučaju jednodimenzione fragmentacije metalnog prstena. Rad je nešto kasnije objavljen u otvorenoj literaturi [44] i imao je veliki uticaj na kasnije pristupe modeliranju dinamičke fragmentacije. Ovaj model se detaljno razmatra u poglavlju 3.

U narednom periodu koji obuhvata više od tri decenije nije bilo značajnog napretka u domenu proučavanja dinamičke fragmentacije. Međutim, zbog sve širih primena ovih procesa, početkom osamdesetih godina dvadesetog veka D.E. Grady sa saradnicima počeo je da obnavlja interesovanje naučne javnosti za teorijsko modeliranje fenomena koji karakterišu dinamičku fragmentaciju. U više desetina radova koje je od tada objavio Grady se bavio različitim aspektima problema dinamičke fragmentacije. Najznačajniji se odnose na: rezultate dobijene primenom geometrijske statistike na fragmentaciju [28], modeliranje fragmentacije geoloških materijala [22], opšti model određivanja veličine fragmenata [29], energetski pristup modeliranju dinamičke fragmentacije [24], eksperimentalno-teorijski prilaz jednodimenzionoj fragmentaciji [27], modeliranje fragmentacije usled udara velikim brzinama [31], analiza i generalizacija Mott-ovog modela fragmentacije [21], [26] itd.



## 2. EMPIRIJSKI ZAKONI RASPODELE VELIČINE I MASE FRAGMENTATA

### 2.1. Uvod

Veličina, odnosno masa generisanih fragmenata predstavlja njihovo osnovno obeležje. S obzirom da proces fragmentacije ima elemente slučajnog procesa, u smislu da se pri "identičnim" početnim uslovima dobijaju različiti ishodi procesa, jasno je da se veličina (masa) dobijenih fragmenata mora posmatrati statistički. Zbog toga se raspodela veličine fragmenata opisuje odgovarajućim funkcijama raspodele slučajnih veličina.

Raspodela mase fragmenata se najčešće opisuje kumulativnom funkcijom raspodele. Koristi se i uobičajena funkcija gustine raspodele verovatnoće (histogram) koja je, međutim, mnogo osetljivija u pogledu rasturanja eksperimentalno određenih podataka.

Kumulativni broj fragmenata  $N(m)=N(>m)$  je ukupni broj fragmenata čija je pojedinačna masa veća od  $m$ :

$$N(m) = N_0 \int_m^{\infty} f_N(m) dm, \quad (2.1)$$

pri čemu je  $f_N(m)$  funkcija gustine raspodele mase fragmenata, dok je  $N_0$  ukupan broj formiranih fragmenata. Alternativno se koristi i kumulativna masa fragmenata  $M(m)=M(>m)$  koja predstavlja masu svih fragmenata čija je pojedinačna masa veća od  $m$ :

$$M(m) = M_0 \int_m^{\infty} f_M(m) dm, \quad (2.2)$$

gde je  $f_M(m)$  odgovarajuća funkcija gustine raspodele mase fragmenata, dok je  $M_0$  ukupna masa fragmenata, tj. fragmentacionog tela.

Na slici 2.1 prikazan je tipičan izgled eksperimentalno utvrđene relativne kumulativne masene raspodele broja generisanih fragmenata  $N(m)/N_0$  za slučaj jednog projektila parčadnog dejstva [35]. Na sl. 2.2. ista raspodela fragmenata predstavljena je preko relativne kumulativne mase fragmenata  $M(m)/M_0$ .

Imajući u vidu vezu između kumulativnih zakona raspodele

$$dM = mdN \quad (2.3)$$

može se pokazati da važi:

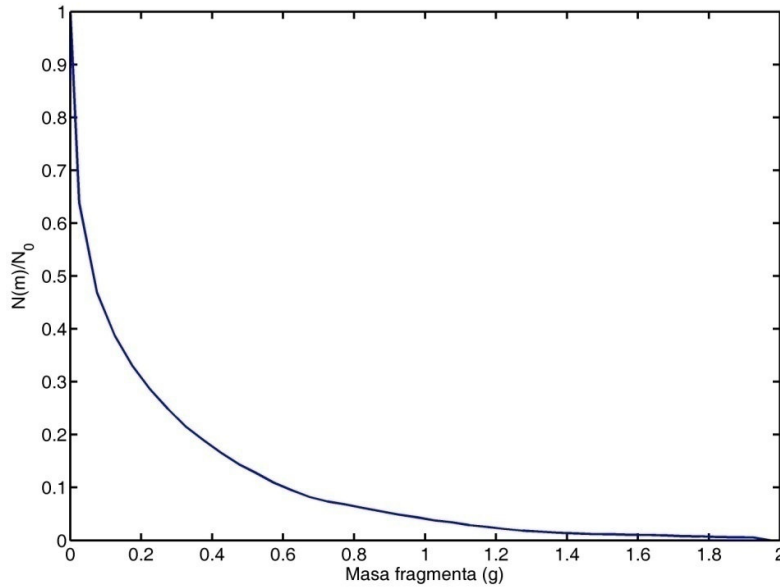
$$M_0 = \int_0^{\infty} N(m) dm. \quad (2.4)$$

Srednja masa fragmenata (očekivana vrednost mase fragmenata), koja predstavlja najznačajniju karakteristiku raspodele, određena je izrazom:

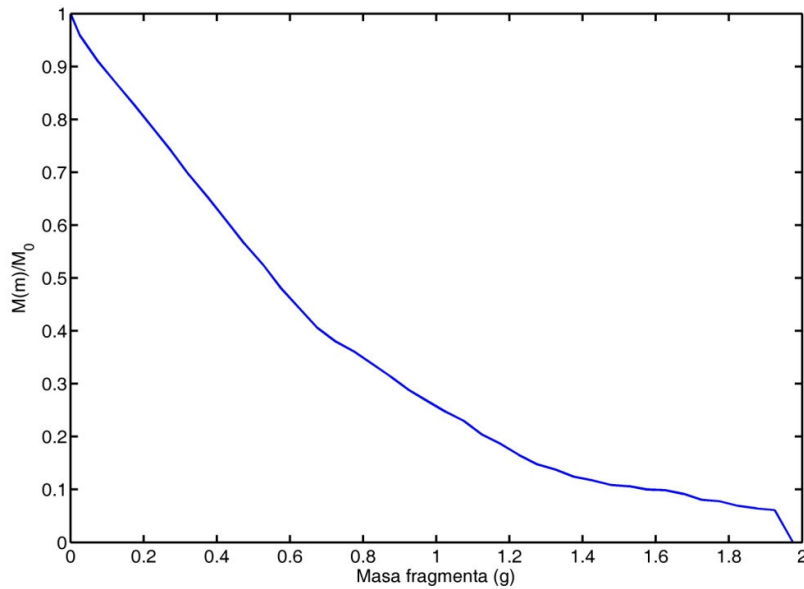
$$\bar{m} = \frac{M_0}{N_0} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} N(m) dm . \quad (2.5)$$

Veoma korisne numeričke karakteristike navedenih raspodela su i medijane, definisane uslovima

$$N(\tilde{m}_N) = \frac{N_0}{2}, \quad \text{i} \quad M(\tilde{m}_M) = \frac{M_0}{2} . \quad (2.6)$$



**Sl. 2.1.** Relativna kumulativna raspodela broja generisanih fragmenata na osnovu eksperimentalnih podataka za projektil A u [35]



**Sl. 2.2.** Relativna kumulativna raspodela mase generisanih fragmenata na osnovu eksperimentalnih podataka za projektil A u [35]

Postoji veliki broj funkcija raspodele kojima se opisuje realna raspodela fragmenata koji su rezultat dinamičke fragmenacije. Najveći broj ovih raspodela zasniva se razmatranjima koja proizilaze iz pojednostavljenog geometrijskog pristupa problemu fragmentacije [12].

## 2.2. Geometrijski pristup

### 2.2.1. Jednodimenziona slučajna fragmentacija

Najjednostavniji slučaj fragmentacije predstavlja jednodimenziona fragmentacija. Pretpostavimo da na slučajan način dolazi do fragmentacija prave, ili ma kakve krive linije dužine  $L$ , tako što nasumično raspoređene tačke duž krive određuju mesta prekida – tačke “loma” – razmatrane linije. Cilj je da se odredi raspodela dužina tako formiranih fragmenata. Pretpostavimo da je srednji broj tačaka raspoređenih po jedinici dužine  $\lambda$ ; ova mera definiše gustinu tačaka loma, odnosno srednju dužinu generisanih fragmenata. Fizički, pretpostavlja se u stvari da su “slabe” tačke u strukturi materijala (mesta koncentracije napona, kao i mikroskopske nepravilnosti – šupljine, uključci, mikroprsrline i sl.) slučajno raspoređene, dok njihova gustina  $\lambda$  zavisi od vrste materijala, njegovih karakteristika, oblika tela, karaktera opterećenja itd. Ako pretpostavimo da je  $s$  tačaka loma slučajno distribuirano po celokupnoj dužini linije  $L$ , verovatnoća da se na nekom segmentu linije dužine  $l$  ( $l < L$ ) nalazi tačno  $n$  ( $n \leq s$ ) tačaka, određena je binomnim zakonom raspodele verovatnoće

$$P_l(s, n) = \binom{s}{n} p_l^n (1 - p_l)^{s-n}, \quad (2.7)$$

gde je  $p_l = l/L$  verovatnoća da se proizvoljna tačka nalazi u razmatranom segmentu. Ako se sada koncentrišemo na slučaj generisanja veoma velikog broja fragmenata ( $n \rightarrow \infty$ ,  $p_l \rightarrow 0$ ,  $L \rightarrow \infty$ ), pri čemu je gustina tačaka loma nepromenjena, verovatnoća (2.7) – što se jednostavno pokazuje – transformiše se u Poisson-ovu raspodelu u obliku

$$P(n, l) = e^{-\lambda l} \frac{(\lambda l)^n}{n!}, \quad (2.8)$$

pri čemu je  $\lambda = s/L$  ranije pomenuti broj tačaka loma po jedinici dužine.

Poisson-ova raspodela upravo se koristi za modeliranje diskretnih slučajnih veličina koje su vezane za realizaciju događaja u jedinici vremena ili prostora. Ovu raspodelu je u modeliranju fragmentacije najpre koristio Lienau [40], a kasnije je detaljno analizirana u [17], [18], [28] i [25].

Na osnovu pretpostavke o Poisson-ovoj raspodeli (2.8), moguće je najpre odrediti elementarnu verovatnoću  $dP$  da postoji fragment čija se dužina nalazi u elementarnom intervalu  $[l, l+dl]$ . Naime, verovatnoća da na segmentu dužine  $l$  nema nijednog loma je, na osnovu (2.8)

$$P(0, l) = e^{-\lambda l}. \quad (2.9)$$

Verovatnoća da će se na susednom segmentu razmatrane linije dužine  $dl$  naći tačno jedan lom je, prema (2.8)

$$P(1, dl) = \lambda dl, \quad (2.10)$$

pri čemu su zanemarene male veličine drugog reda.

Na osnovu izraza (2.9) i (2.10) može se dobiti tražena elementarna verovatnoća da formirani fragment ima dužinu veću od  $l$  a manju od  $l+dl$ :

$$dp = P(0, l)P(1, dl) = \lambda e^{-\lambda l} dl . \quad (2.11)$$

Iz poslednjeg izraza dobija se funkcija gustine raspodele dužine fragmenta

$$f(l) = \frac{dp}{dl} = \lambda e^{-\lambda l} \quad (2.12)$$

Kumulativna funkcija raspodele verovatnoće  $P(l)$ , tj. verovatnoća da fragment ima dužinu veću od  $l$  dobija se integracijom gustine verovatnoće (2.12) u granicama  $l \in [l, +\infty)$ ,

$$P(l) = P(> l) = e^{-\lambda l} . \quad (2.13)$$

Takođe se na osnovu gustine raspodele slučajne veličine – dužine fragmenta – definisane izrazom (2.12) lako dobija da je srednja (očekivana) vrednost dužine fragmenta  $1/\lambda$ .

Broj fragmenta po jedinici dužine čija je dužina veća od  $l$  je

$$\bar{N}(l) = \bar{N}(> l) = \lambda e^{-\lambda l} . \quad (2.14)$$

Prethodno razmatranje odnosilo se na analizu fragmentacije linije beskonačne dužine, ali je sasvim analogno moguće zaključivati i u slučaju fragmentacije linije konačne dužine  $L$ , npr. konačne duži ili kruga. Verovatnoća da će se na segmentu linije dužine  $l$  naći  $n$  tačaka definisana je izrazom (2.7). Sledeći istu logiku kao u slučaju linije beskonačne dužine dobija se verovatnoća da fragment ima dužinu veću od  $l$

$$P(l) = \frac{\lambda L}{\lambda L + 1} \left(1 - \frac{l}{L}\right)^{\lambda L + 1} \quad (2.15)$$

gde je  $\lambda$  i dalje broj tačaka po jedinici dužine  $\lambda = s/L$ . Broj parčadi (po jedinici dužine) čija je dužina veća od  $l$  je

$$\bar{N}(l) = \lambda \left(1 - \frac{l}{L}\right)^{\lambda L + 1} . \quad (2.16)$$

Lako se pokazuje da su formule za verovatnoću nalaženja fragmenta dužeg od  $l$  u slučaju linije beskonačne i konačne dužine (2.13) i (2.15), kao i odgovarajući brojevi fragmenata definisani izrazima (2.14) i (2.16), ekvivalentni u slučaju velikog broja tačaka, odnosno fragmenata ( $s \gg 1$ ) i ukoliko su dužine fragmenata znatno manje od ukupne dužine linije ( $l \ll L$ ).

Problem slučajne jednodimenzionone fragmentacije moguće je posmatrati i na drugačiji način [28]. Može se, naime, pretpostaviti da su sve moguće realizacije fragmentacionog procesa, koje podrazumevaju dobijanje izvesnog broja fragmenata ( $N_0$ ) odgovarajućih dužina  $l_k$ , ( $k=1, 2, \dots, N_0$ ), jednako verovatne. Pri tome je jedino neophodno da zbir dužina svih fragmenata bude jednak početnoj dužini linije

$$\sum_{k=1}^{N_0} l_k = L . \quad (2.17)$$

Dobijeni fragmenti mogu se grupisati u  $m$  klasa prema dužini – neka je  $n_j$  broj fragmenata u  $j$ -toj klasi ( $j=1, 2, \dots, m$ ), koja podrazumeva interval  $[(j-1)l_0/m, jl_0/m]$ . Statistički je poželjno da bude ispunjen uslov  $N_0 \geq m \geq 1$ . Razmotrimo sada jednu raspodelu parčadi po grupama

$n^* = \{n_j, j=1, 2, \dots, m\}$ . Broj različitih mogućih realizacija fragmentacije koje imaju raspodelu dužina fragmenata  $n^*$  određen je sa

$$P(n^*) = \frac{N_0!}{\prod_{j=1}^m n_j!} \quad (2.18)$$

pri čemu je ispunjen uslov

$$\sum_{j=1}^m n_j = N_0. \quad (2.19)$$

Izraz (2.18) predstavlja broj permutacija sa ponavljanjem za  $N_0$  elementa (dužina fragmenata) koji su raspoređeni u  $m$  klasa. Različite raspodele dužina fragmenata  $n^*$  saglasno jednačini (2.18) imaju različite verovatnoće realizacije. Ovde je od interesa odrediti najverovatniju raspodelu, jer ona predstavlja očekivani rezultat fragmentacije. S obzirom da, prema pretpostavci, sve realizacije fragmentacije imaju jednaku verovatnoću, traženoj raspodeli dužina fragmenata  $n^*$  odgovara maksimalan broj različitih realizacija  $P(n^*)$ . Ovo zaključivanje je sasvim analogno konceptu maksimizacije entropije u kinetičkoj teoriji gasova, tj. Maxwell-Boltzmann-ovoj raspodeli brzina čestica. Potrebno je, dakle, naći raspodelu  $n^*$  kojoj odgovara najveći broj realizacija  $P(n^*)$ , pri čemu je neophodno da bude ispunjen uslov (2.19), kao i uslov (2.17) u modifikovanom obliku

$$\sum_{j=1}^m n_j l_j = L \quad (2.20)$$

gde je  $l_j$  srednja dužina fragmenta u  $j$ -toj klasi.

U cilju jednostavnijeg određivanja maksimuma funkcije  $P(n^*)$ , ona se može logaritmovati – s obzirom da je logaritamska funkcija monotono rastuća, ekstrem će ostati nepromenjen. Dovoljno je potražiti ekstrem funkcije

$$F(n^*) = \ln(P(n^*)) = \ln(N_0!) - \sum_{j=1}^m \ln(n_j!) \quad (2.21)$$

pri čemu raspodela  $n^*$  mora da zadovoljava uslove (2.19) i (2.20). Za određivanje maksimuma može se koristiti Lagrange-ova varijaciona metoda, tj. potrebno je ispuniti uslov

$$\left( \ln(N_0!) - \sum_{j=1}^m \ln(n_j!) \right) + \alpha \delta \left( \sum_{j=1}^m n_j - N_0 \right) + \beta \delta \left( \sum_{j=1}^m n_j l_j - L \right) = 0, \quad (2.22)$$

gde su  $\alpha$  i  $\beta$  neodređeni parametri. Ako se primeni Stirling-ova aproksimacija faktorijela [57] u obliku

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad (2.23)$$

uslov (2.22) se svodi na

$$\ln n_j + \alpha + \beta l_j = 0, \quad (2.24)$$

odnosno

$$n_j = e^{-\alpha - \beta l_j}. \quad (2.25)$$

Ako se sa diskretnih vrednosti  $n_j$  i  $l_j$  pređe na kontinualne ( $m \rightarrow \infty$ ), i pri tome ima u vidu funkcija gustine raspodele dužine parčadi

$$\frac{dn}{dl} = \beta e^{-\alpha - \beta l_j} \quad (2.26)$$

kao i uslovi (2.19) i (2.20) u kontinualnom obliku

$$\int_0^{\infty} dn = N_0, \quad \int_0^{\infty} l dn = L, \quad (2.27)$$

dobijaju se parametri

$$\alpha = -\ln N_0, \quad \beta = \frac{N_0}{L}, \quad (2.28)$$

i konačno, kumulativna funkcija raspodele, tj. broj parčadi čija je dužina veća od  $l$

$$n(l) = N_0 e^{-\frac{N_0 l}{L}}. \quad (2.29)$$

Ako se ima u vidu definicija parametra  $\lambda$  kao očekivanog broja tačaka loma po jedinici dužine, verovatnoća da fragment ima dužinu veću od  $l$  je

$$P(l) = e^{-\lambda l} \quad (2.30)$$

što je identično izrazu (2.13).

Ovim je pokazano da su dva izložena pristupa analizi jednodimenzione fragmentacije, prvi zasnovan na Poisson-ovoj raspodeli tačaka loma, a drugi na jednako verovatnim ishodima fragmentacije uz nepromenljiv zbir dužina fragmenata, sasvim ekvivalentni. U oba slučaja dobija se eksponencijalna raspodela dužina fragmenata. Ovim se statistički opravdava korišćenje ove raspodele, ali ne treba izgubiti iz vida da nijedan od prikazanih pristupa ne predstavlja *dokaz* o tome da slučajna jednodimenziona fragmentacija ima eksponencijalnu raspodelu. Naime, moguće je i na drugi način definisati slučajnu fragmentaciju, odnosno koristiti i druge hipoteze o osobinama fragmenata (npr. jednaka zbirna dužina fragmenata u svim klasama dužina i sl.), pa na osnovu toga dobiti drugačije funkcije raspodele dužine parčadi (npr. binomna, log-normalna ili stepena funkcija raspodele).

U slučaju jednodimenzione fragmentacije masa fragmenta je proporcionalna njegovoj dužini, tako da kumulativni zakon raspodele mase ima oblik analogan (2.13):

$$P(m) = P(> m) = e^{-\lambda m} = \exp\left(-\frac{m}{\mu}\right). \quad (2.31)$$

gde je  $\mu = 1/\lambda$  - srednja masa fragmenata. Kumulativna raspodela mase koja definiše broj fragmenata čija je pojedinačna masa veća od  $m$  određena je sa

$$N(m) = N_0 \exp\left(-\frac{m}{\mu}\right), \quad (2.32)$$

gde je  $N_0$  ukupan broj parčadi.

Sličan pristup slučajnoj geometrijskoj fragmentaciji zasniva se na konceptu Voronoi-Dirichlet-ovih dijagrama [2]. Voronoi dijagram podrazumeva segmentaciju prostora (1D, 2D ili 3D), putem slučajno generisanog skupa tačaka, na izvestan broj podprostora, tako da svaki podprostor sadrži tačno jednu od ovih slučajno raspoređenih tačaka, pri čemu je

svaka tačka podprostora bliža pripadajućoj generativnoj tački nego bilo kojoj od preostalih generisanih tačaka. Voronoi algoritam se koristi za modeliranje različitih procesa, uključujući fragmentaciju [21]. Fizički, generativne tačke predstavljaju centre budućih fragmenata. U jednodimenzionom slučaju, Voronoi segmentacija linije definisana je središnjim tačkama segmenata koje formiraju susedne slučajno generisane tačke. Koristeći sličan postupak kao u prethodnom slučaju dobija se funkcija gustine raspodele dužine fragmenata u obliku [21], [36]:

$$f(l) = 4\lambda^2 l e^{-2\lambda l} . \quad (2.33)$$

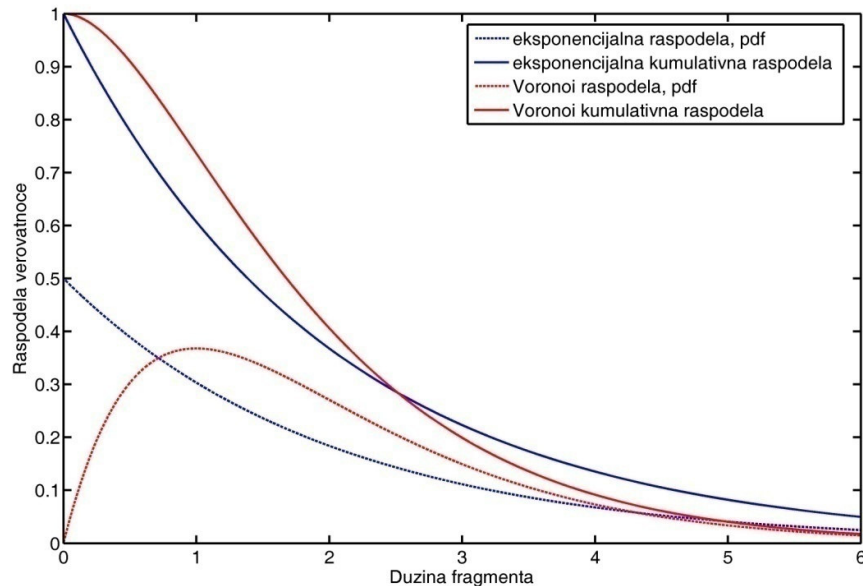
Kumulativni zakon raspodele dužine fragmenata definisan je izrazom

$$P(l) = (1 + 2\lambda l)e^{-2\lambda l} . \quad (2.34)$$

Poređenje Lienau-ove (eksponencijalne) i Voronoi raspodele pri slučajnoj jednodimenzionoj fragmentaciji predstavljeno je na slici 2.3. Uočava se da Lienau-ova raspodela, za razliku od Voronoi distribucije, ima osobinu da najveći broj fragmenata ima veoma malu dužinu.

### 2.2.2. Dvodimenziona fragmentacija

Za praktične primene teorije fragmentacije, posebno u domenu rasprskavanja košuljica projektila parčadnog dejstva, od ključnog je značaja razmatranje dvodimenzione i trodimenzione fragmentacije. Pod dvodimenzionim slučajem podrazumeva se fragmentacija površina, odnosno u praktičnoj primeni fragmentacija tankih ploča i ljuski, gde se mogu svrstati i tanke košuljice projektila parčadnog dejstva – podrazumeva se, dakle, da sva nastala parčad imaju jednu identičnu dimenziju koja odgovara debljini košuljice.



**Sl. 2.3.** Jednodimenziona slučajna fragmentacija: poređenje ekponencijalne (Lienau) i Voronoi raspodele; predstavljene su funkcije gustine raspodele verovatnoće (pdf) i kumulativne raspodele verovatnoće; srednja vrednost dužine fragmenta ista je u oba slučajeva ( $\lambda=0.5$ )

Kao paradigmatičan primer, razmotrimo najpre dvodimenzionu fragmentaciju ravni putem dva nezavisna skupa međusobno normalnih pravih. Pretpostavimo da je "gustina" linija  $\lambda$  (broj linija po jedinici dužine) jednaka u horizontalnom i vertikalnom pravcu. Imajući u vidu eksponencijalnu gustinu raspodele dužine fragmenata, verovatnoća da fragment ima površinu veću od  $a$  određena je izrazom

$$P(a) = P(xy > a) = \lambda^2 \iint_{xy > a} \exp[-\lambda(x+y)] dx dy = \lambda \int_0^{\infty} \exp\left[-\lambda\left(x + \frac{a}{x}\right)\right] dx = 2\lambda\sqrt{a} K_1(2\lambda\sqrt{a}) \quad (2.35)$$

gde je  $K_1(\bullet)$  modifikovana Bessel-ova funkcija druge vrste prvog reda.

U seriji radova [42], [43], [45] razmatrana je dvodimenziona fragmentacija sa aspekta geometrijske statistike. Pri tome su se oslanjali na rezultate koje je isti pristup dao u domenu jednodimenzione fragmentacije, a koji se svode na eksponencijalni zakon raspodele dužina fragmenata (2.13), a takođe su došli i do izraza (2.35). Međutim, na osnovu analize fragmenata dobijenih detonacijom razornih projektila, predložili su raspodelu koja ima oblik

$$P(a) = e^{-\sqrt{\alpha a}}. \quad (2.36)$$

Lako se pokazuje da je parametar  $\alpha$  povezan sa srednjom vrednošću površine fragmenta relacijom  $\alpha = 2/\bar{a}$ . Saglasno izrazu (2.36) i linearnoj vezi između mase i površine fragmenta, dobija se poznati Mott-ov zakon raspodele mase fragmenata u obliku

$$N(m) = N_0 \exp\left[-\left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/2}\right] \quad (2.37)$$

gde je parametar  $\mu$  jednak polovini srednje mase fragmenata

$$\mu = \frac{\bar{m}}{2}. \quad (2.38)$$

Raspodela (2.37) ima opravdanje i u činjenici da je ona analogna eksponencijalnoj raspodeli, pri čemu treba imati u vidu da je  $l \sim a^{1/2}$ . Takođe, pokazuje se da u slučaju dvodimenzione fragmentacije putem slučajnog raspoređivanja horizontalnih i vertikalnih pravih u ravni raspodela površine (odnosno mase) generisanih fragmenata ima formu vrlo blisku izrazu (2.37).

Teorijski je, međutim, moguće konstruisati veliki broj različitih procedura koje simuliraju slučajnu dvodimenzionu fragmentaciju [28], kao što je npr. generisanje izvesnog broja pravih koje imaju slučajno određen položaj i pravac. Ovakva fragmentacija znatno odstupa od Mott-ovog zakona (2.37). Imajući ovo u vidu, Grady i Kipp [28], i nešto ranije Cohen [7], usvojili su drugačiji pristup modeliranju dvodimenzione fragmentacije. Ne ulazeći u način generisanja fragmenata pretpostavlja se da sve moguće realizacije procesa fragmentacije imaju jednaku verovatnoću, uz uslov da je ukupna površina nastalih fragmenata jednaka početnoj površini fragmentisanog tela

$$\sum_j a_j = a_0. \quad (2.39)$$

Ako se, dakle, površina fragmenata posmatra kao skalarna veličina, onda je pristup sasvim analogan ranijem razmatranju jednodimenzione fragmentacije. Prema tome, zakon



raspodele mase fragmenata ima isti oblik kao u slučaju jednodimenzione fragmentacije (2.26):

$$N(m) = N_0 \exp\left(-\frac{m}{\mu}\right). \quad (2.40)$$

Konačno, Kiang [36] je predložio aproksimativnu generalizaciju raspodele veličine fragmenata generisanih Voronoi dijagramima (2.33) u obliku:

$$P(s) = \frac{\Gamma(n, \mu ns)}{\Gamma(n)}, \quad (2.41)$$

gde su  $\Gamma(\bullet)$  i  $\Gamma(\bullet, \bullet)$  redom potpuna i nepotpuna gornja gama funkcija,  $s$  je veličina fragmenta (dužina, površina ili zapremina),  $\mu$  je recipročna vrednost srednje veličine fragmenta, dok  $n=2,4$  i  $6$  odgovara 1D, 2D i 3D Voronoi dijagramima. Na slici 2.4 je predstavljena slučajna fragmentacija kvadrata na osnovu principa Voronoi dijagrama. Za dvodimenzioni slučaj ( $n=4$ ), kumulativna raspodela (2.41) glasi:

$$P(a) = \frac{\Gamma(4, 4\alpha a)}{\Gamma(4)} = e^{-4\alpha a} \sum_{k=0}^3 \frac{(4\alpha a)^k}{k!}. \quad (2.42)$$

Na slici 2.5 dat je prikaz Bessel-ove, Mott-ove, Grady-Kipp i Voronoi raspodele.

