Numeričko izračunavanje optimalnih upravljanja brahistohronog kretanja mehaničkog sistema

Mr *ZORAN MARKOVIĆ*, Saobraćajni fakultet, Beograd, doc. dr *ALEKSANDAR OBRADOVIĆ*, prof. dr *JOSIF VUKOVIĆ*, Mašinski falultet, Beograd

Originalni naučni rad
UDC:681.515.033.001.573=861

U radu je razmatran mehanički sistem koji vrši brahistohrono kretanje. Matematički model sistema je dat u vidu Lagranževih jednačina druge vrste u kontravarijantnom obliku. Izložen je postupak određivanja programskih optimalnih upravljanja. Postupak je zasnovan na principu maksimuma za slučaj ograničenja upravljanja i faznih promenljivih u vidu jednakosti. Za upravljanja su uzete generalisane brzine i na taj način je znatno pojednostavljen postupak za određivanje optimalnih upravljanja i znatno smanjen obim izračunavanja. Rešavanje dvotačkastog graničnog problema je izvršeno numeričkom metodom konačnih razlika. Istovremeno je razmatran i slučaj neodređenog vremena i dat postupak za taj slučaj. Usled nelinearnosti i složenosti upotrebljenih izraza primenjeno je simboličko programiranje.

1. UVOD

Postavka problema

U ovom radu će se razmatrati brahistohrono kretanje mehaničkog sistema (ukupna mehanička energija sistema je konstantna). Treba napomenuti da je zadatak određivanja brahistohrone postavio Bernuli 1696. godine, a sa tim su postavljeni i temelji mnogih istraživanja u analitičkoj mehanici. Ideju Lajbnica pri rešavanju ovog zadatka iskoritio je Ojler (Euler) i postavio osnove prvih metoda varijacionog računa.

Kretanje holonomnih skleronomnih mehaničkih sistema se može opisati pomoću Lagranževih diferencijalnih jednačina druge vrste u kontravarijantnom obliku:

$$\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k = a^{ij}\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^j} + Q^N_j\right), \qquad (1)$$

$$i, j, k = 1, 2, ..., n,$$

gde su q^i generalisane koordinate, $\Pi = \Pi\,(q^i)$ potencijalna energija sistema, $a^{ij} = a^{ij}\,(q^k)$ kontravarijantne koordinate metričkog tenzora konfiguracionog prostora R^n, Γ^i_{jk} Kristofelovi simboli druge vrste, koji su dati sledećim izrazom:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}a^{il}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial q^j} + \frac{\partial a_{lj}}{\partial q^k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q^l}\right), \qquad (2)$$

$$i, j, k, l = 1, 2, ..., n,$$

gde su $a_{ij} = a_{ij}\,(q^k)$ kovarijantne koordinate metričkog tenzora, dok je Q^N_j nepotencijalna generalisana sila:

$$Q^N_j = Q^N_j\,(q^i, \dot{q}^k, u_\beta), \qquad (3)$$

$$i, j, k = 1, 2, ..., n,$$

$$\beta = 1, 2, ..., m,$$

gde je u_β vektor upravljanja.

Da bi se primenio Pontrjaginov princip maksimuma, koji će se u ovom radu koristiti u cilju određivanja optimalnih upravljanja, potrebno je kretanje datog mehaničkog sistema prikazati u obliku sistema diferencijalnih jednačina prvog reda u normalnom obliku. Sistem od n diferencijalnih jednačina drugog reda (1) može se zameniti sa sledećim sistemom od 2n diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$\dot{q}^i = y^i,$$

$$\dot{y}^i = -\Gamma^i_{jk}y^j y^k + a^{ij}\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^j} + Q^N_j\right), \qquad (4)$$

$$i, j, k = 1, 2, ..., n.$$

Razmatraće se slučaj ograničenja upravljanja tipa jednakosti.

