IV KONFERENCIJA SAUM: Sistemi, Automatsko Upravljanje i Merenja

Mašinski Fakultet Kragujevac, 17. i 18. juni 1992.

AUTOMATIZOVANO FORMIRANJE ANALITIČKOG OBLIKA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA KRETANJA ROBOTSKOG SISTEMA SA IZRAČUNAVANJEM MODELA U REALNOM VREMENU

Saša Marković
Mašinski fakultet, Beograd

Aleksandar Obradović
Mašinski fakultet, Beograd

U radu se daje postupak formiranja analitičkog oblika diferencijalnih jednačina kretanja robotskog sistema primenom računara. Urađen je odgovarajući kompjuterski program za *Mathematica*-interpreter. Primenom programa dobijen je matematički model u analitičkom obliku za dva manipulatora pri čemu je pokazano da se parametri modela mogu sračunati u realnom vremenu upotrebom personalnog računara.

I - UVOD

Računarski postupci za formiranje dinamičkih modela robota zauzimaju veoma važno mesto u robotici i predmet su istraživanja timova stručnjaka iz celog sveta. **Šilen**† 1990.[1] daje opširan pregled rezultata u dinamici sistema tela predstavljajući računarske programe većeg broja autora. Lako se uočava velika raznovrsnost u teoretskim prilazima problemu, tipovima analiziranih kinematskih parova, korišćenim programskim jezicima i formama dobijenih matematičkih modela (numerički, simbolički ili kombinovani oblik). Od ranijih značajnih radova iz dinamike sistema tela i dinamike robota treba pomenuti monografije **Vitenburga** 1977.[3] i **Popova** 1978.[2].

Numerički postupak je dominirao tokom dugog niza godina. On se sastojao u izračunavanju brojnih vrednosti parametara matematičkog modela pri čemu se dobijao kompaktan oblik jednačina iz kojih su bile eliminisane greške svojstvene "ručnom" pisanju. Međutim, ovakav postupak je bio neefikasan jer je za svaki položaj nepotrebno izračunavan veliki broj parametara koji od položaja ne zavise i koji se, u principu, moraju sračunati samo jednom. Tako se, na prirodan način, došlo na ideju da se odustane od numeričkog modela i vrati na analitičke izraze koje treba da sastavlja računar. **Potkonjak** 1989.[11] iznosi ove savremene trendove a analizom monografije **Šilena** 1990.[1] može se videti da samo manji broj programa daje matematički model robotskog sistema u analitičkom obliku. Ovako dobijena forma nam omogućava najbrže sračunavanje parametara modela što je od izuzetne važnosti za dinamiku u realnom vremenu (**Vukobratović** 1985.[7]).

Primena simboličkog programiranja u ovoj oblasti i mogućnosti savremenih programskih alata rešavaju neke do sada teško rešive probleme. Simboličko diferenciranje ili simboličko množenje matrica danas su sasvim rutinske operacije iako je dobro poznato da su brojni numerički postupci na manje ili više komplikovan način izbegavali bilo kakvo diferenciranje. Programski paket *Mathematica* (**Volfram** 1988.[9]) odlikuje se takvim mogućnostima i performansama koje ga čine veoma upotrebljivim za efikasno manipulisanje simboličkim izrazima.

Postupak formiranja kovarijantnog oblika jednačina kretanja sistema krutih tela iznet u II poglavlju bazira se na rezultatima radova **Čovića** 1987.[4,5,6]. U III poglavlju predstavljen je računarski program za dobijanje analitičkog oblika jednačina kretanja. Ovaj program je u IV poglavlju primenjen na dva manipulatora.

