Simulacija kretanja sistema krutih tela

Mr *ALEKSANDAR OBRADOVIĆ*, dipl. inž., i *SAŠA MARKOVIĆ*, dipl. inž., asistenti Mašinskog fakulteta u Beogradu

Originalni naučni rad

YU ISSN: 0461—2531
UDC: 531.314.38.001.571=861

1. UVOD

Mnogi inženjerski objekti (manipulatori, prevozna sredstva, letelice, transportne mašine i sl.) mogu se, sa dovoljno velikom tačnošću, modelirati kao sistemi krutih tela. U analizi dinamičkog ponašanja ovakvih sistema veliki značaj ima simulacija kretanja koja obuhvata formiranje matematičkog modela u vidu diferencijalnih jednačina i njihovo integraljenje. Usled složenosti modela neophodno je dati automatski postupak formiranja jednačina povezan sa numeričkim metodama integracije. U rešavanju ovakvih zadataka nužna je, naravno, primena računara.

Sami postupci dobijanja diferencijalnih jednačina kretanja predmet su istraživanja timova stručnjaka iz celoga sveta. U monografiji [1] dat je pregled 20 kompjuterskih programa koji su rešavali postavljeni problem. Može se primetiti da su svi oni imali različiti pristup po pitanju strukture sistema, tipova veza, korišćenog teorijskog pristupa (vrste jednačina), programskog jezika, načina dobijanja jednačina (numerički, simbolički i sl.), prezentacije rezultata itd. I u drugim monografijama i radovima može se naći veliki broj ovakvih postupaka, npr. [2].

U ovome radu daje se metod baziran na geometrizaciji kretanja sistema krutih tela tako što se razmatra kretanje reprezentativne tačke u n-dimenzionalnom konfiguracionom prostoru [3], gde je n-broj stepena slobode. Proces dobijanja diferencijalnih jednačina predstavlja dalji razvoj postupaka iznetih u [4] i [5].

Razmatraće se sistemi tela »strukture drveta« [6], povezanih međusobno obrtnim ili translatornim vođicama (kinematski parovi pete klase), koji vrše kretanje pod dejstvom sila zemljine teže i nepotencijalnih generalisanih sila (pogonskih sila, viskoznih sila i sl.).

U drugom poglavlju definišu se svi potrebni parametri koji su potrebni pri simulaciji. Ulazni podaci se smeštaju u datoteku iz koje se iščitavaju pri svakom pozivanju glavnog programa.

Formiranju jednačina kretanja povećeno je treće poglavlje u kome je izložen teorijski pristup. Označavanje je sprovedeno u tenzorskom obliku [7].

Četvrto poglavlje opisuje strukturu kompjuterskog programa za simulaciju kretanja. U petom poglavlju je, pomoću ovog programa, obrađen test-primer na kome su testirani i svi programi iz monografije [1].

2. DEFINISANJE PARAMETARA SISTEMA KRUTIH TELA

Da bi u potpunosti poznavali sve veličine potrebne za simulaciju, kretanja, potrebno je definisati parametre koji opisuju:

a) strukturu i tipove veza:

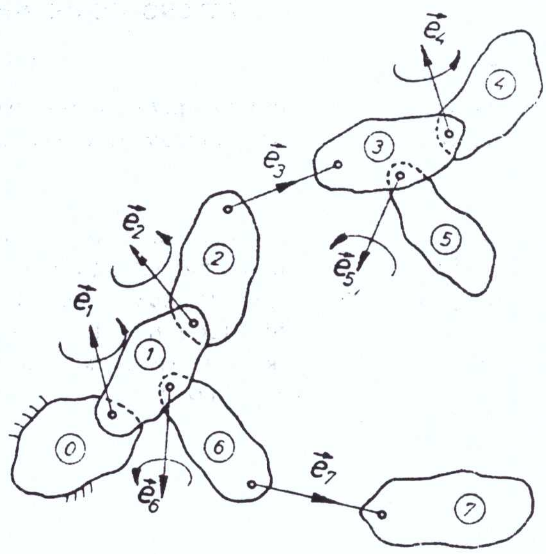
- broj stepena slobode (ujedno i broj tela) n;
- niz $L(i)$, $i = 1, \ldots, n$, $L(i) < i$ u kome se svakom broju tela i dodeljuje broj $L(i)$ tela koje mu prethodi;
- niz $T(i)$, $i = 1, \ldots, n$ u kome se svakom telu sa brojem i pridružuje vrednost 1 i-ta koordinata predstavlja translaciju a vrednost 0 za rotaciju;