U slučaju kada u mnogostrukostima na kojima može biti početo i krajnje stanje sistema, ne figurišu generalisane brzine y^k i kada isovremeno u ograničenjima upravljanja kao i u meri optimalnosti ne figurišu upravljanja u_β (generalisane sile) može se znatno pojednostaviti postupak za određivanje optimalnih upravljanja i značajno umanjiti obim izračunavanja uvođenjem generalisanih brzina kao upravljanja. Na taj način će se umesto sistema diferencijalnih jednačina (4) razmatrati sledeći sistem diferencijalnih jednačina kojima je opisan posmatrani mehanički sistem:

$$\dot{q}^k = u^k, \qquad (5)$$

$$k = 1, 2, ..., n.$$

Početno stanje sistema može biti na mnogostrukostima:

$$\varphi^0_\delta\left[q^j(t_0)\right] = 0, \quad \delta = 1, 2, ..., n_0 \le n, \qquad (6)$$

Adresa autora: mr Zoran Marković, Saobraćajni fakultet, Beograd, Vojvode Stepe 305

Rad primljen 2.XII 1997.

$j = 1, 2, ..., n.,$

a krajnje stanje sistema može biti na mnogostrukostima:

$$\varphi_l^1 \left[q^j (t_1) \right] = 0, \qquad l = 1, 2, ..., n_1 \leq n, \qquad (7)$$

$j = 1, 2, ..., n.$

Zadatak optimalnog upravljanja kretanjem mehaničkog sistema, u ovom slučaju, sastoji se u određivanju upravljanja u^k, iz skupa dopustivih upravljanja zadatog relacijama:

$$\Phi_\gamma (q^j, u^k) = 0,$$

$$\gamma = 1, 2, \ldots, p, \qquad j, k = 1, 2, ..., n, \qquad (8)$$

pod čijim će dejstvom mehanički sistem, prikazan u obliku sistema diferencijalnih jednačina (5), iz početnog stanja zadatog na mnogostrukostima (6), doći u krajnje stanje, zadato na mnogostrukostima (7), uz uslov minimalnosti funkcionala:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f^0 (q^j, u^k)\, d t \qquad j, k = 1, 2, ..., n. \qquad (9)$$

2. REŠENJE PROBLEMA PRIMENOM PRINCIPA MAKSIMUMA

Rešenje postavljenog zadatka moguće je dobiti primenom teoreme 2 [3] koja je formirana na osnovu Pontrjaginovih teorema dokazanih u fundamentalnoj monografiji [12], za problem koji se razmatra u ovom radu. U tom cilju, na osnovu sistema jednačina (5), uvodi se Pontrjaginova funkcija koja će u ovom slučaju imati oblik:

$$H (\lambda_0, \lambda_k, q^j, u^k) = \lambda_0 f^0 + \lambda_k u^k \qquad (10)$$

$j, k = 1, 2, ...,n,$

gde su λ_0 i λ_k koordinate spregnutog vektora.

Na osnovu prethodnog izraza mogu se formirati spregnute jednačine:

$$\lambda_k = - \frac{\partial H}{\partial q^k} + \mu^\gamma \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial q^k}, \qquad (11)$$

$$k = 1, 2, ..., n, \qquad \gamma = 1, 2, ..., p,$$

gde su μ^γ množitelji, pri čemu se na osnovu Pontrjagинove teoreme može uzeti $\lambda_0 = -1$.

Korišćenjem Pontrjaginovog principa maksimuma, odnosno sledećeg uslova:

$$\lambda_k = - \frac{\partial H}{\partial q^k} + \mu^\gamma \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial q^k}, \qquad (12)$$

$$k = 1, 2, ..., n, \qquad \gamma = 1, 2, ..., p.$$

i izraza (8) mogu se eliminacijom množitelja μ^γ dobiti upravljanja u obliku:

$$u^k = u^k (\lambda_k, q^j), \qquad j, k = 1, 2, ..., n. \qquad (13)$$

Zamenom izraza (13) u jednačine (5) i (11), dobija se sistem od $2n$ diferencijalnih jednačina prvog reda u normalnom obliku sa $2n$ nepoznatih funkcija. Za određivanje rešenja u konačnom obliku potrebno je $2n$ graničnih uslova u slučaju kada je vreme t_1 zadato. Ukoliko je zadat manji broj graničnih uslova, koriste se uslovi transverzalnosti.