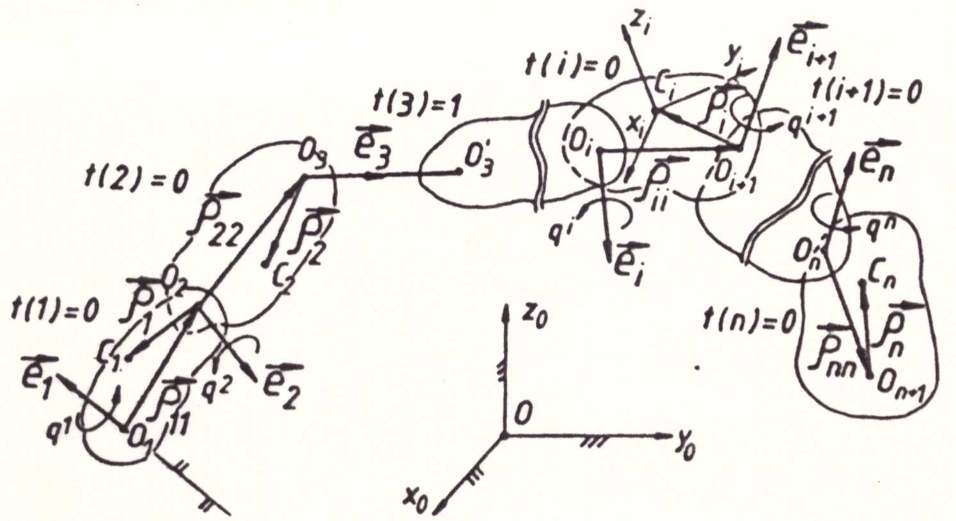
---

† urednik

Osnovni cilj ovog rada je dobijanje analitičkog oblika dinamičkog modela robota i njegovo sračunavanje u realnom vremenu. U tom smislu je u IV poglavlju prikazan određen broj rezultata i izvršeno preliminarno merenje vremena koje je potrebno računaru da izračuna brojne vrednosti na bazi prethodno dobijenih analitičkih izraza.

II - KOVARIJANTNI OBLIK JEDNAČINA KRETANJA

Najveći broj robota se prilikom formiranja dinamičkog modela može predstaviti kao sistem krutih tela oblika otvorenog kinematskog lanca bez grananja. Jedan takav sistem prikazan je na slici 1.



Slika 1: Sistem tela oblika otvorenog kinematskog lanca

Tip veze između i-tog tela i njemu prethodnog definisaćemo preko niza $t(i)$, $i=1,...,n$ (n-broj tela) pri čemu je $t(i)=0$ u slučaju cilindričnog zgloba, odnosno $t(i)=1$ za slučaj translacije. Geometrija sistema se definiše preko jediničnih vektora $\vec{e}_i$ kao i vektora $\vec{\rho}_i$ i $\vec{\rho}_{ii}$, izraženih u lokalnim koordinatnim sistemima.

Konfiguracija jednog takvog sistema određena je preko n nezavisnih generalisanih koordinata q^i. Pretpostavimo da su u referentnoj konfiguraciji ($q^i=0$, $i=1,...n$) ose svih lokalnih koordinatnih sistema paralelne i isto usmerene u odnosu na nepokretni koordinatni sistem, pri čemu su sve ose O_z usmerene naviše.

Transformacija koordinata bilo kog vektora $\vec{a}$ između koordinatnih sistema vezanih za telo i ($\{a^{(i)}\}$, napisano u matričnoj formi) i tela j ($\{a^{(j)}\}$) vrši se na sledeći način:

$$\{a^{(i)}\} = [A_{i,j}]\,\{a^{(j)}\} \qquad (1)$$

gde je $[A_{i,j}]$ odgovarajuća matrica transformacije. Ovakve matrice, s obzirom da karakterišu ortogonalne transformacije rotacije, imaju osobinu da se inverzna matrica dobija običnim transponovanjem. Transformacione matrice dobijaju se primenom Rodrigove formule (Čović 1987.[5]) za $t(i)=0$:

$$[A_{i-1,i}] = [I] + (1-\cos q^i)\,[e_i^{d(i)}]^2 + \sin q^i\,[e_i^{d(i)}] \qquad (2)$$

gde je:

$$[e_i^{d(i)}] = \begin{bmatrix} 0 & -e_{iz} & e_{iy} \\ e_{iz} & 0 & -e_{ix} \\ -e_{iy} & e_{ix} & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

U slučaju translacije ($t(i)=1$) je $[A_{i-1,i}] = [I]$ gde je $[I]$ jedinična matrica. Ostale matrice dobijaju se na osnovu sledeće rekurentne relacije:

$$[A_{j,i+1}] = [A_{j,i}]\,[A_{i,i+1}] \tag{4}$$

U radu **Čovića** 1987.[6] pokazano je da se bez obzira na teorijski pristup (Lagranževe jednačine druge vrste, Opšte teoreme mehanike, Apelove jednačine i sl.) uvek dobija isti, kovarijantni oblik jednačina kretanja (**Anđelić** 1987.[10]):

$$a_{\alpha\beta}\ddot{q}^{\beta} + \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}\dot{q}^{\beta}\dot{q}^{\gamma} = -\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}} + Q_{\alpha}^{N}(q^{i},\dot{q}^{i},t) \qquad \alpha,\beta,\gamma,i = 1,\dots,n \tag{5}$$

gde su: $a_{\alpha\beta}(q^{i})$ -kovarijantne koordinate osnovnog metričkog tenzora konfiguracionog prostora R_n, $\Pi(q^{i})$ -potencijalna energija sila zemljine teže, $Q_{\alpha}^{N}(q^{i},\dot{q}^{i},t)$ -generalisane sile koje odgovaraju ostalim silama (viskoznim, elastičnim itd.) a $\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}(q^{i})$ -Kristofelovi simboli prve vrste koji se mogu izračunati preko relacije:

$$\Gamma_{\beta\gamma,\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta\alpha}}{\partial q^{\gamma}} + \frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^{\alpha}}\right) \tag{6}$$

Za formiranje diferencijalnih jednačina kretanja u simboličkom obliku neophodno je dati izraze za $a_{\alpha\beta}$, $\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}}$ i $\Gamma_{\beta\gamma,\alpha}$ u zavisnosti od generalisanih koordinata. Ulazne veličine odgovarajućeg računarskog programa su parametri koji definišu strukturu, geometriju i inerciona svojstva (masu i njen raspored). Veličine $a_{\alpha\beta}$ i $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ su simetrične u odnosu na indekse α i β što značajno smanjuje obim potrebnih izračunavanja. Pomenimo, na kraju, da ove elementarne činjenice analitičke mehanike nije neophodno dokazivati kako je to u monografiji **Vukobratovića** 1985[7] urađeno pomoću dve teoreme. Zato ćemo ove veličine sračunavati samo za $\alpha \leq \beta$.

