FOURTH MATHEMATICAL CONFERENCE OF THE REPUBLIC OF SRPSKA
Trebinje, 6 and 7 June 2014

Primena PID kontrolera necelobrojnog reda za stabilizaciju linearnih sistema upravljanja

Petar D. Mandić
Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet
pmandic@mas.bg.ac.rs

Tomislav B. Šekara
Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
tomi@etf.rs

Mihailo P. Lazarević
Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet
mlazarevic@mas.bg.ac.rs

Originalni naučni rad

Abstract

Poslednjih decenija značajna pažnja naučne zajednice usmerena je na proučavanje linearnih frakcionih sistema, odnosno sistema opisanih linearnim diferencijalnim jednačinama necelobrojnog reda. Razlog za to je da se mnogi fizički sistemi mogu opisati diferencijalnim jednačinama ovog tipa, koje uključuju izvode necelobrojnog reda. PID kontroleri su, s druge strane, najzastupljeniji upravljački algoritmi u industriji, pre svega zbog svoje relativno jednostavne strukture i implementacije. Da bi se poboljšale performanse i robusnost klasičnog PID algoritma, uvodi se frakcioni PID ili $PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontroler, gde su λ i μ integrator i diferencijator necelobrojnog reda, respektivno. Problem stabilnosti sistema je jedan od osnovnih zahteva u teoriji upravljanja. Postoji više pristupa za rešavanje ovog problema, medju kojima je i metoda D-razlaganja. U ovom radu, metoda D-razlaganja je uopštena i proširena za klasu linearnih diferencijalnih frakcionih jednačina, koje svoju primenu imaju u teoriji upravljanja. Razmatran je slučaj linearne zavisnosti parametara, a u konkretnom primeru opisan je i način na koji se izloženi postupak može iskoristiti i za rešavanje problema nelinearne parametarske zavisnosti. Prikazan je jednostavan i efikasan algoritam za odredjivanje granica stabilnosti u parametarskoj ravni. Testiranje ispravnosti predloženog algoritma izvršeno je u numeričkoj simulaciji u programskom paketu Matlab.

1 Uvod

Pri specifikaciji tehničkih zahteva za projektovanje sistema automatskog upravljanja prvo se mora uzeti u obzir najvažniji faktor, a to je stabilnost sistema. željeno dinamičko ponašanje objekta upravljanja može se ostvariti njegovom spregom sa upravljačkim uredjajima, koji svojim dejstvom treba da obezbedi zadovoljavajuće ponašanje celokupnog sistema. Sada se postavlja pitanje, kako treba izabrati podešljive parametre upravljačkog uredjaja da se ostvari postavljeni cilj. U opštem slučaju, zadato dinamičko ponašanje se može ostvariti u većem broju slučajeva i pri različitim kombinacijama vrednosti podešljivih parametara upravljačkog sistema, što znači da njihov izbor ne mora da bude jednoznačan.

Svakako da je prvi i osnovni zadatak da se obezbedi stabilan rad sistema upravljanja. Skup promenljivih parametara za koje je razmatrani sistem stabilan, čine oblast stabilnosti sistema. Upravo to čini suštinu metode D-razlaganja. Osnovna ideja te metode je da se odredi skup svih vrednosti podešljivih parametara za koje će razmatrani sistem biti stabilan. Time se u ravni podešljivih parametara dobijaju oblasti oivičene otvorenim ili zatvorenim konturama koje predstavljaju potencijalne oblasti stabilnosti [1]. Korišćenjem odgovarajućih postupaka utvrdjuje se kasnije koja od dobijenih oblasti, ukoliko postoji, predstavlja traženi skup podešljivih parametara za koji je sistem stabilan.

U ovom radu ćemo se ograničiti isključivo na linearne frakcione sisteme. Tačnije posmatrajmo stacionaran kontinualan frakcioni linearan sistem sa koncentrisanim parametrima. Dinamičko ponašanje takvog sistema se u potpunosti može okarakterisati diferencijalnom jednačinom ponašanja. Karakteristična jednačina takvog sistema glasi:

$$f(s) = a_n s^{b_n} + \ldots + a_k s^{b_k} + \ldots + a_0 s^{b_0} = 0 \tag{1}$$

gde je s kompleksna promenljiva, a_k i b_k $(k = 0, 1, 2 \ldots, n)$ linearne funkcije parametara α i β , pri čemu je $b_0 < b_1 < \ldots < b_n$.

2 Osnove računa necelobrojnog reda. Frakcioni PID kontroler

Za račun necelobrojnog reda (frakcioni račun) zna se već više od 300 godina, ali njegova primena u fizici i tehnici stara je tek nekoliko decenija. Sami koreni računa necelobrojnog reda vezuju se za korespondenciju koja je ostvarena izmedju Lopitala i Lajbnica, i to u vreme kad su Njutn i Lajbnic postavljali osnove diferencijalnog i integralnog računa. Račun necelobrojnog reda je generalizacija običnog (klasičnog) istoimenog računa [2, 3]. U matematičkom smislu, za razliku od klasičnog računa, ovde stepen može biti realan odnosno kompleksan broj, pa frakcioni račun ima potencijal da ostvari ono što obični integralno-diferencijalni račun ne može.

