ЈДМ YUSM

ЈУГОСЛОВЕНСКО ДРУШТВО ЗА МЕХАНИКУ 11000 - БЕОГРАД
Кнеза Милоша 9/1; Тел.: (+381 11) 342 273
YUGOSLAV SOCIETY OF MECHANICS, 11000 - BELGRADE
Kneza Miloša 9/1; Tel.: (+381 11) 342 273

ЈДМ YUSM

ЈУМЕХ '97 XXII ЈУГОСЛОВЕНСКИ КОНГРЕС ТЕОРИЈСКЕ И ПРИМЕЊЕНЕ МЕХАНИКЕ, ВРЊАЧКА БАЊА, 2 - 7 ЈУН 1997.

YUCTAM'97 XXII YUGOSLAV CONGRESS OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, JUNE 2-7, 1997, VRNJAČKA BANJA A.c.15.

OPTIMIZACIJA PROMENE MASE UPRAVLJANOG MEHANIČKOG SISTEMA

Josif Vuković, Aleksandar Obradović
Mašinski fakultet Beograd, ul. 27. marta 80, 11000 Beograd

OPTIMIZATION OF MASS VARIATION OF CONTROLLED MECHANICAL SYSTEM

Josif Vuković, Aleksandar Obradović
Faculty of mechanical enginering Belgrade, ul. 27. marta 80, 11000 Belgrade

ABSTRACT

A material points system of variable mass forced upon potential and nonpotential forces has been considered in this paper. Contorl vector includes velocites of mass variation. Problem has been postulated in general form of control approach. Method of solution is based on the maximum principle and simgular controls theory.

1. UVOD

Stanje mehaničkog sistema promenljive mase u proizvoljnom trenutku, osim položaja i brzina, karakterišu i mase sistema koje se menjaju usled odvajanja ili pripajanja materijalnih čestica. Odgovarajuće reaktivne sile koje se pri tome javljaju, zavise od promene mase i relativnih brzina čestica. Ove veličine predstavljaju upravljačke funkcije za željeno ponašanje sistema ukoliko postoji mogućnost njihovog izbora sa nekih datih skupova. Rešavanje ovakvih problema uz određene uslove optimalnosti zahteva, zbog složenosti, kombinaciju analitičkih i numeričkih metoda. Kao karakteristični primer može da posluži uspešno rešen zadatak "mekog" spuštanja satelita sa poznate orbite u datu tačku na mesečevoj površi uz minimalnu potrošnju goriva [1]. Metod rešavanja ovog zadatka zasnovan je na Pontrjaginovom principu maksimuma [2], [3], [4] sa odgovarajućom numeričkom podrškom. Princip maksimuma će u ovom radu predstavljati osnovno polazište za razmatranje problema optimalnog upravljanja kretanjem sistema promenljive mase u opštem slučaju, uz sledeća ograničenja: sistem je skleronoman, mase sistema menjaju se usled odvajanja čestica relativnim brzinama konstantnih intenziteta a, kao kriterijum optimalnosti, postavlja se uslov minimalnosti ukupne promene mase do završetka procesa upravljanja.

2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA UPRAVLJANOG MEHANIČKOG SISTEMA

Neka se razmatrani mehanički sistem sastoji od N tačaka masa m_i $(i=1,2,\dots,N)$, među kojima je s tačaka promenljive mase $m_k(t)$ $(k=1,2,\dots,s\leq N)$. Stanje takvog sistema određuju veličine:

$$t,\ q^\alpha,\ p_\alpha,\ m_k \qquad (\alpha=1,2,\dots,n) \tag{1}$$

gde su: q^α– generalisane koordinate, p_α– generalisani impulsi, a n–broj stepeni slobode sistema.

Dalja razmatranja biće ograničena na skleronomne sisteme tako da kinetička i potencijalna energija imaju oblike:

$$T = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \ ^{1)}, \qquad V = V(m,q), \tag{2}$$

gde je $a^{\alpha\beta}(q,m)$ kontravarijantni matrični tenzor odgovarajućeg konfiguracionog prostora. Uz ograničenje da se mase sistema menjaju samo usled odvajanja čestica ($\dot m_k \leq 0$), diferencijalne jednačine kretanja takvog sistema su:

$$\dot q^\alpha = \frac{\partial T}{\partial p_\alpha}, \quad \dot p_\alpha = -\frac{\partial}{\partial q^\alpha}(T+V) + Q_\alpha + \Phi_\alpha, \quad \dot m_k = -u_k \quad (k \geq 0). \tag{3}$$