Za izračunavanje $a_{\alpha\beta}$ i $\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}}$ koristićemo rezultate **Čovića** 1987.[4,5,6]:

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i=\beta}^{n}\left(m_i\,\{T_{\alpha(i)}^{(\alpha)}\}^{T}\{T_{\beta(i)}^{(\alpha)}\} + (1-t(\alpha))\,(1-t(\beta))\{e_{\alpha}^{(i)}\}^{T}[J_{C_i}^{(i)}]\{e_{\beta}^{(i)}\}\right)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial q^{\alpha}} = g\sum_{i=\alpha}^{n} m_i\,(0\ 0\ 1)\,\{T_{\alpha(i)}^{(0)}\}, \qquad g = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{7}$$

Vektori $\vec{T}_{\alpha(i)}$ mogu se napisati u sledećem obliku:

$$\{T_{\alpha(i)}^{(\alpha)}\} = t(\alpha)\,\{e_{\alpha}^{(\alpha)}\} + (1-t(\alpha))\,[e_{\alpha}^{d(\alpha)}]\,\{R_{\alpha(i)}^{(\alpha)}\} \tag{8}$$

gde je:

$$\{R_{\alpha(i)}^{(\alpha)}\} = [A_{\alpha,i}]\,\{\rho_i^{(i)}\} + \sum_{k=\alpha}^{i}[A_{\alpha,k}]\left(\{\rho_{kk}^{(k)}\} + t(k)\,q^{k}\,\{e_k^{(k)}\}\right) \tag{9}$$

Na osnovu relacija (7), (8) i (9) sledi da je $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(q^s)$, $s=\alpha+1,\dots,n$. To ima za posledicu da u dinamici robota nikada ne postoje sva tri sabirka $\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}$. Odatle sledi antisimetrija Kristofelovih simbola $\Gamma_{ij,k} = -\Gamma_{ik,j}$ za $k>i$ a takođe i $\Gamma_{ij,j} = 0$.

Vodeći računa o simetriji $a_{\alpha\beta}$ i $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ u odnosu na indekse α i β, kao i pomenutoj antisimetriji Kristofelovih simbola ukupan broj veličina $a_{\alpha\beta}$, $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ i $\frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha}$ koje treba izračunati iznosi $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n^2-1)}{3} + n$ umesto $n^2 + n^3 + n$. Ovo je značajna ušteda za veći broj stepena slobode n.

III - PROGRAM ZA *MATHEMATICA*-INTERPRETER

Razvoj savremenih programskih paketa u oblasti simboličkog programiranja omogućava nam da danas na zadovoljavajući način i uz impresivne rezultate rutinski rešavamo probleme koji su, sve do skora, bili praktično nerešivi (npr. simboličko diferenciranje). Programski interpreter *Mathematica* (Volfram 1988.[9]) u tom pogledu zadovoljava i najstrožije zahteve.

Mathematica predstavlja sintezu nekoliko različitih vrsta softvera: interaktivnih numeričkih jezika i sistema (*BASIC*, *MathCAD*, *Matlab*), algebarskih sistema (*Macsyma*, *Reduce*, *Maple*, *SMP*), interpretiranih grafičkih jezika (*PostScript*), programskih jezika za manipulaciju numeričkim i simboličkim listama (*APL*, *LISP*) i struktuiranih programskih jezika (*C* i *Pascal*). *Mathematica* izvodi sve vrste numeričkih izračunavanja sa tačnošću koja je ograničena jedino resursima računara, uz prepoznavanje skoro svih "standardnih" specijalnih funkcija. Najjača strana ovog paketa je, međutim, efektno manipulisanje formulama, simboličkim izrazima, matricama i operatorima. Implementirane funkcije omogućavaju simboličko diferenciranje i integraljenje, razvoj funkcija u red ili njihovo grafičko predstavljanje u dve ili tri dimenzije.

Šire gledano, *Mathematica* je idealan sistem za predstavljanje matematičkog znanja. Snaga ovog programa počiva, pre svega, na lakoći sa kojom se izrazi jedne forme mogu lako transformisati u drugi oblik zadavanjem tzv. "pravila". Iako *Mathematica* poseduje elementaran set algebarskih formula, nema nikakvih ograničenja u zadavanju novih pa i u eventualnom predefinisanju starih. Programi napisani za *Mathematica*-interpreter mogu se izvršavati odmah po unošenju. Verzije paketa *Mathematica* razvijene su za sva popularna operativna okruženja (*DOS*, *Unix*...).