### 2.2.3. Trodimenziona fragmentacija

Trodimenziona fragmenatcija podrazumeva lom materijala duž sve tri dimenzije fragmentacionog tela. Sa stanovišta primene, ona svakako predstavlja najstroženiji i najznačajniji vid fragmentacije. Najjednostavniji primer 3D fragmentacije predstavlja particija prostora se tri skupa međusobno ortogonalnih ravni. Ako se ponovo pretpostavi jednaka gustina  $\lambda$  ravni u sva tri pravca, dobija se kumulativna verovatnoća da fragment ima zapreminu veću od  $v$ :

$$\begin{aligned} P(xyz > v) &= \lambda^3 \iiint_{xyz > v} \exp[-\lambda(x + y + z)] dx dy dz = \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-\lambda\left(x + y + \frac{v}{xy}\right)\right] dx dy = \\ &= \lambda\sqrt{\lambda v} G_{0,3}^{3,0} \left( \lambda^3 v \left| \begin{matrix} - \\ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

gde je  $G$  Meijer-ova  $G$ -funkcija [47].

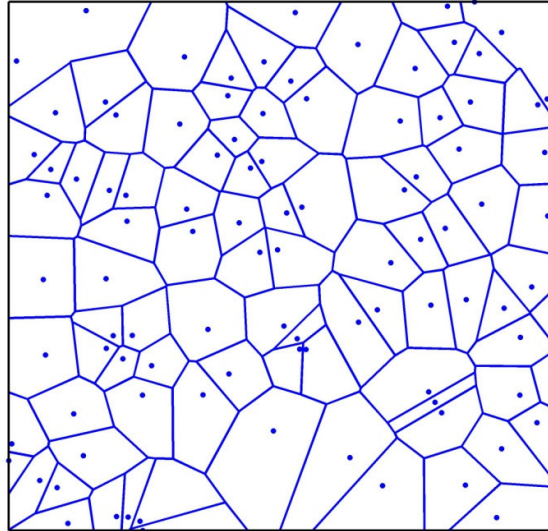
Primenjujući istu logiku kao u slučaju dvodimenzione fragmentacije, Mott je predložio raspodelu prema kojoj je ukupan broj parčadi sa masom većom od  $m$  proporcionalan eksponencijalnoj funkciji sa argumentom  $m^{1/3}$ . Kako je  $m^{1/3}$  proporcionalno dužini fragmenta, i uz pretpostavku da svi fragmenti imaju približno isti oblik, sledi da i u slučaju trodimenzionalne fragmentacije važi eksponencijalni zakon raspodele (2.7), koji kada se transformiše dobija oblik

$$P(v) = e^{-\sqrt[3]{\gamma v}}, \quad (2.44)$$

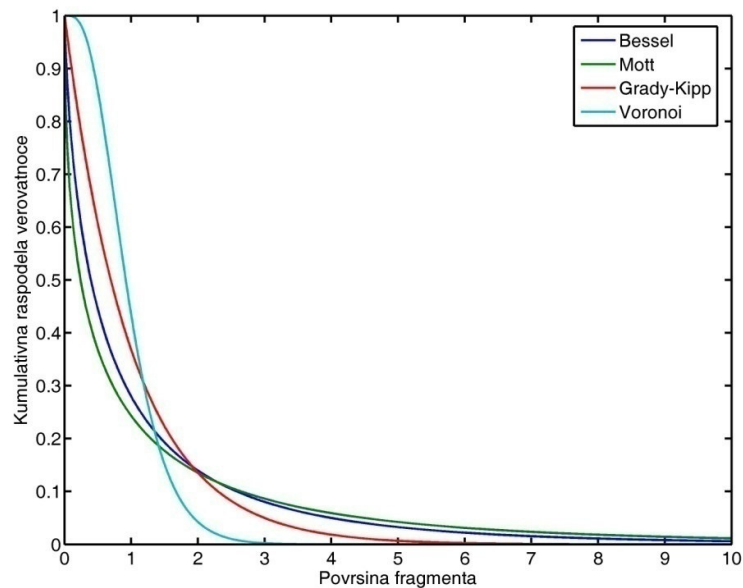
pri čemu važi  $\gamma = 6/\bar{v}$ , gde je  $\bar{v}$  srednja zapremina fragmenata. Zakon raspodele mase fragmenata ima analognu formu

$$N(m) = N_0 \exp \left[ - \left( \frac{m}{\mu} \right)^{1/3} \right], \quad (2.45)$$

gde je  $\mu = \bar{m}/6$ .



**Sl. 2.4.** Slučajna geometrijska fragmentacija kvadrata: nasumično je izabrano 100 tačaka unutar kvadrata koje predstavljaju "centre" fragmenata konstruisanih na osnovu odgovarajućeg Voronoi dijagrama



**Sl. 2.5.** Dvodimenziona slučajna fragmentacija: poređenje kumulativne raspodele verovatnoće u slučaju Bessel-ovog, Mott-ovog, Grady-Kipp i Voronoi zakona raspodele; srednja vrednost površine fragmenta ista je u svim slučajevima ( $\bar{a} = 1$ )

Ranije razmotren pristup [28] može se primeniti i za trodimenzionu fragmentaciju – ako su sve raspodele fragmenta jednako verovatne, pri čemu mora biti zadovoljen uslov očuvanja mase, odnosno zapremine

$$\sum_j v_j = v_0 \quad (2.46)$$

ponovo važi zakon raspodele opisan jednačinom (2.40). Dakle, prema pristupu Grady-Kipp, tzv. linearni eksponencijalni zakon raspodele (2.40) predstavlja opšti zakon raspodele mase parčadi pri slučajnoj fragmentaciji, bez obzira na broj dimenzija.

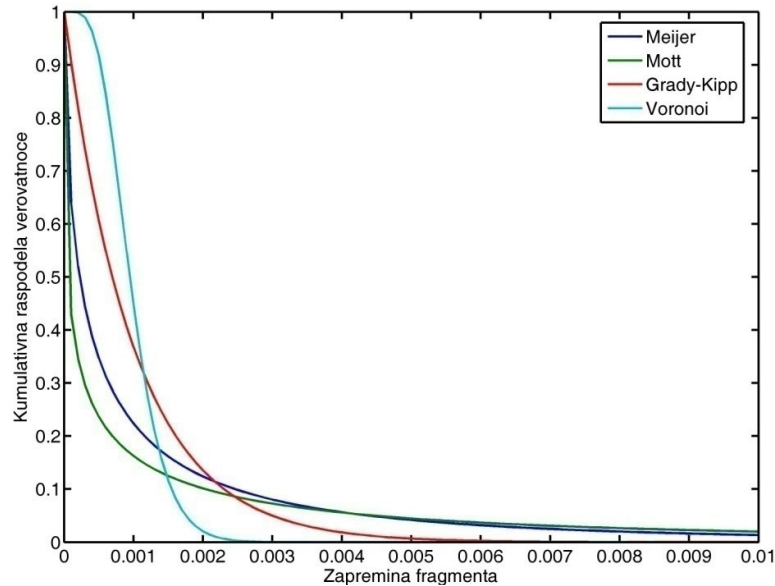
Na kraju, na trodimenzionu fragmentaciju može se primeniti i pristup zasnovan na Voronoi dijagramima. Ako se prema [36] u izraz (2.41) uvede  $n=6$ , dobije se zakon raspodele zapremine fragmenata u obliku

$$P(v) = \Gamma(6, 6\gamma v) / \Gamma(6) = e^{-6\gamma v} \sum_{k=0}^5 \frac{(6\gamma v)^k}{k!}. \quad (2.47)$$

Četiri razmotrene raspodele za slučaj trodimenzione fragmentacije (Meijer-ova, Mott-ova, Grady-Kipp i Voronoi raspodela) međusobno su upoređene na slici 2.6.

#### 2.2.4. Poređenje sa rezultatima eksperimenata

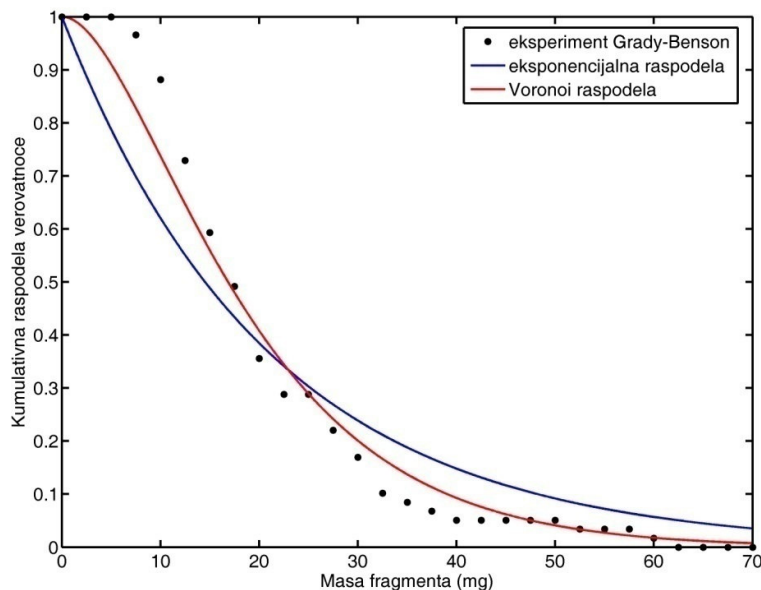
Primenljivost analiziranih zakona raspodele veličine (mase) parčadi dobijenih geometrijskim pristupom biće razmotrena kroz poređenje sa rezultatima eksperimenata. Postoji, međutim, veoma malo objavljenih eksperimentalnih rezultata koji se odnose na jednodimenzionu fragmentaciju, naročito kada je reč o dinamičkoj fragmentaciji. Uglavnom se radi o rezultatima fragmentacije šipki od krutih materijala (staklo, gips) pri različitim impulsnim opterećenjima. Stepeni zakon raspodele (videti naredni odeljak) i ekponencijalna raspodela najčešće veoma dobro opisuju rezultate ovakvih eksperimenata, videti npr. [33] i [46].



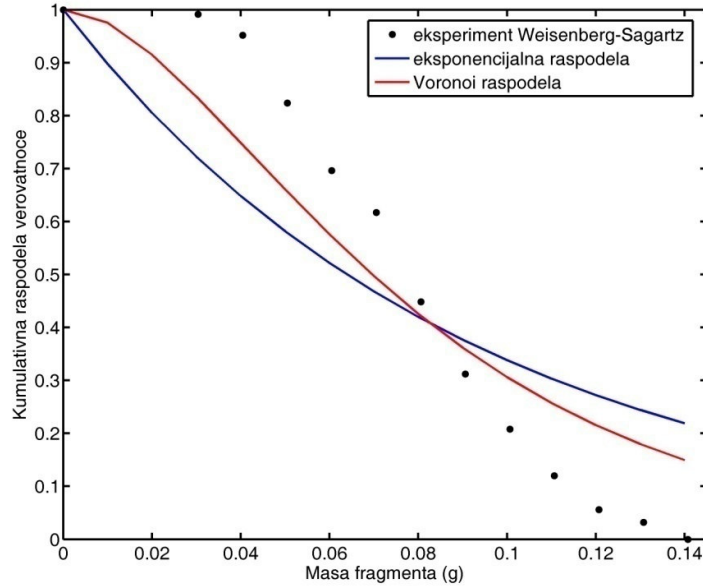
**Sl. 2.6.** Trodimenziona slučajna fragmentacija: poređenje kumulativne raspodele verovatnoće u slučaju Meijer-ovog, Mott-ovog, Grady-Kipp i Voronoi zakona raspodele; srednja vrednost zapremine fragmenta ista je u svim slučajevima ( $\bar{v} = 0.001$ )

S obzirom da su sa aspekta primene u odbrambenim tehnologijama od većeg značaja eksperimenti sa metalima, posebno oni koje karakteriše žilav (razvlačljiv, duktilan) lom materijala, ovde ćemo razmotriti rezultate dva eksperimenta. Oba se odnose na fragmentaciju aluminijumskih prstenova putem impulsnog elektromagnetnog opterećenja. Parametri Lienau-ovog (eksponencijalnog) i Voronoi zakona raspodele su numerički određeni tako da se dobije najmanje odstupanje teorijskih raspodela od odgovarajućih eksperimentalnih podataka. Na sl. 2.7. je prikazano poređenje eksperimentalnih rezultata datih u [27] sa teorijskim modelima. Na sledećem dijagramu (sl. 2.8) eksperimentalni podaci iz [56] su takođe upoređeni sa modelskim raspodelama. Eksponencijalna raspodela sistemski ne uspeva da opiše rezultate eksperimenata, dok se Voronoi raspodela (posebno u prvom slučaju) veoma dobro podudara sa eksperimentalnim podacima. Moguće objašnjenje je da Voronoi (gamma) raspodela predstavlja aproksimaciju rezultata fizički zasnovanog Mott-ovog statističkog modela fragmentacije [44], koji će detaljno biti analiziran u odeljku 3.2.

Jednu od mogućih simulacija dvodimenzione fragmentacije krugog tela predstavlja numerički generisana slučajna fragmentacija jediničnog kvadrata putem dva nezavisna skupa horizontalnih i vertikalnih linija (20x20) predstavljenih u okviru na sl. 2.9. Na sl. 2.9. dato je poređenje razmatranih teorijskih modela raspodele i numeričkog eksperimenta. Očekivano, Bessel-ova raspodela se izuzetno dobro podudara sa numerički dobijenom raspodelom.

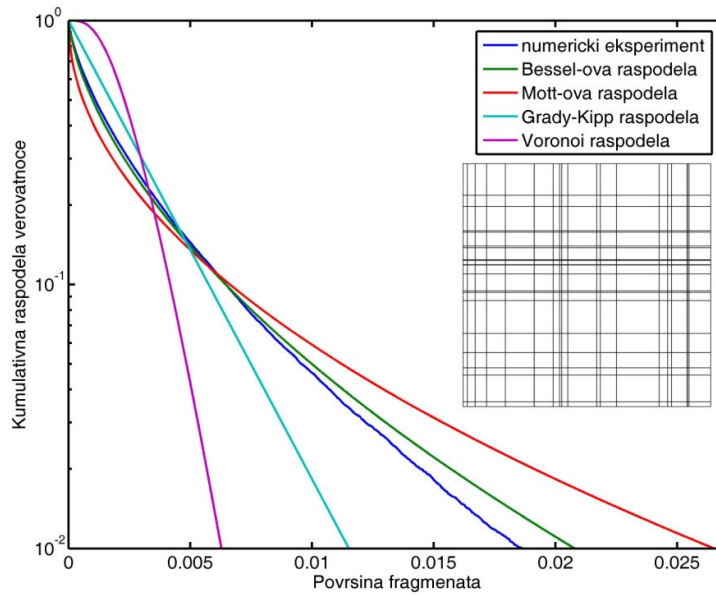


**Sl. 2.7.** Jednodimenziona fragmentacija: poređenje eksperimentalnih rezultata [27] sa Lienau-ovom (eksponencijalnom) i Voronoi raspodelom. Optimalna vrednost parametara razmatranih raspodela dobijena je metodom najmanjih kvadrata

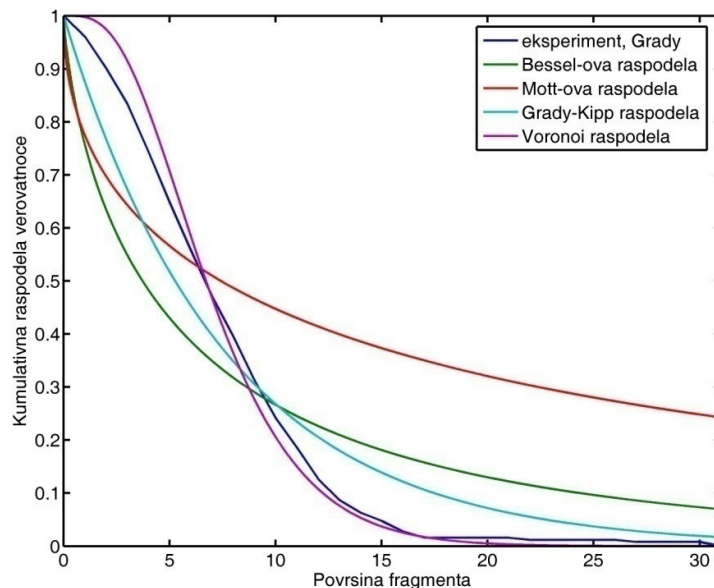


**Sl. 2.8.** Jednodimenziona fragmentacija: poređenje eksperimentalnih rezultata [56] sa Lienau-ovom (eksponencijalnom) i Voronoi raspodelom

Na sl. 2.10. rezultati fragmentacije približno sferne metalne ljuske [21] upoređeni su sa svim razmatranim dvodimenzionim teorijskim modelima. Ponovo, Voronoi raspodela najbolje opisuje rezultate eksperimenta

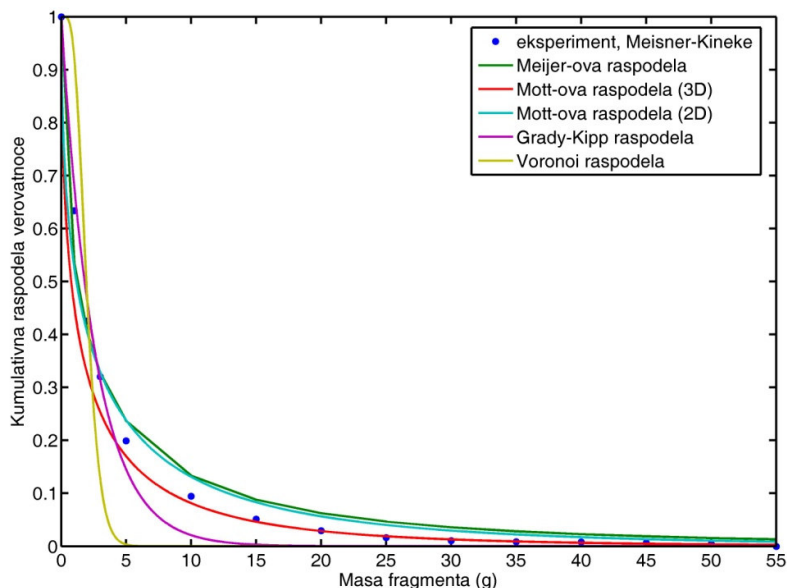


**Sl. 2.9.** Dvodimenziona fragmentacija: poređenje raspodele broja fragmenata dobijenih numeričkom simulacijom segmentacije jediničnog kvadrata (okvir) sa Bessel-ovom, Mott-ovom, Grady-Kipp i Voronoi raspodelom

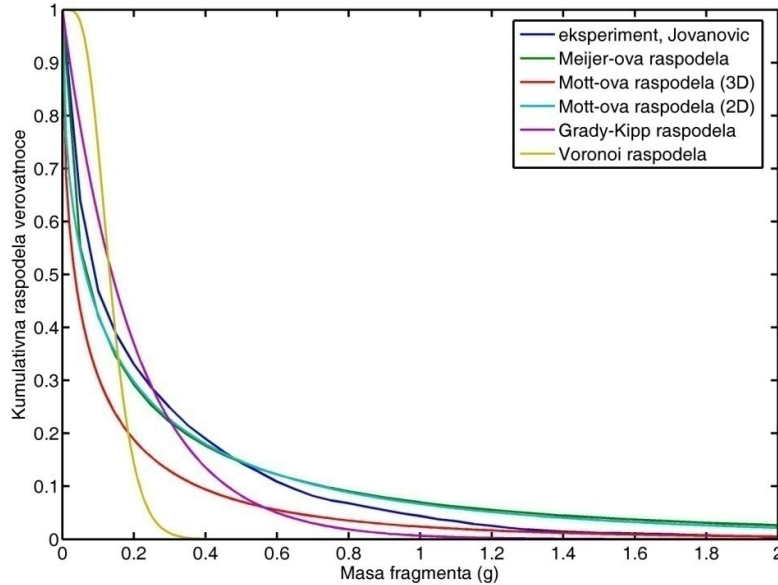


**Sl. 2.10.** Dvodimenziona fragmentacija: poređenje eksperimentalnih rezultata fragmentacije metalne ljske [21] sa Bessel-ovom, Mott-ovom, Grady-Kipp i Voronoi raspodelom

Na kraju, razmotreni su i rezultati trodimenzione fragmentacije koji su sa stanovišta primene najznačajniji. Na slici 2.11. rezultati fragmentacije cilindra pod dejstvom produkata detonacije [9] upoređeni su sa razmotrenim modelskim raspodelama. Mott-ova (3D) raspodela najbolje opisuje rezultate eksperimenta. Konačno, rezultati rasprskavanja košuljice razornog projektila - projektil A u [35] su prikazani na slici 2.12. U ovom slučaju, Mott-ova (2D) i Meijer-ova raspodela daju relativno dobru aproksimaciju rezultata eksperimenta.



**Sl. 2.11.** Trodimenziona fragmentacija: poređenje rezultata fragmentacije metalnog cilindra pod dejstvom produkata detonacije [9] sa Meijer-ovom, Mott-ovom (2D i 3D), Grady-Kipp i Voronoi raspodelom



**Sl. 2.12.** Trodimenziona fragmentacija: poređenje rezultata fragmentacije projektila parčadnog dejstva [35] sa Meijer-ovom, Mott-ovom (2D i 3D), Grady-Kipp i Voronoi raspodelom

Može se zaključiti da u slučaju fragmentacije krutih tela (koja u našim razmatranjima nije od primarnog interesa) ekponencijalna, Bessel-ova i Meijer-ova raspodela daju dobre aproksimacije 1D, 2D i 3D fragmentacije, respektivno. U slučaju duktilnih (žilavih) materijala, jednodimenziona i dvodimenziona fragmentacija mogu se dobro opisati Voronoi raspodelom. U slučaju trodimenzionalne fragmentacije, proces je znatno složeniji – što je uslovljeno delovanjem mehanizama zatezanja i adijabatskog smicanja materijala – te dolazi do kreiranja fragmenata veoma različitih oblika i dimenzija, čiju raspodelu unimodalna Voronoi distribucija ne može da opiše. Na osnovu poređenja sa ograničenim brojem eksperimenata, može se smatrati da Mott-ova raspodela (njena 2D i 3D forma) najbolje opisuje stvarnu raspodelu mase generisanih fragmenata.

Sasvim je jasno da geometrijska statistika nije dovoljna za modeliranje fragmentacije.

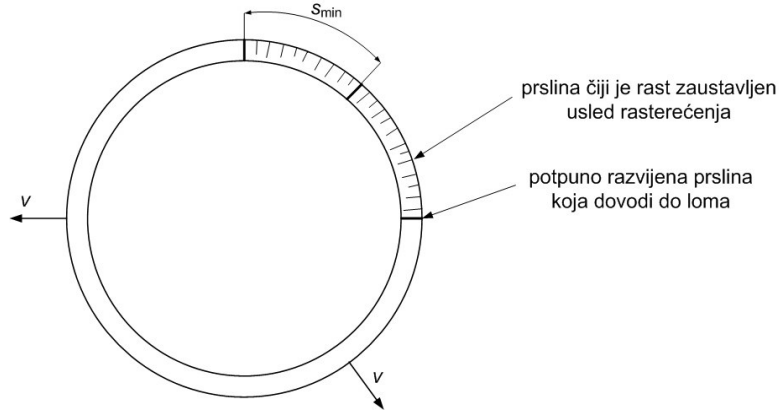
Vrsta materijala i oblik fragmentisanog tela, kao i karakter opterećenja bitno utiču na prirodu fragmentacije. Imajući u vidu činjenicu da analizirani modeli na uzimaju u obzir nijedan od ovih faktora i da imaju samo jedan parametar koji se može optimizovati (koji je uvek korelisan sa srednjom vrednošću veličine ili mase fragmenata), dobijeni rezultati se mogu smatrati iznenađujuće dobrim.

### 2.3. Statistički pristup

Razmotrićemo još jedan čisto statistički pristup modeliranju slučajne fragmentacije predložen u [59]. Model je sličan ranije analiziranim geometrijskim razmatranjima, ali uz jednu važnu dopunsku pretpostavku: smatra se da postoji minimalna veličina (masa) fragmenta. Pri tome minimalna veličina ne podrazumeva mikroskopski nivo čestica, već makroskopski – reč je o veličini koja je uporediva sa srednjom veličinom fragmenta. Suština koncepta minimalne mase fragmenta je u kreiranju talasa rasterećenja na mestima nastanka prslina u opterećenom materijalu. U rasterećenim zonama materijala u okolini prslina ne može da dođe do formiranja novih prslina, zbog čega mora postojati izvesna minimalna dužina fragmenta koja zavisi od karaktera opterećenja i osobina materijala

fragmentacionog tela. Ovaj koncept je detaljno razmatran u narednom poglavlju (odjeljak 3.3.1).

Za početak razmotrimo jednodimenzioni model dinamičke fragmentacije prstena (sl. 2.13). Neka je  $s_0$  ukupna dužina prstena u trenutku fragmentacije, a  $s_{\min}$  minimalna dužina fragmenta. Pretpostavimo da praktično istovremeno dolazi do formiranja velikog broja prslina  $N_t$  na spoljašnjoj površini prstena.



Sl. 2.13. Statistički model fragmentacije

U skladu sa pretpostavkom o najmanjoj mogućoj dužini fragmenta, najviše  $N_m$  prslina može da se razvije i dovede do loma materijala, pri čemu je

$$N_m = \frac{s_0}{s_{\min}}. \quad (2.48)$$

Naravno,  $N_m$  je istovremeno i najveći broj fragmenata koji mogu biti generisani. Dakle, od ukupno  $N_t$  prslina najviše  $N_m$  može da dovede do loma i to samo ako su na međusobnom rastojanju  $s_{\min}$ . Ideja je da se odredi broj mogućih raspodela svih formiranih prslina koje će rezultirati dobijanjem tačno  $N$  do kraja razvijenih prslina. tj.  $N$  fragmenata ( $N \leq N_m$ ).