b) geometriju sistema:

- vektori $\vec{\rho}_{ii}, \vec{\rho}_{ij}, \vec{e}_i, i = 1, \ldots, n, i = L(j)$; svi ovi vektori izraženi su u lokalnim koordinatnim sistemima, »vezanim« za telo i, a sa koordinatnim početkom u centru inercije C_i;

c) raspored masa:

- mase tela m_i, $i = 1, \ldots, n$;
- tenzori inercije pojedinih tela $\tilde{\Theta}_{c(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, određeni u odnosu na »lokalne« koordinatne sisteme.

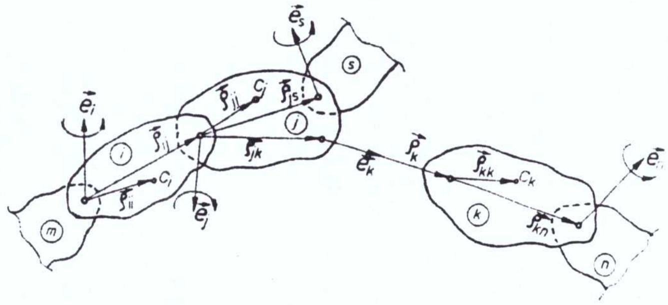


Sl. 1 — Primer sistema tela strukture drveta

Na sl. 1 dat je primer definisanja strukture. Za ovakav mehanički sistem je: $n = 7$, $L(i) = (0,1,2,3,3,1,6)$, $T(i) = (0,0,1,0,0,0,1)$.

Na sl. 2 prikazani su vektori koji definišu geometriju sistema tela. Svi ovi parametri nalaze se u ulaznoj datoteci mehaničkog sistema koju kreira jednostavan pomoćni program.

Adresa autora: mr Aleksandar Obradović, Mašinski fakultet, Beograd, 27. marta 80.
Rad primljen 11. II 1991. god.



Sl. 2 — Vektori koji definišu geometriju

3. FORMIRANJE JEDNAČINA KRETANJA

Posmatrajmo kretanje holonomnog mehaničkog sistema sa n stepena slobode na koji deluju potencijalne i nepotencijalne sile. Ako se ono predstavi preko kretanja reprezentativne tačke u konfiguracionom prostoru R_n [3], Lagranževe jednačine druge vrste u kovarijantnom obliku glase:

$$a_{ij}\ddot{q}^j + [j,k;i]\,\dot{q}^j\dot{q}^k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^N,\ i,j,k = 1,\dots,n \tag{1}$$

gde su:

$$[j,k;i] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q^i}\right) -$$

Kristofelovi simboli prve vrste, q^i — generalisane koordinate, $a_{ij}(q^k)$ — kovarijantne koordinate metričkog tenzora konfiguracionog prostora, $\Pi(q^k)$ — potencijalna energija, $Q_i^N(q^k, \dot{q}^k, t)$ — nepotencijalna generalisana sila, t-vreme.