Tri definicije se najčešće koriste za račun necelobrojnog reda. Leva Riemann-Liouville definicija frakcionog izvoda je data sa [4]:

$${}^{RL}_{\ a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\, d\tau, \tag{2}$$

za $n - 1 \leq \alpha < n$, gde je $\Gamma(.)$ dobro poznata gama funkcija:

$$\Gamma(z) = \int d^{-t} t^{z-1}\, dt, z \in C \tag{3}$$

Grunwald-ova definicija [5], pogodna za numeričko računanje,data je sa:

$$^{GL}D_a^\alpha f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{[t-a/h]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \tag{4}$$

gde su a, t granice operatora, a $[x]$ je celobrojni deo od x. Izraz $\binom{\alpha}{j}$ predstavlja generalizovani binomijalni koeficijent, gde su faktorijali zamenjeni sa odgovarajućom gama funkcijom.

Takodje, koristi se i definicija levog frakcionog izvoda koju je uveo Caputo [6], a koja glasi:

$$^{C}_{a}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\, d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \tag{5}$$

Caputo-va i Riemann-Liouville-va definicija frakcionog izvoda se podudaraju kada su početni uslovi jednaki nuli.

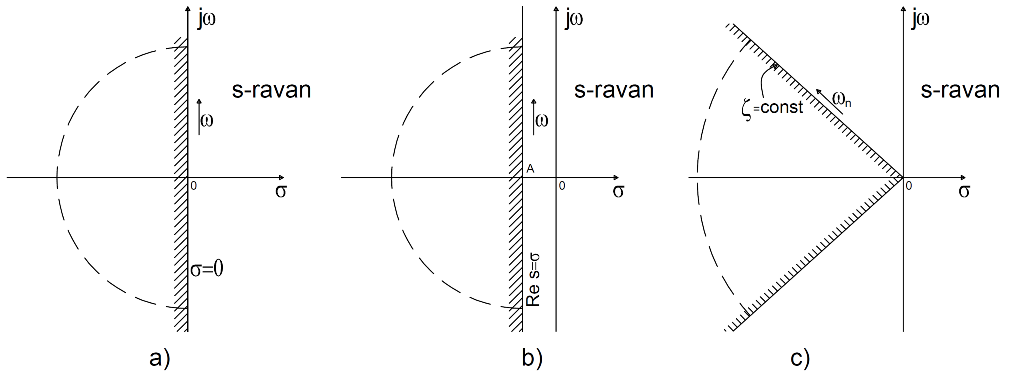
U teoriji upravljanja, cilj uvodjenja frakcionog računa je primena istoimenih kontrolera zarad poboljšanja performansi objekta upravljanja, tj. boljeg ponašanja sistema u prisustvu poremećajnih veličina i manje osetljivosti sistema na promenu parametara (veća robusnost). Frakcioni PID kontroler je generalizacija klasičnog (celobrojnog) PID kontrolera [7]. U literaturi je prisutna i oznaka $PI^\lambda D^\mu$ za ovu vrstu kontrolera zato što uključuje integrator i diferencijator necelobrojnog reda λ i μ , respektivno. Jednačina frakcionog PID kontrolera u vremenskom domenu je:

$$u(t) = K_P\, e(t) + K_I D^{-\lambda} e(t) + K_D D^\mu e(t) \tag{6}$$

gde je $u(t)$- izlaz iz kontolera, $e(t)$- ulaz u kontroler, K_P, K_I, K_D- koeficijenti proporcionalnog, integralnog i diferencijalnog pojačanja respektivno, a $D^{-\lambda}$ i D^μ odgovarajući integralni i diferencijalni operatori necelobrojnog reda. Za $\lambda = \mu = 1$ dobijamo jednačinu klasičnog PID upravljačkog algoritma. Upravo zbog dodatna dva podešljiva koeficijenta (λ i μ), frakcioni PID je fleksibilniji u odnosu na klasični, i daje mogućnost boljeg podešavanja dinamičkih osobina sistema. S druge strane, veći broj stepeni slobode čini problem optimalnog podešavanja parametara sistema znatno komplikovanijim u poredjenju sa konvencionalnim PID kontrolerom.

3 Stabilnost sistema

Potreban i dovoljan uslov za stabilnost sistema jeste svi koreni karakteristične jednačine (1) imaju negativne realne delove ili, drugim rečima, da leže u levoj poluravni kompleksne promenljive s (Slika 1a). Sistem će biti nestabilan ako se jedan ili više korena karakteristične jednačine nalaze u desnoj poluravni s-ravni ili ako jedan ili više višestrukih korena karakteristične jednačine leže na imaginarnoj osi s-ravni. Sistem će biti granično stabilan ako njegova karakteristična jednačina nema korena u desnoj poluravni, a pri tome ima bar jedan prost (jednostruk) koren na imaginarnoj osi [8].



Slika 1: Konture u s-ravni

U stabilnom sistemu, prelazni proces iščezava kada $t \to \infty$, a za to je potrebno i dovoljno da realni delovi svih korena budu negativni. Medjutim, evidentno je da će prelazni proces brže iščezavati ako su negativni delovi svih korena karakteristične jednačine veći po apsolutnoj vrednosti. Na taj način, od sistema se može zahtevati ne samo da bude stabilan, već se može specificirati zahtev da mu svi koreni karakteristične jednačine budu sa negativnim delovima, koji su po apsolutnoj vrednosti veći od nekog unapred zadatog $\sigma = \text{const.}$, odnosno da svi koreni karakteristične jednačine leže levo od prave $\mathrm{Re}\, s = \sigma$ u s-ravni, tj. unutar konture C na slici 1b. Za sistem koji ispunjava ovaj zahtev kažemo da poseduje vreme smirenja prelaznog procesa manje od nekog unapred zadatog.