Program prikazan u ovom poglavlju razvijen je na bazi relacija (1)-(9). Ulazne veličine programa su n, $t(i)$, $\{e_l^{(i)}\}$, $\{\rho_l^{(i)}\}$, $\{\rho_{li}^{(i)}\}$, m_i i $[J_{C_i}^{(i)}]$. One se, za svaki robot, zadaju samo jednom jer, naravno, ne zavise od položaja, tj. od q^i. Program izračunava odgovarajuće parametre modela a_{ij}, $\Gamma_{ij,k}$ i $\frac{\partial \Pi}{\partial q^k}$ u analitičkoj formi samo u zavisnosti od generalisanih koordinata q^i. Tako su dobijeni izrazi u kojima su izračunati svi podizrazi koji ne zavise od položaja. Takođe, program daje i analitičku zavisnost $Q_i = Q_i(q^k, \dot{q}^k, \ddot{q}^k)$. Program je prikazan u celini. Napominjemo da su dobijeni izrazi delimično "skraćeni" upotrebom funkcije **Uprosti**. Ova rutina koristi neke standardne postupke za uprošćavanje simboličkih izraza (rutina **Simplify**) ali i neka dodatna pravila vezana za trigonometrijske funkcije, zakon distribucije i slično. Ovakva redukcija broja matematičkih operacija je, naravno, suboptimalna.