Jednačine (1) se mogu predstaviti u normalnom obliku:

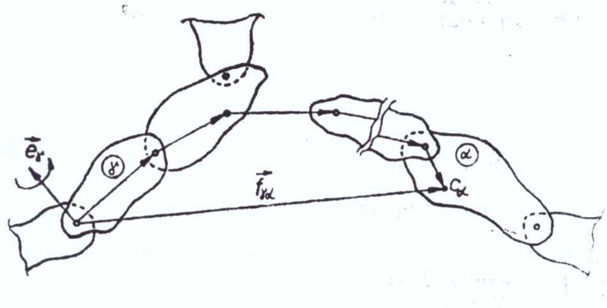
$$\dot{q}^m = y^m$$
$$\dot{y}^m = a^{im}\left(-[j,k;i]\,y^j y^k - \frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^N\right),$$
$$m = 1,\dots,n, \tag{2}$$

gde su:

a^{im} — kontravarijantne koordinate metričkog tenzora konfiguracionog prostora,
y^m — kontravarijantne koordinate generalisane brzine.

Postupak automatskog formiranja jednačina kretanja u numeričkom obliku sastoji se u određivanju veličina a_{ij}, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}$ i $\frac{\partial \Pi}{\partial q^k}$ za svaki položaj sistema određen generalisanim koordinatama q^i, $i = 1,\dots,n$. Detaljno izvođenje ovog postupka dato je u [8]. U tabeli 1 dati su izrazi za a_{ij}, a u tabeli 2 za $\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}$ koje odgovaraju telu α. Za sve druge kombinacije koje nisu obuhvaćene ovim tabelama odgovarajuće veličine jednake su nuli. Vrednosti a_{ij} i $\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k}$ dobijaju se sumiranjem veličina iz tabela 1 i 2 za sva tela u sistemu.

Oznaka $i(<)j$ znači da je $i = L(L(\dots L(j)\dots))$. Vektor $\vec{t}_{\gamma\alpha}$ se izračunava preko pomoćnog vektora $\vec{f}_{\gamma\alpha}$ (*sl.* 3) na sledeći način:



Sl. 3 — Pomoćni vektori koji definišu geometriju

$$\vec{t}_{\gamma\alpha} = \vec{e}_\gamma \times \vec{f}_{\gamma\alpha}.$$

Izvodi potencijalne energije za slučaj sila zemljine teže izračunavaju se prema:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^k} = -\vec{g}\cdot\sum_{\alpha=k}^{n} m_\alpha \vec{t}_{k\alpha},\quad T(k) = 0,\ k(\leq)\alpha,$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^k} = -\vec{g}\cdot\sum_{\alpha=k}^{n} m_\alpha \vec{e}_k,\quad T(k) = 1,\ k(\leq)\alpha, \tag{3}$$

gde je $\vec{g}$-vektor ubrzanja zemljine teže.

Sve ostale sile koje deluju na mehanički sistem potrebno je zadati analitički u vidu funkcije $Q_i^N(q^k, \dot{q}^k, t)$.

Pri izračunavanju veličina iz tabele 1 i tabele 2 polazi se od parametara sistema definisanih u po-

Tabl. 1 — Izrazi za a_{ij} tela α

$T(i) = 0$		$T(j) = 1$	
$T(j) = 0$	$T(j) = 1$	$T(j) = 0$	$T(j) = 1$
$i(\leq)j(\leq)\alpha$	$i(>)j(\leq)\alpha$	$i(>)j(\leq)\alpha$	$i(\leq)j(\leq)\alpha$
$m_\alpha \vec{t}_{i\alpha}\cdot\vec{t}_{j\alpha} + \vec{e}_i\cdot\tilde{\Theta}_{C(\alpha)}\cdot\vec{e}_j$	$m_\alpha \vec{t}_{i\alpha}\cdot\vec{e}_j$	$m_\alpha \vec{e}_i\cdot\vec{t}_{j\alpha}$	$m_\alpha \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$