Na sličan način mogu se specificirati i drugi domeni u s-ravni u kojima se zahteva da budu locirani svi koreni karakteristične jednačine sistema. Od posebnog interesa je domen pokazan na slici 1c. Specificiranjem ovog domena posebna pažnja se posvećuje lokaciji parova konjugovano kompleksnih korena karakteristične jednačine:

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega = -\omega_n \varsigma \pm j\omega_n \sqrt{1 - \varsigma^2} \tag{7}$$

Naime, zahteva se da svi kompleksni koreni krakteristične jednačine imaju odgovarajuće ς veće od nekog unapred zadatog $\varsigma = \text{const.}$ Prisustvo kompleksnih korena u rešenju karakteristične jednačine uslovljava oscilatorni karakter komponenti prelaznog procesa sistema, stoga zahtev da svi koreni budu unutar domena na slici 1c u stvari predstavlja zadato ograničenje u pogledu maksimalno dozvoljenih amplituda oscilatornih komponenti prelaznog procesa u sistemu. Stoga za ove sisteme kažemo da imaju unapred zadati stepen relativne stabilnosti ograničen faktorom relativnog prigušenja $\varsigma = \text{const.}$

4 Metoda D razlaganja

Uopštavajući ranije postojeće rezultate, i dozvoljavajući da se dva podešljiva parametra α i β nadju u bilo kom koeficijentu karakteristične jednačine, ruski naučnik Neimark [9, 10] ustanovio je metodu D-razlaganja. Osnovna postavka te metode polazi od zahteva da se u parametarskoj ravni (α, β), odredi skup svih vrednosti podešljivih parametara za koje će razmatrani sistem, dat svojom karakterističnom jednačinom, biti stabilan. Znamo da će se se sistem nalaziti na granici stabilnosti ako njegova karakteristična jednačina nema korena sa pozitivnim realnim delovima, a ima jedan ili više jednostrukih korena na imaginarnoj osi s-ravni. Uslov da se sistem nadje na granici stabilnosti, tj. da jednačina (1) ima u rešenju jednostruke korene na imaginarnoj osi s-ravni, može se izraziti relacijom

$$f(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega) = 0 \tag{8}$$

ili

$$u(\omega) = 0, \quad v(\omega) = 0 \tag{9}$$

Pretpostavimo da svi parametri sistema imaju konstantne vrednosti, osim dva, α i β, čiji uticaj na stabilnost sistema želimo da analiziramo [8]. Ova dva podešljiva parametra biće, na neki način, sadržana u koeficijentima karakteristične jednačine:

$$a_k = a_k(\alpha, \beta) \tag{10}$$

Ako u ovom slučaju smenimo $s = j\omega$ u karakterističnu jednačinu, dobićemo:

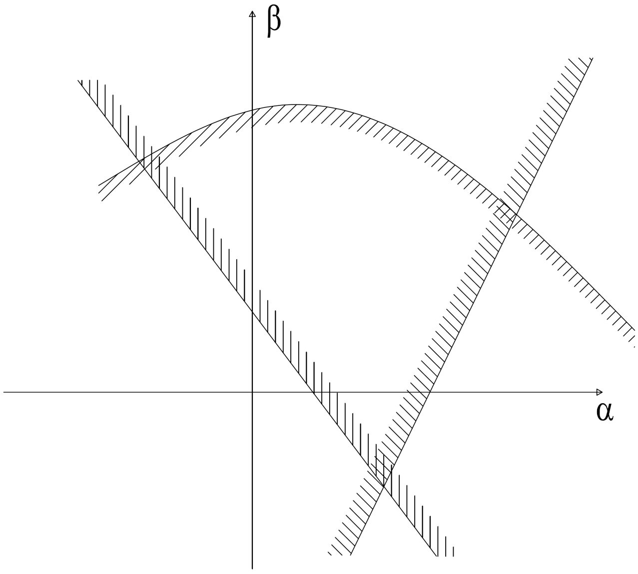
$$u(\omega, \alpha, \beta) = 0, \quad v(\omega, \alpha, \beta) = 0 \tag{11}$$

Ako su jednačine (11) medjusobno nezavisne, one se mogu rešiti po α i β:

$$\alpha = f_1(\omega), \quad \beta = f_2(\omega) \tag{12}$$

Zadavajući učestanosti ω razne vrednosti od 0 do ∞, u ravni parametara α i β se, pomoću relacija (12) može nacrtati familija krivih, koje se nazivaju krivama dekompozicije ili krivama razlaganja. One će u stvari predstavljati granicu domena stabilnosti iz s-ravni, preslikanu pomoću relacija (12) u ravan podešljivih parametara α i β. Pomenuta familija krivih dekomponuje parametarsku ravan na više oblasti. Svakoj od tih oblasti odgovaraće tačno odredjen broj korena karakteristične jednačine, koji se nalaze u levoj poluravni s-ravni.

Krive razlaganja se mogu razumeti i kao geometrijska mesta tačaka u (α, β) ravni duž kojih karakteristična jednačina sistema ima u rešenju korene na imaginarnoj osi s-ravni. Zbog toga, u oblasti sa jedne strane krive dekompozicije karakteristična jednačina će imati jedan ili dva korena više u levoj poluravni nego sa suprotne strane ove krive i to u zavisnosti od toga da li ta kriva predstavlja geometrijsko mesto jednog realnog ($\sigma = 0$) ili para konjugovano kompleksnih korena karakteristične jednačine na imaginarnoj osi s-ravni. Radi što lakšeg odredjivanja broja korena karakteristične jednačine sa negativnim realnim delovima, koji odgovara svakoj od pojedinih oblasti u parametarskoj (α, β) ravni, krive razlaganja se šrafiraju i to sa strane domena kome odgovara veći broj ovih korena, slika 2.