Rešavanjem se dobijaju generalisane koordinate i spregnute promenljive u zavisnosti od vremena:

$$q^i = q^i (t), \quad \lambda_k = \lambda_k (t), \quad j, k = 1, 2, ..., n. \quad (14)$$

Zamenom tako dobijenih rešenja (14) u izraz (13), dobijaju se upravljanja u obliku:

$$u^k = u^k (t), \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

U slučaju kada vreme t_1 nije zadato koristi se dopunski uslov:

$$(H)_{t_1} = 0. \qquad (16)$$

Da bi se mogle efikasno koristiti numeričke metode, tada se uvođenjem smene:

$$t = \tau t_1, \qquad (17)$$

gde je τ bezdimenziono vreme ($0 \leq \tau \leq 1$), a t_1 nepoznata konstanta koja odgovara krajnjem trenutku kretanja, dobija sledeći sistem jednačina:

$$\frac{d q^k}{d \tau} = t_1 u^k,$$

$$\frac{d \lambda_i}{d \tau} = - t_1 \frac{\partial H}{\partial q^i} + t_1 \mu^\gamma \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial q^i}, \qquad (18)$$

$$\frac{d t_1}{d \tau} = 0,$$

$$i, k = 1, 2, ..., n, \qquad \gamma = 1, 2, ..., p.$$

Zamenom izraza (13) u (18) dobija se sistem od $2n+1$ diferencijalnih jednačina prvog reda sa $2n+1$ nepoznatih funkcija. Za dobijanje rešenja u konačnom obliku potrebno je $2n+1$ uslova. Pored početnih i krajnjih uslova i uslova transverzalnosti koristi se i dopunski uslov (16).

Rešavanjem dvotačkastog graničnog problema, dobijaju se rešenja u obliku:

$$q^k = q^k (\tau), \quad \lambda_i = \lambda_i (\tau), \quad t_1 = const, \quad (19)$$

$i, k = 1, 2, ..., n.$

Zamenom rešenja (19) u izraz (13) dobijaju se upravljanja u obliku:

$$u^k = u^k (\tau), \qquad k = 1, 2, ..., n. \qquad (20)$$

a zatim se korišćenjem (17) dobijaju rešenja u funkciji vremena t:

$$q^k = q^k (t), \ \lambda_i = \lambda_i (t), \ t_1 = const, \ u^k = u^k (t), (21)$$

$i, k = 1, 2, ..., n,$

Ukoliko se upravlja silama, sada se mogu odrediti upravljanja u_j (nepotencijalne generalisane sile Q_j^N) koristeći Lagranževe jednačine druge vrste u kovarijantnom obliku:

$$u_j = Q_j^N = a_{ij}\ddot{q}^i + \Gamma_{ik,j}\dot{q}^i\dot{q}^k + \frac{\partial \Pi}{\partial q^j}, \qquad (22)$$

$i, j, k = 1, 2, ..., n,$

gde je a_{ij} kovarijantni metrički tenzor konfiguracionog prostora R^n, dok su $\Gamma_{ik,j}$ Kristofelovi simboli prve vrste dati sledećim izrazom:

$$\Gamma_{ik,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q^j}\right), \qquad (23)$$

$i, k, j = 1, 2, ..., n.$

3. PRIMENA SIMBOLIČKOG PROGRAMIRANJA I MATHEMATICA INTERPRETERA

Rešavanje navedenog zadatka izloženim algoritmom zahteva veliki broj rutinskih radnji, koje zahtevaju dugotrajno računanje i podležu mogućnosti grešaka, svojstvenim tzv. "ručnom" postupku. Međutim, danas, na sreću, tehnika simboličkog programiranja omogućava pisanje programa za simboličko izvođenje složenih matematičkih operacija. U ovom radu koristiće se simbolički interpreter Mathematica.

Dok se klasični programi mogu shvatiti kao niz instrukcija na osnovu kojih iz jednog skupa brojeva slede drugi, Mathematica se može smatrati za skup pravila na osnovu kojih se izrazi i formule transformišu iz jednog oblika u drugi. Izlazne rezultate interpretera je korisno uneti u postojeće programe u Fortran-u pošto je Mathematica relativno spora i skoro neupotrebljiva za intezivne numeričke proračune.

3.1. Program za dobijanje jednačina dvotačkastog graničnog problema sa zadatim intervalom nezavisno promenljive za brahistohrono kretanje mehaničkog sistema.

Ulazne veličine za dati program su:

n - broj stepena slobode,

E - vrednost mehaničke energije

pi - analitički izraz za potencijalnu energiju sistema,

a [[*i* , *j*]] - analitički izrazi kovarijantnih koordinata metričkog tenzora.