Od ukupno  $N_t$  formiranih prslina,  $N_m$  prslina se može izabrati na

$$W_1 = \binom{N_t}{N_m} \quad (2.49)$$

načina. Broj načina na koji se od ovih  $N_m$  prslina može odabrati  $N$  prslina je

$$W_2 = \binom{N_m}{N}. \quad (2.50)$$

Neophodno je da  $N$  izabranih prslina budu međusobno udaljene bar  $s_{\min}$ . Da bi se to obezbedilo, može se na slučajan način odabrati  $N_0 s_{\min} / s_0$  od preostalih prslina i pridružiti svakoj od  $N$  razmatranih prslina. Ovo se može realizovati na

$$W_3 = \binom{N_t - N}{NN_t s_{\min} / s_0} \left( \frac{NN_t s_{\min}}{s_0} \right)! \quad (2.51)$$

načina. Konačno, broj načina na koji preostale prslina mogu biti raspoređene je

$$W_4 = \left( N_t - NN_t \frac{s_{\min}}{s_0} \right)! \quad (2.52)$$



Traženi ukupan broj raspodela prslina koji dovodi do generisanja  $N$  fragmenata je:

$$W = W_1 W_2 W_3 W_4 = \binom{N_t}{N_m} \binom{N_m}{N} \binom{N_t - N}{NN_t s_{\min} / s_0} \binom{NN_t s_{\min}}{s_0} \left( N_t - \frac{NN_t s_{\min}}{s_0} \right)! \quad (2.53)$$

Verovatni broj fragmenata  $N=N_0$  odgovara maksimalnom broju raspodela  $W$ , tj. dobija se iz uslova

$$\left( \frac{\partial \ln W}{\partial N} \right)_{N=N_0} = 0. \quad (2.54)$$

Ako se ima vidu ranije razmatrana Stirling-ova relacija, pokazuje se da za dovoljno veliko  $z$  važi:

$$\frac{\partial(\ln(z!))}{\partial z} \approx \ln z. \quad (2.55)$$

Korišćenjem jednakosti (2.55), uslov (2.54) se može transformisati u oblik:

$$N_t \frac{s_{\min}}{s_0} \ln \left( 1 - \frac{N_0}{N_t - N_0 N_t \frac{s_{\min}}{s_0}} \right) = \ln \left[ \frac{(N_t - N_0) N_0}{(N_m - N_0) \left( N_t - N_0 - N_0 N_t \frac{s_{\min}}{s_0} \right)} \right]. \quad (2.56)$$

Ako sada pretpostavimo da ukupan broj formiranih prslina  $N_t$  teži beskonačnosti, poslednja relacija se pojednostavljuje:

$$\frac{s_{\min} N_0}{s_0 - s_{\min} N_0} = \ln \left[ \left( 1 - N_0 \frac{s_{\min}}{s_0} \right) \left( \frac{s_0}{s_{\min} N_0} - 1 \right) \right]. \quad (2.57)$$

Ako se ima u vidu relacija (2.48), gornji izraz postaje

$$\left( \frac{N_m}{N_0} - 1 \right) \ln \left[ \left( 1 - \frac{N_0}{N_m} \right) \left( \frac{N_m}{N_0} - 1 \right) \right] = 1. \quad (2.58)$$

Poslednja transcendentna jednačina omogućava da se numeričkim putem odredi odnos između maksimalnog  $N_m$  i verovatnog (očekivanog)  $N_0$  broja generisanih fragmenata

$$\frac{N_m}{N_0} = 3.25. \quad (2.59)$$

Ako se ima u vidu činjenica da je srednja dužina fragmenta određena relacijom

$$\bar{s} = \frac{s_0}{N_0}, \quad (2.60)$$

kao i izraz (2.48), dobija se da je odnos srednje prema minimalnoj dužini fragmenta takođe

$$\frac{\bar{s}}{s_{\min}} = 3.25. \quad (2.61)$$

Model, dakle, omogućava određivanje ukupnog broja fragmenata, odnosno srednje dužine fragmenta ukoliko je poznata minimalna dužina fragmenta. Podsetimo se da ovi rezultati važe samo u slučaju homogenog materijala fragmentacionog tela i uniformnog i simetričnog opterećenja (ovi uslovi su ekvivalentni razmatranom slučajnom kreiranju prslina), kao i za veliki broj generisanih fragmenata.

Napominjemo da je proračunu broja mogućih distribucija prslina koji je rezultirao relacijom (2.59), odnosno (2.61) moguće pristupiti na različite načine koji daju drugačije rezultate. Stoga ćemo ovde predstaviti rezultate jednostavnog numeričkog modela koji simulira razmatrani problem. Na prstenu se slučajno raspoređuje  $N_m$  prslina; ako je nova prslina udaljena od prethodno formiranih za više od  $s_{\min}=s_0/N_m$ , tada se ona potpuno razvija i izaziva lom. U suprotnom, rast prslina se usled rasterećenja zaustavlja. Cilj je da se odredi verovatni, odnosno srednji broj generisanih fragmenata. Za karakteristične vrednosti maksimalnog broja fragmenata  $N_m$  izvršen je veliki broj simulacija sa različitim slučajnim ulaznim veličinama (raspored  $N_m$  prslina) u skladu sa zahtevima metode Monte Carlo. Dobijeni rezultati su predstavljeni na slici 2.14. Kao što se vidi sa dijagrama (sl. 2.14) zavisnost između očekivanog i maksimalnog broja fragmenata je linearna, ali se ovakvim pristupom dobija odnos:

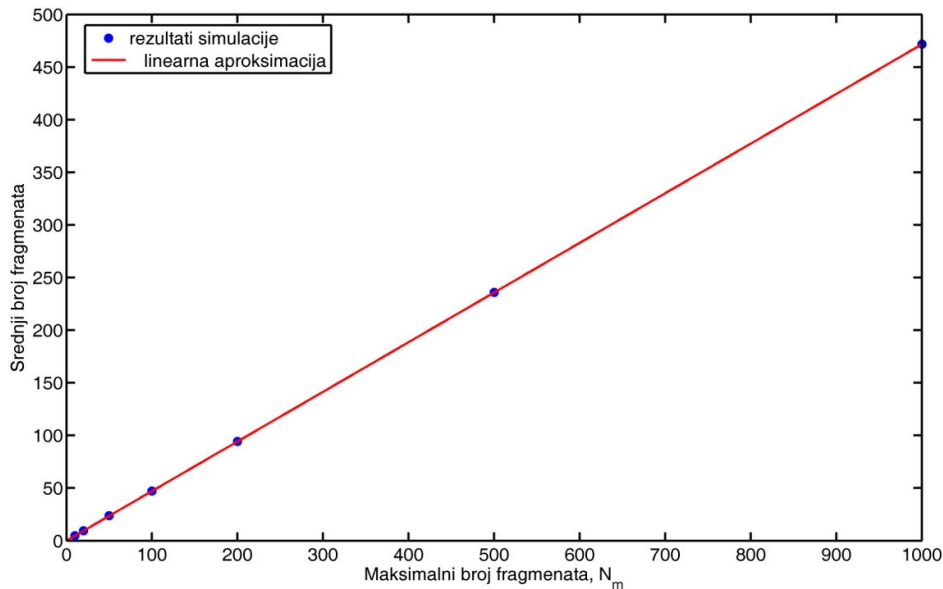
$$\frac{N_m}{N_0} = \frac{\bar{s}}{s_{\min}} = 2.12. \quad (2.62)$$

Izloženi numerički pristup koji je rezultirao relacijom (2.62) nazvaćemo modifikovanim statističkim modelom.

Raspodela veličine fragmenata određuje se sasvim analogno ranije razmotrenom pristupu pri analizi jednodimenzionih fragmentacija (odjeljak 2.2.1). Može se pokazati da princip maksimizacije entropije [16] (Englman, 1996) uvek dovodi do eksponencijalne raspodele veličine fragmenata  $dN = e^{-\alpha-\beta s} ds$ . Ovo važi i za izvorni, kao i za modifikovani statistički model. Integracijom u granicama  $[s, s_0]$  dobija se kumulativni zakon raspodele veličine fragmenata koji se može pisati u obliku:

$$N(s) = N(> s) = N_0 A s_r \exp\left(-\frac{s}{s_r}\right) - N_0 A s_r \exp\left(-\frac{s_0}{s_r}\right), \quad (2.63)$$

gde su  $A$  i  $s_r$  neodređeni parametri.



**Sl. 2.14.** Zavisnost očekivanog broja fragmenata od najvećeg mogućeg broja fragmenata pri jednodimenzionoj fragmentaciji – rezultati simulacije

Iz graničnog uslova i uslova normiranosti koji se mogu napisati u obliku

$$N(s_{\min}) = N_0, \quad \int_{s_{\min}}^{s_0} s dN(s) = s_0, \quad (2.64)$$

kao i uz korišćenje pretpostavki  $s_0 \gg s_{\min}$  i  $s_0 \gg s_r$ , dobija se konačni izraz za kumulativni zakon raspodele veličine fragmenata:

$$N(s) = N_0 \exp\left(-\frac{s-s_{\min}}{s_r}\right), \quad s \geq s_{\min}. \quad (2.65)$$

Primećujemo analogiju sa klasičnim eksponencijalnim zakonom raspodele. Uz gornje pretpostavke pokazuje se da se srednja dužina fragmenata može odrediti prema relaciji:

$$\bar{s} = \frac{s_0}{N_0} = s_r + s_{\min}. \quad (2.66)$$

Ako je poznata ukupna dužina  $s_0$  i minimalna dužina fragmenta  $s_{\min}$ , tada je na osnovu izraza (2.59), (2.61), odnosno (2.62), kao i (2.66) moguće jednostavno odrediti očekivani broj fragmenata  $N_0$ , srednju dužinu fragmenta  $\bar{s}$  i parametar  $s_r$ , čime je potpuno definisan i zakon raspodele (2.65).

U [59] autori su rezultate izvornog modela uporedili sa sopstvenim eksperimentalnim podacima i dobili zadovoljavajuće podudaranje. Ovde će ranije analizirani eksperimentalni rezultati jednodimenzione fragmentacije biti upoređeni sa statističkim modelima. Jedan parametar modela (npr. minimalna dužina, ili što je sasvim ekvivalentno masa fragmenta  $s_{\min}$ ) se optimizuje, dok se lako pokazuje da je tada vrednost parametra  $s_r=2.25s_{\min}$  za izvorni, odnosno  $s_r=1.12s_{\min}$  za modifikovani statistički model.

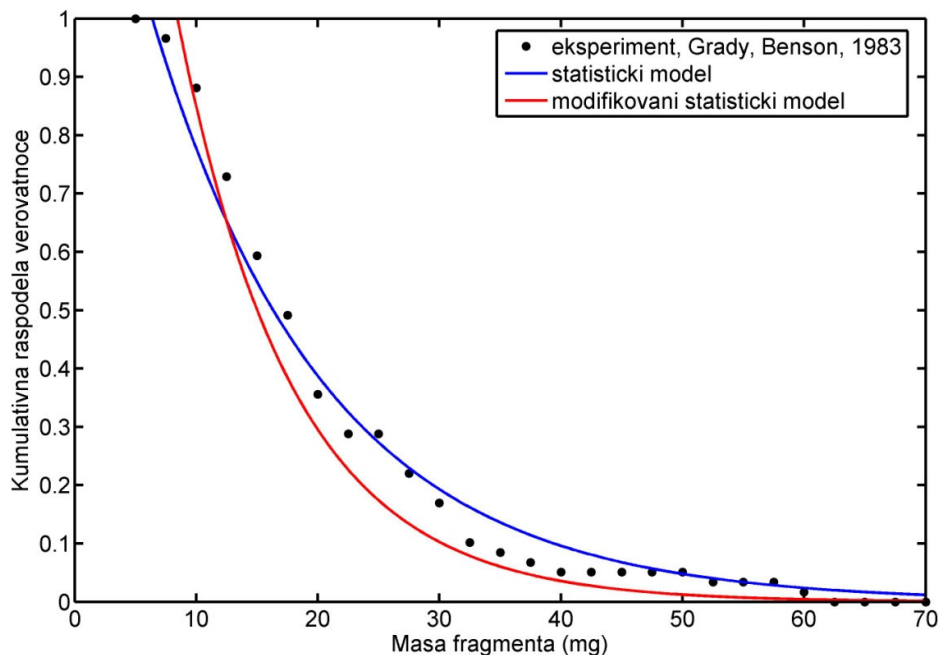
Eksperimentalni rezultati analizirani u [27] se veoma dobro podudaraju sa optimizovanim raspodelama prema statističkom modelu (sl. 2.15), bolje nego ranije razmatrani modeli zasnovani na geometrijskoj statistici.

Takođe se nešto bolji rezultati u odnosu na Voronoi raspodelu dobijaju i pri poređenju obe varijante statističkog modela sa eksperimentalnim podacima datim u [56], sl. 2.16. Modifikovani model daje bolje rezultate od izvornog statističkog modela.

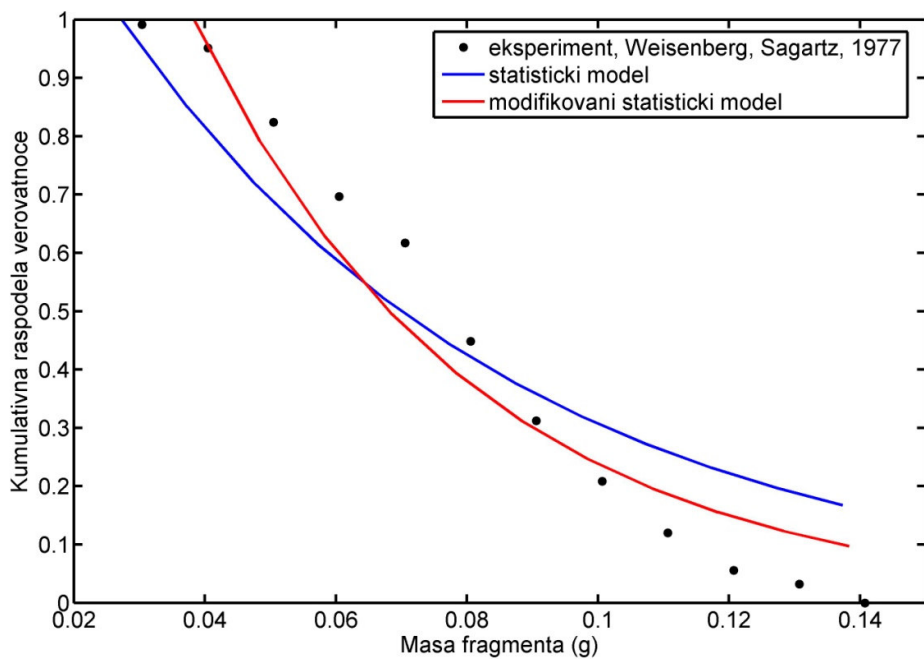
Na slici 2.17 prikazana je i poređenje eksperimentalnih rezultata jednodimenzione fragmentacije prstena izrađenog od legure uranijum-niobijum - U6Nb [30] sa predikcijama izvornog i modifikovanog statističkog modela. Za razliku od eksponencijalne i Voronoi raspodele koje ne prate trend dobijenih rezultata, obe krive prate eksperimentalne vrednosti.

Zaključujemo da razmotreni statistički model veoma dobro opisuje rezultate eksperimenata jednodimenzione fragmentacije, kao i da predložena modifikacija daje još bolje rezultate od izvornog modela. Posebno treba imati u vidu da statistički model opisuje fragmentaciju koja rezultira formiranjem velikog broja fragmenata, dok analizirane rezultate eksperimenata karakteriše u najboljem slučaju generisanje nekoliko desetina fragmenata.

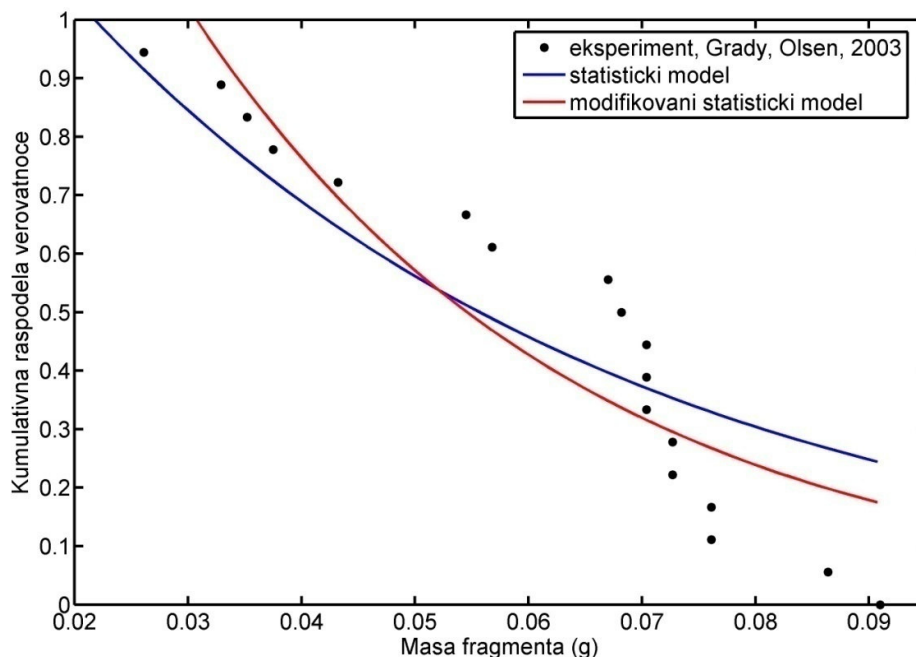
Autori predlažu jednostavnu generalizaciju modela na dvodimenzionu i trodimenzionu fragmentaciju rezonovanjem u duhu ranije pomenutih pristupa u [7] i [28]: razmatrana dužina fragmenata se kao skalarna veličina može zameniti površinom, zapreminom ili masom fragmenata. Kako i u tim slučajevima zaključivanje ostaje nepromenjeno, izrazi (2.59), odnosno (2.61) važe i za 2D i 3D fragmentaciju.



**Sl. 2.15.** Poređenje eksperimentalnih rezultata jednodimenzione fragmentacije aluminijumskog prstena [27] sa optimizovanim raspodelama na bazi izvornog i modifikovanog statističkog modela



**Sl. 2.16.** Poređenje eksperimentalnih rezultata jednodimenzione fragmentacije aluminijumskog prstena [56] sa optimizovanim raspodelama izvornog i modifikovanog statističkog modela



**Sl. 2.17.** Poređenje eksperimentalnih rezultata jednodimenzione fragmentacije prstena od uranijumske legure U6Nb [30] sa rezultatima izvornog i modifikovanog statističkog modela fragmentacije

Međutim, u slučaju 2D i posebno 3D fragmentacije najčešće ne važi osnovna pretpostavka modela – uniformnost opterećenja. Osim toga, imajući u vidu da su referentna površina, odnosno zapremina fragmenta proporcionalne kvadratu, odnosno trećem stepenu njegove dužine,  $a \sim s^2$  i  $v \sim s^3$ , odnos između minimalne veličine fragmenta prema srednjoj veličini fragmenta se značajno smanjuje tako da efektivno  $a_{\min}$  i  $v_{\min}$  teže nuli. Tada statistički model prelazi u ranije razmatrani eksponencijalni zakon raspodele. U tom smislu, poređenje eksperimentalnih rezultata za 2D i 3D fragmentaciju sa statističkim modelom je ekvivalentno ranije analiziranim poređenjem sa eksponencijalnom (Lienau-ovom) raspodelom.

## 2.4. Ostali empirijski zakoni raspodele mase fragmenata

Zakoni raspodele veličine (odnosno mase) fragmenata razmatrani u prethodnom odeljku predstavljaju rezultat geometrijskog pristupa zasnovanog na slučajnoj fragmentaciji tela. Ovi modeli predstavljaju osnovu na koju su nadgrađeni kompleksniji zakoni raspodele. Oni su nastali uglavnom empirijskim putem – pokušajima usaglašavanja sa mnogobrojnim rezultatima eksperimenata. Ovde će biti razmotreni najznačajniji empirijski zakoni raspodele mase fragmenata [11].

### 2.4.1. Generalizovana Mott-ova raspodela

Uopštavanjem izraza (2.37), odnosno (2.45) koji definišu dvodimenzionu i trodimenzionu Mott-ovu raspodelu, može se formulisati generalizovana Mott-ova raspodela [9] uvođenjem fleksibilnog eksponenta  $\nu$  i vođenjem računa o uslovu normiranosti (2.4)

$$N(m) = \frac{M_0}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\mu} \exp\left[-\left(\frac{m}{\mu}\right)^\nu\right]. \quad (2.67)$$

Parametar raspodele  $\mu$  definiše srednju masu fragmenata

$$\bar{m} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\mu, \quad (2.68)$$

dok parametar  $\nu=[1/3, 1/2]$  određuje dimenzionalnost procesa. Oba parametra se određuju numerički – tako da na najbolji način interpoliraju rezultate eksperimenata.

#### 2.4.2. Raspodela Stromsoe-Ingebrigtsena

Najvažniji nedostatak osnovne i uopštene Mott-ove raspodele je teorijska mogućnost postojanja parčadi sa baskonačno velikom masom  $m$ , dok je realno, naravno, masa najtežeg parčeta konačna. Zbog toga postoji još jedna modifikacija Mott-ove raspodele autora Stromsoe i Ingebrigtsena [50]:

$$N(m) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\mu_k} \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \frac{m}{m_{\max}}\right) \exp\left[-\left(\frac{m}{\mu_k}\right)^{\frac{1}{2}}\right], & m \leq m_{\max} \\ 0, & m > m_{\max} \end{cases} \quad (2.69)$$

Raspodelu karakteriše konačna masa najtežeg parčeta. Parametri  $\mu_0$  - koji korespondira sa ukupnom masom parčadi  $M_0$ ,  $\mu_k$  koji je analogan parametru  $\mu$  i  $m_{\max}$  koji definiše parče maksimalne mase, takođe se određuju upoređivanjem sa rezultatima eksperimenata.

#### 2.4.3. Generalizovana Grady-Kipp raspodela

Razmatrajući statistički nehomogene raspodele fragmenata, Grady i Kipp [28] su predložili troparametarsku generalizaciju raspodele definisane izrazom (2.40) u obliku:

$$\frac{N(m)}{N_0} = fe^{-\frac{m}{\mu_1}} + (1-f)e^{-\frac{m}{\mu_2}}. \quad (2.70)$$

Ovaj pristup pretpostavlja da postoje dve klase generisane parčadi, sa odgovarajućim udelima u broju fragmenata  $f$ , odnosno  $(1-f)$  i srednjim masama  $\mu_1$ , odnosno  $\mu_2$ .

#### 2.4.4. Lognormalna raspodela

Razmatrajući multiplikativnu prirodu procesa fragmenatcije, nekoliko autora (npr. [3]) je predložilo lognormalnu raspodelu za opisivanje raspodele mase fragmenata:

$$\frac{N(m)}{N_0} = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\ln m - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right], \quad (2.71)$$

gde je  $\operatorname{erf}(\bullet)$  funkcija greške definisana sa  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

#### 2.4.5. Weibull-ova raspodela

Kao što je ranije napomenuto, raspodelu mase parčadi moguće je definisati i preko kumulativne mase parčadi  $M(m)$ . Osnovni model predstavlja dvoparametarska Weibull-ova distribucija [55] (poznata i kao Rosin-Ramler-ova raspodela) koja je izvorno korišćena za statističku deskripciju čvrstoće materijala, a zatim i za opisivanje raspodele veličine zrna u procesima drobljenja. Kumulativna masa fragmenata definisana je funkcijom

$$M(m) = M_0 e^{-\left(\frac{m}{\mu}\right)^\lambda}. \quad (2.72)$$

Korišćenjem veze između kumulativne raspodele broja i mase fragmenata (2.3) dobija se kumulativni broj fragmenata u obliku:

$$N(m) = \frac{N_0}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)} \Gamma\left(1-\frac{1}{\lambda}, \left(\frac{m}{\mu}\right)^\lambda\right), \quad \lambda > 1. \quad (2.73)$$

#### 2.4.6. Held-ova raspodela

Drugačiji pristup modeliranju raspodele mase parčadi, na osnovu analize eksperimentalnih podataka, definisao je Held [32] formulom

$$M(n) = M_0 [1 - \exp(-Bn^\lambda)], \quad n = 1, 2, \dots, N_0 \quad (2.74)$$

pri čemu je  $M(n)$  - ukupna masa prvih  $n$  parčadi ako su sva parčad sortirana u opadajući niz od najtežeg prema najlakšem parčetu,  $n$  - kumulativni broj parčadi, dok su  $B$  i  $\lambda$  - parametri Held-ove raspodele. Held-ov pristup teorijski omogućava određivanje pojedinačne mase svakog parčeta na osnovu jednakosti

$$m_n = M(n) - M(n-1). \quad (2.75)$$

Transformisanjem izraza (2.74) uz korišćenje uslova normiranosti (2.3) dobija se implicitni izraz za kumulativni broj fragmenata

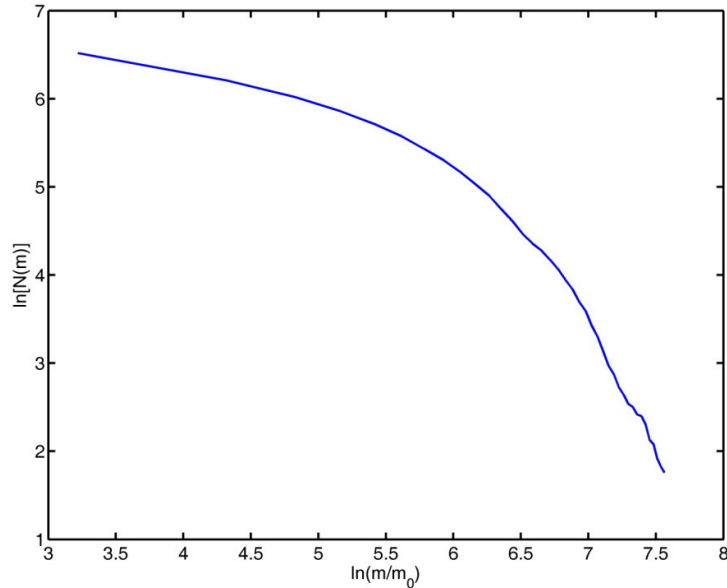
$$m = M_0 B \lambda N^{\lambda-1}(m) e^{-BN^{\lambda-1}(m)}. \quad (2.76)$$

#### 2.4.7. Stepeni zakon raspodele

Na kraju pregleda zakona raspodele mase parčadi potrebno je pomenuti i veoma često korišćeni stepeni zakon raspodele [33], [52] koji je verifikovan za mnoge tipove fragmentacionih procesa (od kosmičkih sudara do fragmentacije velikog broja krtih materijala usled udara i sl.):

$$N(m) \propto m^{-\alpha}. \quad (2.77)$$

Parametar raspodele  $\alpha < 1$  najčešće ima vrednost približno 2/3. Smatra se da ova raspodela ima fundamentalnu zasnovanost u fraktalnoj prirodi višestrukog loma i univerzalnu primenu. Ako bi raspodela definisana izrazom (3.77) na valjan način opisivala distribuciju fragmenata košuljice projektila, morala bi da postoji linearna zavisnost između logaritama broja paračadi  $\ln[N(m)]$  i mase  $\ln(m)$ , pri čemu bi nagibom prave bio definisan parametar raspodele  $\alpha$ . Na sl. 2.18. data je karakteristična raspodela kumulativnog broja parčadi (koja odgovara dijagramu na slikama 2.1. i 2.2.) u logaritamskom koordinatnom sistemu.



**Sl. 2.18.** Kumulativna raspodela broja fragmenata u logaritamskom koordinatnom sistemu za eksperimentalne podatke koji odgovaraju projektilu A u [35]; ista raspodela prikazana je na slikama 2.1 i 2.2

Uočljivo je značajno odstupanje tipične eksperimentalne krive od linearnog zakona. S obzirom da je ovo odstupanje sistematsko (za sve dostupne opitne rezultate), može se zaključiti da stepeni zakon raspodele ne može biti uspešno korišćen za modeliranje fragmentacije projektila, budući da, bez obzira na širok dijapazon primena, očigledno ne obuhvata specifičnosti fragmentacije projektila.

## 2.5. Analiza i poređenje modela raspodele mase parčadi

Da bi se utvrdila valjanost prezentovanih modela, potrebno je modelske rezultate uporediti sa dostupnim eksperimentalnim podacima raspodele mase fragmenata generisanih rasprskavanjem košuljice projektila ili metalnih cilindara. Pri tome, ovde neće biti razmatrani svi napred navedeni i analizirani teorijski zakoni raspodele.

