Izračunavanje optimalnih upravljanja sa singularnim delovima za sisteme krutih tela

Mr *ALEKSANDAR OBRADOVIĆ*, prof. dr *NIKOLA MLADENOVIĆ*, Mašinski fakultet, Beograd

Originalni naučni rad
UDC:531.133:62.001.26-51/-52=861

Razmatra se problem izračunavanja po delovima singularnih upravljanja sistema krutih tela. Na osnovu uslova principa maksimuma, Kelijevih uslova i uslova sprezanja izvršena je analiza strukture optimalnih upravljanja. Pri numeričkom rešavanju dvotačkastog graničnog problema principa maksimuma, umesto nepoznatih početnih vrednosti spregnutog vektora, jednostavnije se određuju vremena prekida upravljanja. Rešen je do konačnog rešenja primer minimizacije vremena upravljanog kretanja sistema sa dva stepena slobode i ograničenim upravljanjima.

1. UVOD

Primena savremene matematičke teorije optimalnog upravljanja [1,2] na konkretne mehaničke sisteme ograničena je teškoćama vezanim za izračunavanje optimalnih upravljanja. Naime, rešavanje dvotačkastog graničnog problema principa maksimuma danas nema opšti algoritam i odgovarajuće programe. Primena postojećih programa (npr. [3]) nije uvek uspešna, prvenstveno usled numeričke nestabilnosti [4]. Neki od važnijih problema iz upravljanja telom promenljive mase rešeni su tek poslednjih godina [5].

Pri izračunavanju programskih optimalnih upravljanja za sisteme krutih tela, kada su upravljanja nepotencijalne generalisane sile ograničenih koordinata, javljaju se problemi posebne vrste. Oni se sastoje u tome što su upravljanja u toku vremena delom na granici oblasti dopustivih upravljanja a delom unutarnje, i to najčešće singularna [6].

Autori rada [7] prevazišli su problem numeričke nestabilnosti određivanjem trenutaka dolaska i silaska sa singularne hiperpovrši tačke u faznom prostoru umesto nepoznatih početnih vrednosti koordinata spregnutog vektora [2]. To će biti učinjeno i u ovom radu.

Pitanje izračunavanja singularnih upravljanja za robotske sisteme prvi put su postavili autori rada [8]. Međutim, kako je pokazano u [9], njihovo rešenje nije optimalno usled nezadovoljenja odgovarajućih potrebnih uslova optimalnosti. Kao što se može videti iz preglednog rada [10], do tada niko nije uspeo do konačnog rešenja izračunati optimalna upravljanja sa singularnim delovima. Osim toga, može se uočiti da su teškoće računske prirode dovele do odustajanja od optimalnih i određivanja odgovarajućih suboptimalnih upravljanja.

Autor ovoga rada u radu [11] uspeo je za manipulator istog tipa kao i u [8] izračunati optimalna upravljanja sa singularnim delovima. Nastavak istraživanja u radu [12] sastojao se u ispitivanju mogućnosti postojanja singularnih upravljanja za sisteme tela sa cikličnom koordinatom. Data su i fizička tumačenja singularnih upravljanja.

U ovome radu rešava se problem izračunavanja optimalnih upravljanja jednog složenijeg sistema krutih tela [13] u odnosu na [11].

2. POSTAVKA ZADATKA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Razmotrimo zadatak optimalnog upravljanja kretanjem sistema krutih tela:

$$\dot{q}^i = a^{ij} p_j \qquad A_j \le u_j \le B_j$$

$$\dot{p}_j = \frac{1}{2}\frac{\partial a^{ik}}{\partial q^j} p_i p_k - \frac{\partial \Pi}{\partial q^j} + u_j \qquad \int_{t_o}^{t_1} f^o(q^i, p_j)\, dt \to inf$$

Adresa autora: Aleksandar Obradović, Mašinski fakultet, Beograd, 27. marta 80

Rad primljen: 14. 03. 1995.