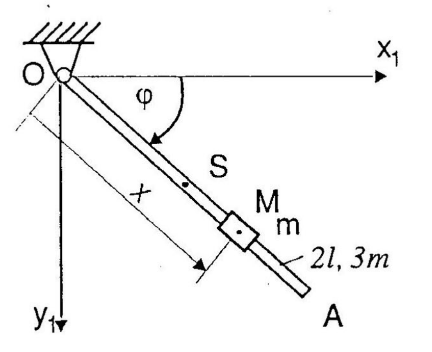
```
fi = pi + Sum [a[[i,j]] u[i] u [j], {i,n}, {j,n}]/2 - EE
//Simplify;
H = Sum[lam[i] u[i], {i, n}] - 1;

resenje = Module[
    {sist1, sist2, prom1, prom2, sist, prom},
    sist1 = Table[D[H, u[b]] - mi D[fi, u[b]] == 0,
    {b,n}];
    sist2 = { II == 0 };
    prom1 = {mi};
    prom2 = Table[u[b], {b, n}];
    sist = Join[sist1, sist2];
    prom = Join[prom1, prom2];
    Return[Solve[sist, prom]];
    ];
res = resenje [[1]];
qd[j_] := D[H, lam[j]] /. res;
lamd[i_] := -D[H, q[i]] + mi D[fi, q[i]] /. res;
pravilo = {q[i_] -> x[i],lam[i_] -> x[n+i]};
xprime[i_] := (qd[i] /. pravilo) /; (i <= n);
xprime[i_] := (lamd[i - n] /. pravilo) /; (i >= n +
1 && i <= 2n );
xprim[i_] ;+ x[2n + 1]*xprime[i] /; (i <= 2n);
xprim[2n + 1] = 0;
pd[i_, j_] := D[xprim[i], x[j]];
```

Dati program sadrži i određivanje Jakobijana neophodnih za numeričko rešavanje.

4. PRIMER

Razmatraće se mehanički sistem prikazan na sl. 1. On se sastoji iz štapa OA dužine 2l i mase 3m koji se može obrtati u vertikalnoj ravni oko nepomičnog zgloba O i klizača M mase m zanemarljivih dimenzija koji može klizati po štapu.



SL. 1

Potrebno je odrediti zakon relativnog kretanja klizača po štapu $x(t)$ i zakon obrtanja štapa $\varphi(t)$ da bi mehanički sistem prešao iz početnog stanja:

$$x(0) = l, \qquad \varphi(0) = \frac{\pi}{6}, \qquad (24)$$

u krajnje stanje:

$$x(t_1) = l, \qquad \varphi(t_1) = \frac{5\pi}{6}, \qquad (25)$$

za najkraće vreme, tj. uz uslov minimalnosti funkcionala:

$$I = \int_0^{t_1} dt, \qquad (26)$$

pri čemu ukupna mehanička energija sistema treba da bude konstantna (brahistohrono kretanje) i jednaka nuli. Potrebno je takođe odrediti i vreme t_1. Zanemariće se trenje pri kretanju klizača M po štapu i moment trenja u zglobu O.

Kinetička energija sistema je:

$$T = 2\,m\,l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\,x^2\dot{\varphi}^2\,, \tag{27}$$

dok je potencijalna energija data izrazom:

$$\Pi = -(x + 3\,l)\,m\,g\sin\varphi\,, \tag{28}$$

gde su za generalisane koordinate uzete pomeranje x i ugao φ.

Kako se radi o brahistohronom kretanju može se napisati:

$$\frac{1}{2}(4\,l^2 + x^2)\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 - (x + 3\,l)\,g\sin\varphi = 0\,. \tag{29}$$

Pošto u uslovima (24) i (25) ne figurišu generalisane brzine $\dot{x}$ i $\dot{\varphi}$ pošto u izrazima (26) i (29) ne figurišu nepotencijalne generalisanje sile, mogu se za upravljanja uvesti generalisane brzine:

$$\dot{x} = u^1\,, \qquad \dot{\varphi} = u^2\,. \tag{30}$$

Sada je, prema (29), ograničenje na upravljanja dato u obliku jednakosti:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(4\,l^2 + x^2)\,(u^2)^2 + \frac{1}{2}(u^1)^2 -$$

$$- (x + 3\,l)\,g\sin\varphi = 0\,. \tag{31}$$

Pontrjaginova funkcija ima sledeći oblik (videti (10)):

$$H = -1 + \lambda_1\,u^1 + \lambda_2\,u^2\,, \tag{32}$$

a na osnovu nje se formira spregnuti sistem jednačina (videti (11)):

$$\dot{\lambda}_1 = \mu^1\,(x\,(u^2)^2 - g\sin\varphi)\,,$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\mu^1\,(x + 3\,k\,l)\,g\cos\varphi\,. \tag{33}$$