Ranije je ukazano da eksponencijalna, Bessel-ova, odnosno Meijer-ova raspodela, saglasno načinu na koji su konstruisane, dobro aproksimiraju raspodele mase parčadi samo pri fragmentaciji krtih materijala. Takođe je uočeno da unimodalna Voronoi raspodela ne može uspešno da se koristi za opisivanje trodimenzione fragmentacije. Razmotreni statistički modeli raspodele, kako je pokazano, prvenstveno su relevantni za modeliranje problema jednodimenzione fragmentacije. Već je napomenuto da stepeni zakon raspodele ne omogućava kvalitetno opisivanje raspodele mase fragmenata projektila parčadnog dejstva. U našoj ranijoj analizi [13] pokazano je da raspodela Stromsoe-Ingebrigtsena ne predstavlja značajno unapređenje Mott-ovog zakona raspodele. Takođe je pokazano [15] da ni jednoparameterska Grady-Kipp raspodela ne daje zadovoljavajuće rezultate kada je u pitanju opisivanje raspodele mase fragmenata razornog projektila. Jasno je da zakoni raspodele sa velikim brojem slobodnih parametara nisu relevantni, tako da raspodele sa više od tri parametra, npr. Gilvarry-jeva raspodela [17] ili raspodela definisana u [39] ovde nisu razmatrane.

Ovde će stoga biti analizirano šest teorijskih modela raspodele mase fragmenata:



- Mott-ova raspodela (2.37), jedini relevantan jednoparametarski model raspodele,
- generalizovana Mott-ova raspodela (2.58), dvoparametarsko uopštenje osnovnog Mott-ovog zakona raspodele,
- generalizovana Grady-Kipp raspodela (2.70), troparametarska generalizacija Grady-Kipp raspodele u slučaju statističke nehomogenosti generisanih fragmenata,
- lognormalna raspodela (2.71), dvoparametarska empirijska raspodela nastala razmatranjem multiplikativne i multifraktalne prirode procesa fragmentacije,
- Weibull-ova raspodela (2.72), takođe dvoparametarska raspodela koja je korišćena za opisivanje kvazistatičke fragmentacije,
- Held-ova raspodela (2.74), empirijska dvoparametarska raspodela konstruisana specijalno za opisivanje fragmentacije projektila parčadnog dejstva.

U tabeli 2.1. pregledno su date osnovne karakteristike napred navedenih funkcija raspodele: relativni kumulativni broj fragmenata, relativna kumulativna masa fragmenata, kao i srednja masa fragmenata. Medijane raspodele se jednostavno određuju korišćenjem uslova (2.6).

**Tabela 2.1.** Šest najznačajnijih zakona raspodele mase fragmenata i njihove osobine

raspodela	Relativni kumulativni broj fragmenata	Relativna kumulativna masa fragmenata	Srednja masa fragmenata
	$N(m)/N_0$	$M(m)/M_0$	$\bar{m}$
<b>Mott</b>	$e^{-\left(\frac{m}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{2}\Gamma\left(3, \left(\frac{m}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$	$2\mu$
<b>Generalizovani Mott</b>	$e^{-\left(\frac{m}{\mu}\right)^{\lambda}}$	$\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)}\Gamma\left(1+\frac{1}{\lambda}, \left(\frac{m}{\mu}\right)^{\lambda}\right)$	$\Gamma\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\mu$
<b>Generalizovani Grady-Kipp</b>	$f e^{-\frac{m}{\mu_1}} + (1-f) e^{-\frac{m}{\mu_2}}$	$\frac{1}{\mu} \left[ f(\mu_1 + m) e^{-\frac{m}{\mu_1}} + (1-f)(\mu_2 + m) e^{-\frac{m}{\mu_2}} \right]$	$f\mu_1 + (1-f)\mu_2$
<b>Log-normalna</b>	$\frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\ln m - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]$	$\frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\ln m - (\mu + \sigma^2)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]$	$e^{\mu + \sigma^2/2}$
<b>Weibull</b>	$\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)} \Gamma\left(1-\frac{1}{\lambda}, \left(\frac{m}{\mu}\right)^{\lambda}\right), \lambda > 1$	$e^{-\left(\frac{m}{\mu}\right)^{\lambda}}$	$\frac{\mu}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}$
<b>Held</b>	$M(m) = 1 - e^{-BN_T^{\lambda}(m)}, m = M_0 B \lambda N_T^{\lambda-1}(m) e^{-BN_T^{\lambda-1}(m)}$		n/a

U analizi su korišćeni eksperimentalni rezultati fragmentacije ukupno 30 projektila, i to iz sledećih izvora: [35] – 20 projektila, [32] – tri projektila, [50] – tri projektila, [9] – dva projektila i [7] – dva metalna cilindra fragmentisana pod dejstvom produkata detonacije.

Sa stanovišta analize razmatranih modela i karakterizacije raspodele mase parčadi uopšte, bilo bi idealno da je poznata masa svakog parčeta, tj. da eksperimentalni rezultati budu dati u vidu npr. rastućeg niza masa fragmenata  $m_k, k=1,2,\dots,N_0$ . U praksi je, međutim, uobičajeno da se zbog jednostavnijeg merenja i manipulisanja prikupljenim materijalom košuljice, eksperimentalni podaci predstavljaju u nešto grubljoj formi – u obliku tabela u kojima se daje broj parčadi i njihova ukupna masa u masenim grupama. Stoga je jasno da izbor suviše velikih raspona mase u masenim grupama može da u izvesnoj meri iskrivi sliku o stvarnom karakteru raspodele. Sa druge strane, često se u analizama raspodele parčadi i njenom modeliranju zanemaruje određen broj parčadi najveće mase, jer se smatra da su ona rezultat neregularne fragmentacije, pa ih samim tim i nije potrebno uzeti u

obzir. Ovde će biti uzeta u obzir sva prikupljena parčad, na osnovu čega će realna (statistička) raspodela biti upoređena sa navedenim teorijskim modelima raspodele.

Parametri raspodele broja parčadi za svaki od teorijskih modela optimizuju se minimiziranjem odstupanja teorijske od stvarne raspodele u smislu metode najmanjih kvadrata, tj. određuje se minimum funkcije

$$\min \sum_{i=1}^n [F_t(m_i, p_1, p_2, \dots, p_k) - F_0(m_i)]^2 \quad (2.78)$$

gde je  $F_t(m, p_1, p_2, \dots, p_k)$  – teorijska funkcija raspodele,  $p_i$  – parametri funkcija raspodele (zavisno od modela, funkcija može da ima jedan, dva ili tri “slobodna” parametra koji se optimizuju), dok je  $F_0(m)$  – eksperimentalno dobijena funkcija raspodele. Optimalne vrednosti parametara  $p_i$  određuju se numeričkim putem, primenom odgovarajućih funkcija programskog paketa Matlab®.

Na sl. 2.19. predstavljeni su karakteristični dijagrami optimizovanih teorijskih zakona raspodele uz odgovarajuću eksperimentalno utvrđenu raspodelu.

Generalno, može se zaključiti da svi modeli daju dobru aproksimaciju eksperimentalnih rezultata. Da bi se oni mogli međusobno uporediti, potrebno je uvesti odgovarajući kriterijum koji definiše odstupanje modelskih od eksperimentalnih rezultata. U tom smislu, biće korišćen statistik  $\bar{R}^2$  – tzv. podešena (korigovana) vrednost koeficijenta determinacije [54]

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{S_D}{S_T} \frac{n-1}{n-k-1} \quad (2.79)$$

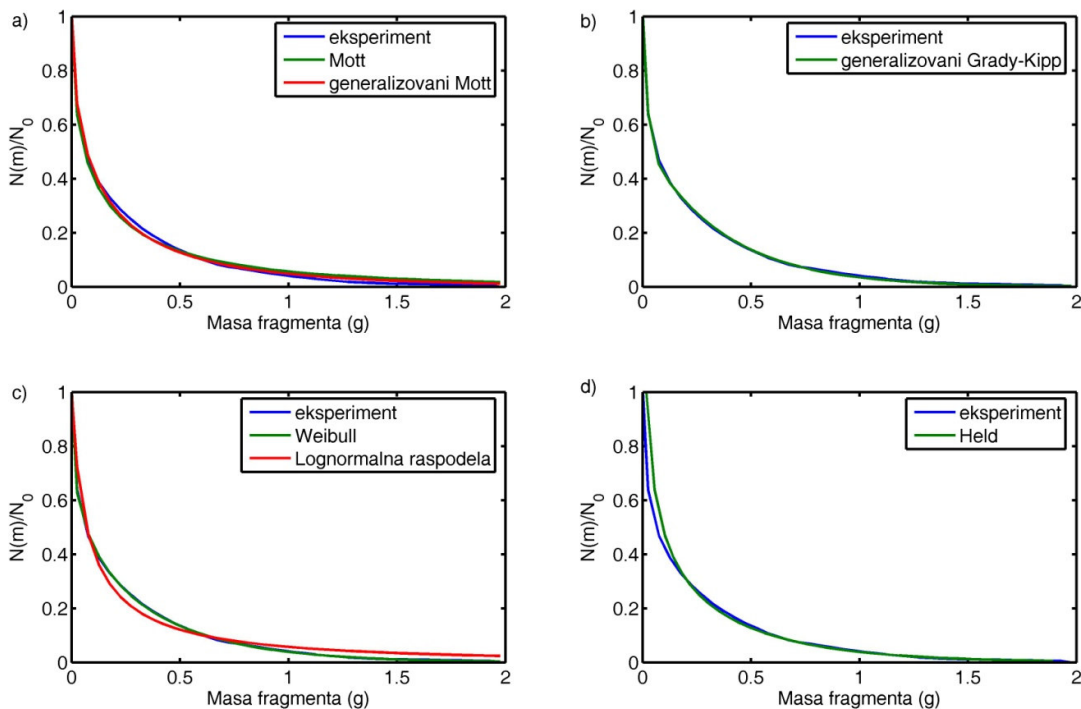
gde su

$$S_D = \sum_{i=1}^n (F_t(m_i) - F_0(m_i))^2$$

$$S_T = \sum_{i=1}^n (F_t(m_i) - \bar{F}_0)^2 \quad (2.80)$$

pri čemu je  $\bar{F}_0$  srednja vrednost eksperimentalno utvrđene raspodele,  $n$  je broj masenih grupa, dok je  $k$  broj parametara u teorijskom zakonu raspodele.

Statistik  $\bar{R}^2$  u stvari je definisan odnosom regresijom objašnjenog varijabiliteta i ukupnog varijabiliteta zavisne promenljive, koji je uz to korigovan uticajem broja parametara koji se optimizuju. Ovaj statistik dakle omogućava međusobno poređenje teorijskih modela sa različitim brojem parametara koji se optimizuju. Vrednosti  $\bar{R}^2$  pripadaju intervalu [0, 1], slično koeficijentu korelacije, pri čemu veće vrednosti ukazuju na bolje podudaranje teorijskih i eksperimentalnih rezultata. U tabeli 2.2 dat je pregled statistika  $\bar{R}^2$  za sve pomenute teorijske modele na dostupnom skupu eksperimentalnih rezultata. Da bi rezultati bili uporedivi neophodno je, naravno, koristiti isti oblik funkcije raspodele  $F_t$  – ovde je korišćena relativna kumulativna raspodela broja generisanih fragmenata  $F_t = N(m)/N_0$ .



**Sl. 2.19.** Karakteristični dijagrami optimizacije teorijskih zakona raspodele: a) Mott-ova i generalizovana Mott-ova, b) generalizovana Grady-Kipp, c) Weibull-ova i lognormalna, i d) Held-ova raspodela mase fragmenata. Sve teorijske raspodele su poredene sa istim eksperimentalnim rezultatom – projektil A u [35]

Analizom rezultata u tabeli 2.2. uočavamo da praktično svi razmatrani zakoni raspodele daju dobru aproksimaciju eksperimentalnih podataka. Ako težimo modelu raspodele sa samo jednim slobodnim parametrom klasični Mott-ov model predstavlja sasvim prihvatljivo rešenje. Dvoparametarska lognormalna, kao i Held-ova raspodela takođe obezbeđuju veoma dobro podudaranje sa rezultatima eksperimenata. Očigledno je, međutim, da tri raspodele – generalizovana Mott-ova, generalizovana Grady-Kipp i Weibull-ova raspodela – predstavljaju najbolje aproksimacije rezultata analiziranog reprezentativnog skupa eksperimenata. Slični rezultati se dobijaju i pri optimizaciji kumulativne mase fragmenata  $M(m)/M_0$  (sl. 2.20).

Osim analize podudaranja teorijske i eksperimentalne krive raspodele, od značaja je i analiza saglasnosti odgovarajućih mera centralne tendencije raspodele. U uvodnom delu su kao osnovne mere centralne tendencije raspodele apostrofirane srednja (očekivana) vrednost  $\bar{m}$  i dve medijane  $\tilde{m}_N$  i  $\tilde{m}_M$ .

Na osnovu definicije ovih statističkih parametara (2.5) i (2.6) zaključujemo da srednja vrednost  $\bar{m}$  i medijana  $\tilde{m}_N$  dominantno zavise od ukupnog broja generisanih fragmenata  $N_0$ . Eksperimentalno utvrđivanje ukupnog broja fragmenata  $N_0$ , posebno u slučaju trodimenzione fragmentacije i postojanja velikog broja fragmenata ( $N_0 > 1000$ ), može da bude veoma nepouzdana. Naime, uprkos primeni raznovrsnih tehnika, izvestan broj fragmenata koji po pravilu pripadaju najlakšoj masenoj grupi, ne može biti prikupljen posle eksperimenta. Ovaj broj može značajno uticati na procenu ukupnog broja fragmenata  $N_0$ , ali uglavnom neznatno utiče na utvrđivanje ukupne mase generisanih fragmenata  $M_0$  (eksperimenti sa gubitkom mase manjim od 2% smatraju se uspešnim). Iz ovoga jasno

sledi da pomenute eksperimentalne greške najmanje utiču na medijanu  $\tilde{m}_M$ . Stoga će ova mera raspodele takođe biti uzeta kao kriterijum za dalje poređenje eksperimentalnih rezultata i teorijskih vrednosti dobijenih za tri raspodele.

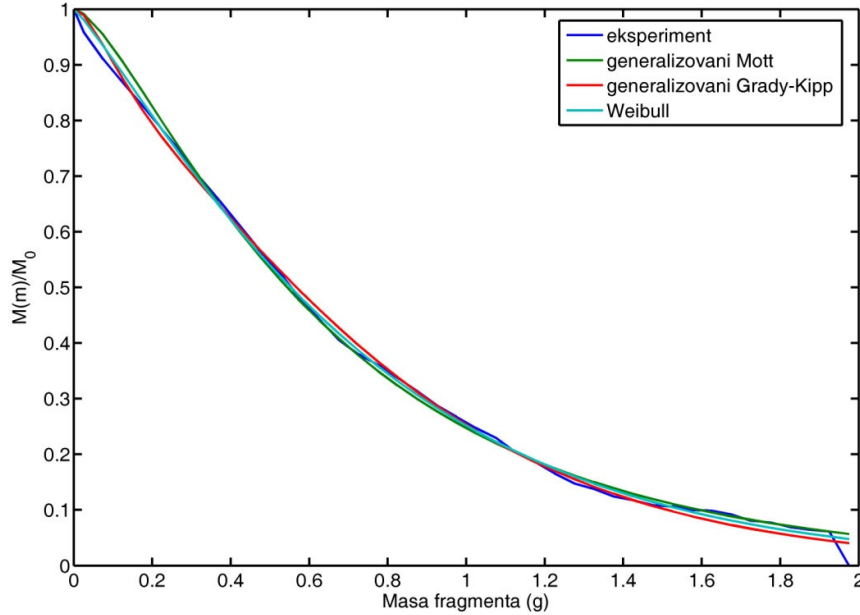
Tabela 2.2. Vrednost koeficijenta determinacije  $\bar{R}^2$  izračunata za šest relevantnih teorijskih zakona raspodele mase fragmenata na osnovu 30 eksperimentalnih rezultata fragmentacije.

Koeficijent determinacije $\bar{R}^2$						
	Mott	gen. Mott	gen. Grady-Kipp	Log-normalna	Weibull	Held
1	0.9919	0.9960	0.9994	0.9817	0.9997	0.9975
2	0.9946	0.9946	0.9999	0.9846	0.9995	0.9899
3	0.9936	0.9936	0.9992	0.9787	0.9997	0.9981
4	0.9948	0.9957	0.9995	0.9897	0.9994	0.9944
5	0.9896	0.9913	0.9994	0.9766	0.9993	0.9988
6	0.9122	0.9951	0.9987	0.9807	0.9980	0.9926
7	0.4326	0.9462	0.8959	0.9229	0.9521	0.9687
8	0.9984	0.9985	0.9973	0.9937	0.9996	0.9606
9	0.9952	0.9984	0.9970	0.9946	0.9994	0.9723
10	0.9941	0.9984	0.9958	0.9941	0.9994	0.9855
11	0.9990	0.9992	0.9985	0.9961	0.9990	0.9805
12	0.9991	0.9991	0.9994	0.9964	0.9995	0.9775
13	0.9750	0.9988	0.9997	0.9909	0.9961	0.9885
14	0.9884	0.9996	0.9990	0.9931	0.9959	0.9967
15	0.9995	0.9997	0.9998	0.9990	0.9999	0.9853
16	0.9986	0.9986	0.9995	0.9964	0.9999	0.9812
17	0.8879	0.9990	0.9990	0.9940	0.9972	0.9760
18	0.9959	0.9971	0.9943	0.9951	0.9931	0.9908
19	0.9995	0.9997	0.9999	0.9975	0.9991	0.9944
20	0.9990	0.9992	0.9996	0.9963	0.9998	0.9899
21	0.9923	0.9996	0.9991	0.9991	0.9999	0.9866
22	0.9992	0.9999	0.9998	0.9998	0.9999	0.9774
23	0.9960	0.9996	0.9930	0.9966	0.9961	0.9937
24	0.9910	0.9980	0.9952	0.9893	0.9964	0.9613
25	0.9985	0.9985	0.9960	0.9891	0.9988	0.9608
26	0.9561	0.9894	0.9966	0.9799	0.9964	0.9916
27	0.9948	0.9995	0.9979	0.9967	0.9979	0.9923
28	0.9787	0.9886	0.9988	0.9752	0.9961	0.9905
29	0.9104	0.9987	0.9707	0.9985	0.9948	0.9986
30	0.9738	0.9992	0.9831	0.9992	0.9961	0.9925

**Napomena:** za eksperimentalne podatke o raspodeli mase fragmenata projektila korišćeni su sledeći izvori: 1-20 iz [35] – srednje vrednosti za najmanje pet testova za svaki projektil; 21-23 iz [32]; 24-26 iz [50]; 27-28 iz [9] i 29-30 iz [7] – test cilindri. Redosled analiziranih eksperimenata isti je kao u izvornoj literaturi

Eksperimentalna (stvarna) vrednost medijane  $\tilde{m}_M$  jednostavno se određuje analizom rezultata opita, na osnovu uslova

$$M(\tilde{m}_M^E) = \frac{M_0}{2}. \quad (2.81)$$



**Sl. 2.20.** Optimizacija teorijskih zakona raspodele na osnovu relativne kumulativne mase fragmenata  $M(m)/M_0$ : poređenje eksperimentalno određene raspodele – projektil A [35] i generalizovane Mott-ove, generalizovane Grady-Kipp i Weibull-ove raspodele

Teorijske vrednosti medijane takođe se dobijaju korišćenjem uslova (2.81), pri čemu se koriste ranije određene optimizovane vrednosti odgovarajućih parametara raspodele. Ako se vrednosti relativne kumulativne raspodele mase fragmenata  $M(m)/M_0$  (treća kolona u tabeli 2.1) izjednače sa  $1/2$ , dobija se odgovarajuća medijana  $\tilde{m}_M$ . U slučaju Weibull-ove raspodele, teorijska vrednost medijane se dobija eksplicitno u funkciji parametara raspodele:

$$\tilde{m}_M^T = (\ln 2)^{\frac{1}{\lambda}} \mu. \quad (2.82)$$

U slučaju generalizovane Mott-ove i generalizovane Grady-Kipp raspodele vrednosti medijane je neophodno potražiti numeričkim putem. U tabeli 2.3 upoređene su relativne greške u određivanju medijane

$$\varepsilon = \frac{\tilde{m}_M^T - \tilde{m}_M^E}{\tilde{m}_M^E} \quad (2.83)$$

za tri razmatrane teorijske raspodele mase fragmenata na skupu od 30 eksperimenata.

Analiza dobijenih rezultata u tabeli 2.3 ukazuje na generalno zadovoljavajući nivo podudaranja eksperimentalno utvrđenih i teorijskih vrednosti medijane  $\tilde{m}_M$ . Takođe, ovaj kriterijum daje izvesnu prednost generalizovanoj Grady-Kipp raspodeli u odnosu na preostale dve empirijske raspodele.

U daljim analizama, pri modeliranju raspodele mase fragmenata, fokusiraćemo se na generalizovanu Grady-Kipp raspodelu iz dva razloga:

1. Analiza koeficijenta determinacije pokazuje da ova raspodela izuzetno dobro opisuje rezultate eksperimenata (približno jednako dobro kao i generalizovana Mott-ova i Weibull-ova raspodela), dok analiza medijane blago favorizuje ovaj teorijski pristup.

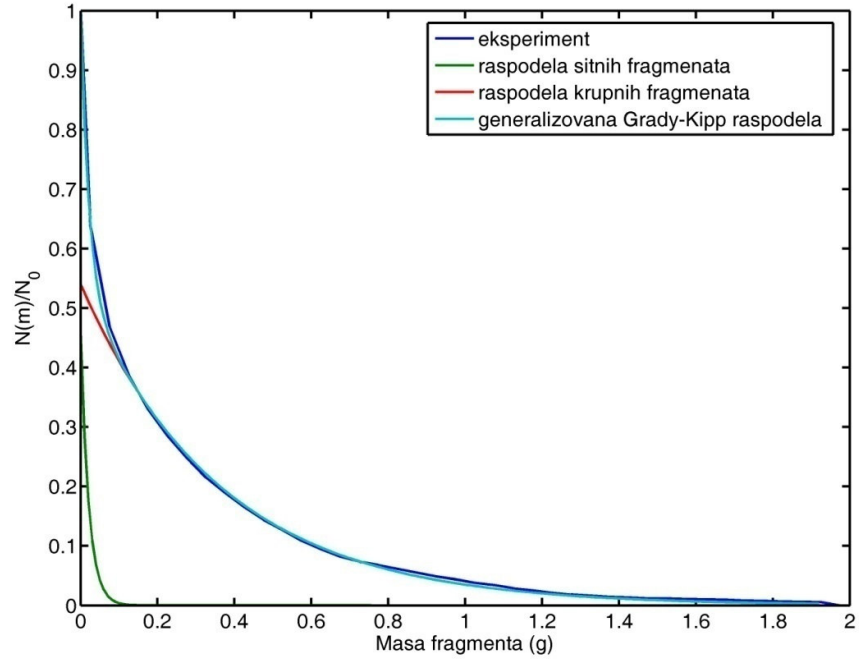
2. Ova raspodela je, kao što je pokazano u odeljku 2.2. fizički zasnovana na principima geometrijske fragmentacije. Nehomogenost, tj. bimodalnost raspodele upravo korespondira sa prirodom parčadi dobijene eksplozivnom fragmentacijom. Naime, generalno postoje najmanje dva tipa fragmenata košuljice razornih projektila: (i) krupniji fragmenti koji nastaju kao rezultat krtog loma u spoljašnjoj zoni košuljice za čije formiranje su prvenstveno odgovorni normalni naponi usled istezanja, i (ii) sitniji fragmenti koji potiču iz unutrašnje zone košuljice koji su formirani kao rezultat duktilnog loma usled lokalizovanog adijabatskog smicanja.

**Tabela 2.3.** Relativna greška medijane  $\tilde{m}_M$  za tri analizirane raspodele (generalizovana Mott-ova, generalizovana Grady-Kipp i Weibull-ova raspodela) na osnovu 30 eksperimentalnih rezultata fragmentacije. U zagradi su rangirani dobijeni rezultati za tri razmatrane raspodele

	Relativna greška medijane, $\varepsilon$		
	gen. Mott	gen. Grady-Kipp	Weibull
1	0.2459 (3)	0.0554 (1)	0.0876 (2)
2	0.3895 (3)	0.0985 (1)	0.1870 (2)
3	0.2768 (3)	0.0149 (1)	0.0698 (2)
4	0.4140 (3)	0.1160 (1)	0.2213 (2)
5	0.3918 (3)	-0.0006 (1)	0.0762 (2)
6	0.1080 (3)	0.0932 (2)	0.0735 (1)
7	0.0508 (1)	0.3209 (3)	0.0612 (2)
8	0.1751 (3)	-0.1112 (2)	0.0003 (1)
9	0.3604 (3)	-0.0698 (1)	0.0841 (2)
10	0.3769 (3)	-0.0856 (2)	0.0829 (1)
11	0.2425 (3)	0.0515 (1)	0.0831 (2)
12	0.2691 (3)	0.0689 (1)	0.1193 (2)
13	0.0833 (3)	0.0607 (2)	-0.0012 (1)
14	0.1210 (3)	0.0763 (2)	0.0105 (1)
15	0.8198 (3)	0.7621 (1)	0.7933 (2)
16	0.5482 (3)	0.3365 (1)	0.4569 (2)
17	0.1668 (2)	0.1699 (3)	0.1360 (1)
18	0.2058 (3)	-0.0878 (1)	-0.1178 (2)
19	0.2361 (3)	0.1656 (2)	0.1203 (1)
20	0.3259 (3)	0.1357 (1)	0.1666 (2)
21	1.2373 (3)	0.1409 (1)	0.3726 (2)
22	0.6374 (2)	0.6458 (3)	0.6212 (1)
23	0.0592 (1)	-0.5295 (3)	-0.4608 (2)
24	-0.0417 (1)	-0.2846 (3)	-0.2746 (2)
25	0.3071 (3)	-0.1612 (2)	-0.0497 (1)
26	2.8439 (3)	-0.0271 (1)	0.3419 (2)
27	0.1269 (3)	-0.0902 (1)	-0.1147 (2)
28	0.3896 (3)	0.2499 (1)	0.2702 (2)
29	4.5932 (3)	-0.9182 (2)	-0.7485 (1)
30	0.8376 (3)	-0.6784 (2)	-0.3911 (1)

**Napomena:** Ista kao za tabelu 3.2.

Na slici 2.21 su predstavljene komponente generalizovane Grady-Kipp raspodele, gde se jasno uočavaju funkcije raspodele sitnijih i krupnijih fragmenata.



**Sl. 2.21.** Komponente generalizovane Grady-Kipp raspodele koje definišu udeo frakcija krupnijih i sitnijih fragmenata

## 3. FIZIČKI ZASNOVANI MODELI FRAGMENTACIJE

### 3.1. Uvod

U prethodnom poglavlju razmotreni su empirijski zakoni koji definišu raspodelu veličine fragmenata. Pri tome su korišćeni samo principi geometrijske verovatnoće i empirijskih zapažanja, tj. nije se ulazilo u prirodu samog procesa fragmentacije. U ovom poglavlju se razmatra fizička suština fragmentacionog procesa. Biće predstavljena dva ključna pristupa modeliranju fragmentacije: (i) Mott-ov model zasnovan na mehanici i statistici, i (ii) energetski pristup. Oba pristupa ukazuju na osnovne mehanizme fragmentacije i omogućavaju karakterizaciju generisanih fragmenata u smislu određivanja raspodele veličine fragmenata, utvrđivanja srednje mase fragmenata i sl.

### 3.2. Mott-ov model jednodimenzione fragmentacije

U ovom odeljku najpre će biti razmotren fizičko-statistički pristup analizi procesa fragmentacije koji je zasnovan na klasičnom Mott-ovom modelu [44]. U svom radu koji predstavlja nezaobilazan izvor pri izučavanju fragmentacije, Mott je izložio originalan i konzistentan model fragmentacije koji je poslužio kao osnova za dalja istraživanja i složenije pristupe modeliranju fragmentacije. Zanimljivo je da je pristup problemu fragmentacije potpuno fizički zasnovan, tj. model se ne poziva na ranija istraživanja autora, bazirana na primeni geometrijske statistike (što je detaljno analizirano u odeljku 2.2), koja su rezultirala poznatom Mott-ovom formulom.

Grady [21] je posvetio celu studiju analizi Mott-ovog modela, njegovom proširenju i implikacijama. Model je takođe detaljno analiziran u [14].