U ovim jednačinama veličine:

$$Q_\alpha = Q_\alpha(m,q,p,w), \qquad \Phi_\alpha = -u_k(\vec v_k + \vec v_k')\frac{\partial \vec r_k}{\partial q^\alpha} \tag{4}$$

predstavljaju generalisane nekonzervativne sile i generalisane reaktivne sile [5], gde su: w – vektorska upravljačka funkcija, $\vec r_k$ – vektor položaja k–te tačke promenljive mase, $\vec v_k$ – njena apsolutna brzina, a $\vec v_k'$ – relativna brzina čestica koje se od nje odvajaju. U daljem postupku smatraće se da su sve relativne brzine konstantnih intenziteta c_k, tako da je, uvođenjem nepokretnog Dekartovog koordinatnog sistema,

$$\vec v_k' = c_{(k)} \alpha_{(k)\mu} \vec e_\mu \ ^{2)}, \quad c_k = |\vec v_k'|, \quad \sum_{\mu=1}^{3} \alpha_{k\mu}^2 = 1, \tag{5}$$

gde veličine $\alpha_{k\mu}$ predstavljaju kosinuse uglova između relativni brzina $\vec v_k'$ i osa Dekartovog sistema čiji su jedinični vektori $\vec e_\mu$ $(\mu=1,2,3)$.

S obzirom na (5) i na transformacije:

$$\vec v_{(k)} \frac{\partial \vec r_{(k)}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \vec r_k}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \vec r_k}{\partial q^\beta}\dot q^\beta = \frac{\partial}{\partial m_k}\left(m_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q^\beta}\right)\dot q^\beta = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial m_k}\frac{\partial T}{\partial p_\beta} \tag{6}$$

reaktivne generalisane sile dobijaju oblik

$$\Phi_\alpha = -u_k\left(g_{\alpha\beta}^k \frac{\partial T}{\partial p_\beta} + c_{k\mu}\alpha_{k\mu}\frac{\partial x_{k\mu}}{\partial q^\alpha}\right), \qquad \left(g_{\alpha\beta}^k = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial m_k}\right). \tag{7}$$

Na taj način u jednačine (3) preko generalisanih sila ulaze veličine w, u, α – vektorske funkcije upravljanja. Smatraće se, u opštem slučaju, da je njihov izbor ograničen nekim datim skupovima, tj.

$$w \in U_w, \quad u \in U_u, \quad \alpha \in U_\alpha. \tag{8}$$

---

1) U radu je primenjeno pravilo sabiranje po ponovljenim indeksima.

2) Stavljanjem ponovljenih indeksa u zagrade isključena je operacija sabiranja po njima.

3. OPŠTI ZADATAK OPTIMALNOG UPRAVLJANJA. PRINCIP MAKSIMUMA.

Postavlja se zadatak da se među dopustivim upravljanjima (8) odrede takve (w^*, u^*, α^*) koje će sistem, opisan jednačinama (3), dovesti iz početnog stanja S_0 u krajnje stanje S_1, uz uslov minimalnosti funkcionala

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(q,p,m,w,u,\alpha)dt\,. \tag{9}$$

Neka su početno i krajnje stanje sistema na mnogostrukostima

$$S_0:\quad A_\sigma(q(t_0), p(t_0), m(t_0))=0;\qquad S_1:\quad B_\rho(q(t_1), p(t_1), m(t_1))=0 \tag{10}$$

$$\sigma=1, 2, ..., a\leq 2n+s \qquad \rho=1, 2, ..., b\leq 2n+s$$

sa nezavisnim gradijentima u $2n+s$ – dimenzionom prostoru veličina q^α, p_α, m_k.

Prema principu maksimuma [1], metod za rešavanje ovako postavljenog zadatka zasniva se na osobinama Pontrjaginove funkcije koja, formirana na osnovu (3), (5) i (9), ima oblik

$$H = \lambda_0 f(q,p,m,w,u,\alpha) + \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \psi^\alpha\left(-\frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha + \Phi_\alpha\right) + \varphi^k(-u_k) + \eta^k\left(\sum_{\mu=1}^{3}\alpha_{k\mu}^2 - \delta_k\right) \tag{11}$$

(zbog pravila o sabiranju je uveden simbol $\delta_k \equiv 1$ ($k=1, 2, ..., s$)).