Tabl. 2 — Izrazi za $\partial a_{ij}/\partial q^k$ tela α

k	i, j	$T(i) = 0$		$T(i) = 1$	
		$T(j) = 0$	$T(j) = 1$	$T(j) = 0$	$T(j) = 1$
		$i\,(\leq)\,j\,(\leq)\,\alpha$	$i\,(<)\,j\,(\leq)\,\alpha$	$i\,(<)\,j\,(\leq)\,\alpha$	$i\,(\leq)\,j\,(\leq)\,\alpha$
$i\,(<)\,k\,(\leq)\,j$	$T(k) = 0$	$[(\vec{e}_i \times \vec{t}_{k\alpha}) \cdot \vec{t}_{j\alpha} + \vec{t}_{i\alpha} \cdot (\vec{e}_k \times \vec{t}_{j\alpha})]\, m_\alpha - (\vec{e}_k \times \vec{e}_i)\, \tilde{\Theta}_{c(\alpha)} \cdot \vec{e}_j$	$[(\vec{e}_i \times \vec{t}_{k\alpha}) \cdot \vec{e}_i + \vec{t}_{i\alpha} \cdot (\vec{e}_k \times \vec{e}_j)]\, m_\alpha$	$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_k \times \vec{t}_{j\alpha})\, m_\alpha$	$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_k \times \vec{e}_j)\, m_\alpha$
	$T(k) = 1$	$(\vec{e}_i \times \vec{e}_k) \cdot \vec{t}_{j\alpha}\, m_\alpha$	$(\vec{e}_i \times \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j\, m\, \alpha$	0	0
$j\,(<)\,k\,(\leq)\,\alpha$	$T(k) = 0$	$[(\vec{e}_i \times \vec{t}_{k\alpha}) \cdot \vec{t}_{j\alpha} + \vec{t}_{i\alpha} \cdot (\vec{e}_j \times \vec{t}_{k\alpha})]\, m_\alpha - (\vec{e}_k \times \vec{e}_i)\, \tilde{\Theta}_{c(\alpha)} \cdot \vec{e}_j - \vec{e}_i \cdot \tilde{\Theta}_{c(\alpha)}\, (\vec{e}_k \times \vec{e}_j)$	$(\vec{e}_i \times \vec{t}_{k\alpha}) \cdot \vec{e}_j\, m_\alpha$	$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{t}_{k\alpha})\, m_\alpha$	0
	$T(k) = 1$	$[(\vec{e}_i \times \vec{e}_k) \cdot \vec{t}_{j\alpha} + \vec{t}_{i\alpha} \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)]\, m_\alpha$	$(\vec{e}_i \times \vec{e}_k) \cdot \vec{e}_j\, m_\alpha$	$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)\, m_\alpha$	0

glavlju 2. Svi vektori i tenzori izraženi su u »lokalnim« koordinatnim sistemima. Uzećemo da su oni tako odabrani da su odgovarajuće ose svih tela istovetno usmerene u referentnoj konfiguraciji ($q^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$). Osim toga, osu broj 3 usmerićemo vertikalno naviše u referentnoj konfiguraciji za sva tela.

Prevođenje iz jednog u drugi koordinatni sistem omogućeno je odgovarajućim matricama transformacije. Neka su data dva susedna tela sa rednim brojevima $\beta = L(\alpha)$ i α. Na osnovu Rodrigovog obrasca [3], za slučaj da je $T(\alpha) = 0$, u [5] je izveden izraz:

$$[A_{L(\alpha),\,\alpha}] = [I] + (1 - \cos q^\alpha)[e^d_\alpha]^2 + [e^d_\alpha] \cdot \sin q^\alpha$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [e^d_\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & -e_{\alpha 3} & e_{\alpha 2} \\ e_{\alpha 3} & 0 & -e_{\alpha 1} \\ -e_{\alpha 2} & e_{\alpha 1} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