Korišćenjem izraza (12), (16) i (31) dobijaju se upravljanja u obliku (13):

$$u^1 = 2\,g\,\lambda_1\,(x + 3\,l)\sin\varphi\,,$$

$$u^2 = \frac{2\,g\,\lambda_2\,(x + 3\,l)\sin\varphi}{4\,l^2 + x^2}\,. \tag{34}$$

Zamenom ovako dobijenih upravljanja u izraze (30) i (33), koristeći smenu (17), dobija se sledeći sistem jednačina (videti (18)):

$$x' = 2\,g\,\lambda_1\,t_1\,(x + 3\,l)\sin\varphi\,,$$

$$\varphi' = \frac{2\,g\,\lambda_2\,t_1\,(x + 3\,l)\sin\varphi}{4\,l^2 + x^2}\,,$$

$$\lambda'_1 = \frac{2\,g\,x\,\lambda_2^2\,t_1\,(x + 3\,l)\sin\varphi}{(4\,l^2 + x^2)^2} - \frac{t_1}{2\,(x + 3\,l)}\,, \tag{35}$$

$$\lambda'_2 = -\frac{t_1\,ctg\,\varphi}{2}\,,$$

$$t'_1 = 0\,.$$

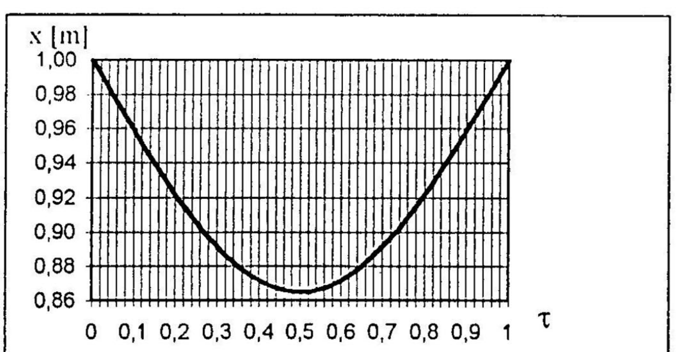
gde su sa (') označeni odgovarajući izvodi po bezdimenzionom vremenu τ.

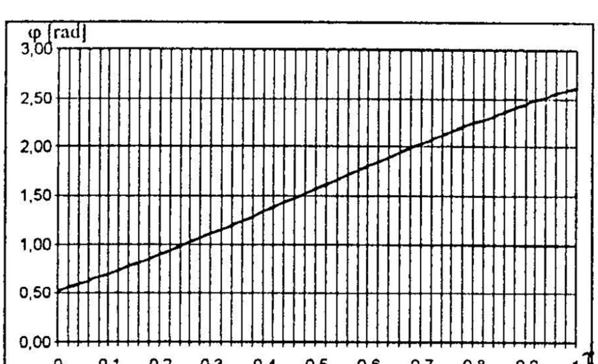
Za određivanje nepoznatih funkcija $x(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $\lambda_1(\tau)$, $\lambda_2(\tau)$ i parametra t_1 iz dobijenog sistema od pet diferencijalnih jednačina prvog reda u normalnom obliku neophodno je pet graničnih uslova. Pored četiri granična uslova (24) i (25), peti granični uslov:

$$\lambda_2^2(0) + 5\,l^2\lambda_1^2(0) = \frac{5\,l}{4\,g}\,, \tag{36}$$

dobijen je korišćenjem izraza (24), (31) i (34).

Rešenje je dobijeno numerički, primenom metode konačnih razlika, pri čemu je uzeto da je *l=1m*. Na taj način su određene zavisnosti $x(\tau)$, $\varphi(\tau)$, (sl. 2), $\lambda_1(\tau)$ i $\lambda_2(\tau)$ i traženo vreme $t_1=0{,}59$ *s*. Korišćenjem (17) određuje se traženi zakon relativnog kretanja klizača po štapu $x(t)$ i zakon obrtanja štapa $\varphi(t)$.

