

UDK: 631.331

*Originalni naučni rad  
Original scientific paper*

## MATEMATIČKA INTERPRETACIJA PARAMETARA VIBRACIONOG DODAVAČA VOĆA PO MODELU MASA-OPRUGA-PRIGUŠIVAČ

**Dragan Marković\*, Milan Veljić, Vojislav Simonović, Ivana Marković***Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet, Beograd*

**Sažetak:** Vibracioni dodavači podležu oscilovanju i mogu se modelirati kao sistem masa-opruga-prigušivač. U ovom radu prikazana je detaljna analiza matematičkog modela i razmatrane razne mogućnosti u zavisnosti od stepena prigušenja. Prikazan je i vremenski odziv sistema. Primena ovog rada je u procesima projektovanja vibracionih dodavača kao i linija za preradu voća koje sadrže ove dodavače, naročito sa aspekta energetske efikasnosti. Rezultati istraživanja se mogu primeniti za ceo hidraulični i/ili pneumatski sistem, ili za izdvojeni deo sistema.

**Ključne reči:** *vibracioni dodavač, oscilacije, sopstvena frekvencija, stepen prigušenja, odziv.*

### UVOD

Proces sortiranja i kalibracije voća ogleda se u maloj produktivnosti i visokim troškovima radne snage za prebiranje i izdvajanje oštećenih plodova i sortiranja plodova po kvalitetu, boji i veličini. Zahtevi koji se postavljaju pri sortiranju i kalibriranju voća zavise i od prethodno primenjene tehnologije hlađenja i zamrzavanja plodova, kako bi se obezbedio kvalitet proizvoda sa što manje gubitaka u sledećim fazama prerade voća. Osim toga uslovi rada u hladnjačama, rad radnika na niskim temperaturama su otežani i nije realno očekivati da će se sa postojećom tehnologijom i opremom u budućnosti obezbediti dalji razvoj u ovoj oblasti [6].

---

\* Kontakt autor: Dragan Marković, Kraljice Marije 16, 11000 Beograd.  
E-mail: dmarkovic@mas.bg.ac.rs

Rezultati istraživanja su deo projekta Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj, program Tehnološki razvoj, pod nazivom „Istraživanje i razvoj opreme i sistema za industrijsku proizvodnju, skladištenje i preradu povrća i voća“, broj TR 35043.

Vibracioni dodavač se nalazi ispred ulaza u vazdušni separator i obezbeđuje pravilno raspoređivanje i doziranje voća. Primenuju se vibracioni transporter koji se istovremeno koriste za vršenje tehnoloških operacija i za funkciju transporta u toku procesa. odnosno za transport rasipnih materijala kao i dodavanje (hranjenje) materijalom drugih uređaja i transportera [7].

Njihov osnovni deo je korito koje se kreće oscilatorno. Kretanje materijala se postiže time što pri kretanju korita napred adhezioni sila između materijala i korita obezbeđuje kretanje materijala napred zajedno sa koritom, dok pri kretanju korita nazad materijal kliza po koritu. Korito je postavljeno na gumeno elastične elemente (gumene opruge). Zbog svojih elastičnih osobina i velikih mogućnosti najrazličitijih oblika, gumene opruge su našle široku primenu u praksi, posebno za aktivnu i pasivnu zaštitu, ili obezbeđivanje oscilovanja. Prilikom zajedničkog kretanja korita i materijala unapred kinetička energija materijala raste i troši se na njegovo kretanje [5].

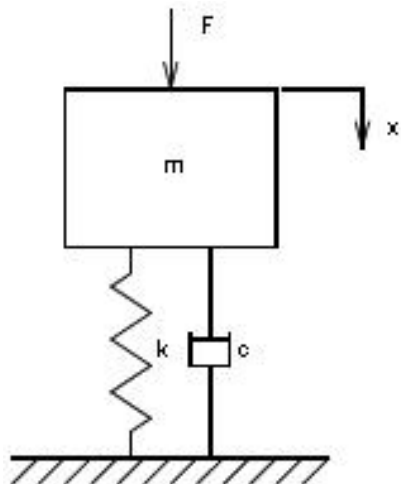


Slika 1. Platforma za prihvatanje smrznutog voća, prijemni koš sa zasunom i vibracioni dodavač-dozator

*Figure 1. The platform for the reception of frozen fruit, receiving the basket with bolt-feeder and vibratory feeder*

## MATERIJAL I METODE RADA

U modelu kojim će biti tretirani vibracioni dozatori bazirani na sistemima masa-opruga-prigušivač, masa tih pod sistema će biti redukovana na materijalnu tačku. Opruga može biti mehanička ili hidraulična, ali je prirast sile proporcionalan skraćanju opruge sa koeficijentom proporcionalnosti  $k$ . Iako opruga poseduje masu smatra se da je bez težine.