U (4) su $e_{\alpha i}$, $i = 1, 2, 3$, koordinate vektora $\vec{e}_\alpha$ izražene u lokalnom koordinatnom sistemu tela α. Za slučaj $T(\alpha) = 1$ matrica transformacije je jedinična. Matrica transformacije, kojom se množi vektor izražen u lokalnom koordinatnom sistemu tela kako bi se preveo u nepomični koordinatni sistem, dobija se iz rekurentne relacije:

$$[A_\alpha] = [A_{L(\alpha)}]\,[A_{L(\alpha),\,\alpha}]\,. \tag{5}$$

Napomenimo da ove matrice, s obzirom da karakterišu ortogonalne transformacije rotacije, imaju tu osobinu da se inverzna matrica dobija transponovanjem. Kada se svi vektori i tenzori izraze u istom koordinatnom sistemu, tada se izrazi za a_{ij}, $\partial a_{ij}/\partial q^k$ i $\partial \Pi/\partial q^k$ dobijaju poznatim pravilima tenzorske algebre [7], a na osnovu izvedenih relacija. Svi vektori u njima izražavani su u nepokretnom koordinatnom sistemu, osim vektora koji se skalarno množe sa tenzorima $\tilde{\Theta}_{c(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Ti vektori su izražavani u lokalnom sistemu tela α u cilju izbegavanja transformacije koordinata tenzora inercije (mada je i ovo moguće učiniti [3]).

4. STRUKTURA PROGRAMA

Na osnovu teorijskih činjenica navedenih u prethodnim poglavljima razrađen je program za simulaciju kretanja mehaničkih sistema. Funkcionisanje ovog programa objasnićemo u nekoliko tačaka:

- Program prvo učitava ime ulazne datoteke koja mora biti prethodno pripremljena pomoću jednostavnog pomoćnog programa. Ulazna datoteka sadrži podatke koji potpuno definišu simulirani mehanički sistem.
- Zatim se od korisnika zahteva da specificira ulazne podatke koji će definisati početno stanje mehaničkog sistema: vektor početnih vrednosti generalisanih koordinata q^k_o i vektor početnih generalisanih brzina $\dot{q}^k_o (k = 1, \ldots n)$.
- Programu se zadaje vremenski interval u kome treba vršiti simulaciju kretanja: početno vreme t_o, krajnje vreme t_k i korak Δt.
- Početno vreme t_o postaje tekuće vreme t.
- Glavni program poziva rutinu za formiranje i integraljenje diferencijalnih jednačina. Ova rutina vrši integraciju diferencijalnih jednačina u vremenskom intervalu $(t, t + \Delta t)$. Potprogram će ovaj vremenski interval po potrebi »usitniti« kako bi zadovoljio unapred zahtevanu tačnost. Glavni ulazni podatak potprograma su veličine koje definišu mehanički sistem, generalisane koordinate i generalisane

brzine u trenutku t. Potprogram će na kraju zameniti ove vrednosti novim vrednostima u trenutku $t + \Delta t$. Za integraljenje diferencijalnih jednačina kretanja korišćena je standardna Runge-Kutta-Verner metoda petog odnosno šestog reda čime je, uz korišćenje dvostruke preciznosti svih podataka kojima program operiše, obezbeđena zavidna numerička tačnost.

• Da bi se jednačine kretanja uopšte mogle integraliti njih je prethodno potrebno formirati u obliku (2). Zato potprogram za integraljenje jednačina kretanja u svakoj iteraciji interno poziva rutinu koja će redom definisati: matrice transformacija $[A_i]$, vektore $\vec{e}_i$, $\vec{f}_{i\alpha}$, $\vec{t}_{i\alpha}$, kovarijantni metrički tenzor a_{ij}, parcijalne izvode $\partial a_{ij}/\partial q^k$, $\partial \Pi/\partial q^k$, kontravarijantni metrički tenzor a^{ij} i Kristofelove simbole $[i, j; k]$.