Model se odnosi na fragmentaciju tankih košuljica razornih projektila. Da bi se obezbedila jednodimenzionalnost modela, smatra se da se košuljica sastoji od većeg broja prstenova koji su postavljeni jedan uz drugi. Na taj način se razmatraju samo prsline u aksijalnom pravcu, pa svi fragmenti imaju istu debljinu (debljina košuljice) i širinu (širina prstena). Cilj je da se teorijski odredi raspodela dužina fragmenata prstena, odnosno košuljice.

#### 3.2.1. Model loma materijala košuljice

Veoma značajnu ulogu u modeliranju fragmentacije ima tretiranje kriterijuma loma materijala košuljice. Jasno je da veličine kao što su granica elastičnosti, napon tečenja, napon kidanja, relativna deformacija i kontrakcija u trenutku loma, imaju statistički karakter. One zavise prvenstveno od nepravilnosti u strukturi materijala (šupljine, uključci, mikroprsline) koje variraju od jednog do drugog uzorka. Osnovna pretpostavka u Mott-



ovom pristupu je da elementarna verovatnoća loma uzorka jedinične dužine pri porastu relativne deformacije sa vrednosti  $\varepsilon$  na  $\varepsilon+d\varepsilon$  ima eksponencijalni karakter:

$$\lambda(\varepsilon) = Ce^{\gamma\varepsilon} d\varepsilon \quad (3.1)$$

gde parametri  $C$  i  $\gamma$  predstavljaju karakteristike materijala. Izabrana eksponencijalna funkcija obezbeđuje vrlo brz rast verovatnoće loma sa porastom relativne deformacije. Napominjemo da je moguće izabrati i druge rastuće funkcije kojima bi se modelirao porast verovatnoće loma sa porastom relativne deformacije. U modifikacijama osnovnog Mott-ovog modela [21-22] korišćena je stepena funkcija i dobijeni su veoma slični konačni rezultati. Koristeći pretpostavku (3.1) moguće je odrediti verovatnoću loma uzorka  $p$  pri vrednosti relativne deformacije  $\varepsilon$ , imajući u vidu da je  $1-p$  verovatnoća da pri vrednostima relativne deformacije manjim od  $\varepsilon$  nije došlo do loma. Odgovarajuća diferencijalna jednačina glasi:

$$dp = (1-p)Ce^{\gamma\varepsilon} d\varepsilon, \quad (3.2)$$

i uz početni uslov ( $\varepsilon=0, p=0$ ) daje rešenje

$$p = 1 - \exp\left[-\frac{C}{\gamma}(e^{\gamma\varepsilon} - 1)\right]. \quad (3.3)$$

Očekivana (srednja) vrednost relativne deformacije pri kojoj dolazi do loma određena je izrazom:

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \varepsilon dp \approx \frac{1}{\gamma} \left[ \ln \frac{\gamma}{C} + \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx \right] \quad (3.4)$$

pri čemu je korišćena pretpostavka  $\gamma \ll C$ . Određeni integral u poslednjem izrazu jednak je negativnoj vrednosti konstante Euler-Mascheroni-ja  $\gamma_e=0.5772$  [58], prema tome

$$\bar{\varepsilon} \approx \frac{1}{\gamma} \left[ \ln \frac{\gamma}{C} - 0.5772 \right]. \quad (3.5)$$

Standardna devijacija kritične vrednosti relativne deformacije dobija se na osnovu

$$\sigma_{\varepsilon} = \left( \int_0^{\infty} (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 dp \right)^{1/2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\pi}{\sqrt{6}} \approx \frac{1.282}{\gamma}. \quad (3.6)$$

Poslednji izraz pokazuje da je, prema modelu, rasturanje stvarnih vrednosti relativne deformacije pri lomu obrnuto proporcionalno parametru  $\gamma$ . Fiksna vrednost ove deformacije, koja podrazumeva nultu disperziju rezultata eksperimenata, odgovarala bi parametru  $\gamma$  koji bi težio beskonačnosti.

Detaljnim teorijskim razmatranjem Mott je pokazao da se parametar  $\gamma$  koji je u direktnoj vezi sa disperzijom kritične deformacije, može dobro aproksimirati funkcijom koja zavisi od mehaničkih karakteristika materijala

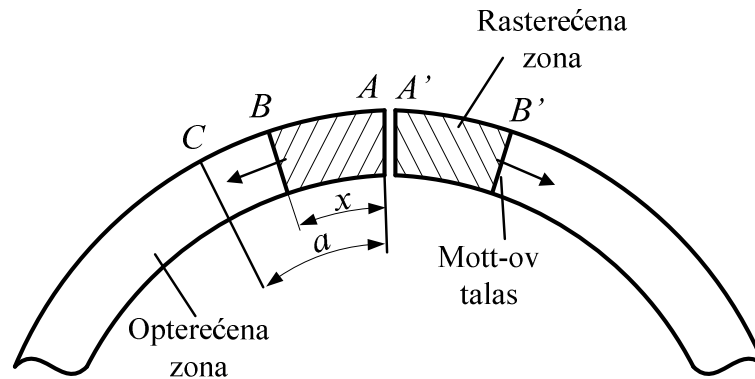
$$\gamma \approx 160 \frac{\sigma_P}{\sigma_F (1 + \varepsilon_F)} \quad (3.7)$$

gde su  $\sigma_F$  i  $\varepsilon_F$  vrednosti (stvarnog, prirodnog) napona i deformacije pri lomu, dok je parametar  $\sigma_P$  koeficijent proporcionalnosti u zakonu ojačavanja materijala pri velikim vrednostima relativne deformacije  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_P \ln(1 + \varepsilon)$ .

Saglasno modelu, parametar  $\gamma$  se može odrediti na osnovu jednačine (3.7) ukoliko su poznate potrebne mehaničke karakteristike materijala, ili eventualno, korišćenjem izraza (3.6), ako su poznati rezultati višestrukih eksperimentalnih ispitivanja materijala. Iz izraza (3.5) zatim se određuje parametar  $C$ , čime je u potpunosti definisan zakon verovatnoće loma materijala (3.1).

### 3.2.2. Talas rasterećenja i generisanje fragmenata

Prema razmotrenom modelu loma materijala prstena, do generisanja prve prslina dolazi pri vrednosti relativne deformacije bliskoj  $\bar{\varepsilon}$ , da bi sa daljim povećavanjem relativne deformacije verovatnoća generisanja novih prslina eksponencijalno rasla. Ceo proces stvaranja prslina, odnosno fragmenata, odigrava se u uskom intervalu relativnih deformacija  $\varepsilon$ . Ako se ima vidu velika brzina deformacija pri impulsnom naprezanju prstena koje je izazvano dejstvom izuzetno visokog pritiska produkata detonacije, jasno da se fragmentacija odvija u veoma kratkom vremenskom intervalu. Da bi kvalitativno objasnili suštinu fizičkog modela, pretpostavimo da je u početnom trenutku, pri odgovarajućoj vrednosti relativne deformacije, prva prslina nastala u preseku  $A$  razmatranog prstena (sl. 3.1). Jasno je da istovremeno dolazi do rasterećenja materijala prstena u okolini preseka  $A$ . Širenje zone rasterećenja modelira se Mott-ovim talasom čiju je brzinu moguće odrediti. U ovim rasterećenim regionima prstena ne može da dođe do stvaranja novih prslina. Do razvoja nove prsline mora da dođe na delu prstena koji je i dalje opterećen, pri čemu se pri stvaranju svake nove prsline generiše novi Mott-ov talas, čime se povećava rasterećena zona prstena. Proces stvaranja prslina, odnosno generisanja fragmenata, nastavlja se sve dok ceo prsten ne bude rasterećen.



Sl. 3.1. Prostiranje talasa rasterećenja u okolini prsline

Pretpostavimo da se zbog kratkog trajanja procesa fragmentacije, radijalna brzina prstena  $v$ , kao i radijus prstena  $r$ , ne menjaju značajno u toku procesa fragmentacije. Takođe se može pretpostaviti da je i brzina deformacije (istezanja) prstena nepromenljiva i lako se pokazuje da je njena vrednost

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v}{r} \quad (3.8)$$

U cilju određivanja brzine talasa rasterećenja, najpre se razmatra kretanje fronta Mott-ovog talasa  $B$  (tj. celog rasterećenog regiona  $AB$ ) u odnosu na presek  $C$  koji je i dalje opterećen (sl. 3.1). Ako su rastojanja fronta talasa  $B$  i preseka  $C$  od prslina  $x$ , odnosno  $a$ , relativna brzina kretanja regiona  $AB$  u odnosu na nerasterećeni presek  $C$  može se odrediti na osnovu izraza

$$v_{\text{rel}} = \frac{a-x}{r}v \quad (3.9)$$

Sada se jednačina kretanja zone AB može napisati u obliku

$$\sigma_F = -\rho x \frac{d}{dt} \left( \frac{a-x}{r}v \right) \quad (3.10)$$

gde je  $\sigma_F$  vrednost napona loma materijala pri odgovarajućoj brzini deformacije, dok je  $\rho$  gustina materijala. Integracijom poslednje diferencijalne jednačine, uz vođenje računa o početnom uslovu ( $t=0, x=0$ ) i pretpostavci da je  $v/r$  konstantno, dobija se

$$\frac{x^2}{t} = \frac{2\sigma_F r}{\rho v}, \quad (3.11)$$

odnosno vremenska zavisnost dužine zone rasterećenja

$$x = \sqrt{\frac{2\sigma_F r}{\rho v}} \sqrt{t}. \quad (3.12)$$

Na ovaj način moguće je odrediti položaj fronta talasa rasterećenja, odnosno granice ove zone u funkciji vremena proteklog od formiranja prsline.

Dobijena zavisnost  $x=x(t)$ , zbog zanemarivanja elastičnosti materijala prstena, dovodi do beskonačne vrednosti brzine talasa rasterećenja u početnom trenutku. Ovaj fizički nerealan rezultat može se korigovati uzimanjem u obzir elastičnosti materijala [38]. Tada se dobija da je brzina talasa rasterećenja u trenutku stvaranja prsline jednaka brzini zvuka u materijalu prstena. Sa protokom vremena, brzina, odnosno položaj talasa rasterećenja imaju vrednosti veoma bliske onima koje daje izraz (3.12).

### 3.2.3. Proračun dužina fragmenata

Izloženi koncepti modela loma materijala prstena i širenja zone rasterećenja omogućavaju numeričko određivanje dužine fragmenata. Na osnovu pretpostavke (3.1) zakon promene broja prsline  $n$  na prstenu obima  $l=2\pi r$ , dat je diferencijalnom jednačinom

$$\frac{dn}{d\varepsilon} = f l C e^{\gamma \varepsilon} \quad (3.13)$$

gde je  $f$  deo ukupne dužine  $l$  prstena koji je još uvek napregnut. Ako se uvede smena  $\alpha = \gamma \varepsilon$ , jednačina (3.13) dobija oblik

$$\frac{dn}{d\alpha} = \frac{f l C}{\gamma} e^{\alpha}. \quad (3.14)$$

Ako je do formiranja prsline došlo pri vrednosti relativne deformacije  $\varepsilon_1$  (odnosno odgovarajuće vrednosti  $\alpha_1$ ), tada će do trenutka kome odgovara deformacija  $\varepsilon > \varepsilon_1$ , proteći vremenski interval

$$t = \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\dot{\varepsilon}} = \frac{r}{v} (\varepsilon - \varepsilon_1) = \frac{r}{\gamma v} (\alpha - \alpha_1) \quad (3.15)$$

Uvođenjem ovog izraza za vreme u jednačinu (3.12), dobija se položaj zone rasterećenja, odnosno dužina regiona u okolini prsline u kojoj ne može da dođe do loma

$$\Delta x = x_0 \sqrt{\alpha - \alpha_1} \quad (3.16)$$

gde je parametar  $x_0$  određen izrazom

$$x_0 = \sqrt{\frac{2\sigma_F}{\rho\gamma}} \frac{r}{v}. \quad (3.17)$$

Procedura za određivanje dužine fragmenata podrazumeva poznavanje neophodnih parametara procesa u koje spadaju karakteristike materijala prstena (gustina  $\rho$ , napon loma  $\sigma_F$ , kao i parametri  $\gamma$  i  $C$ ), brzina deformacije u trenutku razletanja  $\dot{\epsilon} = v/r$ , kao i odgovarajući radijus prstena  $r$ .

Na krugu obima  $L=2\pi r$  proizvoljno se izabere položaj prve prsline, uz pretpostavku da je na osnovu (3.14) korespondentna vrednost parametra  $\alpha = \alpha_1$  određena jednačinom

$$\frac{lC}{\gamma} e^{\alpha_1} = 1. \quad (3.18)$$

Najpre se određuje dužina zone rasterećenja u okolini prve prsline u trenutku formiranja druge prsline. U skladu se (3.18) povećanje parametra  $\alpha$  je  $\alpha_2 - \alpha_1 = 1$ , tako da je na osnovu jednačine (3.16) dužina zone rasterećenja  $\Delta x_1 = x_0$ . Na krugu se sada obeleži položaj zone rasterećenja dužine  $\Delta x_1$  sa obe strane prve prsline. Na preostalom, još uvek opterećenom delu kruga na slučajan način određuje se položaj druge prsline. Vrednost parametra  $f$  je sada  $(L - 2\Delta x_1)/L$ , što omogućava određivanje nepoznatog parametra  $\alpha$  u trenutku formiranja treće prsline na osnovu jednačine (3.14) koja se može aproksimirati sa

$$\frac{3-2}{\Delta\alpha} = \frac{fC}{\gamma} e^{\alpha_3}. \quad (3.19)$$

Poslednja jednačina se svodi na oblik

$$f e^{\alpha_3 - \alpha_1} (\alpha_3 - \alpha_2) = 1, \quad (3.20)$$

odakle se  $\alpha_3$  određuje numerički. Sada se može odrediti širina zone rasterećenja oko druge prsline

$$\Delta x_2 = x_0 \sqrt{(\alpha_3 - \alpha_2)}, \quad (3.21)$$

kao i proširena zona rasterećenja oko prve prsline

$$\Delta x_1 = x_0 \sqrt{(\alpha_3 - \alpha_1)}. \quad (3.22)$$

Ovim su definisane nove zone rasterećenja i na smanjenoj dužini još uvek opterećenog dela kruga nasumice se bira položaj treće prsline. Parametar  $f$  se smanjuje na vrednost  $(L - 2\Delta x_1 - 2\Delta x_2)/L$  i postupak se nastavlja analogno prethodno opisanom, uz korišćenje opštih izraza za određivanje nepoznatog parametra  $\alpha$  i dužina svih zona rasterećenja

$$f e^{\alpha_n - \alpha_1} (\alpha_n - \alpha_{n-1}) = 1, \quad (3.23)$$

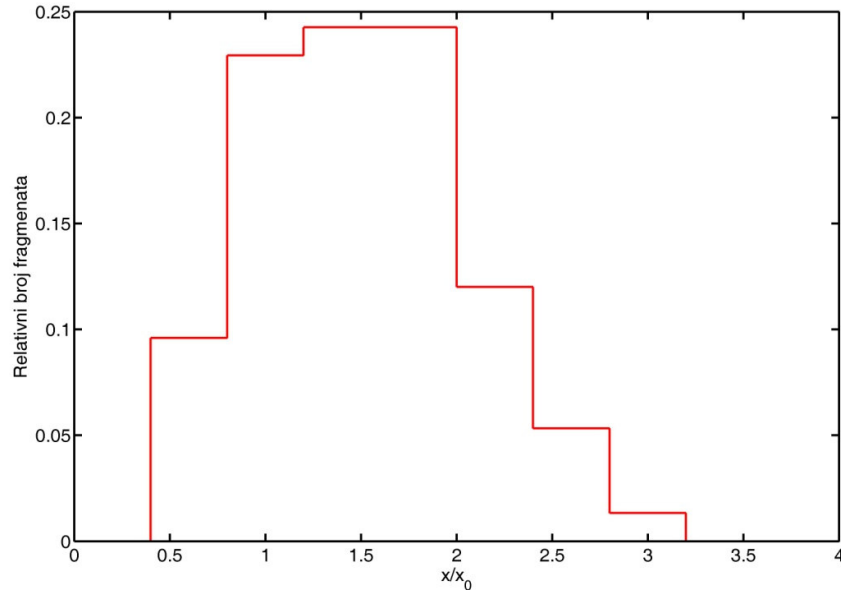
$$\Delta x_k = x_0 \sqrt{\alpha_n - \alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Postupak se završava kada ceo prsten postane rasterećen. U tom trenutku položaji generisanih prsline definišu dužine formiranih fragmenata.

Na osnovu velikog broja ovakvih numeričkih eksperimenata, Mott je analizirajući primer u kojem je  $L=20x_0$  došao do histograma (sl. 3.2) koji pokazuje empirijski dobijenu raspodelu dužina fragmenata u intervalima dužine  $0.4x_0$ .

U izvornom radu [44] nisu navedene korišćene vrednosti karakteristika materijala, kao ni brzina deformacija prstena. Svakako je važno napomenuti da bez primene računara

razmotreni pristup zasnovan na "eksperimentalnoj statistici" zahteva znatan trud i mnogo vremena za realizaciju.



Sl. 3.2. Histogram raspodele dužina fragmenata saglasno Mott-ovom modelu [44]

Na osnovu dobijene raspodele dužina fragmenta prstena, Mott je izveo sledeće zaključke:

- (i) dužina najvećeg broja fragmenata je u intervalu  $[x_0, 2x_0]$ , pri čemu je srednja dužina fragmenta bliska  $1.5x_0$ ;
- (ii) kako je parametar  $x_0$  proporcionalan radijusu prstena, sledi da će se pri promeni dimenzija prstena, srazmerno menjati i srednja dužina fragmenta;
- (iii) s obzirom da je  $x_0$  obrnuto proporcionalno brzini razletanja parčadi  $v$ , sa povećanjem ove brzine srednja dužina fragmenata se proporcionalno smanjuje.

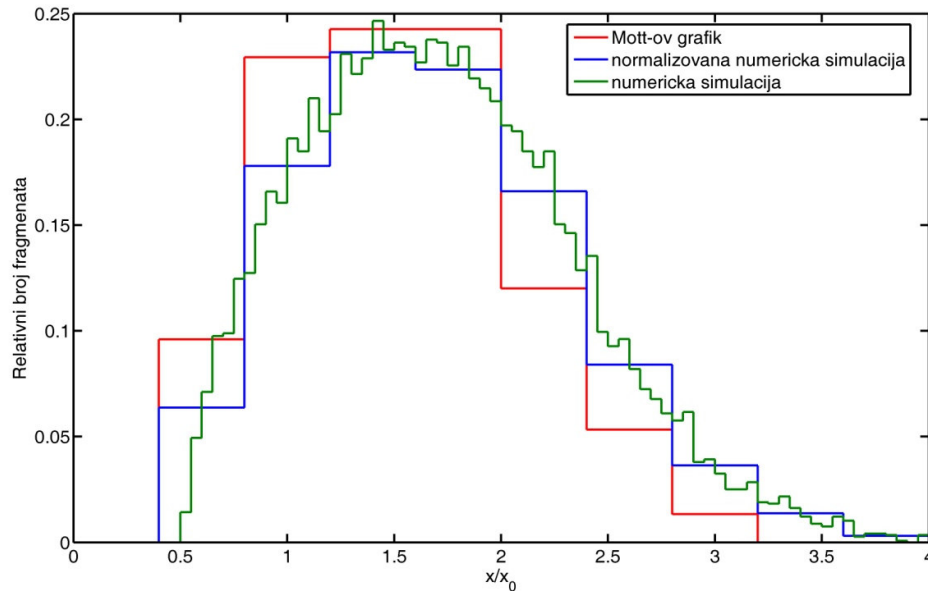
Na osnovu prethodne analize jasno je da parametar  $x_0$  determiniše srednju dužinu fragmenata. Ako se ima u vidu jednačina koja određuje parametar  $\gamma$ , jasno je da je srednja dužina fragmenata proporcionalna izrazu  $\sigma_F \sqrt{(1 + \epsilon_F) / \rho \sigma_p}$  koji zavisi od karakteristika materijala prstena. Veće vrednosti kritičnog napona i odgovarajuće relativne deformacije dovode do povećanja dužine fragmenata, dok povećavanje gustine materijala i koeficijenta  $\sigma_p$  koji definiše očvršćavanje materijala utiče na smanjivanje srednje dužine fragmenata.

#### 4.2.4. Analiza rezultata modela

Na osnovu izloženog modela realizovan je kompjuterski program koji simulira fragmentaciju prstena poznatih karakteristika. Program u potpunosti sledi opisani model, pri čemu se položaj prslina na napregnutom delu prstena određuje korišćenjem generatora uniformno distribuiranih slučajnih brojeva. Izvođenjem dovoljno velikog broja simulacija (odnosno numeričkih eksperimenata, analogno Mott-ovom postupku) može se doći do karakteristične raspodele dužine fragmenata. U cilju poređenja sa originalnim Mott-ovim dijagramom, izvršena je simulacija fragmentacije čeličnog prstena, pri čemu su korišćene sledeće vrednosti ulaznih podataka: gustina materijala prstena  $\rho=7800\text{kg/m}^3$ , napon i relativna deformacija pri kidanju  $\sigma_F=800\text{MPa}$ ,  $\epsilon_F=0.63$ , parametar u zakonu ojačavanja

materijala  $\sigma_p=450\text{MPa}$  (poslednje tri vrednosti determinišu parametar  $\gamma=55$ ), brzina deformacije  $\dot{\epsilon}=\nu/r=10^4\text{ s}^{-1}$ , dužina (obim) prstena  $L=20x_0$ .

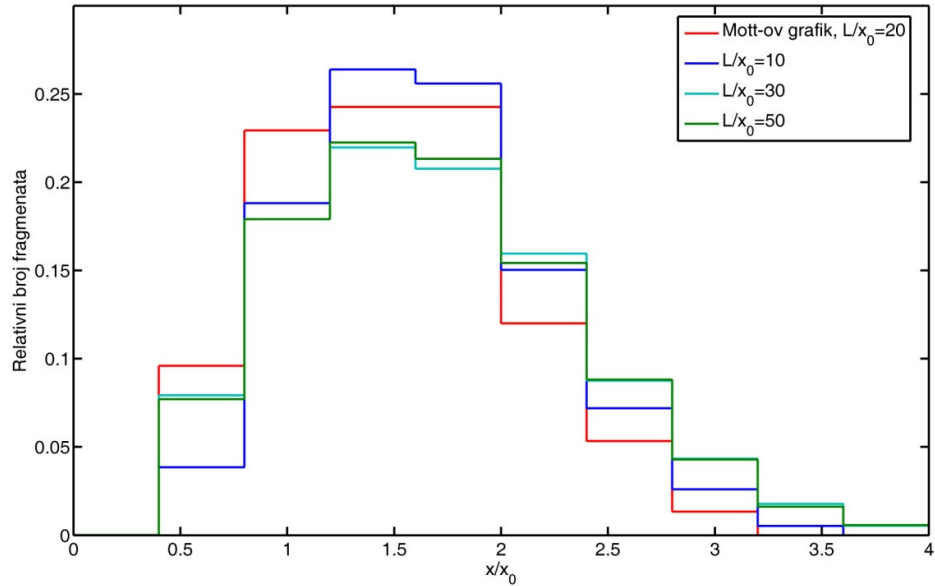
Na slici 3.3. prikazana je raspodela dužina fragmenata dobijena uzimanjem srednje vrednosti za 1000 realizovanih numeričkih simulacija. Očigledno je da postoji izvesna razlika između rezultata numeričke simulacije i Mott-ovog grafika (koji je identičan onom koji je predstavljen na sl. 3.2). Histogram je u odnosu na Mott-ov grafik pomeren udesno ka većim dužinama fragmenata. Razliku u dobijenim rezultatima moguće je pripisati načinu izbora položaja prslina i broju izvedenih “eksperimentata” na osnovu kojih je dobijen Mott-ov grafik.



**Sl. 3.3.** Raspodela dužina fragmenata prema Mott-ovom modelu – prikazani su rezultati numeričke simulacije i adaptirani originalni Mott-ov grafik

Analizom rezultata programa pokazuje se da, pri konstantnom odnosu obima prstena prema karakterističnoj dužini  $L/x_0$  promene parametara modela  $\sigma_F$ ,  $\rho$ ,  $\dot{\epsilon}$  i  $\gamma$  utiču na vrednost parametra  $x_0$ , ali ne i na raspodelu relativne dužine fragmenata predstavljenu na sl. 4.3. Ovo potvrđuje Mott-ov zaključak da parametar  $x_0$  suštinski definiše raspodelu dužina fragmenata.

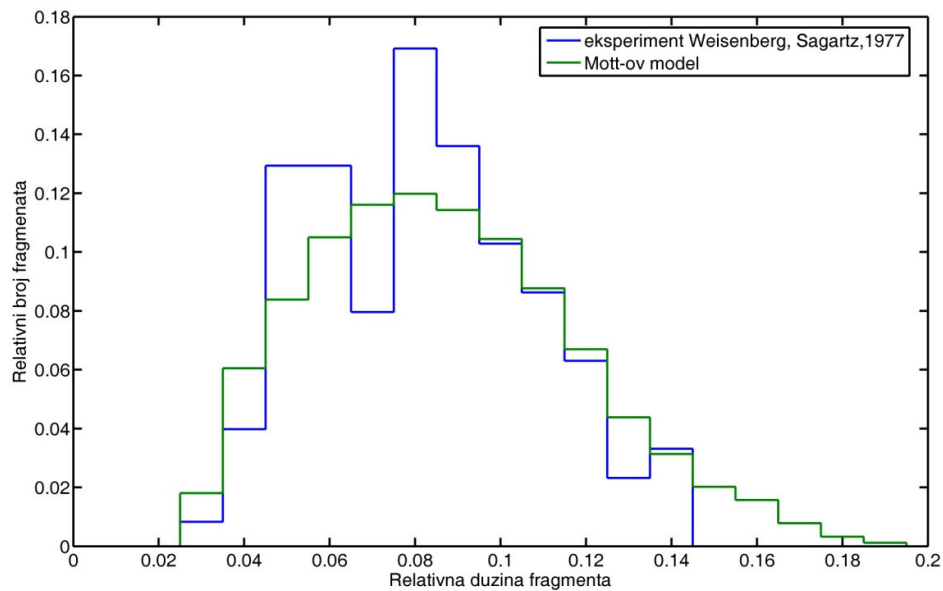
Mott je izvršio analizu rezultata modela i odredio histogram na sl. 3.2 za odnos  $L/x_0=20$ , smatrajući da i za druge vrednosti odnosa  $L/x_0$  histogram ostaje suštinski nepromenjen. Na sl. 3.4 prikazane su raspodele dužine fragmenata za različite obime prstena ( $L/x_0=10, 30, 50$ ), pri ostalim nepromenjenim uslovima. Očigledno je da oblik raspodele zavisi od dužine (obima) prstena – sa povećanjem odnosa  $L/x_0$  raspodela je i dalje unimodalna, ali je bliža uniformnoj raspodeli. Srednja vrednost dužine fragmenta, međutim, ne zavisi od odnosa  $L/x_0$  i veoma je bliska vrednosti  $1.7x_0$ . Srednji broj parčadi, prema tome, zavisi samo od odnosa  $L/x_0$  i iznosi  $0.59L/x_0$  (u Mott-ovom “eksperimentu”  $L/x_0=20$ , srednji broj generisanih fragmenata je 11.8). Minimalna dužina fragmenta opada sa povećanjem obima prstena; za  $L/x_0=20$  broj fragmenata čija je dužina manja od  $0.5x_0$  je zanemarljiv.