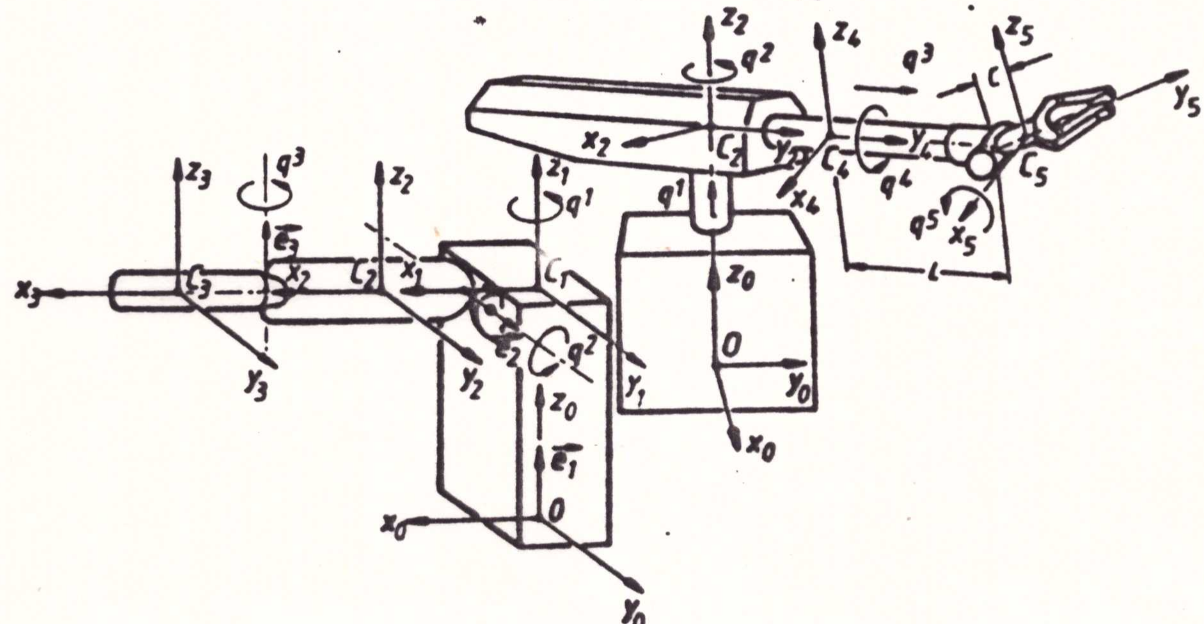
```
(*      PROGRAM ZA SIMBOLICKO FORMIRANJE KOVARIJANTNOG OBLIKA DIFERENCI-      *)
(*      JALNIH JEDNACINA KRETANJA PROSTOG KINEMATSKOG LANCA SA KINEMATSKIM    *)
(*      PAROVIMA PETE KLASE.                                                  *)
(*              Beograd, 1991-92.                                             *)
(*              A.Obradovic, S.Markovic                                       *)
(*      Napisano za MATHEMATICA386-interpreter                                *)

Dual[v_] := {{0,-v[[3]],v[[2]]},{v[[3]],0,-v[[1]]}, {-v[[2]],v[[1]],0}}

Mt[i_,l_,q_,t_,e_] := Transpose[Mt[j,i,q,t,e]] /; i>j
```

```
Mt[i_,j_,q_,t_,e_] := IdentityMatrix[3] /; i==j

Mt[i_,j_,q_,t_,e_] := IdentityMatrix[3]+If[t[[j]]==0,
      (1-Cos[q[j]])Dual[e[[j]]].Dual[e[[j]]]+Sin[q[j]]Dual[e[[j]]],0] /; i+1==j

Mt[i_,j_,q_,t_,e_] := Mt[i,i+1,q,t,e].Mt[i+1,j,q,t,e] /; i+1<j

Rd[i_,j_,q_,t_,e_,ro_,roo_] := t[[i]]q[i]e[[i]]+ro[[i]]+roo[[i]] /; i==j

Rd[i_,j_,q_,t_,e_,ro_,roo_] := t[[i]]q[i]e[[i]]+ro[[i]]+
      Mt[i,i+1,q,t,e].Rd[i+1,j,q,t,e,ro,roo] /; i<j

KvB[i_,j_,q_,t_,e_,ro_,roo_] := If[t[[i]]==1,e[[i]],
      Dual[e[[i]]].Rd[i,j,q,t,e,ro,roo]]

KovMetTen[] := KovMetTen[q,n,t,e,ro,roo,m,ti]

KovMetTen[q_,n_,t_,e_,ro_,roo_,m_,ti_] := Block[
      {i,j,k,a},
      For[j=n,j>=1,j--,
            For[i=j,i>=1,i--,
                  a[i,j]=Sum[
                        m[[k]]KvB[i,k,q,t,e,ro,roo].(Mt[i,j,q,t,e].KvB[j,k,q,t,e,ro,roo])+
                        If[t[[i]]==0 && t[[j]]==0,
                        (Mt[k,i,q,t,e].e[[i]]).ti[[k]].
                        (Mt[k,j,q,t,e].e[[j]]),0],
                        {k,j,n} ];
                  a[i,j]=Uprosti[a[i,j]];
                  a[j,i]=a[i,j];
                  ];
            ];
      Return[Array[a,{n,n}]];
      ]

IzvPotEn[] := IzvPotEn[q,n,t,e,ro,roo,m,g]

IzvPotEn[q_,n_,t_,e_,ro_,roo_,m_,g_] := Block[
      {i,j,dp},
      For[i=1,i<=n,i++,
            dp[i]=Sum[
                  m[[j]] g (Mt[0,i,q,t,e].KvB[i,j,q,t,e,ro,roo])[[3]], {j,i,n}];
            dp[i]=Uprosti[dp[i]];
            ];
      Return[Array[dp,n]];
      ]

Krist1Dif[] := Krist1Dif[q,n,t,e,ro,roo,m,ti]

Krist1Dif[q_,n_,t_,e_,ro_,roo_,m_,ti_] := Block[
      {i,j,k,a,ks},
      a=KovMetTen[q,n,t,e,ro,roo,m,ti];
      For[j=n, j>=1,j--,
            For[i=j,i>=1,i--,
                  For[k=n,k>=1,k--,
                        ks[i,j,k]=(D[a[[j,k]],q[i]]+D[a[[i,k]],q[j]]-D[a[[i,j]],q[k]])/2;
                        ks[i,j,k]=Uprosti[ks[i,j,k]];
                        ks[j,i,k]=ks[i,j,k];
                        ];
                  ];
            ];
      Return[Array[ks,{n,n,n}]];
      ]

QN[i_]:=QN[i,n,a,k,dp]
```

```
QN[i_,n_,a_,k_,dp_]:=Uprosti[
        Sum[a[[i,j]]qdd[j],{j,1,n}]+Sum[k[[j,l,i]]qd[j]qd[l],{j,1,n},{l,1,n}]+dp[[i]]
        ]

Uprosti[e_]:=Block[{eopt=e},
        eopt=Expand[eopt];
        eopt=eopt //. Sin[x_]^2 :> (1-Cos[x]^2);
        eopt=Simplify[Expand[eopt]];
        eopt=Chop[eopt];
        eopt=Map[Zaokruzi,eopt,{-1}];
        eopt=eopt //. (a_. x_ + b_. x_ :> (a+b) x);
        eopt=eopt //. (a_. x_^2 + b_. x_ :> (a x+b) x);
        Return[eopt];
        ];

Zaokruzi[argum_]:=Block[{ },
        If[Not[NumberQ[argum]],Return[argum]];
        If[Abs[Round[argum]-argum]<10^-6,Return[Round[argum]]];
        Return[argum];
        ];

Null
```

IV - SRAČUNAVANJE MATEMATIČKOG MODELA U REALNOM VREMENU

Na slici 2 prikazani su modeli robota na kojima će biti primenjena prethodna razmatranja: antropomorfni robot čije je jednačine kretanja u analitičkoj formi postavio **Vukobratović** 1985.[7] a kasnije i **Čović** 1987.[5] i robot na kome su testirani svi programi iz monografije **Šilena** 1990.[1].