• Formirajući diferencijalne jednačine, program proverava da li je korisnik programa definisao nekonzervativne generalisane sile. Ovakve sile se zadaju u obliku potprogramskog modula koji se povezuje sa glavnim programom pre njegovog izvršenja. Ne postoje nikakva ograničenja u pogledu oblika funkcionalne zavisnosti generalisanih sila od generalisanih koordinata, brzina i vremena.

• Program saopštava vrednosti generalisanih koordinata i generalisanih brzina za svaki korak vremena.

• Tekuće vreme t se uvećava za Δt. Čitav proces integracije se ponavlja sve dok tekuće vreme ne pređe vrednost t_k.

• Korisnik programa može sada promeniti početne uslove kao i vremenski interval u kome se kretanje simulira, za isti mehanički sistem.

Za razvoj programa korišćen je programski jezik FORTRAN 77. Program ne zahteva nikakav naročito skup hardver, što znači da efikasno radi na svakom personalnom računaru. Rezultati rada programa se na računaru mogu jednostavno grafički interpretirati i analizirati.

5. PRIMER

Program razvijen u ovom radu biće testiran na primeru manipulatora sa 5 stepena slobode, tipa otvorenog kinematskog lanca. Manipulator je prikazan na slici 4. sa oznakama kao u [1], koje su naknadno prilagođene našem programu.

Potrebno je izvršiti simulaciju kretanja u vremenskom intervalu [0,2 s], gde su početni uslovi dati u tabeli 3 a nepotencijalne generalisane sile u tabeli 4.

Parametri sistema tela dati su u obliku:

• $n = 5$, $T(i) = (1, 0, 1, 0, 0)$, $L(i) = (0, 1, 2, 3, 4)$, $m(i) = (0,250,0,150,100)$,

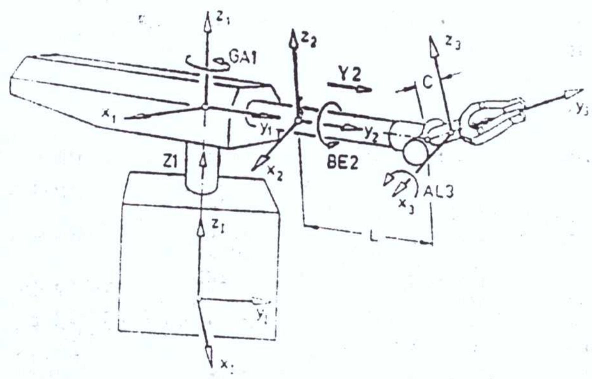
• $\tilde{\Theta}_{c(2)} = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix}$, $\tilde{\Theta}_{c(4)} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$,

$\tilde{\Theta}_{c(5)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.3 \end{bmatrix}$,

• $\vec{\rho}_{45} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{\rho}_{5\cdot} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \\ 0 \end{bmatrix}$.

• $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{e}_3 = \vec{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Navedene su samo nenulte vrednosti ulaznih podataka u osnovnim jedinicama SI-sistema.



Sl. 4 — Manipulator sa 5 stepeni slobode

Tabl. 3 — Početni uslovi

i	1	2	3	4	5
q^i_0	2.25 m	—0.5236 rad	0.75 m	0	0
$\dot{q}^i_0$	0	0	0	0	0

Premda ovaj primer u potpunosti ne koristi sve mogućnosti programa (nije »struktura drveta«), on pokazuje kako se kod sistema tela sa kinematskim parovima četvrte klase do rešenja dolazi uvođenjem fiktivnih tela nulte mase i dimenzija.

Drugi razlog testiranja programa na ovom primeru su rezultati drugih autora u monografiji [1] koji su do rešenja dolazili potpuno drugim putem. Upoređujući rezultate iz tabela 5 i 6 sa rezultatima na strani 102 u [1], vidi se da se oni podudaraju u granicama relativne greške od 1%, u vremenskom intervalu (0,1.5 s).