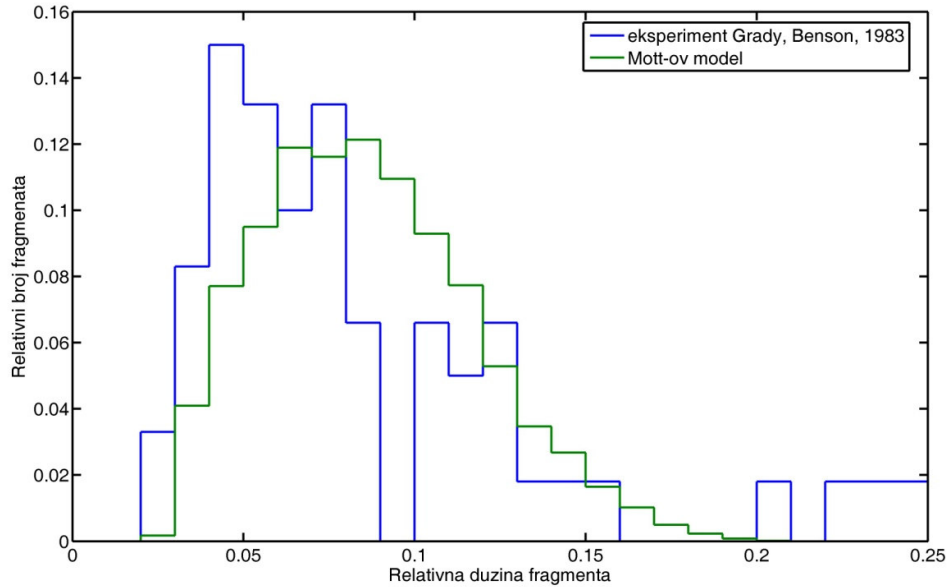
**Sl. 3.4.** Raspodela dužine fragmenata dobijena simulacijom Mott-ovog modela za različite vrednosti obima prstena

### 3.2.5. Poređenje sa rezultatima eksperimenata

Kao što je ranije napomenuto, eksperimentalni podaci koji se odnose na jednodimenzionu fragmentaciju prstena (cilindra) su veoma oskudni. Na sl. 3.5 predstavljen je dijagram na kojem su upoređeni eksperimentalni rezultati iz [56] sa teorijskom raspodelom dužine fragmenata koja je dobijena numeričkom simulacijom zasnovanom na Mott-ovom modelu. Na narednoj slici 3.6 eksperimentalni podaci iz [27] su takođe dati uporedo sa raspodelom dužine (mase) na osnovu Mott-ovog modela.



**Sl. 3.5.** Poređenje teorijskog zakona raspodele broja pačadi zasnovanog na Mott-ovom modelu sa eksperimentalnim rezultatima fragmentacije aluminijumskog prstena [56]



**Sl. 3.6.** Poređenje predviđanja Mott-ovog modela sa eksperimentalnim rezultatima fragmentacije aluminijumskog prstena [27]

U oba eksperimenta reč je o fragmentaciji aluminijumskog prstena (korišćene su karakteristike materijala  $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma_F=120 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_F=0.45$ ) putem elektromagnetski generisanog impulsnog opterećenja. Izmerene brzine razletanja fragmenata (do 300 m/s) manje su od brzina pri fragmentaciji košuljice razornih projektila, ali su zbog manjih dimenzija prstena relativne brzine deformacije istog reda veličine ( $10^4 \text{ s}^{-1}$ ).

Teorijski rezultati se dobro poklapaju sa eksperimentalnim podacima Weisenberga i Sagartza [56] (sl. 3.5).

Imajući u vidu da je eksperimentalna kriva na sl. 3.6 zasnovana na relativno malom broju izvedenih ispitivanja (četiri), stepen podudaranja modelskih i eksperimentalnih rezultata može se okarakterisati kao zadovoljavajući.

Nedostatak obimnijih eksperimentalnih podataka o jednodimenzionoj fragmentaciji prstena, naročito pod dejstvom produkata detonacije eksploziva, onemogućava definitivnu ocenu valjanosti Mott-ovog modela.

Na kraju, u cilju komparacije sa ranije razmatranim geometrijskim modelima fragmentacije, treba primetiti da Mott-ov grafik ima oblik koji bi mogao da odgovara jedino Voronoi raspodeli za slučaj jednodimenzione fragmentacije

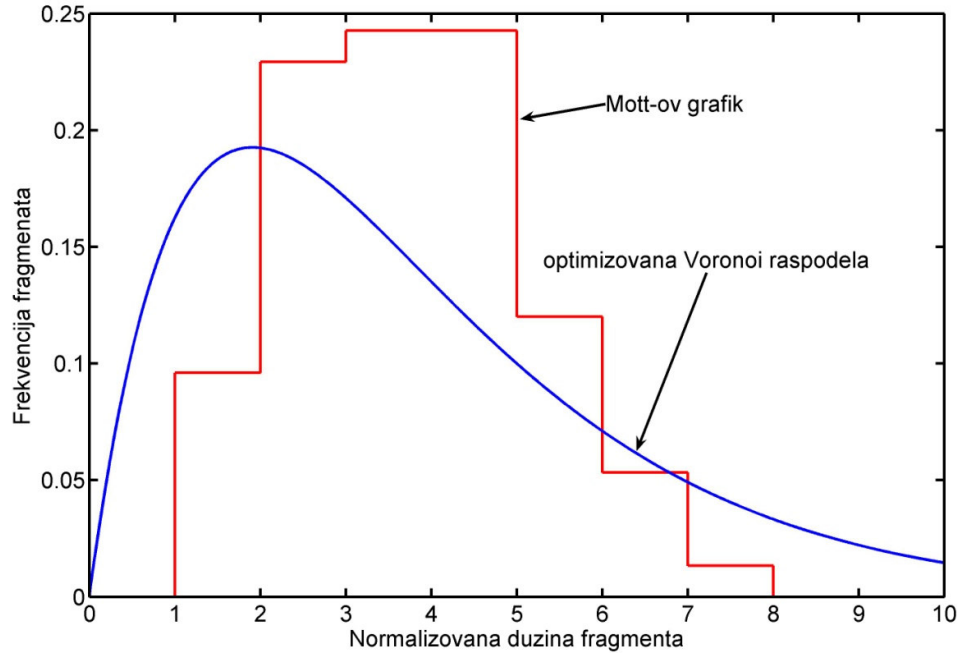
$$f(x) = 4\lambda^2 x e^{-2\lambda x} . \quad (3.24)$$

Na sl. 3.7 je Mott-ov grafik upoređen sa optimizovanom Voronoi raspodelom u smislu metode najmanjih kvadrata. Uočava se da ova teorijska raspodela ne predstavlja zadovoljavajuću aproksimaciju Mott-ove raspodele dužina fragmenata.

#### 4.2.6. Analitičko rešenje Mott-ovog modela

Uz izvesna ograničenja, u [22] i [30] je pokazano da je moguće naći analitičko rešenje razmatranog Mott-ovog fizičkog modela jednodimenzione fragmentacije prstena.





**Sl. 3.7.** Poređenje Mott-ovog grafik i optimizovane Voronoi gustine raspodele pokazuje da ova teorijska raspodela ne može poslužiti kao kvalitetna analitička aproksimacija modelske raspodele dužine generisanih fragmenata

Važna početna modifikacija je usvajanje drugačije funkcije verovatnoće loma materijala u zavisnosti od relativne deformacije. Naime, Mott [44] je zaključio da je neophodno da ova funkcija bude brzorastuća, te je razmatrao eksponencijalnu i stepenu funkciju kao moguće alternative i opredelio se za eksponencijalnu funkciju (3.1). U [30] je korišćena stepena funkcija verovatnoće loma oblika:

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{n}{\sigma} \left( \frac{\varepsilon}{\sigma} \right)^{n-1}, \quad (3.25)$$

gde su  $\sigma$  i  $n$  odgovarajući parametri. Analognim postupkom kao u odeljku 3.2.1 pokazuje se da je verovatnoća loma materijala pri naponu  $\varepsilon$  određena izrazom

$$p(\varepsilon) = 1 - \exp\left(-\int_0^\varepsilon \lambda(\eta) d\eta\right) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^n\right]. \quad (3.26)$$

Može se pokazati da standardna devijacija zadovoljava relaciju

$$\sigma_\varepsilon = \sigma \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]^{1/2} \approx 1.28 \frac{\sigma}{n}. \quad (3.27)$$

Sada se u opštem slučaju može napisati izraz za ukupni relativni deo dužine (obima) Mott-ovog prstena koji je prebrisan Mott-ovim talasima, tj. koji pripada zonama rasterećenja, pri relativnoj deformaciji  $\varepsilon$ :

$$D_x(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon 2x(\varepsilon - \eta) \lambda(\eta) d\eta. \quad (3.28)$$

U poslednjoj relaciji  $\lambda(\eta)d\eta$  predstavlja broj aktiviranih prslina (lomova) po jedinici dužine prstena pri vrednostima relativne deformacije koje pripadaju intervalu  $[\eta, \eta+d\eta]$ ; funkcija  $x(\varepsilon-\eta)$  je rastojanje koje pređe Mott-ov talas za vreme koje odgovara relativnoj deformaciji  $(\varepsilon-\eta)$ . Faktor 2 uzima u obzir talase koji se formiraju sa obe strane prslina. Svakako treba napomenuti da i dalje važi pretpostavka o konstantnoj brzini deformacije, odnosno da su relativna deformacija i vreme jednoznačno povezani,  $\varepsilon = \dot{\varepsilon}t$ .

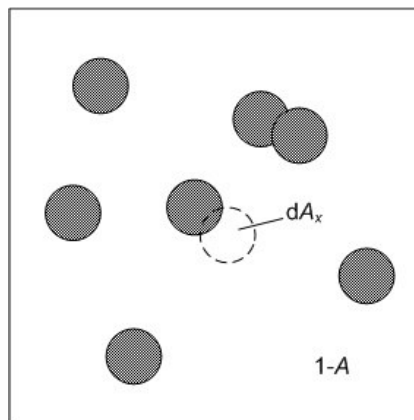
Treba, međutim, imati u vidu da izraz (3.28) daje tačnu ocenu udela rasterećene zone prstena samo na početku procesa fragmentacije, odnosno samo kada je broj prslina relativno mali. Naime, izraz (3.28) ne uzima u obzir dva važna faktora Mott-ovog modela: (i) u prethodno rasterećenim zonama ne može da dođe do formiranja novih prslina, i (ii) dolazi do interakcije Mott-ovih talasa rasterećenja, tako da su stvarna "preklapanja" zona rasterećenja putem (3.28) računata dvostuko ili višestruko. Drugim rečima, vrednost izraza  $D_x(\varepsilon)$  će preći vrednost 1 za relativno male deformacije  $\varepsilon$ , dok će težiti u beskonačnost kada relativna deformacija teži beskonačnim vrednostima. Ovo je, naravno, nerealno, jer izraz za relativni deo obima prstena koji je rasterećen mora da teži 1 kada relativna deformacija teži beskonačnosti.

Da bi se rešio ovaj problem, može se iskoristiti analogija sa poznatim modelom koji tretira pitanja kinetičkih procesa koji uključuju razmotrene fenomene podudaranja i isključivanja [34]. Razmotrimo problem slučajnog raspoređivanja krugova (ili nasumičnog bacanja novčića) u jedinični kvadrat (sl. 3.8). Ako je ukupna površina raspoređenih krugova  $A_x$ , cilj je da se izračuna stvarno prekrivena površina kvadrata  $A$ . Jasno je da je na početku procesa, slično našem probelemu, kada je broj krugova mali ( $A_x \ll 1$ ), njihova površina približno jednaka prekrivenoj površini kvadrata ( $A \approx A_x$ ). Međutim, kada se broj krugova, odnosno njihova ukupna površina, povećava, dolazi do njihovog preklapanja, tako da je  $A_x > A$ . Razmotrimo slučajno dodavanje novog kruga elementarne površine  $dA_x$  (sl. 3.8). S obzirom na njegov slučajan razmeštaj, povećanje prekrivene površine kvadrata  $dA$  proporcionalno je neprekrivenom delu površine kvadrata  $(1-A)$ . Dobije se, dakle, diferencijalna jednačina

$$dA = (1 - A)dA_x, \quad (3.29)$$

čije se rešenje jednostavno dobija u obliku

$$A = 1 - e^{-A_x}. \quad (3.30)$$



**Sl. 3.8.** Analiza problema podudaranja i isključivanja u kinetičkim procesima na primeru slučajnog raspoređivanja krugova unutar jediničnog kvadrata [34]

Dobijeno rešenje zaista ima očekivane osobine: kada je  $A_x$  malo ( $A_x \rightarrow 0$ ) tada je  $A \approx A_x$ , dok pri  $A_x \rightarrow \infty$ ,  $A=1$ .

Na bazi ove analize, sasvim analogno izrazu (3.30) može da se napiše veza između ukupne dužine zahvaćene Mott-ovim talasima  $D_x$  i stvarne rasterećene relativne dužine prstena  $D$ :

$$D(\varepsilon) = 1 - e^{-D_x(\varepsilon)}. \quad (3.31)$$

Funkcija koja određuje pređeni put Mott-ovog talasa  $x(t)$  je određena ranije izrazom (3.12), a s obzirom na vezu između relativne deformacije i vremena  $\varepsilon = \dot{\varepsilon}t$ , može se napisati u obliku

$$x(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2\sigma_y \varepsilon}{\rho \dot{\varepsilon}^2}}. \quad (3.32)$$

Sada se ukupan broj prslina, odnosno lomova (koji je jednak broju generisanih fragmenata) po jedinici dužine pri relativnoj deformaciji  $\varepsilon$  može odrediti putem integrala

$$N(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon (1 - D(\eta)) \lambda(\eta) d\eta. \quad (3.33)$$

Ako se u integral (3.33) uvede stepena funkcija verovatnoće loma (3.25), i ako se iskoriste izvedene relacije (3.28), (3.31) i (3.32), može se (uz uvođenje  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ) izračunati ukupan broj generisanih fragmenata u obliku:

$$N = \beta_n \left( \frac{\rho \dot{\varepsilon}^2}{2\pi\sigma_y} \frac{n}{\sigma} \right)^{n/(2n+1)}, \quad (3.34)$$

pri čemu vrednost parametra  $\beta_n$  zavisi samo od eksponenta  $n$  u stepenom zakonu verovatnoće loma

$$\beta_n = \left( \frac{2n}{2n+1} \right)^{1/(2n+1)} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n)} \right)^{2n/(2n+1)} \Gamma\left( \frac{2n}{2n+1} \right). \quad (3.35)$$

Grady [21] je razmatrao analitičko određivanje raspodele dužina generisanih fragmenata i pokazao da se analitičko rešenje ne može dobiti u opštem slučaju. Za specijalan slučaj stepenog zakona verovatnoće loma (3.25), koji pri  $n=1$  degeneriše u konstantu

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{n}{\sigma} = \lambda_0, \quad (3.36)$$

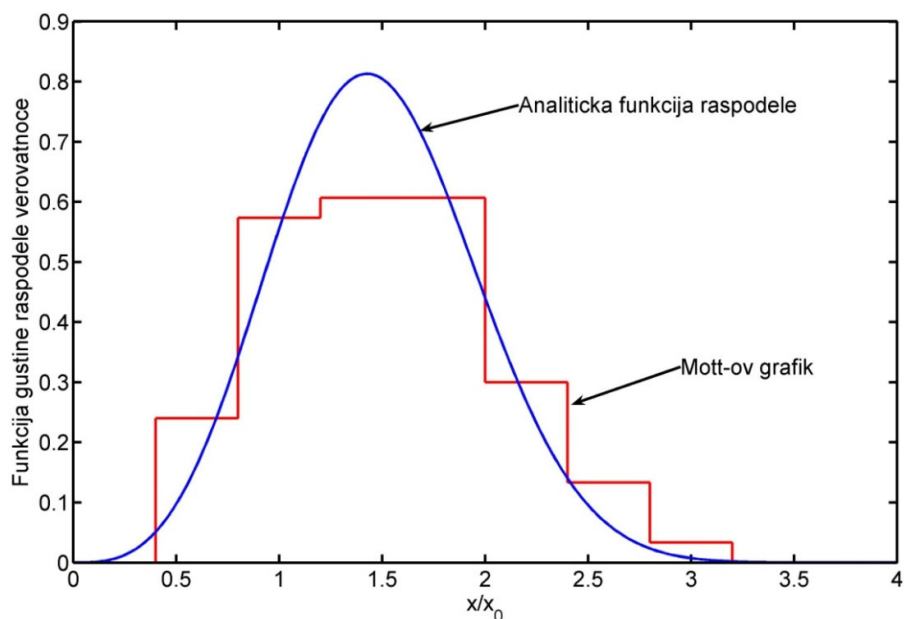
dobija se funkcija gustine raspodele dužine fragmenata u obliku:

$$f(x) = \frac{\beta^2}{4} \frac{1}{x_0} \left( \frac{x}{x_0} \right)^3 e^{-\frac{1}{4}(x/x_0)^3} \int_0^1 (1-y^2) e^{-\frac{3}{4}(x/x_0)^3 y^2} dy, \quad (3.37)$$

gde su parametri  $\beta$  i  $x_0$  definisani izrazima

$$\beta = \frac{3}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad x_0 = \left( \frac{3\sigma\sigma_y}{2\rho\dot{\varepsilon}^2} \right)^{1/3}. \quad (3.38)$$

Na slici 3.9 je dato poređenje Mott-ove statistički dobijene raspodele i odgovarajućeg analitičkog rešenja – funkcije (3.37). Uočava se da je analitičko rešenje sasvim u skladu numeričkim.

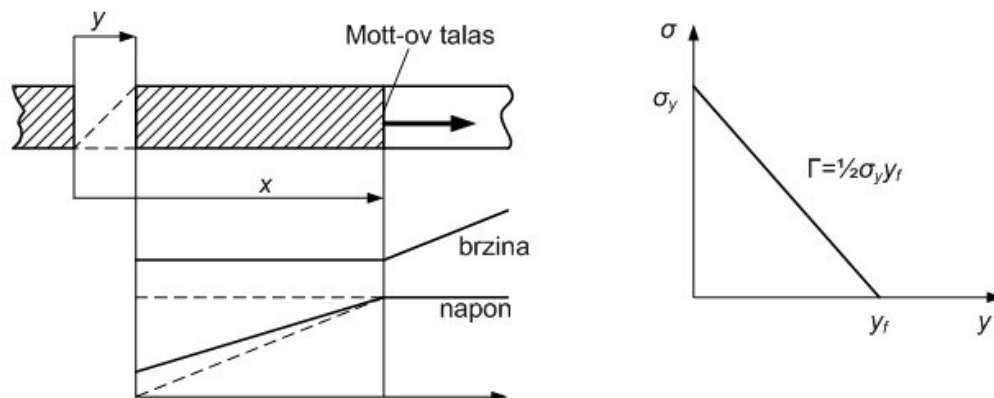


**Sl. 3.9.** Poređenje analitički određene funkcije gustine raspodele dužine fragmenata na bazi Mott-ovog modela sa numerički dobijenim Mott-ovim grafikom pokazuje visok nivo podudaranja

### 3.3. Energetski pristup modeliranju fragmentacije

#### 3.3.1. Energetska ograničenja Mott-ovog modela

Važno je primetiti da razmotreni Mott-ov model podrazumeva trenutni lom opterećenog materijala – pojava prsline istovremeno znači i njeno potpuno razvijanje, kao i potpuno rasterećenje zone koja je prebrisana Mott-ovim talasom. Osim toga, Mott je energetske gubitke usled loma materijala smatrao zanemarljivim. Pretpostavimo sada da postoje određeni energetske gubitke usled loma, odnosno da pad napona u zoni prsline nije trenutni [37] (Kipp, Grady, 1985). Na slici 3.10 prikazana je kinematika Mott-ovog talasa (čiji je položaj definisan koordinatom  $x$ ), kao i otvaranja prsline (koordinata  $y$ ). Takođe je pretpostavljen i linearni pad napona (tj. otpora lomu) u zoni prsline sa povećanjem otvora prsline  $y$ .



**Sl. 3.10.** Kinematika Mott-ovog talasa i otvaranja prsline, uz linearni pad napona u zoni prsline

Specifična energija loma je definisana površinom ispod krive napon-pomeranje

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sigma_y y_f, \quad (3.39)$$

gde je  $\sigma_y$  napon tečenja, dok je  $y_f$  otvaranje prsline koje odgovara završetku loma. Jednačina kretanja rasterećene zone (3.10) sada se može pisati u modifikovanoj formi

$$\rho \dot{\epsilon} x \frac{dx}{dt} = \sigma(x) - \sigma(y), \quad (3.40)$$

pri čemu su naponi  $\sigma(x)$  i  $\sigma(y)$  određeni sa

$$\sigma(x) = \sigma_y, \quad \sigma(y) = \sigma_y - \frac{\sigma_y^2}{2\Gamma} y. \quad (3.41)$$

Korišćenjem izraza (3.41) dobija se jednačina kretanja rasterećene zone u obliku

$$\rho \dot{\epsilon} x \frac{dx}{dt} = \frac{\sigma_y^2}{2\Gamma} y. \quad (3.42)$$

Brzina otvaranja prsline određena je relacijom

$$\frac{dy}{dt} = \dot{\epsilon} x. \quad (3.43)$$

Rešavanjem sistema diferencijalnih jednačina (3.42) i (3.43) dobijaju se vremenske zavisnosti pomeranja Mott-ovog talasa i otvaranja prsline:

$$x(t) = \frac{\sigma_y^2}{12\rho\Gamma} t^2, \quad (3.44)$$

$$y(t) = \frac{\dot{\epsilon}\sigma_y^2}{36\rho\Gamma} t^3. \quad (3.45)$$

Jednačine (3.44) i (3.45) važe dok ne dođe do završetka loma ( $y < y_f$ ), od kada ponovo počinje da važi ranije izvedena Mott-ova jednačina kretanja (3.12). Iz jednačine (3.45) može se odrediti vreme  $t_f$  potrebno za okončanje loma – realizacijom uslova  $y(t_f) = y_f$  dobija se

$$t_f = \left( \frac{72\rho\Gamma^2}{\dot{\epsilon}\sigma_y^3} \right)^{1/3}. \quad (3.46)$$

Rastojanje koje je za ovo vreme prešao Mott-ov talas, tj. dužina zone rasterećenja određuje se uvođenjem vremena definisanog sa (3.46) u jednačinu kretanja talasa (3.44):

$$x_f = \left( \frac{3\Gamma}{\rho\dot{\epsilon}^2} \right)^{1/3}. \quad (3.47)$$

Ako je istovremeno (ili u vremenskom intervalu manjem od  $t_f$ ) došlo do iniciranja dve prsline na rastojanju manjem od  $2x_f$ , jasno je da dolazi do interferencije Mott-ovih talasa pre nego što je završen rast prsline. Stoga je jasno da ne može doći do loma na oba mesta, odnosno da dužina fragmenta ne može biti manja od

$$x_{\min} = 2x_f = \left( \frac{24\Gamma}{\rho\dot{\epsilon}^2} \right)^{1/3} . \quad (3.48)$$

Ovim je pokazano da fragmentaciju karaktetriše veoma važna osobina – postojanje minimalne dužine, odnosno mase fragmenta. Pokazano je [37] da međudelovanje dva faktora ima ključnu ulogu pri analizi višestrukog loma materijala i veličine generisanih fragmenata: (i) sa jedne strane, to je ranije razmatrani proces stvaranja novih prslina koji je definisan putem funkcije verovatnoće loma  $\lambda(\epsilon)$ , odnosno “sejanja” slabih tačaka – budućih prslina, odnosno lomova materijala – koja zavisi od relativne deformacije  $\epsilon$ , (ii) sa druge strane, energetski pristup pokazuje da postoje ograničenja za ovu funkciju, tj. da zbog nezanemarljivih gubitaka energije usled loma materijala, broj prslina ne može biti neograničeno veliki, odnosno veličina fragmenta ne može biti po volji mala. Za dovoljno velike vrednosti relativne deformacije, energetska ograničenja postaju dominantna, tako da se ocena minimalne dužine fragmenta može smatrati nominalnom srednjom dužinom fragmenata.

Parametar  $\Gamma$  predstavlja karakteristiku materijala koja definiše disipaciju energije tokom procesa rasta prslina. Analogno žilavosti loma  $K_I$  – veličini koja se koristi u kvazistatičkoj teoriji mehanike loma – Kipp i Grady [37] su uveli novu veličinu

$$K_f = \sqrt{2E\Gamma} \quad (3.49)$$

koju su definisali kao žilavost fragmentacije, pri čemu je  $E$  je Young-ov modul elastičnosti materijala fragmentacionog tela.

Nominalna dužina fragmenata (3.48) sada se može napisati u formi

$$x_0 = \left( \frac{\sqrt{12}K_f}{\rho c \dot{\epsilon}} \right)^{2/3} . \quad (3.50)$$

U prethodnom izrazu  $c$  je brzina elastičnih deformacija u materijalu  $c = \sqrt{E/\rho}$ .

Recipročna vrednost srednje dužine fragmenta (3.50) je broj fragmenata po jedinici dužine:

$$N = \left( \frac{\rho c \dot{\epsilon}}{\sqrt{12}K_f} \right)^{2/3} . \quad (3.51)$$

Razmotreni energetski pristup, dakle, omogućava određivanje srednje dužine (mase) fragmenta, ali ne i funkcije raspodele dužine fragmenata.

### 3.3.2. Objedinjavanje Mott-ovog modela i energetskog ograničenja

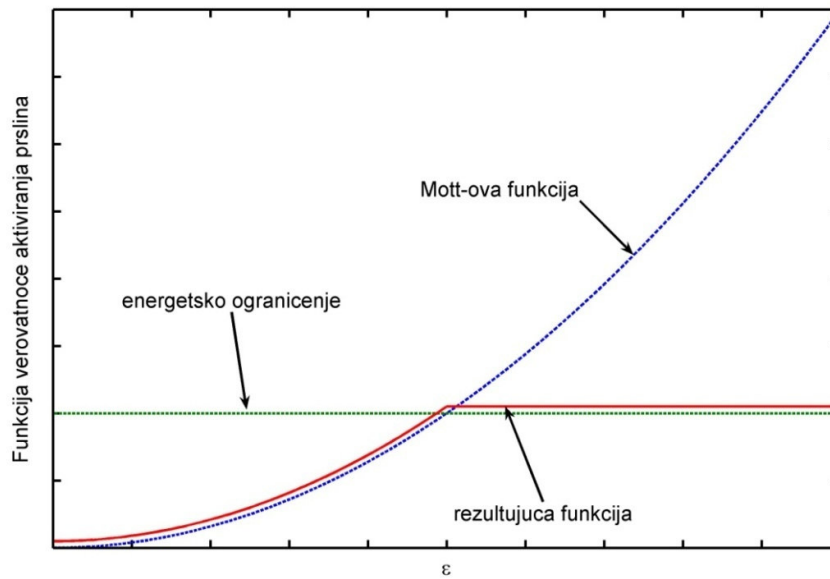
Razmotrimo konačne rezultate koje su u pogledu određivanja ukupnog broja generisanih fragmenata dali Mott-ov pristup i energetska razmatranja:

- Mott  $\rightarrow$  
$$N = \beta_n \left( \frac{\rho \dot{\epsilon}^2}{2\pi\sigma_y} \frac{n}{\sigma} \right)^{n/(2n+1)}$$
- Energetska razmatranja  $\rightarrow$  
$$N = \left( \frac{\rho c \dot{\epsilon}}{\sqrt{12}K_f} \right)^{2/3} .$$

Pokazuje se da ovi rezultati mogu biti identični ako je parametar oblika u stepenom zakonu verovatnoće loma  $n=1$ . Osim toga, parametar  $\sigma$  u istom zakonu određen je uslovom

$$\sigma = \frac{12}{\pi} \beta_1^3 \frac{\Gamma}{\sigma_y} \approx 5 \frac{\Gamma}{\sigma_y}. \quad (3.52)$$

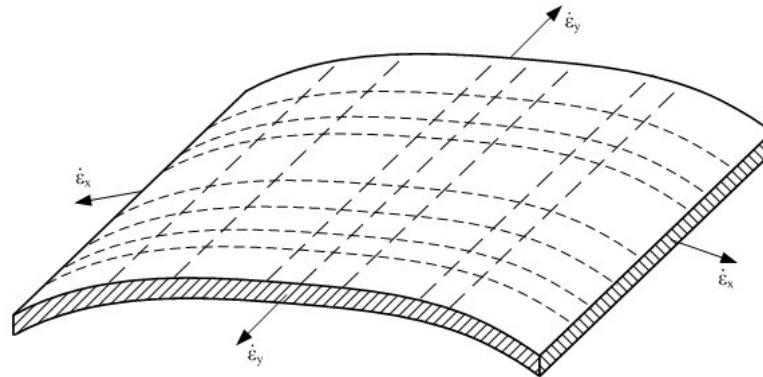
Na taj način, jednoznačno su definisani parametri  $n$  i  $\sigma$  stepenog zakona verovatnoće loma koji obezbeđuju da istovremeno budu zadovoljena i energetska ograničenja Mott-ovog modela. Na sl. 3.11 predstavljene su zavisnosti Mott-ove stepene funkcije “rasejavanja” prslina u funkciji relativne deformacije, kao i energetska ograničenje broja prslina. Rezultujuća funkcija generisanja prslina predstavlja kombinaciju navedenih funkcija, što je indikovano na dijagramu (sl. 3.11)



**Sl. 3.11.** Funkcije verovatnoće aktiviranja prslina (loma materijala): Mott-ov stepeni zakon, energetska ograničenje i rezultujuća funkcija [30]

### 3.3.3. Dvodimenziono uopštenje Mott-ovog modela

Analizirani jednodimenzioni Mott-ov model fragmentacije može se, uz određene uslove, primeniti i na slučaj dvodimenzione fragmentacije [21]. Pretpostavimo da fragmentaciono telo ima dve dimenzije znatno veće od treće (npr. tanka ploča ili cilindar) i da svi fragmenti nakon fragmentacije imaju istu debljinu. Pretpostavlja se takođe da postoje dva međusobno ortogonalna glavna pravca napona, odnosno deformacija, koja su obeležena sa  $x$  i  $y$ , koja karakterišu odgovarajuće brzine deformacije  $\dot{\epsilon}_x$  i  $\dot{\epsilon}_y$  (sl. 3.12).