$$t_o = 0, \quad q^i(t_o) = q^{io}, \quad p_j(t_o) = p_{jo}$$

$$i, j = 1, ..., n$$

$$t_1 = ?, \quad q^i(t_1) = q^{i1}, \quad p_j(t_1) = p_{j1} \qquad (1)$$

gde su: q_i, $i=1,..., n$, generalisane koordinate, a^{ij}, $i=1,...,n$, j=1,...,n, kontravarijantni metrički tenzor, p_j, j=1,...,n, generalisani impulsi, $\prod$ potencijalna energija, n broj stepena slobode, u_j, $j=1,...,n$, nepotencijalne generalisane sile (upravljanja) a konstante A_j i B_j, $j=1,..., n$, određuju oblast dopustivih upravljanja.

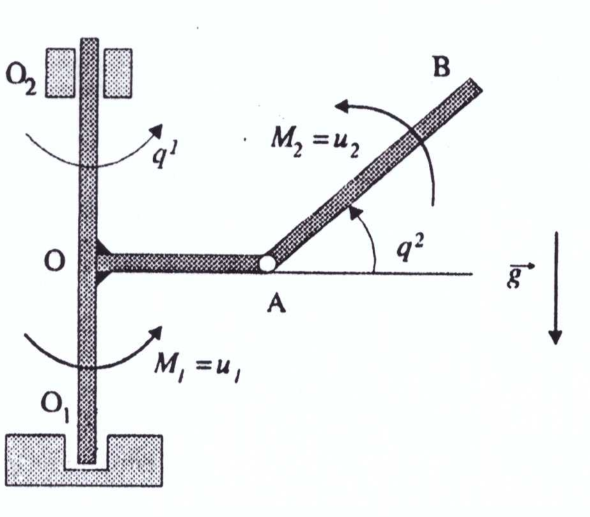
Rešavajući zadatak (1) primenom Pontrjaginovog principa [2] dobijamo nesingularna rešenja:

$$u_j = \begin{cases} A_j, \dfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial u_j} < 0 \\ B_j, \dfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial u_j} > 0 \end{cases} \qquad j = 1, ... n \quad (2)$$

gde je $\mathcal{K}$ Pontrjaginova funkcija [2]. Osim rešenja (2) postoje po jednoj ili više koordinata u_k i singularna rešenja, duž kojih je:

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u_k} = 0 \qquad (3)$$

Nešto više teško se uopšteno može reći o broju singularnih upravljanja (3). Autor je u [12] pokušao da, za sasvim usku klasu sistema tela, ukaže na (ne) mogućnost postojanja i fizičko tumačenje singularnih upravljanja. Više rezultata može se naći u disertaciji [13], a na osnovu njih, u daljem tekstu, rešiće se problem izračunavanja programskog optimalnog upravljanja na primeru sistema tela sa dva stepena slobode u zadatku minimizacije vremena.



Sl. 1

Sistem čine homogeni štapovi OA i AB jednakih masa m i dužina L i $2L$ (sl. 1)

Zadatak optimalnog upravljanja (1) prelazi u [13]:

$$\dot{q}^1 = \frac{3}{2\,mL^2\,(3 + 3\cos q^2 + \cos\,(2\,q^2))}\,p_1$$

$$m = 1\ kg,\ L = 1\ m$$

$$\dot{q}^2 = \frac{3}{4\,m\,L^2}\,p_2 \qquad \dot{p}_1 = u_1$$

$$\dot{p}_2 = u_2 - mgL\cos q^2 +$$

$$+ \frac{3}{4m\,L^2}\,\frac{-3\sin q^2 - 2\sin 2q^2}{(3 + 3\cos q^2 + \cos 2\,q^2)^2}\,p_1^2$$

$$|u_j| \le 2mg\,L, \quad j = 1{,}2 \qquad \int_{t_o}^{t_1} 1 \cdot dt \to inf$$

$$t_o = 0, \quad q^i(t_o) = 0, \quad p_i(t_o) = 0 \qquad i = 1{,}2$$

$$t_1 = ?,\ q^1(t_1) = \frac{\pi}{9} = 20^o,\ q^2(t_1) = \frac{\pi}{2} = 90^o,$$

$$p_i(t_1) = 0 \qquad i = 1{,}2 \qquad (4)$$

čije se rešavanje sastoji u određivanju spregova ograničenih momenata koji za minimalno vreme prevode sistem između dva zadata stanja.