Tabl. 4 — Generalisane sile

	$0 < t \leq 0.5\,s$	$0.5\,s < t \leq 1.5\,s$	$1.5\,s < t \leq 2\,s$
Q^N_1 [N]	6348	4905	3462
Q^N_2 [Nm]	$673\,t - 508$	$8 + 148 \cdot e^{-5.3\,(t-0.5)}$	240
Q^N_3 [N]	$36\,t + 986$	—2	—1019
Q^N_4 [Nm]	0	0	0
Q^N_5 [Nm]	63.5	49.05	34.6

Tabl. 5 — Generalisane koordinate

t (s)	q^1 (m)	q^2 (rad)	q^3 (m)	q^4 (rad)	q^5 (rad)
.000	.225000E+01	—.523600E+00	.750000E+00	.000000E+00	.000000E+00
.250	.234019E+01	—.560046E+00	.874080E+00	—.386769E—05	.152502E—03
.500	.261074E+01	—.627858E+00	.125088E+01	—.358799E—04	.656207E—03
.750	.297149E+01	—.674278E+00	.175775E+01	—.251927E—04	.137331E—02
1.000	.333223E+01	—.700986E+00	.226656E+01	.721373E—04	.208736E—02
1.250	.369297E+01	—.718575E+00	.277604E+01	.228406E—03	.280101E—02
1.500	.405371E+01	—.731038E+00	.328568E+01	.430214E—03	.351626E—02
1.750	.432428E+01	—.738527E+00	.366806E+01	.767157E—03	.354052E—02
2.000	.441448E+01	—.741372E+00	.379580E+01	.129839E—02	.224853E—02

Tabl. 6 — Generalisane brzine

t (s)	$\dot{q}^1$ (m/s)	$\dot{q}^2$ (rad/s)	$\dot{q}^3$ (m/s)	$\dot{q}^4$ (rad/s)	$\dot{q}^5$ (rad/s)
.000	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00
.250	.721487E+00	—.251493E+00	.997262E+00	—.554623E—04	.124990E—02
.500	.144297E+01	—.257470E+00	.201980E+01	—.187921E—03	.287862E—02
.750	.144297E+01	—.134951E+00	.203270E+01	.241394E—03	.286025E—02
1.000	.144297E+01	—.847712E—01	.203707E+01	.519528E—03	.285394E—02
1.250	.144297E+01	—.583867E—01	.203847E+01	.722203E—03	.285651E—02
1.500	.144297E+01	—.425324E—01	.203849E+01	.887985E—03	.286676E—02
1.750	.721526E+00	—.194674E—01	.102035E+01	.177745E—02	—.267346E—02
2.000	.730982E—04	—.385238E—02	.149590E—02	.242043E—02	—.739376E—02

Na kraju napominjemo da su u ovom radu rezultati po pojedinim generalisanim koordinatama q_i, $i = 1, \ldots 5$ dati u nešto izmenjenom redosledu u odnosu na [1].

LITERATURA

[1] Schiehlen W. (Editor), **Multibody Systems Handbook**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[2] Попов Е. П., Верещагин А. Ф.,Зенкевич С. Л.,**Манипуляционные роботы**, Наука, Москва, 1978.

[3] Лурье А. И., **Аналитическая механика**, Гос. изд. физ.-мат. литературы, Москва, 1961.

[4] Čović V., Lukačević M., **Contribution to the Dynamics of Active Mechanisms**, ZAMM 67, (1987.) 4

[5] Rusov S., Čović V., **On a Mechanical Model of Industrial Robots as the Simplest System of Rigid Bodies I-III** ,International Seminar and Symposium "Automation and Robot", Belgrade, 1987.

[6] Wittenburg J., **Dynamics of Systems of Rigid Bodies**, B. G. Teubner, Stuttgart, 1977.

[7] Anđelić T., **Tenzorski račun**, Naučna knjiga, Beograd, 1987.

[8] Obradović A., **Optimalno upravljanje kretanjem sistema krutih tela** (magistarska teza), Mašinski fakultet, Beograd, 1990.