Veličine λ_α, ψ^α, φ^k u funkciji (11), zajedno sa veličinama q^α, p_α, m_k predstavljaju rešenja sistema kanonskih jednačina:

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial \lambda_\alpha},\quad \dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \psi^\alpha},\quad \dot{m}_k = \frac{\partial H}{\partial \varphi_k},\quad \dot{\lambda}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha},\quad \dot{\psi}^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\quad \dot{\varphi}^k = -\frac{\partial H}{\partial m_k},\quad \lambda_0 = const \leq 0 \tag{12}$$

Pontrjaginova funkcija na optimalnoj trajektoriji ispunjava uslov

$$(H)_{w,u,\alpha} \leq (H)_{w^*,u^*,\alpha^*} = h \tag{13}$$

pri čemu je $h=0$ za autonomne sisteme i ako interval $[t_0, t_1]$ nije unapred određen.

Na osnovu uslova (13) određuje se struktura optimalnih upravljanja:

$$w^* = w^*(q,p,m,\lambda,\psi,\varphi);\qquad u^* = u^*(q,p,m,\lambda,\psi,\varphi);\qquad \alpha^* = \alpha^*(q,p,m,\lambda,\psi,\varphi); \tag{14}$$

Uslovi (10) dopunjeni su sa $4n+2s-(a+b)$ uslova transverzalnosti:

$$\left(\lambda_\alpha\delta q^\alpha + \psi^\alpha\delta p_\alpha + \varphi^k\delta m_k\right)_{t0} = 0,\qquad \left(\lambda_\alpha\delta q^\alpha + \psi^\alpha\delta p_\alpha + \varphi^k\delta m_k\right)_{t1} = 0. \tag{15}$$

gde nezavisne veličine δq^α, δp_α, δm_k određujemo iz uslova

$$\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial q^\alpha}\partial q^\alpha + \frac{\partial A_\sigma}{\partial p_\alpha}\partial p_\alpha + \frac{\partial A_\sigma}{\partial m_k}\partial m_k\right)_{t0} = 0,\qquad \left(\frac{\partial B_\rho}{\partial q^\alpha}\partial q^\alpha + \frac{\partial B_\rho}{\partial p_\alpha}\partial p_\alpha + \frac{\partial B_\rho}{\partial m_k}\partial m_k\right)_{t1} = 0. \tag{16}$$

Na taj način dobija se dovoljan broj uslova za konačno rešenje problema.

Optimalna upravljanja (14) su, u opštem slučaju, neke prekidne funkcije i njihovu strukturu (broj prekida i tačke prekida) moguće je utvrditi samo u najjednostavnijim slučajevima zbog čega je integracija jednačina (12) praktično nemoguća.

4. MINIMALNA PROMENA MASE UPRAVLJANOG SISTEMA

Postavljanjem zahteva da se proces upravljanja u intervalu $[t_0, t_1]$ izvrši uz minimalnu promenu mase sistema usled odvajanja čestica, funkcional (9) dobija oblik

$$J = m(t_0) - m(t_1) = -\int_{t0}^{t1}\left(\sum_{k=1}^{s}\dot{m}_k\right)dt = \int_{t0}^{t1}\left(\sum_{k=1}^{s}u_k\right)dt\,. \tag{17}$$

Neka su skupovi dopustivih upravljanja takvih da je

$$w \in U_w, \qquad u_k \in [0, M_k], \qquad \sum_{\mu=1}^{3} \alpha_{k\mu}^2 - 1 = 0. \tag{18}$$

gde su M_k neke date pozitivne konstante.

S ozirom na funkciju (11) i generalisane sile (7) deo potrebnih uslova optimalnosti (13) ima oblik

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_{k\mu}} = 0 \Rightarrow -\psi^\alpha u_{(k)} c_{(k)} \frac{\partial x_{k\mu}}{\partial q^\alpha} + 2\eta^k \alpha_{k\nu} = 0 \tag{19}$$

odakle je, korišćenjem osobine (18) kosinusnih funkcija,

$$\alpha_{k\mu}^* = -\frac{\psi^\alpha}{\|\psi\|_k} \frac{\partial x_{k\mu}}{\partial q^\alpha}, \qquad \left(\|\psi\|_k = \left(q_{\alpha\beta}^k \psi^\alpha \psi^\beta \right)^{\frac{1}{2}} \right). \tag{20}$$