Slika 2: Modeli robota sa 3 i 5 stepena slobode

U tabeli 1 dati su parametri neophodni za proračun kinematike i dinamike robota za prethodna dva primera. Sve veličine u tabeli date su u osnovnim jedinicama *SI*-sistema.

	Antropomorfni robot $n=3$						Robot $n=5$					
i	$t(i)$	$\{e_i^{(i)}\}$	$\{\rho_i^{(i)}\}$	$\{\rho_{ii}^{(i)}\}$	$\{J_{Cii}^{(i)}\}$	m_i	$t(i)$	$\{e_i^{(i)}\}$	$\{\rho_i^{(i)}\}$	$\{\rho_{ii}^{(i)}\}$	$\{J_{Cii}^{(i)}\}$	m_i
		0	0.14	-0.14	-			0	0	0	0	
1	0	0	0	0	-	-	1	0	0	0	0	0
		1	0.5	0	0.16			1	0	0	0	
		0	0.35	-0.175	.00377			0	0	0	90	
2	0	1	0	0	0.0353	2.45	0	0	0	0	10	250
		0	0	0	0.0353			1	0	0	90	
		0	0.36	-0.13	.00031			0	0	0	0	
3	0	0	0	0	.00488	0.723	1	1	0	0	0	0
		1	0	0	.00488			0	0	0	0	
								0	0	0	13	
4							0	1	0.5	-0.5	0.75	150
								0	0	0	13	
								1	0	0	4	
5							0	0	0.05	0	1	100
								0	0	0	4.3	

Tabela 1: Ulazni parametri modela

Na izlazu dobijamo sređene i znatno uprošćene analitičke izraze. Zbog obima rezultata ograničićemo se samo na prikaz parametara dinamičkog modela antropomorfnog robota sa tri stepena slobode (tabela 2) i generalisanih sila za robot sa pet stepeni slobode (tabela 3).

```
a[[1,1]] = 0.2690875 - 0.0428167*Cos[q[3]]^2 + Cos[q[2]]*(0.190904 + 0.0465612*Cos[q[3]] + Cos[q[2]]*(0.19512875 +
        (0.116403 + 0.0428167*Cos[q[3]])*Cos[q[3]]))

a[[1,2]] = (0.0582015 + 0.0428167*Cos[q[3]])*Sin[q[2]]*Sin[ q[3]]

a[[1,3]] = Cos[q[2]]*(0.0431267 + 0.0582015*Cos[q[3]]) + 0.0232806*Cos[q[3]]

a[[2,2]] = 0.19920875 + (0.116403 + 0.0428167*Cos[q[3]])*Cos[q[3]]

a[[2,3]] = 0

a[[3,3]] = 0.0431267

k[[1,1,2]]=(0.095452 + 0.0232806*Cos[q[3]] + Cos[q[2]]*(0.19512875 + (0.116403 +
        0.0428167*Cos[q[3]])*Cos[q[3]]))*Sin[ q[2]]

k[[1,1,3]]=(Cos[q[2]]*(0.0232806 + Cos[q[2]]*(0.0582015 + 0.0428167*Cos[q[3]])) - 0.0428167*Cos[q[3]])*Sin[q[3]]

k[[1,2,3]]=(-0.000155 + (-0.0582015 - 0.0428167*Cos[q[3]])*Cos[q[3]])*Sin[ q[2]]

k[[2,2,1]]=Cos[q[2]]*(0.0582015 + 0.0428167*Cos[q[3]])*Sin[q[3]]

k[[2,2,3]]=(0.0582015 + 0.0428167*Cos[q[3]])*Sin[q[3]]

k[[2,3,1]]=(-0.0429717 + 0.0428167*Cos[q[3]]^2)*Sin[q[2]]

k[[3,3,1]]=(-0.0232806 - 0.0582015*Cos[q[2]])*Sin[q[3]]

k[[3,3,2]]=0
```

```
dp[[1]]=0

dp[[2]]=Cos[q[2]]*(-6.688458 - 1.6313049*Cos[q[3]])

dp[[3]]=1.6313049*Sin[q[2]]* Sin[q[3]]
```