Slika. 2. Fizički oblik sistema masa - opruga – prigušivač

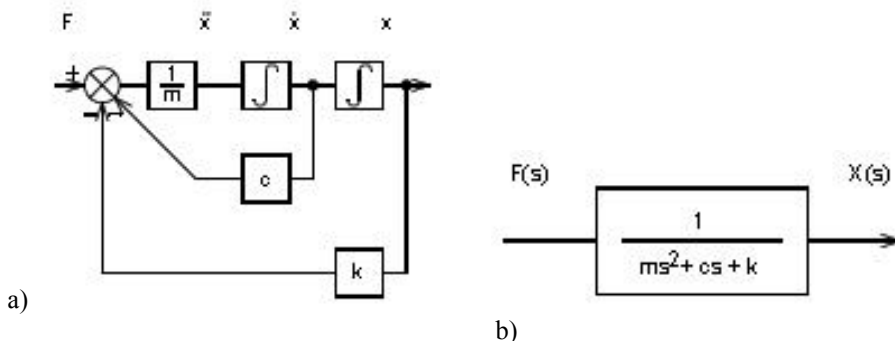
Figure. 2. The physical form of the system mass - spring - damper

Da bi se analizirao bilo koji sistem, moraju biti poznati početni uslovi. Za ove potrebe, to znači da sistem miruje i da je vremenski nepromenljiv pre dejstva sile. Ako pretpostavimo da je pomeranje  $x$  vertikalno, onda početni uslovi zahtevaju da opruga delimično preuzme težinu  $mg$ .

Nakon što se primenjuje sila, kretanje sistema može se odrediti primenom Njutnovog drugog zakona:

$$F(t) = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx \tag{1}$$

Za ovako postavljen matematički model sistema blok dijagram u vremenskom i kompleksnom domenu prikazani su na Sl. 3.



Slika 3. Blok dijagram sistema masa - opruga - prigušivač u vremenskom domenu (a), i u kompleksnom domenu (b) [2]

Figure. 3. Block diagram of the system mass - spring - damper in the time domain (a), in the complex domain (b)[2]

## REZULTATI ISTRAŽIVANJA I DISKUSIJA

Deljenjem jednačine (1) masom  $m$ , i uvođenjem prirodne učestanosti (učestanost neprigušene oscilacije)  $\omega_n$  i stepena prigušenja  $\zeta$ , dobijamo diferencijalnu jednačinu sistema u sledećem obliku [1]:

$$\frac{F(t)}{m} = \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x \quad (2)$$

gde su:

$$\zeta = \frac{1}{2}c\sqrt{\frac{1}{km}} \quad \text{i} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

Jednačina dva je obična diferencijalna jednačina drugog reda koja se može rešiti analitički koristeći Laplasovu transformaciju:

$$\mathcal{L}\left(\frac{F(t)}{m}\right) = \mathcal{L}(\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x) \quad (4)$$

$$\frac{F(s)}{m} = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)X(s) \quad (5)$$

Odskočna funkcija amplitude  $F$  može se transformisati kao  $F/s$ . Zbog toga Laplasova jednačina domena može da se preuredi u oblik pogodan za inverziju u vremenski domen [3]:

$$X(s) = \frac{F}{m} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right\} \quad (6)$$

Koreni jednačine u imeniocu dobijaju se na standardan način rešavanjem polinoma trećeg stepena kao:

$$s = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = \omega_n(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad (7)$$

Iz jednačine (5) proizilaze dva intervala rešenja. Ako je  $\zeta < 1$ , onda je rešenje za  $s$  par konjugovano kompleksnih rešenja, a u drugom slučaju ako je  $\zeta \geq 1$ , onda je rešenje gornje jednačine par nejednakih negativnih realnih korena.

Pri posmatranju intervala na kome je  $\zeta < 1$ , jednačina (6) može biti transformisana u oblik koji je čini lakšom za invertovanje u vremenski domen [3]:

$$X(s) = \frac{F}{\omega_n^2 m} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} \right\} \quad (8)$$

Posle nekih međukoraka, jednačina (6) se transformiše u oblik:

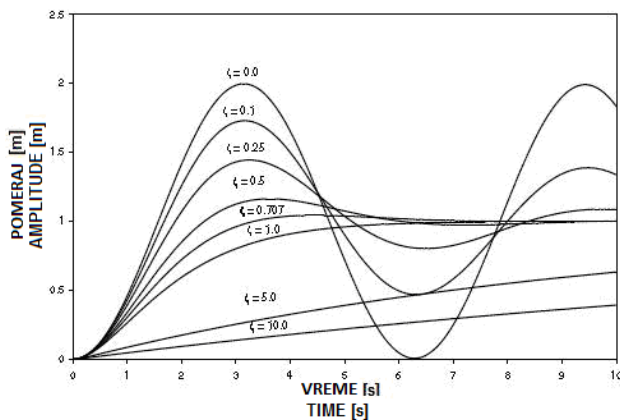
$$x(t) = \frac{F}{\omega_n^2 m} = \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \right\} \quad (9)$$