Pontrjaginova funkcija (11), s obzirom na (17), linearno zavisi od veličina u_k zbog čega je neophodno ispitati mogućnost postojanja singularnih upravljanja [7], [8]. Razdvajanjem funkcije (11) na sledeći način

$$H = H_0 + H_k u_k + \eta^k \left(\sum_{\mu=1}^{3} u_{k\mu} - \delta_k \right), \qquad (\delta_k \equiv 1) \tag{21}$$

deo potrebnih uslova optimalnosti ima oblik

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = H_k = \lambda_0 - \psi^\alpha \left(g_{\alpha\beta}^k \frac{\partial T}{\partial p_\beta} + c_{(k)} \alpha_{(k)\mu} \frac{\partial x_{(k)\mu}}{\partial q^\alpha} \right) - \varphi^k = 0 \tag{22}$$

odnosno, s obzirom na (20),

$$I_k = H_k(\alpha^*) = \lambda_0 - g_{\alpha\beta}^k \psi^\alpha \frac{\partial T}{\partial p_\beta} + c_{(k)} \|\psi\|_{(k)} - \varphi^k = 0. \tag{23}$$

Kanonska forma jednačina (12) omogućava u daljem postupku primenu formalizma Poasonovih zagrada [8] na osnovu čega sledi s jednačina

$$\dot{I}_k = [I_k, H] = [I_k, H_l] u_l + [I_k, H_0] = 0 \tag{24}$$

koje, uvršćivanjem vrednosti α^* iz (20) i posle određenih transformacija, dobijaju oblik:

$$a^{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta}^{(k)} g_{\gamma\delta}^{l} \psi^\beta \psi^\delta \left(\frac{c_l}{\|\psi\|_l} - \frac{c_{(k)}}{\|\psi\|_{(k)}} \right) u_l + [I_k, H_0] = 0. \tag{25}$$

Koeficijenti uz veličine u_l u ovim jednačinama imaju osobine antisimetrije pa dalje ispitivanje singularnih upravljanja, između ostalog, zavisi i od parnosti ili neparnosti broja s (broj tačaka promenljive mase). Ukoliko na intervalu $[t_0, t_l]$ postoje neki podintervali $[\tau_k, \tau'_k]$ na kojima važe uslovi (22) odnosno (23), onda na tim podintervalima mogu da postoje singularna rešenja. U tom slučaju jednačine (23) predstavljaju prve integrale diferencijalnih jednačina na tim podintervalima. Njima treba dodati i integral $H=h$ koji važi na celom intervalu $[t_0, t_l]$. Prema tome optimalna upravljanja u_k^*, u opštem slučaju mogu imati strukturu

$$u_k^* = \begin{cases} u_k^* \in (0, M_k), & H_k = 0 \\ 0, & H_k < 0 \\ M_k, & H_k > 0 \end{cases} \tag{26}$$

Za određivanje tačaka prekida funkcije u_k^* ili tačaka sprezanja singularnih i nesingularnih delova koriste se uslovi neprekidnosti veličina q^α, p_α, m_k, λ_α, ψ^α, φ^k i funkcije H na celom intervalu $[t_0, t_l]$.

U nekim praktičnim problemima pogodno je pravce relativne brzine čestica određivati u odnosu na pokretne koordinatne sisteme vezane za neke delove mehaničkog sistema. Ako su $\gamma_{k\nu}$ (ν=1, 2, 3) odgovarajući kosinusi dovoljno je, u izraze (7) uvrstiti ortogonalne transformacije:

$$\alpha_{k\mu} = \omega^{\nu}_{(k)\mu}(q)\gamma_{(k)\nu} \; , \quad \sum_{\nu=1}^{3}\gamma^2_{k\nu} = 1 . \tag{27}$$

pored toga brzine promene pravca relativnih brzina čestica mogu biti ograničene. U tom slučaju preporučljivo je da se veličine $\gamma_{k\nu}$ smatraju delom koordinate stanja sistema tako da jednačinama (3) treba dodati jednačine

$$\dot{\gamma}_{k\nu} = z_{k\nu} \qquad |z_{k\nu}| \le A_{k\nu} \tag{28}$$

gde veličine $z_{k\nu}$ predstavljaju upravljačke funkcije sa datim ograničenjima. Ograničenja za veličine $\gamma_{k\nu}$ iz (27) možemo zameniti ekvivalentnim ograničenjima

$$\gamma_{(k)\nu}z_{(k)\nu} = 0 \;\; , \quad \sum_{\nu=1}^{3}\gamma^2_{k\nu}(t_0) = 1 . \tag{29}$$