3. ANALIZA REŠENJA

U cilju rešenja zadatka (4), napišimo Pontrjaginovu funkciju:

$$\mathcal{K} = \lambda_o + \lambda_1 \frac{3}{2\,m\,L^2\,(3 + 3\cos q^2 + \cos\,(2\,q^2))}\,p_1 +$$

$$+ \lambda_2 \frac{3}{4m\,L^2}\,p_2 + v^1 u_1 + v^2$$

$$\left[u_2 - mgL\cos q^2 + \frac{3}{4mL^2}\,\frac{-3\sin q^2 - 2\sin 2q^2}{(3+3\cos q^2 + \cos 2q^2)^2}\,p_1^2\right] \quad (5)$$

i spregnuti sistem diferencijalnih jednačina:

$$\dot{\lambda}_1 = 0$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{3\lambda_1 p_1}{2mL^2}\,\frac{-3\sin q^2 - 2\sin 2q^2}{(3 + 3\cos q^2 + \cos 2q^2)^2} -$$

$$- v^2 mgL\sin q^2 - \frac{3v^2 p_1^2}{4mL^2}$$

$$\left[\frac{-3\cos q^2 - 4\cos 2q^2}{(3 + 3\cos q^2 + \cos 2q^2)^2} - \frac{2(-3\sin q^2 - 2\sin 2q^2)}{(3 + 3\cos q^2 + \cos 2q^2)^3}\right]$$

$$\dot{v}^1 = -\frac{3\lambda_1}{2mL^2}\frac{1}{(3 + 3\cos q^2 + \cos 2q^2)} +$$

$$+\frac{3v^2 p_1}{2mL^2}\frac{3\sin q^2 + 2\sin 2q^2}{(3 + 3\cos q^2 + \cos 2q^2)^2}$$

$$\dot{v}^2 = -\frac{3\lambda_2}{4mL^2} \tag{6}$$

Nesingularna rešenja imaju oblik:

$$u_i = 2mgL\,sign\,(v^i) \qquad i = 1,2 \tag{7}$$

Singularno upravljanje u_2 dobija se iz uslova:

$$v^2 = \dot{v}^2 = \ddot{v}^2 = 0 \tag{8}$$

i ono odgovara konstantnoj vrednosti neciklične koordinate q^2, određenoj izrazom:

$$\cos q^2 = -\frac{3}{4} \tag{9}$$

što ima fizičko tumačenje u minimalnom momentu inercije sistema za osu prve rotacije.

Pri računavanju singularnog upravljanja u_1 koristimo uslove:

$$v^1 = \dot{v}^1 = \ddot{v}^1 = 0 \tag{10}$$

i, uz pretpostavku $p_1 = 0$, dobijamo njegovu vrednost $u_1 = 0$.

Kelijev potreban uslov optimalnosti glasi [14]:

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u_1} = \frac{3}{2mL^2}\frac{3\sin q^2 + 2\sin 2q^2}{(3 + 3\cos q^2 + \cos 2q^2)^2}v^2 \geq 0 \tag{11}$$

a u zadatku (4) svodi se na uslov:

$$v^2 \geq 0 \tag{12}$$

Na osnovu (7) i (12) sledi da singularno upravljanje $u_1 = 0$ može biti istovremeno samo sa $u_2 = 2\,mgL$, što takođe ima fizičko tumačenje u nepoželjnom "dejstvu" odgovarajuće inercijalne sile.