Slika 2: Krive razlaganja u (α, β) parametarskoj ravni

Oblast kojoj odgovara najveći broj korena karakteristične jednačine u levoj poluravni s-ravni, predstavlja tzv. potencijalnu oblast stabilnosti, tj. oblast koja pretenduje da bude oblast stabilnosti u (α, β) ravni. Da bi ona to zaista i bila, potrebno je dokazati da za jednu, proizvoljnu tačku unutar te oblasti karakteristična jednačina ima sve korene sa negativnim realnim delovima, tj. da je broj ovih korena, koji odgovara potencijalnoj oblasti jednak n, gde je n stepen karakteristične jednačine. ako se pokaže da je taj broj manji od n, to će značiti da ne postoji ni jedan par vrednosti parametar α i β za koji je posmatrani sistem stabilan. Drugim rečima, u odnosu na te parametre sistem je strukturno nestabilan.

Pri nanošenju šrafure potrebno je rukovoditi se sledećim pravilom, koje navodimo bez dokaza. Ako se po apscisnoj osi parametarske ravni nanosi parametar α, a po ordinati β, tada se šrafura nanosi u smeru zavisnom od znaka Jakobijana:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \alpha} \tag{13}$$

Ako je pri kretanju duž krive razlaganja u smeru porasta ω Jakobijan J pozitivan, kriva se šrafira sa leve strane, gledano u smeru porasta ω, pri negativnom J, s desne.

Utvrdjivanje da li potencijalna oblast stabilnosti predstavlja zaista oblast stabilnosti može se izvršiti primenom nekog od algebarskih (Raus, Hurvic), grafoanalitičkih (Najkvist) kriterijuma, ili numeričkom simulacijom, a za proizvoljno izabranu tačku unutar te potencijalne oblasti stabilnosti.

U daljem izlaganju posmatraće se problemi izdvajanja stabilne oblasti u slučaju kada se parametri α i β javljaju linearno u koeficijentima karakteristične jednačine. Tad relacije (10) postaju:

$$a_k = a_k(\alpha, \beta) = c_k\alpha + d_k\beta + e_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{14}$$

gde koeficijenti c_k, d_k, i e_k imaju konstantne vrednosti. Posle zamene (14) u karakterističnu jednačinu (1), dobija se:

$$f(s) = \alpha P(s) + \beta Q(s) + R(s) \tag{15}$$

gde su $P(s), Q(s)$ i $R(s)$ odgovarajući polinomi po s sa realnim koeficijentima. Postavljajući $s = j\omega$ u (15) i zatim izjednačavajući realni i imaginarni deo sa nulom, dobija se:

$$\begin{aligned} \alpha P_1(\omega) + \beta Q_1(\omega) + R_1(\omega) = 0 \\ \alpha P_2(\omega) + \beta Q_2(\omega) + R_2(\omega) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

gde su $P(j\omega) = P_1(\omega) + jP_2(\omega)$, $Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega)$, i $R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega)$. Rešavajući jednačine (16), dobijamo izraze za α i β u obliku:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{Q_1(\omega)R_2(\omega) - Q_2(\omega)R_1(\omega)}{\Delta} \\ \beta &= \frac{R_1(\omega)P_2(\omega) - R_2(\omega)P_1(\omega)}{\Delta} \end{aligned} \tag{17}$$

gde je

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} = P_1(\omega)Q_2(\omega) - Q_1(\omega)P_2(\omega) \tag{18}$$

Pri tom su mogući sledeći slučajevi.

1. Determinanta Δ nije jednaka nuli i R_1 i R_2 nisu jednovremeno jednaki nuli. Jednačine (16) su linearno nezavisne i rešenje (17) za dato ω odredjuje odgovarajuću tačku u (α, β) ravni.

2. Za neku vrednost ω determinanta Δ je jednaka nuli, a brojioci u izrazima za α i β tada nisu jednovremeno jednaki nuli. Tada su jednačine (16) nesaglasne i nemaju konačno rešenje. Odgovarajuća tačka u (α, β) ravni se nalazi u beskonačnosti i nju nije moguće naneti na grafik.

3. Pri nekoj vrednosti ω i brojioci izraza za α i β i determinanta Δ jednovremeno postaju jednaki nuli, tj. parametri α i β postaju neodredjeni. U tom slučaju, kao što je poznato jednačine (16) postaju linearno zavisne, tj. jedna od njih postaje jednaka drugoj ako se pomnoži sa odgovarajućom konstantom. Ovoj vrednosti za u (α, β) ravni odgovara prava linija

$$\alpha P_1 + \beta Q_1 + R_1 = 0 \tag{19}$$

koja se naziva singularnom pravom [11]. Ona ne ulazi u familiju krivih dekompozicije, pošto svim tačkama te prave odgovara ista vrednost za ω, pa se kretanje duž prave u smeru porasta ω ne može odrediti. Uočimo da vrednosti $\omega = 0$ uvek odgovara singularna prava u (α, β) ravni. Naime, $P_2(\omega), Q_2(\omega), R_2(\omega)$ su neparne funkcije po ω, pa se ω uvek može izvući kao faktor u izrazima za ove funkcije: $P_2(\omega) = \omega P_{20}(\omega)$, $Q_2(\omega) = \omega Q_{20}(\omega)$, $R_2(\omega) = \omega R_{20}(\omega)$. Kada je $\omega = 0$, dobija se $\alpha = 0/0$, $\beta = 0/0$ tj. dobijamo singularnu pravu. Ova prava se neposredno može dobiti iz jednačina (16):

$$\begin{aligned} &\alpha P_1(0) + \beta Q_1(0) + R_1(0) = 0 \\ &\omega\left(\alpha P_{20}(0) + \beta Q_{20}(0) + R_{20}(0)\right) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Nije teško uočiti da ova prava odgovara slobodnom članu karakteristične jednačine izjednačenim sa nulom: $a_0(\alpha, \beta) = b_0\alpha + c_0\beta + d_0 = 0$. Dakle, ova prava predstavlja geometrijsko mesto tačaka u (α, β) ravni duž koga karakteristična jednačina ima u rešenju jedan prost koren $s = 0$ u koordinatnom početku s-ravni.