S obzirom na (28) i (29) u odgovarajućoj Pontrjaginovoj funkciji javljaju se članovi

$$\theta^{k\nu}z_{k\nu} + \eta^{k}\gamma_{k\nu}z_{k\nu} \tag{30}$$

tako da potrebni uslovi:

$$\frac{\partial H}{\partial z_{k\nu}} = \theta^{k\nu} + \eta^{(k)}\gamma_{(k)\nu} = 0 \tag{31}$$

ukazuju na mogućnost postojanja singularnih rešenja. U opštem slučaju je:

$$z^{*}_{k\nu} = \begin{cases} z^{*}_{k\nu} \in (-A_{k\nu}, A_{k\nu}) \, , & \dfrac{\partial H}{\partial z_{k\nu}} = 0 \\ A_{k\nu}\, sign \dfrac{\partial H}{\partial z_{k\nu}} \; , & \dfrac{\partial H}{\partial z_{k\nu}} \neq 0 \end{cases} . \tag{32}$$

Početnom stanju sistema treba dodati s uslova iz (29) kojima odgovaraju uslovi transverzalnosti:

$$\left(\theta^{(k)1}\gamma_{(k)2} - \theta^{(k)2}\gamma_{(k)1}\right)_{t0} = 0 \; , \quad \left(\theta^{(k)2}\gamma_{(k)3} - \theta^{(k)3}\gamma_{(k)2}\right)_{t1} = 0 \; , \quad \theta^{k\nu}(t_1) = 0 . \tag{33}$$

5. O PARAMETARSKOJ OPTIMIZACIJI

Ako u jednačinama (3) figurišu neki neodređeni konstantni parametri možemo ih, u postavljenom problemu optimizacije, smatrati delom koordinate stanja sistema. Ilustrujmo postupak parametarske optimizacije na sledećem primeru.

Neka su relativne brzine čestice neki neodređeni vektori, konstantni u odnosu na odgovarajuće pokretne koordinatne sisteme. U tom slučaju, jednačinama (3) treba dodati diferencijalne jednačine i uslove:

$$\dot{c}_k = 0 \, , \quad \dot{\gamma}_{k\nu} = 0 \, , \quad \sum_{\nu=1}^{3}\gamma^2_{k\nu}(t_0) = 1 \tag{34}$$

i rešavati problem optimalnog upravljanja uz dodatne uslove transverzalnosti (33). Diferencijalne jednačine (34), na osnovu uslova transverzalnosti i odgovarajućih spregnutih diferencijalnih jednačina, mogu se zameniti uslovima [9]

$$\int_{t0}^{t1}\frac{\partial H}{\partial c_k}dt = 0 \, , \qquad \int_{t0}^{t1}\frac{\partial H}{\partial \gamma_{k\nu}}dt = \theta_{k\nu}(t_0) .$$

LITERATURA

[1] **Григорьев , К.Г., Заплетин , М.П., Численное решение краевых задач приципа максимума в оп-тимизационных задачах динамики космического полета, Изв. РАНКТ, Н°1, 1993.**

[2] **Понтрягин, Л.С., ..., Математическая теория оптимальных процессов, Наука, Москва, 1983.**

[3] Leitmann, G., An Introduction to Optimal Control. McGrow-Hill, New York, 1966.

[4] Sage, A.P., White, C.C., Optimum Systems Control, Prentice-Hall, Enlewood, 1977.

[5] **Новоселов, В.С., Аналитическая механика систем с перемнными массами, Изд. Лен. Ун., 1969.**

[6] Vujčić, V., Kretanje dinamički promenljivih objekata i njegova stabilnost, doktorska disertacija, PMF, Beograd, 1962.

[7] Kelley, H.J., Kopp, R.E., Moyer, H.G., Singular Extremals Topics in Optimization, Academic Press, New York, 1967.

[8] **Гобасов, Р., Кириллова, Ф.М., Особые оптимаьние управления, Наука, Москва, 1973.**

[9] Vuković, J., Obradović, A., Determination of Constant Parameters of Optimally Controlled Systems, Transactions, 1., Belgrade, 1996.