Singularno upravljanje u_2 je drugog reda i ne može se sprezati u sklopu optimalne trajektorije sa, po delovima neprekidnim, upravljanjem u_2 na nesingularnom delu, jer ne zadovoljava uslove sprezanja [15]. Nasuprot njemu, singularno upravljanje $u_1=0$, na osnovu (7) i (11), zadovoljava potrebne uslove sprezanja [15] ukoliko je u trenutku sprezanja ispunjeno (12), odnosno $u_2 = 2\,mgL$.

Mogućnost singularnih upravljanja po obe koordinate u_1 i u_2 otpada, jer tada, na osnovu (5), (6), (8), (10) i uslova $\mathcal{K} = 0$ imamo neprihvatljiv slučaj nultog spregnutog vektora.

Na osnovu prethodne analize može se predložiti sledeća struktura optimalnih upravljanja:

$$u_1 = \begin{cases} 0, & t \in [\,0, t') \\ 2mgL, & t \in [\,t', t''') \\ -2mgL, & t \in [\,t''', t_1] \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} 2mgL, & t \in [\,0, t'') \\ -2mgL, & t \in [\,t'', t_1] \end{cases}$$

$$0 < t' < t'' < t''' < t_1 \tag{13}$$

4. NUMERIČKO REŠENJE

Pri numeričkom rešavanju neophodno je prethodno odrediti četiri nepoznata trenutka (13) koja obezbeđuju da se integracijom jednačina kretanja (4) zadovolje četiri krajnja uslova za fazne promenljive. Pri tome se mogu iskoristiti i odgovarajući integrali sistema (4), uzimajući u obzir (13):

$$p_1(t_1) - p_1(t_o) = \int_0^t u_1\,dt$$

$$T(t_1) - T(t_o) = -mgL + \int_0^{\frac{\pi}{9}} u_1 dq^1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_2 dq^2 \tag{14}$$

odnosno:

$$q^1(t''') = \frac{1}{4} + \frac{11\pi}{36} - q^2(t''), \quad t_1 = 2t''' - t' \tag{15}$$