**Sl. 3.12.** Šema dvodimenzione fragmentacije prema uopštenom Mott-ovom modelu

Ako se smatra da do pojave prslina, odnosno loma materijala, u razmatranim pravcima dolazi nezavisno, onda je srednja dužina fragmenata u pravcu  $x$ , kako je to ranije pokazano

$$\bar{x} = \left( \frac{\sqrt{12}K_f}{\rho c \dot{\epsilon}_x} \right)^{2/3}, \quad (3.53)$$

dok je u pravcu  $y$

$$\bar{y} = \left( \frac{\sqrt{12}K_f}{\rho c \dot{\epsilon}_y} \right)^{2/3}. \quad (3.54)$$

Jasno je da srednja vrednost površine generisanih fragmenata može da se napiše u obliku

$$a_0 = x_0 y_0 = \left( \frac{\sqrt{12}K_f}{\rho c \bar{\epsilon}} \right)^{4/3}, \quad (3.55)$$

gde je nominalna "srednja" vrednost brzine deformacija definisana sa

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y}. \quad (3.56)$$

Pokazano je da analitički određena funkcija gustine raspodele dužine fragmenata u  $x$  pravcu ima oblik

$$f(x) = \frac{\beta^2}{4} \frac{1}{x_0} \left( \frac{x}{x_0} \right)^3 e^{-\frac{1}{4} \left( \frac{x}{x_0} \right)^3} \int_0^1 (1-z^2) e^{-\frac{3}{4} \left( \frac{x}{x_0} \right)^3 z^2} dz, \quad (3.57)$$

gde je konstanta  $\beta = 3/\Gamma(2/3)$ , dok je  $x_0$  nominalna vrednost dužine fragmenata. Numerički se na osnovu raspodele (3.57) jednostavno određuje relacija koja povezuje srednju vrednost dužine fragmenata i nominalnu dužinu fragmenata:

$$\bar{x} = \int_0^{\infty} x f(x) dx \approx 1.48 x_0. \quad (3.58)$$

Raspodela dužine generisanih fragmenata duž  $y$  ose opisuje se funkcijom potpuno ekvivalentnom izrazu (3.57).

Da bi se omogućilo analitičko tretiranje problema dvodimenzione (biaksijalne) fragmentacije, ideja je da se Mott-ova funkcija gustine raspodele (3.57) aproksimira nekom od "standardnih" funkcija raspodele, s obzirom da analitička integracija izraza zasnovanih na (3.57) nije moguća. U tom cilju, a s obzirom na karakter raspodele (3.57) (sl. 3.9) analizirane su tri potencijalne funkcije raspodele:

- normalna raspodela

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.59)$$

- Weibull-ova raspodela

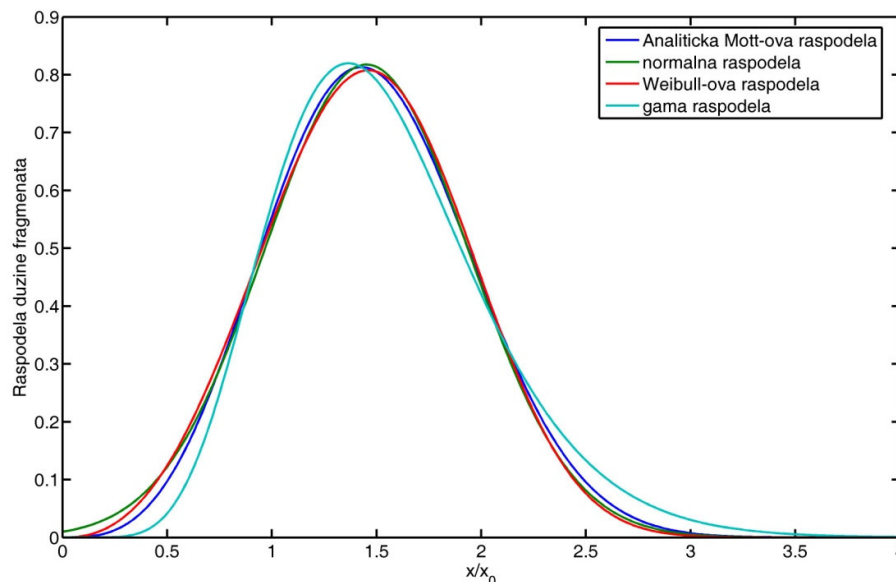
$$f(x) = \frac{n}{x_0} \left( \frac{x}{x_0} \right)^{n-1} e^{-\left( \frac{x}{x_0} \right)^n}, \quad (3.60)$$



- gama raspodela

$$f(x) = \frac{1}{x_0} \frac{n}{\Gamma(n)} \left( \frac{nx}{x_0} \right)^{n-1} e^{-\frac{nx}{x_0}}. \quad (3.61)$$

Na slici 3.13 je predstavljeno poređenje analitičke Mott-ove raspodele (3.57) sa tri navedene aproksimativne raspodele. Parametri razmatranih raspodela optimizirani su primenom metode najmanjih kvadrata i njihove vrednosti su prikazane u Tabeli 3.1.



**Sl. 3.13.** Poređenje analitičke Mott-ove raspodele dužine fragmenata sa tri aproksimativne raspodele (normalna, Weibull-ova i gama raspodela); Weibull-ova raspodela predstavlja najbolju aproksimaciju teorijskog modela

**Tabela 3.1.** Optimizovane vrednosti parametara normalne, Weibull-ove i gama raspodele koje u smislu metode najmanjih kvadrata najbolje aproksimiraju analitički Mott-ov zakon raspodele (3.57)

Raspodela	Optimizovane vrednosti parametara
normalna	$\mu=1.4515, x_0=0.4880$
Weibull-ova	$x_0=1.6194, n=3.3864$
gama	$x_0=1.5351, n=9.0336$

Pokazuje se da Weibull-ova raspodela najbolje aproksimira analitički oblik Mott-ove jednodimenzionane raspodele. S obzirom na transformaciju funkcije raspodele, sada je veza između srednje i nominalne dužine fragmenta  $\bar{x}=0.90x_0$ . Ako imamo u vidu oblik Weibull-ove raspodele dužine fragmenata duž  $x$  ose (3.60) i sasvim analogan izraz za raspodelu duž  $y$  ose, i ako iskoristimo pretpostavku o nezavisnom formiranju prslina u ova dva ortogonalna pravca, tada se množenjem odgovarajućih funkcija raspodele dobija dvodimenziona funkcija raspodele dužina fragmenata u obliku

$$f_{xy}(x, y) = \frac{n^2}{x_0 y_0} \left( \frac{xy}{x_0 y_0} \right)^{n-1} \exp \left[ - \left[ \left( \frac{x}{x_0} \right)^n + \left( \frac{y}{y_0} \right)^n \right] \right] \quad (3.62)$$

Ako pređemo na nove promenljive  $a$  i  $r$

$$a = xy, \quad r = \frac{x}{y}, \quad (3.63)$$

koje definišu površinu i izduženost (oblik) generisanih pravougaonih fragmenata i ako se ima u vidu vrednost jakobiana

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, r)} \right| = \frac{1}{2r}, \quad (3.64)$$

dobija se dvodimenziona funkcija raspodele u novom obliku

$$g(a, r) = \frac{n^2}{a_0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{n-1} \frac{1}{2r} \exp \left[ - \left( \frac{a}{a_0} \right)^{n/2} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^{n/2} + \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n/2} \right] \right]. \quad (3.65)$$

Integracijom funkcije gustine raspodele definisane sa (3.65) u granicama  $r \in [0, \infty]$ , uz odgovarajuće transformacije [1], dobija se gustina raspodele površine generisanih fragmenata

$$h(a) = \frac{2n}{a_0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{n-1} K_0 \left( 2 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{n/2} \right), \quad (3.66)$$

gde je  $K_0(\bullet)$  modifikovana Bessel-ova funkcija druge vrste nultog reda.

Primenom numeričke integracije jednostavno se određuje srednja vrednost površine generisanih fragmenata:

$$\bar{a} = \int_0^{\infty} ah(a) da \approx 0.81a_0. \quad (3.67)$$

Na osnovu izraza za gustinu raspodele (3.66) može se izračunati i kumulativna raspodela veličine fragmenata, tj. verovatnoća da slučajno odabrani fragment ima površinu veću od  $a$ :

$$P(a) = \int_a^{\infty} h(a) da = 2 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{n/2} K_1 \left( 2 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{n/2} \right), \quad (3.68)$$

pri čemu se oznaka  $K_1(\bullet)$  odnosi na modifikovanu Bessel-ovu funkciju druge vrste prvog reda. Treba primetiti da Weibull-ova raspodela (3.60) predstavlja generalizaciju eksponencijalne (Lienau) raspodele koja je razmatrana u prethodnom poglavlju o geometrijskoj fragmentaciji (za  $n=1$ , Weibull-ova raspodela se svodi na eksponencijalnu). U tom smislu, dobijena vrednost kumulativne funkcije raspodele (3.68) predstavlja uopštenje ranije izvedenog izraza (2.35).

Na sl. 3.14 su predstavljene funkcija gustine raspodele  $h(a)$  i kumulativna funkcija raspodele  $P(a)$  površine fragmenata.

Na dijagramu (sl. 3.15) je dato poređenje teorijske kumulativne raspodele (3.68) sa numerički simuliranom fragmentacijom jediničnog kvadrata (okvir u sl. 3.15) pri čemu raspodela dužine fragmenata u oba ortogonalna pravca odgovara Weibull-ovoj raspodeli. Očekivano, teorijska kriva se odlično podudara sa rezultatima numeričke simulacije.

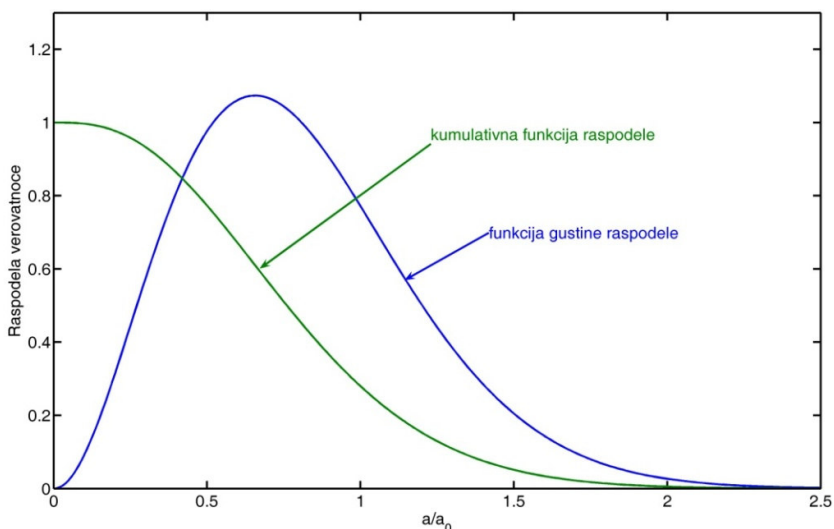
U praksi se često i u slučaju dvodimenzione fragmentacije kao mera veličine fragmenata koristi karakteristična dužina  $s$ , koju je neretko lakše izmeriti nego površinu  $a$ . Ako karakterističnu, odnosno odgovarajuću nominalnu dužinu definišemo izrazima:

$$s = \sqrt{a}, \quad s_0 = \sqrt{a_0}, \quad (3.69)$$

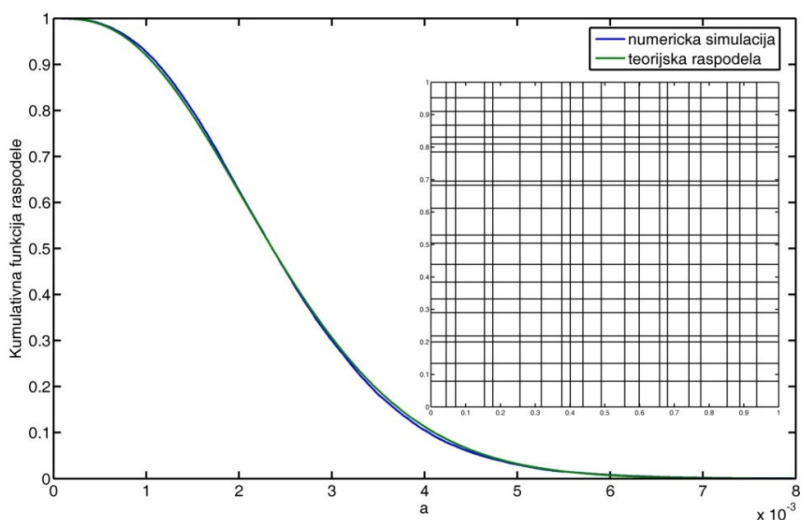
tada koristeći činenicu da je  $da=2sds$ , dobijamo gustinu raspodele karakteristične dužine fragmenata pri dvodimenzionoj fragmentaciji u obliku

$$k(s) = \frac{4n}{s_0} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{2n-1} K_0 \left( 2 \left(\frac{s}{s_0}\right)^n \right). \quad (3.70)$$

Numerički se pokazuje da važi relacija  $\bar{s} = 0.87s_0$ . U [5] je realizovana dvodimenziona fragmentaciju dela čelične sfere (kalote) putem produkata detonacije sloja eksploziva. Fragmentacija (dela) sfere je jedinstven eksperiment koji obezbeđuje jednake vrednosti brzine deformacija u međusobno ortogonalnim pravcima, a time i ekviaksijalne fragmente. Proces fragmentacije je predstavljen na sl. 1.1c.



**Sl. 3.14.** Funkcija gustine raspodele i kumulativna funkcija raspodele površine fragmenata, pri Weibull-ovoj aproksimaciji Mott-ovog zakona raspodele ( $n=3.39$ )

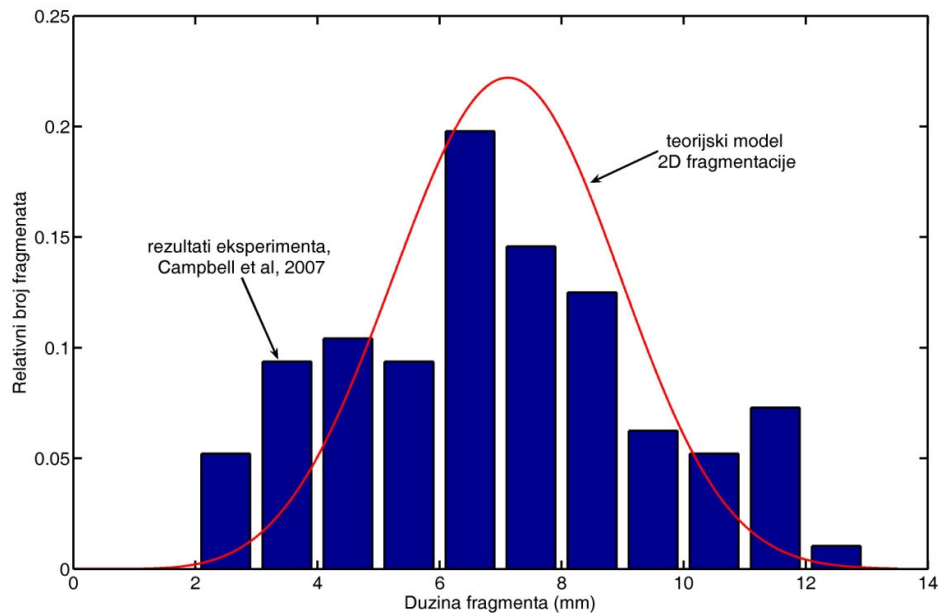


**Sl. 3.15.** Dvodimenziona Mott-ova fragmentacija: poređenje teorijskog modela zasnovanog na Weibull-ovoj aproksimaciji i rezultata numeričke simulacije fragmentacije jediničnog kvadrata (okvir). Srednja vrednost dužine fragmenata u  $x$  i  $y$  pravcu je  $\bar{x} = \bar{y} = 1/20$ ; korišćena je optimizovana vrednost parametra  $n=3.39$  u Weibull-ovom zakonu raspodele i srednja vrednost raspodele za 200 simulacija

Posle eksperimenta generisani fragmenti su prikupljeni i izmerena im je srednja debljina i masa. Na osnovu pretpostavke da fragmenti imaju oblik diska, proračunski je određena karakteristična dimenzija – radijus parčadi. Vrednost parametra teorijske raspodele  $s_0$  određuje se na osnovu izraza:

$$s_0 = x_0 = y_0 = \frac{\bar{r}}{0.87} = 1.15\bar{r}, \quad (3.71)$$

gde je  $\bar{r} = 6.95$  mm eksperimentalno određena srednja vrednost radijusa fragmenta. Izračunata vrednost nominalne dužine fragmenta  $s_0 = 7.99$  mm na osnovu (3.71) veoma je bliska optimalnoj vrednosti ovog parametra dobijenom metodom najmanjih kvadrata ( $s_0 = 8.15$  mm). Na sl. 3.16 eksperimentalno dobijeni rezultati upoređeni su sa teorijskim modelom raspodele (3.70). Podudaranje eksperimentalnih i teorijskih rezultata je veoma dobro.



**Sl. 3.16.** Dvodimenziona fragmentacija: poređenje eksperimentalnih rezultata raspodele radijusa fragmenata [5] sa predviđenjem teorijskog modela

### 3.3.4. Trodimenziono uopštenje Mott-ovog modela

Sasvim analogno dvodimenzionoj generalizaciji, može se pretpostaviti da raspodela dužine fragmenata duž trećeg ortogonalnog pravca takođe ima oblik Mott-ove krive, odnosno da se veoma dobro može aproksimirati Weibull-ovom raspodelom oblika:

$$f(z) = \frac{n}{z_0} \left( \frac{z}{z_0} \right)^{n-1} e^{-\left( \frac{z}{z_0} \right)^n}. \quad (3.72)$$

Treba uočiti da je u slučaju fragmentacije cilindra naprezanje po debljini cilindra (duž  $z$  ose) – sabijanje, za razliku od preostala dva ortogonalna pravca gde je dominantno zatezanje. Međutim, za slučaj sabijanja nisu ispunjene sve pretpostavke Mott-ovog modela, prvenstveno zbog toga što do loma materijala dolazi usled procesa adijabatskog smicanja, tako da raspodela (3.72) važi samo uslovno.

Ako se ponovo pretpostavi da je formiranje prslina duž sva tri pravca nezavisno, trodimenziona funkcija raspodele ima oblik

$$f_{xyz}(x, y, z) = \frac{n^3}{v_0} \left( \frac{v}{v_0} \right)^{n-1} \exp \left[ - \left[ \left( \frac{x}{x_0} \right)^n + \left( \frac{y}{y_0} \right)^n + \left( \frac{z}{z_0} \right)^n \right] \right], \quad (3.73)$$

gde su

$$v = xyz, \quad v_0 = x_0 y_0 z_0, \quad (3.74)$$

zapremina fragmenta, odnosno nominalna vrednost zapremine, respektivno. Ako uvedemo nove promenljive

$$u = \frac{x}{z}, \quad w = \frac{y}{z}, \quad (3.75)$$

funkcija raspodele (3.73) dobija oblik

$$g(u, v, w) = \frac{1}{3uw} \frac{n^3}{v_0} \left( \frac{v}{v_0} \right)^{n-1} \times \exp \left[ - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{n/3} \left[ \left( \frac{u}{u_0} \right)^{2n/3} \left( \frac{w_0}{w} \right)^{n/3} + \left( \frac{u_0}{u} \right)^{n/3} \left( \frac{w}{w_0} \right)^{2n/3} + \left( \frac{u_0}{u} \right)^{n/3} \left( \frac{w_0}{w} \right)^{n/3} \right] \right] \quad (3.76)$$

pri čemu je korišćena vrednost jakobijana

$$J = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \frac{3z^2}{xy} = \frac{3}{uw}. \quad (3.77)$$

Vrednost raspodele veličine (zapremine) fragmenata dobija se integracijom gustine raspodele (3.76) u granicama  $u \in [0, \infty]$  i  $w \in [0, \infty]$ :

$$h(v) = \iint_{u, w \in [0, \infty]} g(u, v, w) du dw. \quad (3.78)$$

Može se pokazati da se integral (3.75) svodi na oblik

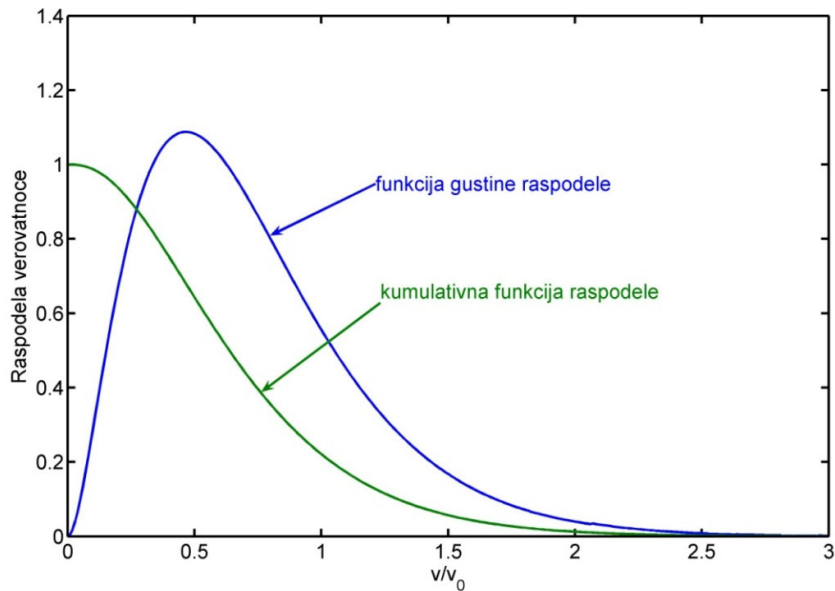
$$h(v) = \frac{3n}{v_0} \left( \frac{v}{v_0} \right)^{n-1} \iint_{\alpha, \beta \in [0, \infty]} \frac{1}{\alpha\beta} \exp \left[ - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{n/3} \frac{\alpha^3 + \beta^3 + 1}{\alpha\beta} \right] d\alpha d\beta. \quad (3.79)$$

Poslednji integral nije moguće odrediti analitički. Za optimizovanu vrednost Weibull-ovog parametra ( $n=3.39$ ), numerički je izračunata vrednost funkcije gustine raspodele i predstavljena na sl. 3.17, zajedno sa odgovarajućom kumulativnom funkcijom raspodele

$$P(v) = \int_v^{\infty} h(v) dv, \quad (3.80)$$

koja je takođe određena numeričkim putem. Srednja (očekivana) vrednost zapremine fragmenta se jednostavno određuje:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v h(v) dv \approx 0.72 v_0. \quad (3.81)$$



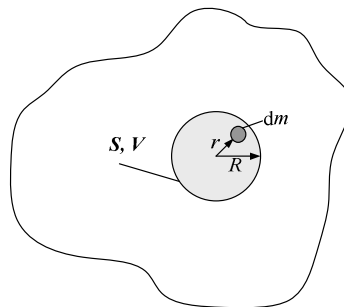
**Sl. 3.17.** Trodimenziona fragmentacija prema uopštenom Mott-ovom modelu: funkcija gustine raspodele i kumulativna funkcija raspodele zapremine fragmenata određene su numeričkim putem primenom Weibull-ove aproksimacije

### 3.3.5. Grady-jev energetski pristup

U svom jednostavnom trodimenzionom modelu fragmentacije [24] Grady je elegantno iskoristio energetski pristup. Izvorni model tretirao je fragmentaciju tečnosti, ali se rezultati mogu generalizovati i za čvrsta tela. Osnovna ideja energetskog pristupa je da se odredi ukupna energija parčadi posle fragmentacije, a zatim na osnovu principa minimalne energije utvrdi nominalna veličina fragmenata.

Ukupna energija fragmenta sastoji se od dve komponente: (i) prva je površinska energija koja nastaje kreiranjem novih površina u toku fragmentacije, (ii) druga komponenta je tzv. lokalna kinetička energija; pri tome se smatra da za fragmentaciju nije relevantna celokupna kinetička energija fragmenta, već samo deo kinetičke energije koji je rezultat kretanja materijala fragmenta u odnosu na njegov centar mase. Ova energija doprinosi ekspanziji fragmentacionog materijala, dok kinetička energija centra mase omogućava dalje kretanje formiranih fragmenata. Takođe je usvojena pretpostavka da su svi fragmenti sfernog oblika i jednake veličine.

Na sl. 3.18 je predstavljeno telo u trenutku fragmentacije, kao i sferni fragment radijusa  $R$ . Da bi se odredila ukupna energija fragmenta, najpre je potrebno utvrditi raspodelu brzine materijala unutar fragmenta.



**Sl. 3.18.** Energetski model fragmentacije – parametri sfernog fragmenta

Na osnovu zakona o održanju mase za fragment  $d(\rho V)=0$ , dobija se

$$V \dot{\rho} = -\rho \frac{dV}{dt}, \quad (3.82)$$

gde je  $\dot{\rho} < 0$  brzina promene gustine materijala. S obzirom da se razmatra sferni fragment, važi

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3, \quad (3.83)$$

dok je brzina materijala na udaljenosti  $r$  od centra fragmenta određena sa

$$v = \frac{dr}{dt}. \quad (3.84)$$

Uvrštavanjem zavisnosti (3.83) i (3.84) u jednačinu (3.82) dobija se brzina u obliku

$$v = -\frac{r \dot{\rho}}{3\rho}. \quad (3.85)$$

Kinetička energija fragmenta koja je posledica kretanja materijala u odnosu na centar mase određena je integralom

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V v^2 dm = \frac{2\pi}{45} \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} R^5 \quad (3.86)$$

pri čemu je pretpostavljeno da  $\dot{\rho}$  na zavisi od položaja  $r$ .