Singularna prava se može pojaviti i za vrednost različite ω od nule. U (α, β) ravni takva jedna prava će predstavljati granicu vrednosti parametara α i β pri kojoj par kompleksnih korena karakteristične jednačine prelazi preko imaginarne ose iz jedne poluravni s-ravni u drugu.

Za vrednost $\omega = \infty$ takodje se može pojaviti singularna prava. Ovaj slučaj nastupa kad god se jedan od parametara α ili β ili oba pojavljuju u koeficijentu a_n najstarijeg člana karakteristične jednačine (1). Jednačina ove prave se može dobiti iz uslova $a_n(\alpha, \beta) = b_n\alpha + c_n\beta + d_n = 0$ pošto promena znaka za a_n narušava uslove stabilnosti sistema. Ova prava će predstavljati granicu u (α, β) ravni preko koje jedan koren karakteristične jednačine prelazi kroz beskonačnost iz jedne u drugu poluravan s-ravni.

Singularna prava se šrafira ukoliko ima bar jednu zajedničku tačku sa krivom razlaganja za istu vrednost učestanosti ω . Ako singularna prava asimptotski teži krivoj razlaganja onda se u beskonačnosti šrafura prenosi sa krive razlaganja na singularnu pravu. Ako pak u zajedničkoj tački za pripadnu vrednost učestanosti i determinanta Δ menja znak tada će u toj tački signularna promeniti stranu svoje šrafure. Singularna prava ne menja stranu svoje šrafure ako u tačkama preseka sa krivom razlaganja determinanta Δ ne menja znak [1].

5 Numerički primer i simulacija rezultata

Neka je data karakteristična jednačina sistema u sledećem obliku [12]:

$$f(s) = s^4 + k_3\alpha s^2 s^\mu + \beta s^2 s^\lambda + k_2 s^2 + k_1\alpha s^\mu + k_0 \tag{21}$$

gde su α i β podešljivi parametri sistema, λ i μ izvodi necelobrojnog reda, a $k_3, k_2, k_1, k_0 \neq 0$ konstantni koeficijenti. Podešljivi parametri sistema α i β , se pojavljuju linearno u koeficijentima karakteristične jednačine. Vrednost necelobrojnih izvoda λ i μ kreće se u opsegu od 0 do 2. Koristeći gore opisani postupak D razlaganja, odredimo oblast stabilnosti navedenog sistema u (α, β) ravni. Kao što je već rečeno, krive razlaganja predstavljaju geometrijsko mesto tačaka u (α, β) ravni za koje karakteristični polinom (21) ima nule na imaginarnoj osi. Zamenjujući $s = j\omega$ u (21) i izjednačavajući dobijeni izraz sa nulom, dobijamo:

$$f(j\omega) = \omega^4 - k_3\alpha\omega^2(j\omega)^\mu - \beta\omega^2(j\omega)^\lambda - k_2\omega^2 + k_1\alpha(j\omega)^\mu + k_0 \tag{22}$$

Gornja jednačina se može napisati kao:

$$f(j\omega) = u(\omega, \alpha, \beta) + jv(\omega, \alpha, \beta) \tag{23}$$

gde $u(\omega, \alpha, \beta)$ i $v(\omega, \alpha, \beta)$ predstavljaju realni i imaginarni deo jednačine (22). Izrazi $(j\omega)^\mu$ i $(j\omega)^\lambda$ koji se pojavljuju u istoj jednačini, mogu se izraziti kao

$$(j\omega)^\mu = \omega^\mu \left(\cos(0.5\mu\pi) + j\sin(0.5\mu\pi)\right), \quad \omega \geq 0 \tag{24}$$

Izjednačavajući realni i imaginarni deo jednačine (23) sa nulom, dobijamo sledeći sistem od dve jednačine:

$$\begin{bmatrix} U_1(\omega, \mu, \lambda) & U_2(\omega, \mu, \lambda) \\ V_1(\omega, \mu, \lambda) & V_2(\omega, \mu, \lambda) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1(\omega) \\ Q_2(\omega) \end{pmatrix} \tag{25}$$

gde su

$$\begin{aligned} U_1(\omega, \mu, \lambda) &= (k_1 - k_3\omega^2)\,\omega^\mu \cos(0.5\mu\pi) \\ U_2(\omega, \mu, \lambda) &= -\omega^{2+\lambda} \cos(0.5\mu\pi) \\ V_1(\omega, \mu, \lambda) &= (k_1 - k_3\omega^2)\,\omega^\mu \sin(0.5\mu\pi) \\ V_2(\omega, \mu, \lambda) &= -\omega^{2+\lambda} \sin(0.5\mu\pi) \\ Q_1(\omega) &= -\omega^4 + k_2\omega^2 - k_0 \\ Q_2(\omega) &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