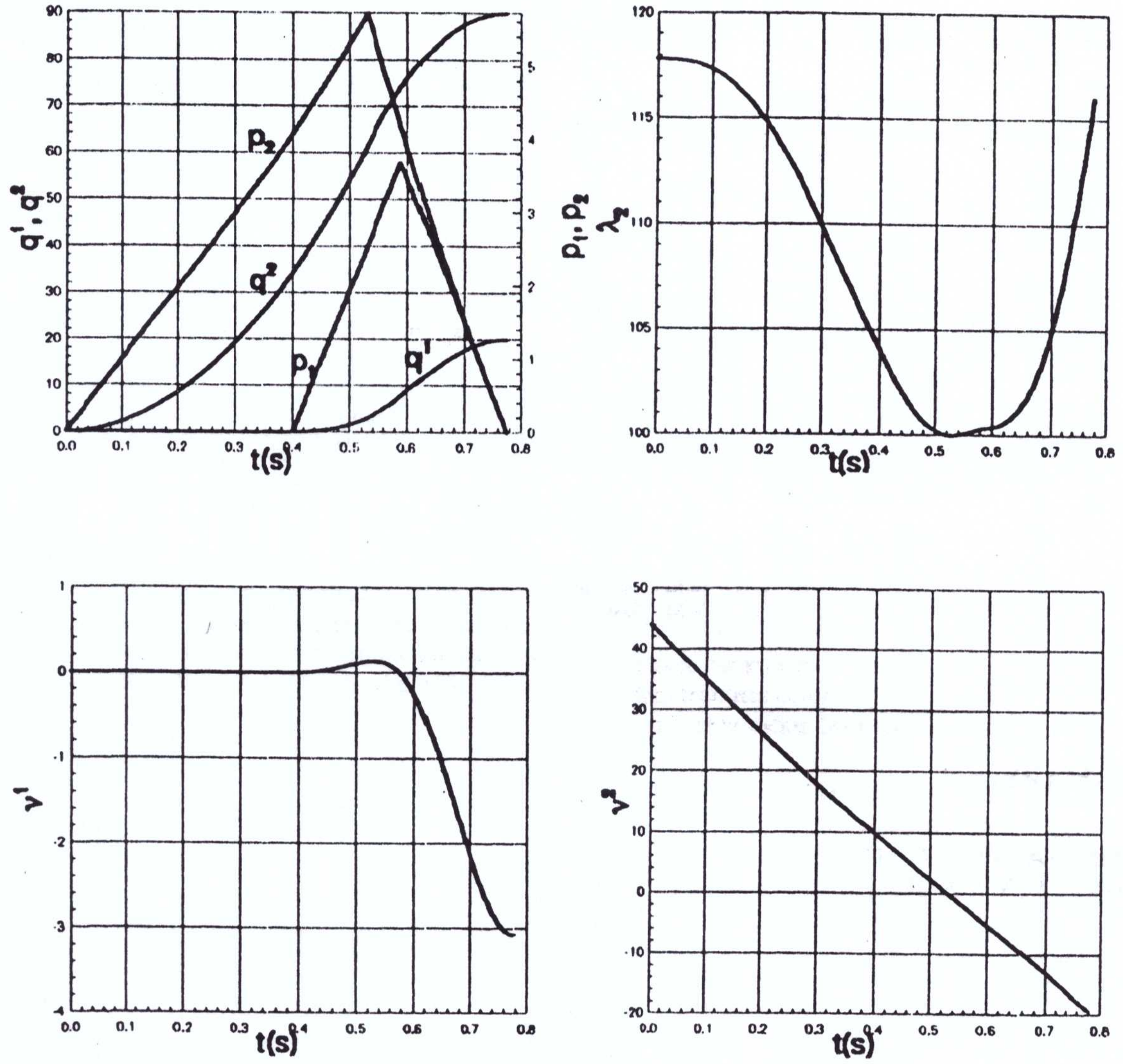
Tačke prekida upravljanja su:

$$t' = 0{,}401953\,[s],\ t'' = 0{,}531459\,[s],$$

$$t''' = 0{,}589703\,[s],\ t_1 = 0{,}777454\,[s] \tag{16}$$

a njihovo određivanje znatno je jednostavnije od određivanja nepoznatih početnih vrednosti spregnutih promenljivih, što su prvi uočili autori rada [7].

U cilju provere uslova Pontrjaginovog principa neophodno je integraliti spregnuti sistem (6). Prethodno se osnovni sistem (4), uz uslov (13), integrali u intervalu [0,t"]. Zatim se, uz uslove $v^2(t'') = \lambda_1(t'') = 0$ i $\lambda^2(t'') = 100$ (proizvoljna vrednost, usled homogenosti sistema (6)), osnovni sistem (4) i odgovarajuće jednačine spregnutog sistema (6) u istom intervalu integrale "unazad". Najzad, uz uslov $v^1(0)=0$, integrale se osnovni (4) i spregnuti sistem (6) na celom intervalu upravljanog kretanja. Na slici 2 dati su dijagrami faznih



Sl. 2

i spregnutih promenljivih. Numerički proračun izveden je Runge-Kuta-Vernera metodom petog i šestog reda sa tolerancijom relativne greške 10^{-6}.

Analizom rezultata uočava se da je:

$$v^1\begin{cases} =0, & t\in[\,0,t') \\ >0, & t\in[\,tprime,t''') \\ <0 & t\in[\,t''',t_1] \end{cases}$$

$$v^2\begin{cases} >0, & t\in[\,t',t'') \\ <0, & t\in[\,t'',t_1] \end{cases} \tag{17}$$

što, uzimajući u obzir (13), u potpunosti odgovara uslovima Pontrjaginovog principa (7). Osim toga, uz uslov K = *0* koji proističe iz neodređenog trenutka t_1, može se izračunati i:

$$\lambda_o = -\,mgLv^2(0) < 0 \tag{18}$$

pa su tako ispunjeni i svi uslovi principa maksimuma.