Pri posmatranju intervala na kome je  $\zeta \geq 1$ , jednačina (6) ima dva različita negativna korena u ovom intervalu i njena forma pre inverzije je [3]:

$$X(s) = \frac{F}{\omega_n^2 m} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \frac{1}{s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \right\} \quad (10)$$

$$x(t) = \frac{F}{\omega_n^2 m} = \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t} - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1} + \zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t} \right\} \quad (11)$$

Uticaj koeficijenta  $\zeta$  na karakter izlaznih oscilacija  $x(t)$  je prikazan na Graf. 1. Vrednost  $\zeta = 0$  je granična vrednost koja označava da ne postoji prigušenje. Tada je promena  $x(t)$  oscilatornog karaktera. Za vrednosti koeficijenta prigušenja ispod nule, dobija se  $x(t)$  sa vremenski rastućom amplitudom. Za drugi granični slučaj, ako je  $\zeta = 1$  onda je to kritično prigušenje pri kome iščezava prigušno oscilatoran karakter promene  $x(t)$ . Za koeficijent prigušenja oscilacija preko ove vrednosti,  $\zeta > 1$ , je  $x(t)$  aperiodična funkcija (ili, zbir aperiodičnih funkcija). Na vibracionim dodavačima podložnim oscilovanju najzastupljeniji je upravo slučaj prigušenih oscilacija pri kojima je koeficijent prigušenja oscilacija  $0 < \zeta < 1$ . Podešavanjem i optimizacijom ovog koeficijenta direktno se utiče na koeficijent punjenja naredne mašine u liniji za preradu voća i povrća [4].



Grafik. 1. Pomeraj u funkciji vremena za različite stepene prigušenja [1]

Chart. 1. Shift in function of time for different degrees of damping [1]

## ZAKLJUČAK

Nedostaci koji se javljaju kod vibracionih transportera su znatne dinamičke sile koje izazivaju oscilovanje noseće strukture, relativno mali kapacitet i veća potrošnja energije nego kod trakastih transportera. Prvi nedostatak se otklanja podešavanjem stepena prigušenja koji utiče i na količinu materijala koja se dozira na transportere ili u ambalažu za pakovanje. Potrebno je regulisanje vršiti frekventnim regulatorom tako da se stepen prigušenja prilagodi potrebnim uslovima vibriranja u cilju zahtevanog raspoređivanja

materijala kao i da se obezbede propisani uslova stabilnosti samog vibracionog dodavača.

### LITERATURA

- [1] Akers, A., Gassman, M., Smith, R., 2006. *Hidraulic power system analysis*, Taylor and Francis Group, New York, pp. 57-64.
- [2] Wu, J.J., 2004. *Free vibration analysis of beams carrying a number of two-degree-of-freedom spring-damper-mass systems*, Finite elements in analysis and design, Elsevier, pp. 135-137.
- [3] Pellicer, Marta, 2007. *Large time dynamics of a nonlinear spring-mass-damper*, Nonlinear Analysis, Elsevier, pp. 203-216.
- [4] Nysten, P., 1999. *Inverse eigenvalue problem: existence of special mass-damper-spring systems*, Linear algebra and its applications, Elsevier, pp.45-60.
- [5] Mladenović, N., Marković, D., 2009. *Numerical flow computation of fluid mixing*, Traktori i pogonske mašine, JUMTO, Vol. 14, No. 1, pp. 99-104.
- [6] Veljić, M., Mladenović, N., Marković, D., Čebela, Ž., 2010. *Optimization of parameters of a vibration system for sorting and calibrating deep frozen berry fruits*, Nacionalni časopis Procesna tehnika i energetika u poljoprivredi, Vol. 14, No. 2, pp. 93 – 97.
- [7] Veljić, M., Mladenović, N., Marković, D., Simonović, V., 2009. *Optimizacija parametara tehničkih rešenja za mašinsko branje košticevog i jagodičastog voća*, Poljoprivredna tehnika, Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Beogradu, Vol. 34, No. 3, pp. 85-94.

### MATHEMATICAL INTERPRETATION PARAMETERS OF DOZATOR FOR FRUITS ON THE BASE OF SPRING-MASS-DAMPER SYSTEM

**Dragan Marković, Milan Veljić, Vojislav Simonović, Ivana Marković**

*University of Belgrade, Faculty of Mechanical Engineering*

**Abstract:** Dozators are subject to oscillations, so that it may be modeling as spring-mass-damper systems. In this paper are shown extended analysis of mathematical models and various possibilities according to the degree of damping are discussed. System time response is shown also. Application of this paper can be found in projecting and design of vibrating dozators as well all systems for processing fruit which consist dozators, especially in the area of energy efficiency. Results of research may be applied for whole hydraulic or pneumatic system, or for particular parts of the system.

**Key words:** *dozator, oscillations, free frequency, degree of damping, response.*

Datum prijema rukopisa:	04.11.2011.
Datum prijema rukopisa sa ispravkama:	14.11.2011.
Datum prihvatanja rada:	15.11.2011.