Rešavanjem (25) po α i β, dobija se:

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}, \quad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} \tag{27}$$

pri čemu su

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(\omega, \mu, \lambda) & U_2(\omega, \mu, \lambda) \\ V_1(\omega, \mu, \lambda) & V_2(\omega, \mu, \lambda) \end{vmatrix} \tag{28}$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} Q_1(\omega) & U_2(\omega, \mu, \lambda) \\ 0 & V_2(\omega, \mu, \lambda) \end{vmatrix}, \quad \Delta_\beta = \begin{vmatrix} U_1(\omega, \mu, \lambda) & Q_1(\omega) \\ V_1(\omega, \mu, \lambda) & 0 \end{vmatrix} \tag{29}$$

Lako se pokazuje da je glavna determinanta sistema jednaka:

$$\Delta = (k_1 - k_3\omega^2)\,\omega^{\mu+\lambda+2} \sin(0.5(\mu - \lambda)\pi) \tag{30}$$

Sračunavajući pomoću jednačina (27) vrednosti za α i β pri raznim ω , a za $\Delta \neq 0$, dobijaju se krive razlaganja. Drugim rečima, pri prelasku ovih krivih, dva korena karakteristične jednačine sistema prelaze imaginarnu osu u s-ravni s jedne na drugu stranu.

Sada ćemo detaljnije analizirati slučaj kada je $\Delta = 0$. Iz (30) sledi da je ovo tačno za $\omega = 0$ ili $\mu - \lambda = i, \forall i = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$. U prvom slučaju kada je $\omega = 0$, jednačine (26) glase:

$$\begin{aligned} U_1(0,\mu,\lambda) = 0 \quad U_2(0,\mu,\lambda) &= 0 \quad Q_1(0) = k_0 \\ V_1(0,\mu,\lambda) = 0 \quad V_2(0,\mu,\lambda) &= 0 \quad Q_2(0) = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Iz (25) i (31) sledi $0 = -k_0$. Ovo ne može biti tačno za $k_0 \neq 0$, pa sledi da system (25) nema singularnu pravu kada je $\omega = 0$. U drugom slučaju, glavna determinanta Δ je jednaka nuli za $\mu - \lambda = i, \forall i = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$. S obzirom da se vrednost fracionih izvoda μ, λ kreće u intervalu $(0, 2)$, sledi da je $\mu - \lambda = 0$. Sada za $\mu = \lambda$, jednačine (26) glase:

$$\begin{aligned} U_1(\omega,\mu,\mu) &= (k_1 - k_3\omega^2)\,\omega^\mu \cos(0.5\mu\pi) \\ U_2(\omega,\mu,\mu) &= -\omega^{2+\mu}\cos(0.5\mu\pi) \\ V_1(\omega,\mu,\mu) &= (k_1 - k_3\omega^2)\,\omega^\mu \sin(0.5\mu\pi) \\ V_2(\omega,\mu,\mu) &= -\omega^{2+\mu}\sin(0.5\mu\pi) \\ Q_1(\omega) &= -\omega^4 + k_2\omega^2 - k_0 \\ Q_2(\omega) &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Sistem jednačina (25) može se napisati kao:

$$\omega^\mu \cos(0.5\mu\pi)\left[(k_1 - k_3\omega^2)\alpha - \omega^2\beta\right] = -\omega^4 + k_2\omega^2 - k_0 \tag{33}$$

$$\omega^\mu \sin(0.5\mu\pi)\left[(k_1 - k_3\omega^2)\alpha - \omega^2\beta\right] = 0 \tag{34}$$

što vodi do (za $\mu = \lambda \neq 0$):

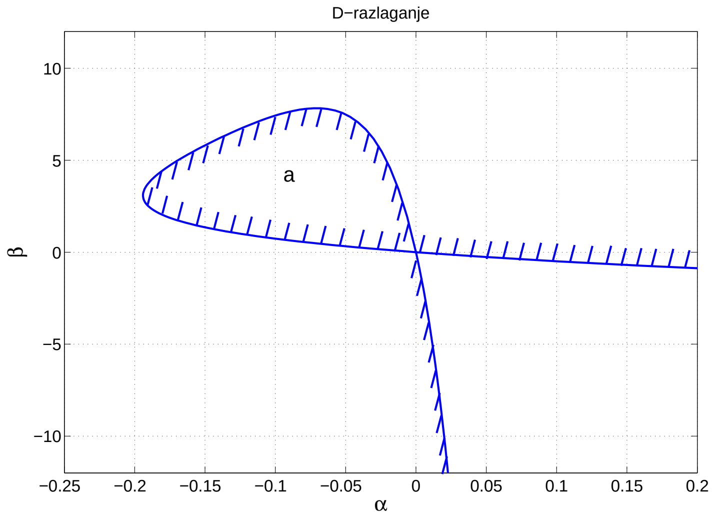
$$d(\omega) = -\omega^4 + k_2\omega^2 - k_0 = 0 \tag{35}$$