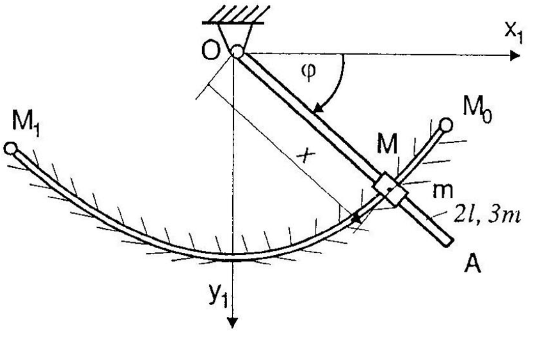




Sl. 2

Ukoliko se dobijena kretanja ostvaruju pomoću nepotencijalnih generalisanih sila, za njihovo određivanje se koristi izraz (22).

Ovakvo kretanje se može ostvariti i bez dejstva aktivnih upravljačkih sila. Prema prirodi brahistohronog kretanja (neizmenjena mehanička energija) moguće je sistemu (slika 1.) sa dva stepena slobode, nametnuti jednu idealnu holonomnu mehaničku vezu, u skladu sa dobijenim konačnim jednačinama kretanja. Ukoliko se u vertikalnoj ravni ureže žljeb u obliku linije putanje tačke M (sl. 3) i ako se unutar njega



Sl. 3

postavi osovinica zanemarljivih dimenzija, koja je pričvršćena za klizač M, pri puštanju sistema iz početnog položaja da se kreće, u skladu sa (29), ostvariće se brahistohrono kretanje bez dejstva aktivnih sila.

5. LITERATURA

[1] Bryson, A. E., Ho Y. C., **Applied Optimal Control**, Ginn and Company, Waltham, 1969.

[2] Demidovich, B. P., Maron, I. A., **Computational Mathematics**, Mir Publishers, Moscow, 1981.

[3] Marković, Z., **Rešavanje problema optimalnog upravljanja i parametarske optimizacije mehaničkih sistema metodom konačnih razlika**, magistarska teza, Mašinski fakultet, Beograd, 1997.

[4] Pereyra, V., **PASVA 3**, An Adaptive Finite Difference Fortan Program for First Order Non - Linear Ordinary Boundary Problems, Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, Berlin, 1978.

[5] Sage, A. P., White, C. C., **Optimum Systems Control**, Prentice - Hall, Englewood, 1977.

[6] Vuković, J., Obradović, A., **Determination of Constant Parameters of Optimally controlled Systems**, Transactions, Belgrade, No 1, 1996.

[7] William, H. P., Brian P. F., Saul, A. T., Wiliam, T. V., **Numerical Recipes in C**, Cambridge Universiti Pres, 1988.

[8] Wolfram, S., **Mathematica: A Sistem for Doing Mathematics by Computer**, Addison - Wesley Publishing Company, Redwood City, California, 1988.

[9] Алексеев, В. М., Тихомиров, В. М., Фомин, С. В., **Оптимальное управление**, Наука, Москва, 1979.

[10] Барков, В. В., Кочетков, Ю. А., **Краевая задача оппимального управления нелинейными детерминированными системами**, Известия РАН, Теория и системы управления, Но 6, 1995.

[11] Григорьев, К. Г., Заплетин, М. П., **Численное решение краевых задач принципа максимума в оптимизационных задачах динамики космического полета**, Известия РАН ТК, Но 1, 1993.

[12] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф., **Математическая теория оптимальных процессов**, Наука, Москва, 1983.

SUMMARY

NUMERICAL CALCULATION FOR OPTIMAL CONTROLS OF BRACHISTOCHRONIC MOTION IN A MECHANICAL SYSTEM

In this paper a mechanical system performing brachystocronic motion is discussed. Mathematical model is expressed in the form of Lagrange's equations of the second type in their countervariant form. The procedure of defining optimal controls is explained. The procedure is based on the maximum principle and expressed in the form of equations for an occurrence of limitation to the control and phase variables. Generalized speeds are accepted for the controls, and, in that way, the procedure of optimal controls determination is considerably simplified and the scope of calculation substantially reduced. Solution of a two-point limitation problem is performed by the method of finite differences. At the same time, the incidence of indefinite time is also discussed and the procedure for that case is given. Due to non-linearity and complexity of the expressions used, symbolic programming has been applied.