Tabela 2: Metrički tenzor, Kristofelovi simboli prve vrste i izvodi potencijalne energije za robot sa 3 stepena slobode

```
QN[1] = -5*(-981 - 100*qdd[1] + Sin[q[4]]* (2*Cos[q[5]]*qd[4] qd[5] + Sin[q[5]]*qdd[4]) +
        Cos[q[4]]*(Sin[q[5]]*(qd[4]^2 + qd[5]^2) - Cos[q[5]]*qdd[5]))

QN[2] = (Sin[q[5]]*(-7.1*Cos[q[4]]^2*Cos[q [5]] - 10*q[3])*qd[2] + Cos[q[4]]*(-0.7 + Cos[q[5]]*(-5 - 7.1*Cos[q[5]] -
        10*q[3]))*qd[4])*qd[5] + qd[2]*((100 + 10*Cos[q[5]] + 500*q[3])*qd[3] + 6.5*Cos[q[4]]*Sin[q[4]]*qd[4] -
        5*Sin[q[5]]*qd[5]) + (132.25 + Cos[q[4]]^2*(-3.25 + 3.55*Cos[q[5]]^2) + Cos[q[5]]*(5 + 10*q[3]) + q[3]*(100
        + 250*q[3]))*qdd[2] + Cos[q[4]]*Sin[q[5]]*(-2.5 - 3.55*Cos[q[5]] - 5*q[3])*qdd[4] + Sin[q[4]]*(-
        7.1*Cos[q[4]]*Cos[q[5]]^2*qd[2 ]*qd[4] + Sin[q[5]]*((2.5 + 3.55*Cos[q[5]] + 5*q[3])*qd[4]^2 + (2.5 +
        5*q[3])*qd[5]^2 + 5*qdd[3]) + (-4.25 + Cos[q[5]]*(-2.5 - 5*q[3]))*qdd[5])

QN[3] = -5*(Cos[q[5]]*qd[5]^2 + qd[2]*((10 + Cos[q[5]] + 50*q[3])*qd[2] - 2*(Cos[q[4]]*Sin[q[5]]*qd[4] +
        Cos[q[5]]*Sin[q[4]]*qd[5])) - 50*qdd[3] + Sin[q[5]]*(-(Sin[q[4]]*qdd[2]) + qdd[5]))

QN[4] = Cos[q[5]]*(-7.1*Cos[q[4]]*Cos[q[5]]*qd[2] + 7.1*Sin[q[5]]*qd[4])*qd[5] + Sin[q[4]]*(Cos[q[4]]*(-3.25 +
        3.55*Cos[q[5]]^2)*qd[2]^2 + Sin[q[5]]*(-49.05 - 5*qdd[1])) + Cos[q[4]]*(qd[2]*(-10*Sin[q[5]] *qd[3] +
        7.8*qd[5]) + Sin[q[5]]*(-2.5 - 3.55*Cos[q[5]] - 5*q[3])*qdd[2]) + (5.3 - 3.55*Cos[q[5]]^2)*qdd[4]

QN[5] = Cos[q[4]]*(-7.8 + 7.1*Cos[q[5]]^2)*qd[2]*qd[4] + Cos[q[5]]*(Cos[q[4]]*(49.05 +
        3.55*Cos[q[4]]*Sin[q[5]]*qd[2] ^2 + 5*qdd[1]) + Sin[q[4]]*(-10*qd[2]*qd[3] - 2.5*qdd[2])) + Sin[q[4]]*(-4.25 -
        5*Cos[q[5]]*q[3])*qdd[2] + Sin[q[5]]*((5/2 + 5*q[3])*qd[2]^2 - 3.55*Cos[q[5]]*qd[4]^2 - 5*qdd[3]) +
        4.25*qdd[5]
```

Tabela 3: Generalisane sile za robot sa 5 stepena slobode

Primetimo da su gornji izrazi delimično uprošćeni. Prezentirani postupak, međutim, ne garantuje minimalan broj računskih operacija kao ni metod simboličke optimizacije iznesen u radu **Vukobratovića** 1985.[7]. Što se drugog primera tiče, dobijeni rezultati se apsolutno podudaraju sa rezultatima programa *Robotran* (autori **P.Maes**, **J.Cl.Samin** i **P.Y.Willems**), prikazanim u monografiji **Šilena** 1990.[1], strana 263. Rezultati Vukobratovića i grupe autora (**Šilen** 1990.[1], strane 37-59) su, na prvi pogled, superiorni u odnosu na sve ostale. U monografiji se tvrdi da: "*...the computation of driving torques/forces requires only 50 multiplications and 25 additions/subtractions. According to the present literature (...) this seems to be the most efficient code obtained until now*". Po mišljenju autora ovog teksta, međutim, ovo tvrđenje ne počiva na tačnim rezultatima! Evo i obrazloženja:

- Ulazni podaci koji su prikazani na 50-toj strani pomenute monografije ne odgovaraju referentnom problemu jer je za fiktivno telo (telo nulte mase) uzeto telo sa rednim brojem 3 umesto 4. Ovako ustanovljen model daje neodgovarajuće rezultate što se lako uočava iz izraza za npr. $H(4,4)$ (odnosno a_{44}).