Može se uočiti da je, u cilju izračunavanja po delovima sisngularnih upravljanja za sisteme krutih tela, neophodno bilo proveriti kao dopunu uslovima principa maksimuma i druge potrebne uslove, Kelijeve i uslove sprezanja. Složenost problematike je takva, po rečima autora rada [5], da je svaki uspešno rešeni dvotačkasti granični problem principa maksimuma vredan pažnje.

LITERATURA

[1] Bryson, A.E., Ho, Y.C., **Applied Optimal Control**, Ginn and Company, Waltham, 1969.

[2] Понтрягин, Л.С., Болтянский, В.Г., Гамкрелидзе, Р.В., Мищенко, Е.Ф., **Математическая теория оптимальных процессов**, Наука, Москва, 1983.

[3] Pereyga, V., PASVA3: **Anadaptive Finite Difference FORTRAN Programfor First Order Non - Linear Ordinary Boundari Problems**, Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, Berlin, 1978.

[4] Федоренко, Р.П., **Приближенное решение задач оптимального управления**, Наука, Москва, 1978.

[5] Григорьев, К.Г., Заплетин, М.П., **Численное решение краевых задач принципа максимума в оптимизационных задачах динамики космического полета**, Известия РАН Техническая кибернетика, Н° 1, 1993.

[6] Габасов, Р., Кириллова, Ф.М., **Особые оптимальные управления**, Наука, Москва, 1973.

[7] Злацкий, В.Т., Кифоренко, Б.Н., **Оптимальные траектории с сингулярными дугами**, Автоматика и телемеханика, Н° 12, 1974.

[8] Geering, H.P., Guzzella, L., Hepner, S.A.R., Onder, C.H., **Time Optimal Motions of Robots in Assembly Tasks**, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-31, No6, 1986.

[9] Осипов, С.И., Формальский, А.М., **Задача о быстрейшем повороте манипулятора**, ПММ, Том 52, вып. 6, 1988.

[10] Болотник, Н.Н., Черноусько, Ф.Л., **Оптимизация управления манипуляционными роботами**, Изв. АН СССР Техническая кибернетика, Н° 1, 1990.

[11] Obradović, A., **Optimal Control of a Rigid Body System in a Complex Case**, Teorijska i primenjena mehanika 17, 1991.

[12] Obradović, A., Vuković, J., **Minimization of the Control Time of Motion in Mechanical Systems Having a Cyclical Integral in an Uncontrolled Motion, Facta Universitatis**, Series Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol. 1, N° 2, 1992.

[13] Obradović, A., **Singularna optimalna upravljanja mehaničkih sistema, doktorska disertacija**, Mašinski fakultet, Beograd, 1994.

[14] Kelley, H.J., Kopp, R.E., Moyer, H.G., **Singular Extremals, in Topics in Optimization (ed by. Leitmann, G.)**, Academic Press, New York, 1967.

[15] Mc Danell, J.P., Powers, W.F., **Necessary Conditions for Joining Optimal Singular and Nonsingular Subarcs**, SIAMJ. Control, Vol. 9, No2, 1971.

SUMMARY

COMPUTATION OF OPTIMAL PARTIALLY SINGULAR CONTROL
FOR SYSTEMS OF RIGID BODIES

This paper presents computation of optimal partially singular control for systems of rigid bodies. On the basis of maximum principle, Kelley's conditions and joining conditions analyses of structure of optimal controls has been done. During the numerical solving of two point boundary value problem of maximum principle, instead unknown initial value of costate vector switching times of controls has been determined. Example of minimization of the time of motion in system with two degrees of freedom and limited controls has been solved.