Specifična kinetička energija po jedinici zapremine fragmenta je

$$E'_k = \frac{E_k}{V} = \frac{1}{30} \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} R^2. \quad (3.87)$$

Ako se uvede parametar  $A$  koji predstavlja odnos površine prema zapremini fragmenta

$$A = \frac{S}{V} = \frac{3}{R}, \quad (3.88)$$

specifična kinetička energija fragmenta može se napisati u obliku

$$E'_k = \frac{3}{10} \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} \frac{1}{A^2}. \quad (3.89)$$

Površinska energija fragmenta određuje se na osnovu jednačine

$$\Gamma_S = \gamma S \quad (3.90)$$

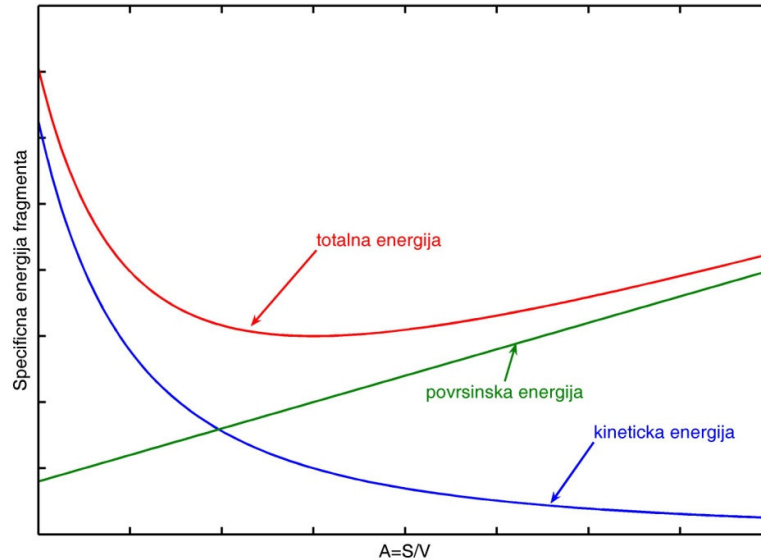
gde je  $\gamma$  specifična površinska energija, pa je površinska energija po jedinici zapremine fragmenta određena sa

$$\Gamma'_S = \gamma A \quad (3.91)$$

Konačno, totalna specifična energija fragmenta, na osnovu (3.89) i (3.91), ima oblik

$$U = E'_k + \Gamma'_S = \frac{3}{10} \frac{\dot{\rho}^2}{\rho} \frac{1}{A^2} + \gamma A \quad (3.92)$$

Na slici 3.19 predstavljeni su dijagrami totalne energije fragmenta i njenih komponentata – kinetičke i površinske energije, saglasno izrazu (3.92).



**Sl. 3.19.** Kinetička, površinska i ukupna energija fragmenta prema energetsom modelu

Ako se primeni princip minimalne energije, tj. ako se pretpostavi da će se od svih mogućih fragmentacija realizovati ona koja zahteva minimalan utrošak energije, tada se iz uslova

$$\frac{dU}{dA} = 0 \quad (3.93)$$

određuje vrednost parametra  $A$  koja odgovara očekivanim (srednjim) dimenzijama fragmenta:

$$A = \left( \frac{3 \dot{\rho}^2}{5 \rho \gamma} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.94)$$

Ako se ima u vidu izraz (3.88), odnosno definicija parametra  $A$ , dobija se konačno i srednji prečnik fragmenta

$$d = \frac{6}{A} = 2 \left( \frac{45 \rho \gamma}{\dot{\rho}^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.95)$$

Na osnovu jednačine (3.85) može se napisati izraz za brzinu deformacije u obliku

$$\dot{\epsilon} = -\frac{\dot{\rho}}{3\rho}. \quad (3.96)$$

U slučaju dominantnog krtog loma materijala, važi relacija koja povezuje površinsku energiju  $\gamma$  i kritičnu vrednost žilavosti loma  $K_{IC}$ :

$$\gamma = \frac{K_{IC}^2}{2K}. \quad (3.97)$$

U poslednjoj jednačini  $K$  je zapreminski modul elastičnosti materijala



$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad (3.98)$$

gde su  $E$  – Young-ov modul elastičnosti, a  $\nu$  – Poisson-ov koeficijent. Ako se ima u vidu izraz za brzinu prostiranja elastičnih poremećaja u fragmentacionom telu

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (3.99)$$

zamenom izraza (3.96) i (3.97) u izvedenu formulu za srednji prečnik fragmenta (3.95), dobija se:

$$d = \left( \frac{\sqrt{20}K_{IC}}{\rho c \dot{\epsilon}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.100)$$

Svakako treba primetiti da je poslednji rezultat u saglasnosti sa ranije izvedenom nominalnom dimenzijom fragmenta (3.50). Dakle, drugačijim pristupom potvrđena je ključna zavisnost nominalne veličine fragmenta od brzine deformacije,  $d \sim \dot{\epsilon}^{-2/3}$ . Takođe, pokazuje se da su kritična vrednost žilavosti loma  $K_{IC}$  i žilavost fragmentacije  $K_f$  istog reda veličine, odnosno relativno bliske vrednosti na šta je ukazano u [30].

### 3.3.6. Modifikacija Glenn-Chudnovsky

Glenn i Chudnovsky [19] su predložili modifikaciju razmotrenog energetskog modela fragmentacije, koja se zasniva na dve primedbe: (i) u osnovnom modelu nije razmatrana akumulirana energija deformacije usled elastičnog sabijanja materijala fragmenta, i (ii) srednji prečnik formiranih fragmenata može se odrediti na osnovu zakona o održanju energije, ako se prepostavi da suma kinetičke, deformacione i površinske energije ostaje nepromenjena u toku fragmentacionog procesa.

Ako se ima u vidu izraz za "lokalnu" kinetičku energiju (3.84), kao i izraz za brzinu deformacije (3.96), ukupna kinetička energija (tj. promena kinetičke energije) svih parčadi je

$$\Delta T = N \frac{2\pi}{5} \rho \dot{\epsilon}^2 R^5, \quad (3.101)$$

pri čemu je  $N$  broj generisanih fragmenata

$$N = \left( \frac{R_0}{R} \right)^3. \quad (3.102)$$

S obzirom da je početna kinetička energija fragmentacionog tela, analogno izrazu (3.87), određena sa

$$T_i = \frac{2\pi}{5} \rho \dot{\epsilon}^2 R_0^5, \quad (3.103)$$

dobija se veza između promene kinetičke energije fragmenata i početne kinetičke energije tela u obliku

$$\Delta T = T_i \left( \frac{R}{R_0} \right)^2. \quad (3.104)$$

Kada je reč o deformacionoj energiji, celokupna akumulirana energija usled prethodnog elastičnog deformisanja materijala fragmentacionog tela utroši se tokom fragmentacije, jer se smatra da su na kraju procesa formirani fragmenti potpuno rasterećeni. Ako se pretpostavi da do fragmentacije ne dolazi pre nego što napon dostigne izvesnu kritičnu vrednost  $\sigma_C$  koja je bliska naponu tečenja, deformaciona energija (rad) ima oblik

$$\Delta P = P_i = \int_{R_0}^R \sigma A dR = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \frac{\sigma_C^2}{2K}, \quad (3.105)$$

pri čemu je  $K$  ranije definisan zapreminski modul elastičnosti. Budući da je početna vrednost površinske energije

$$\Gamma_{Si} = 4\pi\gamma R_0^2, \quad (3.106)$$

dobija se da je promena površinske energije sistema u toku fragmentacije određena sa

$$\Delta\Gamma_S = \Gamma_{Si} - \Gamma_s = \Gamma_{Si} \left(1 - \frac{R_0}{R}\right). \quad (3.107)$$

Kako zbir kinetičke, deformacione i površinske energije sistema u toku procesa fragmentacije ostaje nepromenjen, promene pomenutih vidova enegije moraju da zadovolje uslov

$$\Delta T + \Delta P + \Delta\Gamma_S = T_i \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 + P_i + \Gamma_{Si} \left(1 - \frac{R_0}{R}\right) = 0. \quad (3.108)$$

Poslednji uslov svodi se na kubnu jednačinu oblika

$$R^3 + \alpha R - 2\beta = 0, \quad (3.109)$$

gde su parametri  $\alpha$  i  $\beta$  definisani izrazima

$$\beta = \frac{5\gamma}{\rho\dot{\epsilon}^2} = \frac{5}{2} \left(\frac{K_{IC}}{\rho c \dot{\epsilon}}\right)^2, \quad (3.110)$$

$$\alpha = \frac{2\beta}{R_0} + \frac{5}{3} \left(\frac{\sigma_C}{\rho c \dot{\epsilon}}\right)^2. \quad (3.111)$$

U prethodnim izrazima korišćena je veza između specifične površinske energije  $\gamma$  i kritične vrednosti žilavosti loma  $K_{IC}$  (3.97), kao i izraz za brzinu elastičnih talasa  $c$  u fragmentacionom telu (3.99).

Da bi se rešila jednačina (3.109) potrebno je poznavati parametre  $\alpha$  i  $\beta$ , odnosno odgovarajuće dimenzije ( $R_0$ ) i karakteristike fragmentacionog tela ( $\rho$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $\sigma_C$  i  $K_{IC}$ ), kao i intenzitet impulsnog opterećenja koji se ogleda u brzini deformacije  $\dot{\epsilon}$ . U opštem slučaju, kubna jednačina oblika (3.109) ima dva konjugovano-kompleksna i jedno realno rešenje oblika

$$R = 2\sqrt{\frac{\alpha}{3}} \sinh \left[ \frac{1}{3} \sinh^{-1} \left( \beta \left( \frac{3}{\alpha} \right)^{3/2} \right) \right]. \quad (3.112)$$

Specijalno, u slučaju da je vrednost parametra  $\alpha$  veoma mala (tj. ako je površinska energija fragmentacionog tela mala, pri čemu još i napon  $\sigma_C$  pri kome otpočinje fragmentacije ima

malu vrednost – kao npr. u slučaju fragmentacije fluida) ili ako važi uslov da je površinska energija značajno veća od deformacione

$$\beta \left( \frac{3}{\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \gg 1, \quad (3.113)$$

rešenje (3.112) se svodi na

$$R \approx (2\beta)^{1/3}. \quad (3.114)$$

Primećujemo da je dobijeni rezultat  $2^{1/3}$  puta veći od onoga koji se dobija izvornim Gradyjevim pristupom (3.100).

U posebnom slučaju kada je zadovoljen uslov

$$\beta \left( \frac{3}{\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \ll 1 \quad (3.115)$$

tj. ako je deformaciona energija znatno veća od površinske, dobija se približno rešenje

$$R \approx \frac{2\beta}{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_C}{K_{IC}} \right)^2}. \quad (3.116)$$

U ovom slučaju, koji odgovara fragmentaciji krto g tela, pokazuje se da brzina deformacije nema uticaja na srednji radijus fragmenata koji je dominantno određen odnosom napona iniciranja fragmenatcije i kritične vrednosti žilavosti loma.

## 4. ZAKLJUČAK

Naučnotehnička informacija tretira problematiku fragmentacije košuljice razornih projektila. U uvodnom delu definisani su osnovni pojmovi, razmotrena je klasifikacija procesa fragmentacije i ukazano je na osnovne osobenosti dinamičke fragmentacije i posebno fragmentacije košuljica projektila parčadnog dejstva. Takođe je dat sažet prikaz različitih pristupa modeliranju procesa fragmentacije, kao i kratak istorijski pregled razvoja teorije dinamičke fragmentacije.

Razmotrani su empirijski zakoni raspodele veličine, odnosno mase parčadi koja predstavljaju rezultat dinamičke fragmentacije. Najpre je analizirana slučajna fragmentacija prostora zasnovana na primeni geometrijske statistike.

Objašnjen je koncept eksponencijalnog (Lienau-ovog) zakona raspodele za slučaj jednodimenzione slučajne fragmentacije. Ovaj pristup je proširen na Bessel-ovu i Meijer-ovu raspodelu koje odgovaraju slučajnoj 2D i 3D fragmentaciji. Ova tri modela dobro opisuju fragmentaciju krutih materijala.

Takođe su razmotreni i zakoni raspodele veličine fragmenata zasnovani na primeni Voronoi dijagrama. Pokazano je da ovi modeli veoma dobro opisuju 1D i 2D fragmentaciju koja je rezultat višestrukih duktilnih lomova materijala.

Razmotreno je Grady-Kipp uopštenje eksponencijalne raspodele i uvedeni su 2D i 3D Mott-ov zakon raspodele mase generisanih fragmenata. Kroz preliminarna poređenja sa eksperimentalnim rezultatima pokazano je da Mott-ova raspodela dobro aproksimira rezultate eksperimenata.

Takođe je pokazano da statistički, odnosno modifikovani statistički model odlično opisuju rezultate 1D fragmentacije plastičnih materijala.

Razmotreni su i ostali empirijski zakoni raspodele mase fragmenata – generalizovana Mott-ova raspodela, raspodela Srtomsoe-Ingebrigtsena, generalizovana Grady-Kipp raspodela, lognormalna raspodela, Weibull-ova, Held-ova i stepena raspodela. Formirani su kriterijumi za komparaciju različitih teorijskih pristupa, zasnovani na optimizaciji slobodnih parametara u navedenim raspodelama i međusobnom upoređivanju podešenog koeficijenta determinacije, odnosno relativnog odstupanja medijane raspodele. Analiza ovih kriterijuma na dostupnoj bazi od 30 eksperimentalnih rezultata fragmentacije razornih projektila pokazala je da rezultate eksperimenata najbolje opisuje troparametarska generalizovana Grady-Kipp raspodela, te se ovaj model se preporučuje za predikciju raspodele fragmenata razornih projektila.

Takođe su razmotreni fizički zasnovani modeli procesa fragmentacije.

Najpre je razmotren Mott-ov jednodimenzioni model fragmentacija prstena (cilindra) pod dejstvom unutrašnjeg pritiska koji je generisan detonacijom eksplozivnog punjenja. Na bazi ovog modela, realizovan je program koji simulira jednodimenzionu fragmentaciju prstena. Korišćenjem programa, utvrđen je uticaj karakteristika fragmenacionog tela na karakter raspodele dužine (mase) generisane parčadi. Poređenje teorijskih i dostupnih

eksperimentalnih rezultata ukazuje na dobar nivo podudaranja. Razmotren je analitički pristup Mott-ovom modelu fragmentacije i analizirana su energetska ograničenja ovog modela. Pokazano je da je moguće objediniti ova dva pristupa procesu fragmentacije. Takođe su formulisane generalizacije objedinjenog modela za slučajeve dvodimenzione i trodimenzione fragmentacije. Razmotren je i Grady-jev čisto energetski model fragmentacije, kao i važna modifikacija Glenn-Chudnovsky. Analizirani modeli omogućavaju određivanje karakteristične veličine, odnosno mase fragmenata.

## **IZJAVA ZAHVALNOSTI**

Autori sa zahvalnošću ističu da Naučnotehnička informacija predstavlja rezultat istraživanja realizovanih kroz projekat Ministarstva prosvete i nauke III-47029: „Rentabilni izbor novih tehnologija i koncepcija odbrane kroz društvene promene i strateške orijentacije Srbije u 21. veku“ za period 2011-2014. godine.

## LITERATURA

1. Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.) (1972)  
MODIFIED BESSEL FUNCTIONS *I* AND *K*, §9.6 in: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*  
9th printing, Dover, New York, 374-377
2. Aurenhammer, F., Klein, R. (2000)  
VORONOI DIAGRAMS. Ch. 5 in *Handbook of Computational Geometry* (Ed. J.-R. Sack and J. Urrutia)  
Amsterdam, North-Holland, 201-290
3. Baker, L., Giancola, A.J., Allahdadi, F. (1992)  
FRACTURE AND SPALL EJECTA MASS DISTRIBUTION: LOGNORMAL AND MULTIFRACTAL DISTRIBUTIONS  
*Journal of Applied Physics*, 72 (7), 2724-2731
4. Becker, R. (2002)  
RING FRAGMENTATION PREDICTIONS USING THE GURSON MODEL WITH MATERIAL STABILITY CONDITIONS AS FAILURE CRITERIA  
*International Journal of Impact Engineering*, 39, 3555-3580
5. Campbell, G.H., Archbold, G.C., Hurricane, O.A., Miller, P.L. (2007)  
FRAGMENTATION IN BIAXIAL TENSION  
*Journal of Applied Physics*, 101 (3), 10p
6. Chhabildas, L.C. (1987)  
SURVEY OF DIAGNOSTIC TOOLS USED IN HYPERVELOCITY IMPACT STUDIES  
*International Journal of Impact Engineering*, 5 (1-4), 205-220
7. Cohen, E.A. (1981)  
NEW FORMULAS FOR PREDICTING THE SIZE DISTRIBUTION OF WARHEAD FRAGMENTS  
*Mathematical Modelling*, 2, 19-32
8. Dawson S., Edwards M. (2004)  
MICROSTRUCTURE OF STEEL FRAGMENTS PRODUCED BY EXPLOSIVE CHARGES, In: Burman N, Anderson J, Katselis G, (Eds.)  
*Proceedings of the 21<sup>st</sup> International symposium on ballistics*, DSTO, Australia, vol. 1, 289–296
9. Dehn, J. (1981)  
PROBABILITY FORMULAS FOR DESCRIBING FRAGMENT SIZE DISTRIBUTIONS  
Tech. Rep. 02332, Aberdeen Proving Ground
10. Elek, P. (2008)  
MODELIRANJE DINAMIČKE FRAGMENTACIJE U PROBLEMIMA BALISTIKE NA CILJU, doktorska disertacija  
Mašinski fakultet, Beograd

11. Elek, P., Jaramaz, S. (2009)  
FRAGMENT MASS DISTRIBUTION OF NATURALLY FRAGMENTING WARHEADS  
*FME Transactions*, 37 (3), 129-135
12. Elek, P., Jaramaz, S. (2008)  
FRAGMENT SIZE DISTRIBUTION IN DYNAMIC FRAGMENTATION: GEOMETRIC  
PROBABILITY APPROACH  
*FME Transactions*, 36 (2), 59-65
13. Elek, P., Jaramaz, S. (2004)  
ZAKONI RASPODELE MASE PARČADI RAZORNIH PROJEKTILA  
*XXII Simpozijum o eksplozivnim materijama JKEM*, Bar, 241-251
14. Elek, P., Jaramaz, S. (2005)  
MODELING OF FRAGMENTATION OF RAPIDLY EXPANDING CYLINDERS  
*Theoretical and Applied Mechanics*, 32 (2), 113-130
15. Elek, P., Jaramaz, S. (2007)  
SIZE DISTRIBUTION OF FRAGMENTS GENERATED BY DETONATION OF  
FRAGMENTING WARHEADS  
*23<sup>rd</sup> International Symposium on Ballistics*. Tarragona, Spain, 153-160
16. Englman, R. (1996)  
MAXIMUM ENTROPY PRINCIPLES IN FRAGMENTATION DATA ANALYSIS  
In: *High pressure shock compression of solids II: Dynamic fracture and fragmentation*. Ed:  
L. Davison, D.E. Grady, M. Shahinpoor.  
Springer
17. Gilvarry, J.J. (1961)  
FRACTURE OF BRITTLE SOLIDS. I. DISTRIBUTION FUNCTION FOR FRAGMENT  
SIZE IN SINGLE FRACTURE (THEORETICAL)  
*Journal of Applied Physics*, 32, 391-399
18. Gilvarry, J.J., Bergstrom, B.H. (1961)  
FRACTURE OF BRITTLE SOLIDS. II. DISTRIBUTION FUNCTION FOR FRAGMENT  
SIZE IN SINGLE FRACTURE (EXPERIMENTAL)  
*Journal of Applied Physics*, 32, 400-410
19. Glenn, L.A., Chudnovsky, A. (1986)  
STRAIN-ENERGY EFFECTS ON DYNAMIC FRAGMENTATION  
*Journal of Applied Physics*, 59 (4), 1379-1380
20. Gold, V.M., Baker, E.L. (2008)  
A MODEL FOR FRACTURE OF EXPLOSIVELY DRIVEN METAL SHELLS  
*Engineering Fracture Mechanics*, 75 (2), 275-289
21. Grady, D. (2006)  
*FRAGMENTATION OF RINGS AND SHELLS: THE LEGACY OF N.F. MOTT*  
Springer
22. Grady, D.E. (1981)  
FRAGMENTATION OF SOLIDS UNDER IMPULSE STRESS LOADING  
*Journal of Geophysical Research*, 86 (B2), 1047



23. Grady, D.E. (1982)  
FRAGMENT SIZE PREDICTION IN DYNAMIC FRAGMENTATION  
*AIP Conference Proceedings* (ed. by W.J. Nellis, L. Seaman, R.A. Graham), AIP, New York, 78, 456-459
24. Grady, D.E. (1982a)  
LOCAL INERTIAL EFFECTS IN DYNAMIC FRAGMENTATION  
*Journal of Applied Physics*, 53 (1), 322-325
25. Grady, D.E. (1990)  
PARTICLE SIZE STATISTICS IN DYNAMIC FRAGMENTATION  
*Journal of Applied Physics*, 68 (12), 6099-6105
26. Grady, D.E. (2003)  
INVESTIGATION OF EXPLOSIVELY DRIVEN FRAGMENTATION OF METALS –  
TWO-DIMENSIONAL FRACTURE AND FRAGMENTATION OF METAL SHELLS  
Progress report II. ARA project No. 0950
27. Grady, D.E., Benson, D.A. (1983)  
FRAGMENTATION OF METAL RINGS BY ELECTROMAGNETIC LOADING  
*Experimental Mechanics*, 23 (4), 393-400
28. Grady, D.E., Kipp, M.E. (1985)  
GEOMETRIC STATISTICS AND DYNAMIC FRAGMENTATION  
*Journal of Applied Physics*, 58 (3), 1210-1222
29. Grady, D.E., Kipp, M.E. (1985b)  
MECHANISMS OF DYNAMIC FRAGMENTATION: FACTORS GOVERNING  
FRAGMENT SIZE  
*Mechanics of Materials*, 4, 311-320
30. Grady, D.E., Olsen, M.L. (2003)  
A STATISTICS AND ENERGY BASED THEORY OF DYNAMIC FRAGMENTATION  
*International Journal of Impact Engineering*, 29, 293-306
31. Grady, D.E., Winfree, N.A. (2001)  
IMPACT FRAGMENTATION OF HIGH-VELOCITY COMPACT PROJECTILES ON  
THIN PLATES: A PHYSICAL AND STATISTICAL CHARACTERISATION OF  
FRAGMENT DEBRIS  
*International Journal of Impact Engineering*, 26, 249-262
32. Held, M. (1990)  
FRAGMENT MASS DISTRIBUTION OF HE PROJECTILES  
*Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 15, 254-260
33. Inaoka, H., Ohno, M. (2003)  
NEW UNIVERSALITY CLASS OF IMPACT FRAGMENTATION  
*Fractals*, 11 (4), 369-376
34. Johnson, W.A., Mehl, R.F. (1939)  
REACTION KINETICS IN PROCESSES OF NUCLEATION AND GROWTH  
*Transactions of AIMME*, 135, 414-458

35. Jovanović, R. (2002)  
*OCENA PRAVILNOSTI FRAGMENTACIJE PROJEKTILA PARČADNOG DEJSTVA  
 PRIMENOM STATISTIČKIH TESTOVA*  
 Magistarska teza, Mašinski fakultet u Beogradu
36. Kiang, T. (1966)  
 MASS DISTRIBUTIONS OF ASTEROIDS, STARS AND GALAXIES  
*Zeitschrift fur Astrophysik*, 64, 426-432
37. Kipp, M.E., Grady, D.E. (1985)  
 DYNAMIC FRACTURE GROWTH AND INTERACTION IN ONE DIMENSION  
*Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 33 (4), 399-415
38. Lee, E.H. (1967)  
 THE CONTINUUM MECHANICS ASPECT OF MATERIAL PROPERTIES  
 DETERMINATION  
*Energetics III*, W. Mueller, M. Shaw (Eds.), Gordon and Breach, New York, 85-122
39. Lin, X., Wei, H., Zhu, H., Yu, Q. (1989)  
 THE EXPONENTIAL DISTRIBUTION LAW OF NATURAL FRAGMENTS AND ITS  
 APPLICATION TO HE SHELL  
*11<sup>th</sup> International Symposium on Ballistics*, Brussels
40. Lienau, C.C. (1936)  
 RANDOM FRACTURE OF A BRITTLE SOLID  
*J. Franklin Inst.* 221, 458-494
41. Meyers, M.A. (1994)  
 EXPERIMENTAL TECHNIQUES: METHODS TO PRODUCE DYNAMIC  
 DEFORMATION, In: *Dynamic behavior of materials*  
 Wiley Interscience. 296-322
42. Mott, N.F. (1943a)  
 FRAGMENTATION OF H.E. SHELLS: A THEORETICAL FORMULA FOR THE  
 DISTRIBUTION OF WEIGHTS OF FRAGMENTS  
 British Ministry of Supply, AC 3642, March
43. Mott, N.F. (1943b)  
 A THEORY OF THE FRAGMENTATION OF SHELLS AND BOMBS  
 British Ministry of Supply, AC 4035, May
44. Mott, N.F. (1947)  
 FRAGMENTATION OF SHELL CASES  
*Proceedings of the Royal Society of London, Series A (Mathematical and Physical Sciences)*,  
 189 (1), May 1947, 300-308
45. Mott, N.F., Linfoot, E.H. (1943)  
 A THEORY OF FRAGMENTATION  
 British Ministry of Supply, AC 3348, January
46. Oddershede, L., Dimon, P., Bohr, J. (1993)  
 SELF-ORGANIZED CRITICALITY IN FRAGMENTING  
*Physical Review Letters*, 71(19), 3107-3110

47. Prudnikov, A.P., Marichev, O. I., Brychkov, Yu. A. (1990)  
 THE MEIJER  $G$ -FUNCTION  $G_{p,q}^{m,n} \left( z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right)$ . §8.2 in *Integrals and Series, Vol. 3: More Special Functions*, Newark, Gordon and Breach, 617-626
48. Rusinek, A., Zaera, R. (2007)  
 FINITE ELEMENT SIMULATION OF STEEL RING FRAGMENTATION UNDER RADIAL EXPANSION  
*International Journal of Impact Engineering*, 34 (4), 799-822
49. Schäfer, F.K. (2006)  
 AN ENGINEERING FRAGMENTATION MODEL FOR THE IMPACT OF SPHERICAL PROJECTILES ON THIN METALLIC PLATES  
*International Journal of Impact Engineering*, 33, 745-762
50. Stromsoe, E., Ingebrigtsen, K.O. (1987)  
 A MODIFICATION OF THE MOTT FORMULA FOR PREDICTION OF THE FRAGMENT SIZE DISTRIBUTION  
*Propellants, Explosives and Pyrotechnics*, 12, 175-178
51. Taylor, G.I. (1963)  
 SCIENTIFIC PAPERS OF SIR GEOFFREY INGRAM TAYLOR, G.K. Batchelor (Ed.), Vol 3. *Aerodynamics and the Mechanics of Projectiles and Explosions*  
 Cambridge University Press
52. Turcotte, D.L. (1995)  
 FRAGMENTATION, Ch. 3. in: *Fractals and chaos in geology and geophysics*  
 Cambridge University Press, 28-55
53. Vukašinović, M. (2000)  
 PRILOG TEORIJI I PRAKSI EKSPERIMENTALNOG ISPITIVANJA PARČADNOG DEJSTVA RAZORNIH PROJEKTILA  
 Doktorska disertacija, Vojnotehnička akademija VJ, Beograd
54. Vuković, N. (1987)  
 STATISTIČKA ANALIZA  
 Naučna knjiga, Beograd
55. Weibull, W. (1939)  
 A STATISTICAL THEORY OF THE STRENGTH OF MATERIALS  
*Zngeniorsvetenskupsukudemien*, 151, Stockholm
56. Weisenberg, D.L., Sagartz, M.J. (1977)  
 DYNAMIC FRACTURE OF 6061-T6 ALUMINUM CYLINDERS  
*Journal of Applied Mechanics*, 44, (4), 643-646
57. Wells, D. (1986)  
 THE PENGUIN DICTIONARY OF CURIOUS AND INTERESTING NUMBERS  
 Middlesex, England, Penguin Books, p. 45
58. Whittaker, E. T., Watson, G. N. (1990)  
 A COURSE IN MODERN ANALYSIS  
 4th ed. Cambridge University Press, 235-236, 246, 271

59. Zhang, L., Jin, X., He, H. (1999)  
PREDICTION OF FRAGMENT NUMBER AND SIZE DISTRIBUTION IN DYNAMIC FRACTURE  
*Journal of Physics D: Applied Physics*, 32, 612-615
60. Zurek, A.K., Meyers, M.A. (1996)  
MICROSTRUCTURAL ASPECTS OF DYNAMIC FAILURE, In: *High pressure shock compression of solids II: Dynamic fracture and fragmentation*, L. Davison, D.E. Grady, M. Shahinpoor (Eds.)  
Springer