- Postupak prikazan na stranicama 51-52 ne predstavlja kompletan algoritam za sračunavanje generalisanih sila. Tačno je jedino da se u njemu koristi ukupno 50+25 aritmetičkih operacija, ali je očigledno da su dobijeni rezultati nepotpuni. Tako se promenljiva *VAR29* nakon izračunavanja ne koristi više ni u jednom izrazu što znači da predstavlja konačan rezultat, dakle, jednu od generalisanih sila. Razvojem promenljive *VAR29* "u nazad" lako se utvrđuje šta ona predstavlja:

$$VAR29 = VAR13 + CONS4 = QDD1 \cdot CONS3 + CONS4 =$$

$$= QDD1(AM5 + AM3 + AM2) + (AM5 \cdot G0 + AM3 \cdot G0 + AM2 \cdot G0) \qquad (10)$$

Izraz (10) ne predstavlja nijednu generalisanu silu što se može videti poređenjem sa rezultatima prikazanim u ovom radu i rezultatima programa *Robotran* (Šilen 1990.[1], strana 263), u kojima su jedino indeksi 1 i 2, 3 i 4 permutovani u odnosu na oznake u ovom radu. Očigledno je da izraz (10) obuhvata samo manji broj članova u regularnom izrazu za generalisanu silu Q_1. Da bi se ona izračunala potreban je daleko veći broj računskih operacija!

Autori ovoga teksta su posebnu pažnju posvetili ispitivanju mogućnosti upotrebe dobijenih rezultata za upravljanje robotom u realnom vremenu. Merenjem je utvrđeno da se svi parametri dinamičkog modela robota mogu na bazi prethodno dobijenih analitičkih izraza sračunati za oko 1400 μs na 25MHz 80386/7 baziranom računaru, odnosno, za oko 300 μs na 33MHz 80486 mašini, što je dovoljno brzo za potrebe upravljanja u realnom vremenu. Prema subjektivnom mišljenju autora ovog rada daleko veće rezultate u skraćivanju vremena izračunavanja daje primena novih generacija personalnih računara nego što je to slučaj sa simboličkom optimizacijom analitičkih izaraza.

V - ZAKLJUČAK

Analitičke jednačine kretanja mogu se, u principu, dobiti u čisto simboličkom ili numeričko-simboličkom obliku. Program prikazan u ovom radu pokriva obe forme jednačina kretanja jer će svi parametri koji imaju zadatu numeričku vrednost biti uzeti u proračun brojkom a oni čije brojne vrednosti nisu zadate preko odgovarajućeg simbola. Program se može dalje poboljšati optimizacijom dobijenih analitičkih izraza u pogledu broja upotrebljenih aritmetičkih operacija. Ističemo da su dobijeni izrazi već "u priličnoj meri" optimalni i da se dalja optimizacija može postići samo uočavanjem podizraza koji se kao istovetni pojavljuju u više različitih izraza. No, to nije bio predmet ovoga rada. Njegova osnovna svrha bila je da pokaže kako se jednim veoma kratkim i moćnim programom mogu efikasno izračunati svi relevantni parametri robotskog modela i kako se dobijeni rezultati mogu upotrebiti za upravljanje u realnom vremenu.

VI - LITERATURA

1. Schiehlen W. (Editor), "MULTIBODY SYSTEMS HANDBOOK", Springer-Verlag, Berlin, 1990.
2. Popov E. P., Vereščagin A.F., Zenkevič S.L., "MANIPULACIONI ROBOTI", Nauka, Moskva, 1978.
3. Wittenburg J., "DYNAMICS OF SYSTEMS OF RIGID BODIES", B.G. Teubner, Stutgart, 1977.
4. Čović V., Lukačević M., "CONTRIBUTION OF THE DYNAMICS OF ACTIVE MECHANISMS", ZAMM 67, (1987.), 4.
5. Čović V., Rusov S., "ON A MECHANICAL MODEL OF INDUSTRIAL ROBOTS AS THE SIMPLEST SYSTEM OF RIGID BODIES" I-III, Proc. II International Seminar and Symposium "Automation and Robots", Beograd, 1987.
6. Čović V., "CLASSICAL MECHANICS IN THE MONOGRAPH »REAL-TIME DYNAMICS OF MANIPULATION ROBOTS«", Proc. II International Seminar and Symposium "Automation and Robots", Beograd, 1987.
7. Vukobratović M., Kirćanski M., "REAL-TIME DYNAMICS OF MANIPULATION ROBOTS", Springer-Verlag, Berlin, 1985.
8. Potkonjak V., "ROBOTIKA", Naučna knjiga, Beograd, 1987.
9. Wolfram S., "MATHEMATICA: A SYSTEM FOR DOING MATHEMATICS BY COMPUTER", Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, California, 1988.
10. Anđelić T., "TENZORSKI RAČUN", Naučna knjiga, Beograd, 1987.

SUMMARY

AUTOMATED SETTING OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MOTION IN ANALYTICAL FORM FOR A ROBOT SYSTEM WITH REAL-TIME MODEL EVALUATION

Saša Marković, Aleksandar Obradović
Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade

A short method for setting of differential equations of motion in analytical form for a robot system has been considered in this paper. Also, a general computer program written for *Mathematica*-software package has been presented and tested for two different manipulators. It is also shown that all model parameters can be calculated in acceptable time intervals by means of personal computer.