Frekvencija ω_s za koju važi $d(\omega_s) = 0$ odredjuje singularnu liniju. U ovom slučaju je $\Delta = \Delta_\alpha = \Delta_\beta = 0$, i u parametarskoj ravni nemamo samo jednu tačku, već pravu liniju. Ova singularna prava se može dobiti iz (33) ili (34):

$$\beta = \frac{k_1 - k_3\omega_s^2}{\omega_s^2}\alpha \tag{36}$$

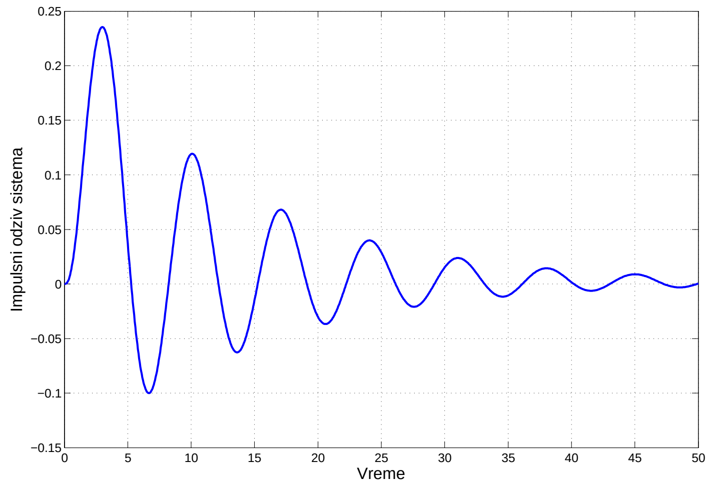
Iz jednačina (27) i (36) se odredjuju granice stabilnosti za sistem (22) u parametarskoj (α, β) ravni, a za fiksne vrednosti k_3, k_2, k_1, k_0, μ i λ.

Simulacija izvedenog algoritma za odredjivanje granica stabilnosti u parametarskoj (α, β) ravni izvršena je u Matlab programskom paketu. Za sledeće vrednosti koeficijenata $k_3 = 1.3$, $k_2 = 6$, $k_1 = -45$, $k_0 = 1$, $\mu = 0.7$ i $\lambda = 1.1$, sračunate su vrednosti parametara α i β pri raznim ω, i dobijena kriva razlaganja je prikazana na slici 3. Singularna prava u ovom slučaju ne postoji, jer je $\mu \neq \lambda$. Šrafiranje krive izvršeno je prema ranije navedenom pravilu.



Slika 3: Krive razlaganja u (α, β) parametarskoj ravniza sistem u primeru

Da bismo proverili da li je naša potencijalna oblast zaista stabilna, izaberimo proizvoljnu tačku a na slici 3. unutar te oblasti. Sada vrednosti (α, β) parametara dobijaju konkretne vrednosti $(\alpha = -0.1, \beta = 5)$. Za te vrednosti parametara izvršena je numerička simulacija impulsnog odziva sistema $1/f(s)$ u Matlab okruženju, i dobijeni odziv je prikazan na slici ispod. Vidimo da prelazni proces iščezava kada $t \to \infty$, što je u saglasnosti sa definicijom stabilnog sistema.



Slika 4: Impulsni odziv sistema $1/f(s)$

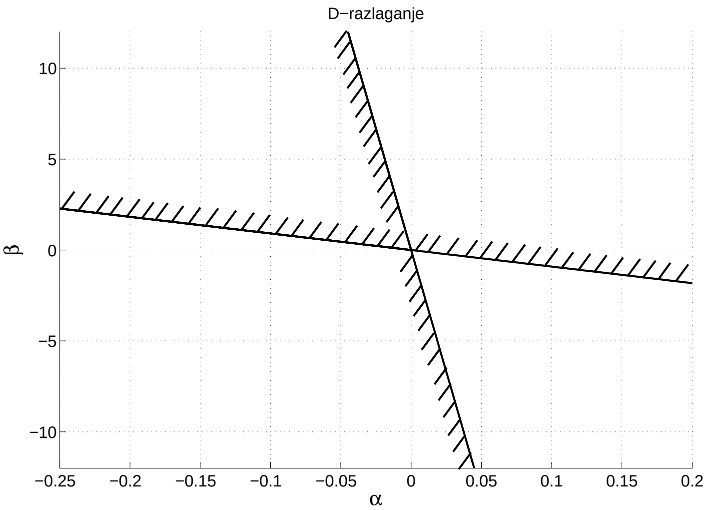
U slučaju da je $\mu = \lambda = 1.1$ (koeficijenti k_3, k_2, k_1, k_0 ne menjaju svoje vrednosti), parametarska ravan (α, β) odredjena je samo singularnim pravama, kao što je prikazano na slici 5. Tada je polinom (35) jednak nuli za $\omega^*_{1,2} = \pm 2.41$ i $\omega^*_{3,4} = \pm 0.41$, važi $\Delta = \Delta_\alpha = \Delta_\beta = 0$ i singularne prave imaju sledeći oblik:

$$\beta_1 = -9.11\alpha, \quad \beta_2 = -267.2\alpha \tag{37}$$

Kriva razlaganja u ovom slučaju ne postoji, jer jednačine (25) sada glase:

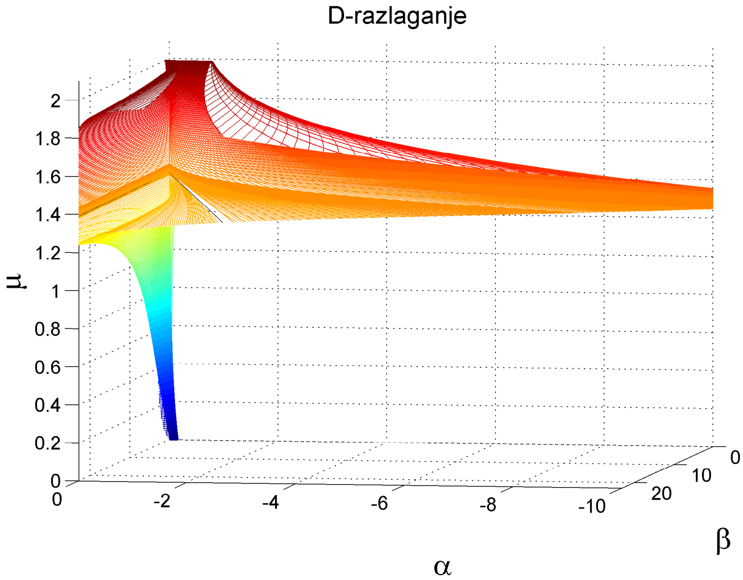
$$\begin{aligned} &\omega^{1.1}\cos(\frac{1.1\pi}{2})\left[(-45 - 1.3\omega^2)\alpha - \omega^2\beta\right] = -\omega^4 + 6\omega^2 - 1 \\ &\omega^{1.1}\sin(\frac{1.1\pi}{2})\left[(-45 - 1.3\omega^2)\alpha - \omega^2\beta\right] = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

i one su nesaglasne za $\forall\omega \neq \{\pm 2.41, \pm 0.41\}$. Za $\omega = \omega^*$ jednačine (25) postaju linearno zavisne i odredjuju već pomenute singularne prave.



Slika 5: Singularne prave u (α, β) parametarskoj ravni za sluča $\mu = \lambda$

Ukoliko menjamo postepeno vrednost npr. frakcionog izvoda μ od 0 do 2, pri $\lambda = \text{const.}$, i u svakom koraku računamo granice stabilnosti u (α, β) parametarskoj ravni, možemo proširiti postojeće rezultate i dobiti oblast stabilnosti u trodimenzionalnoj (α, β, μ) parametarskom prostoru. Na taj način metoda D-razlaganja proširena je za slučaj nelinearne zavisnosti parametara, jer navedeni parametri su u medjusobno nelinearnoj vezi, što se vidi iz jednačina (25) i (26). Na slici 6. prikazana je oblast stabilnosti u 3D prostoru, za $\lambda = 1.4$ (koeficijenti k_3, k_2, k_1, k_0 su ostali nepromenjeni).



Slika 6: Oblast stabilnosti u (α, β, μ) parametarskom prostoru

6 Zaključak

U ovom radu analiziran je problem stabilnosti sistema opisanih linearnim diferencijalnim jednačinama necelobrojnog reda. Dat je kratak osvrt na osobine stabilnosti sistema sa stanovišta teorije upravljana. Takodje, dat je uvod u osnove računa necelobrojnog reda. Upotrebljena je metoda D-razlaganja za odredjivanje granica stabilnosti u ravni podešljivih parametara sistema. Ova metoda je uopštena i proširena za slučaj linearnih diferencijalnih frakcionih jednačina, što predstavlja glavni doprinos u ovom radu. Prikazan je jednostavan i efikasan algoritam odredjivanja granica stabilnosti za slučaj linearne zavisnosti parametara. Zatim je u konkretnom primeru opisan način na koji se dati algoritam može iskoristiti i za slučaj nelinearne parametarske zavisnosti. Testiranje ispravnosti predloženog algoritma izvršeno je u numeričkoj simulaciji u programskom paketu Matlab.

Zahvalnica

Autori P. D. Mandić, M. P. Lazarević i T. B. Šekara se zahvaljuju Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije za finansijsku podršku ovom radu kroz projekte TR 33047 (P.D.M.), TR 35006 (M.P.L.), i TR 33020 (T.B.Š).

References

[1] D. Debeljković, *Sinteza linearnih sistema: klasičan i moderan pristup*, Belgrade, Serbia: Čigoja, 2002 (In Serbian).

[2] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, London, UK: Gordon and Breach, 1993.

[3] K.B. Oldham, J. Spanier, *Fractional Calculus: Theory and Applications, Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, New York-London, USA: Academic Press, 1974.

[4] T.B. Šekara, *Frakcioni Sistemi Upravljanja*, I.Sarajevo, R.Srpska: ETF, 2011 (In Serbian).

[5] M.P. Lazarević, M. Rapaić, T.B. Šekara, *Introduction to Fractional Calculus, in Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability and Modeling*, Athens, Greece: WSEAS Press, 2014, ch. 1, pp. 3-18.

[6] M. Rapaić, T.B. Šekara, *Pravila frakcionog diferenciranja i integracije Laplasovog lika signala*, Treća matematička konferencija Republike Srpske, Trebinje, Republika Srpska, 6 pages, 7. i 8. June 2013 (in Serbian).

[7] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, San Diego, USA: Academic Press, 1999.

[8] M. Stojić,*Kontinualni Sistemi Automatskog Upravljanja*, Belgrade, Serbia: Nauka, 1996 (In Serbian).

[9] Yu.I. Neimark, *On the problem of the distribution of the roots of polynomials*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 58, pp. 357-360, 1947 (in Russian).

[10] Yu.I. Neimark, *D-decomposition of the space of the quasipolynomials*, Appl. Math. Mech., vol. 13, pp. 349-380, 1949 (in Russian).

[11] E.N. Gryazina, B.T. Polyak and A.A. Tremba, *D-decomposition Technique State-of-the-art*, Automation and Remote Control, vol. 69, pp. 1991-2026, 2008.

[12] P.D. Mandić, M.P. Lazarević and T.B. Šekara, *D-decomposition method for stabilization of inverted pendulum using fractional order PD controller*, Proc. 1st International Conf. on Electrical, Electronic and Computing Eng., Vrnjačka Banja, Serbia, 6 pages, 2-5th June, 2014.